UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RAQUEL MONTEZUMA PINHEIRO CABRAL

INTRODUÇÃO DO ESTUDO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO: UM GANHO SIGNIFICATIVO PARA O ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

FORTALEZA
2014

RAQUEL MONTEZUMA PINHEIRO CABRAL

INTRODUÇÃO DO ESTUDO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO: UM GANHO SIGNIFICATIVO PARA O ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional Do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

FORTALEZA
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

C121i Cabral, Raquel Montezuma Pinheiro

Introdução do estudo de vetores no ensino médio : um ganho significativo para o estudo da geometria analítica / Raquel Montezuma Pinheiro Cabral. – 2014.

84 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

1. Geometria analítica. 2. Vetores. 3. Ensino médio. 4. Livros didáticos – Análise. I. Título.

CDD 516.3

RAQUEL MONTEZUMA PINHEIRO CABRAL

INTRODUÇÃO DO ESTUDO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO: UM GANHO SIGNIFICATIVO PARA O ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional Do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 12 de abril de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Aos meus filhos Rafael e Sarah.

RESUMO

O presente trabalho trata de uma proposta para a introdução do estudo de vetores no plano e no espaço, no 3º ano do Ensino Médio, com a perspectiva de um ganho para os estudos de geometria analítica. No estudo da disciplina de Geometria Analítica, no Curso de Mestrado Profissional de Matemática (PROFMAT), verificou-se que a introdução do estudo de vetores é de simples compreensão e uma ferramenta poderosa para a Geometria Analítica, facilitando a demonstração dos conteúdos, melhorando a visualização da condição de alinhamento de três pontos, da equação da reta e de seus vetores tangentes e normais, no plano e no espaço, além de simplificar a resolução de exercícios e poder incluir alguns conteúdos que também se tornam mais acessíveis utilizando tal ferramenta. O conteúdo da referida disciplina é abordado no 3º ano do Ensino Médio sem o tratamento vetorial, deixando a aprendizagem da geometria analítica restrita. Apresenta-se, neste estudo, uma proposta de introdução do estudo de vetores no Ensino Médio, mostrando que o tempo gasto com sua introdução é recompensado com a maior facilidade para a abordagem dos conteúdos, resolução de problemas e ampliação dos conteúdos.

Palavras-chave: Geometria analítica. Vetores. Ensino Médio.

ABSTRACT

In the present work, we deal with a purpose about using vectors in the plane and in the space as a tool for teaching analytic geometry in high school and its gains. During the regular course of analytic geometry of PROFMAT program, we noticed that using vectors make the subject more comprehensible and gives also to the theory a powerful tool for the arguments of proofs, solving problems, making a better preview of the objects in the plane and space and allowing the teacher to include some extra topics that become more accessible. Nowadays, the subject is taught in high school without the vectorial treat, and this restricts a lot the learning analytic geometry. Our intent is to present an approach for teachin the subject in high school in which the time we spent introducing vectors is rewarded with a clearer exposition of the topics and examples and including extra topics.

Keywords: Analytic Geometry. Vectors. High School.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me dá força e coragem para enfrentar as batalhas da vida.

Aos meus pais, Hugo e Ivanice, que me deram a vida.

À minha mãe, pelo apoio incondicional a tudo que me proponho a fazer e por ser minha eterna orientadora.

Ao meu filho Rafael, pelo encorajamento para que eu voltasse a estudar, pelas explicações de conteúdos e resoluções de exercícios que contribuíram para minha aprovação nas disciplinas.

À minha filha Sarah, que tanto me apoiou para que eu pudesse me ausentar todos os sábados e muitas vezes aos domingos, assumindo minhas obrigações e responsabilidades.

Ao meu esposo Osvaldo, pela compreensão por minhas ausências no período do Curso.

Ao meu irmão Hugo Filho, por sua amizade e presença constante.

À minha amiga Francisca, que tantas vezes cuidou da minha casa e da minha família.

A minha nora Ana Beatriz, ao meu genro Tawan, a amiga Veridiana e a todos os meus amigos e parentes pela compreensão por minhas ausências no período do curso.

Aos meus colegas de trabalho, pelo apoio, incentivo e, às vezes, até sobrecarga de trabalho em minhas ausências.

Aos meus colegas de curso, especialmente àqueles que participaram do grupo de estudo, aos domingos e feriados, e que foram significativos para que eu não desistisse.

Ao coordenador do Curso Prof. Marcelo Melo, por sua presença indispensável para que este curso tenha sucesso.

Ao Prof. Jonatan Floriano, pelas disciplinas tão bem ministradas e pela orientação deste trabalho de conclusão do curso.

"A vida é aquilo que acontece enquanto fazemos planos para o futuro".

John Lennon

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho visa apresentar uma forma alternativa para o ensino da Geometria Analítica no 3º ano do Ensino Médio, utilizando, como ferramenta, o estudo de vetores no plano e no espaço, o que possibilitará uma melhor apresentação e compreensão dos conteúdos de geometria, bem como a facilitação na resolução de problemas.

A motivação para a escolha deste tema foi a observação de que a introdução do estudo de vetores é relativamente simples para alunos de Ensino Médio, que desde o 1º ano do Ensino Médio estudam vetores na Física, e que é uma ferramenta poderosa para a aprendizagem de Geometria Analítica, facilitando as demonstrações, melhorando a visualização no plano e no espaço, além de simplificar a resolução de exercícios.

O público alvo deste estudo é constituído por alunos do 3º ano do Ensino Médio e a proposta apresentada poderá ser utilizada pelos professores deste público, aos quais são oferecidos subsídios mais aprofundados e específicos, para que tenham condições de enriquecer seus conhecimentos e, consequentemente, apresentar a Geometria Analítica de uma forma mais clara, fazendo uso do estudo de vetores.

Dessa forma, esta produção foi fundamentada em uma pesquisa bibliográfica, associada a uma análise de livros didáticos adotados no Ensino Médio, para que se possa ter uma visão de como este tema vem sendo abordado nesse contexto, seguido de uma proposta alternativa para a apresentação do conteúdo referente à Geometria Analítica, fazendo uso do conhecimento dos vetores.

Na estrutura do trabalho, foi apresentado um capítulo inicial explicitando um tratamento das leis que regem o Ensino Médio, como a LDB (1996), o PCN+ (2002) e a OCEM (2006). No terceiro capítulo, foi desenvolvida a análise dos conteúdos apresentados em doze livros didáticos destinados ao Ensino Médio, editados no período de 1997 a 2013, que tratam do tema em questão, observando como estes apresentam a Geometria Analítica e se usam a noção de vetores.

Ao final, apresenta-se uma proposta de introdução do estudo de vetores na Geometria Analítica no 3º ano do Ensino Médio e é oferecido um material adequado para a aplicação da proposta, mostrando que o tempo gasto com seu ensino é recompensado por facilitar a abordagem, a compreensão e a visualização dos conteúdos, melhorando a aprendizagem dos alunos e ampliando o conhecimento dos temas abordados.

2 A MATEMÁTICA E A GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Muitos conhecimentos são produzidos no decorrer da história e em determinados momentos, sintetizados e organizados por estudiosos do assunto. Com a geometria não foi diferente.

É importante ter-se a consciência de que a Matemática não ´surgiu', não foi ´inventada', ela foi se desenvolvendo de modo a atender às necessidades humanas e o estudo deste desenvolvimento consiste numa coleta dos registros mais remotos, dos quais se tem notícia e que possam comprovar sua evolução.

A Grécia foi o berço de grandes estudiosos que deram à Matemática suas bases e criaram a geometria, como ciência dedutiva. Faltava, porém, aos gregos a operacionalidade que só seria alcançada mediante a álgebra.

> Ocorre, porém, que o fato de haver condições para uma descoberta não exclui o toque de genialidade de alguém. E no caso da geometria analítica, fruto dessa fusão, o mérito não foi de uma só pessoa. Dois franceses, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), curiosamente ambos graduados em Direito, nenhum deles matemático profissional, são os responsáveis por esse grande avanço científico: o primeiro movido basicamente por seu grande amor, a matemática e o segundo por razões filosóficas. E, diga-se de passagem, não trabalharam juntos: a geometria analítica é um dos muitos casos, em ciência, de descobertas simultâneas e independentes (DOMINGUES, 2003).

Um pequeno texto intitulado ´Lugares Planos e Sólidos' (1636) apresenta as contribuições de Fermat à geometria analítica, enquanto as contribuições de Descartes aparecem em um texto chamado ´A Geometria' (1637). Descartes defende o método matemático como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos.

> A Geometria Analítica, como é hoje, pouco se assemelha às contribuições deixadas por Fermat e Descartes. Inclusive sua marca mais característica, um par de eixos ortogonais, não usada por nenhum deles. Mais, cada um a seu modo, sabiam que a ideia central era associar equações a curvas e superfícies. Neste particular, Fermat foi mais feliz. Descartes superou Fermat na notação algébrica (DOMINGUES, 2003).

Para que se tenha uma noção de como está sendo sugerido o tratamento da Geometria Analítica, nos dias atuais, buscaram-se os atuais marcos legais para o Ensino Médio, que estão na Lei de diretrizes e Bases da Educação Nacional nº. 9.394/96 (BRASIL, 1996) e suas alterações, além nos Parâmetros Curriculares Nacionais (2002) e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006). A reformulação do Ensino Médio no Brasil, estabelecida por essa Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), procurou atender à necessidade de atualização da educação brasileira, tanto para impulsionar uma democratização social e cultural quanto para responder aos desafios impostos pelos processos globais. A expansão do Ensino Médio brasileiro a todos que o demandarem também é uma razão para a busca de melhorias da qualidade deste nível de escolarização.

> A ideia central expressa na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), e que orienta a transformação, estabelece o ensino médio como etapa conclusiva da educação básica de toda a população estudantil - e não mais somente uma preparação para outra etapa escolar ou para o exercício profissional. Isso desafia a comunidade educacional a pôr em prática propostas que superem as limitações do antigo ensino médio, organizado em duas principais tradições formativas, pré-universitária e a profissionalizante (PCN+, 2002, p.8).

A escola, tradicionalmente, compartimenta disciplinas e impõe aos alunos uma atitude passiva no processo de aprendizagem, não tendo a preocupação com as individualidades e perspectivas profissionais, sociais ou pessoais dos alunos.

> Os objetivos do novo modelo de educação pretendido são, certamente, mais amplos do que os do antigo projeto pedagógico. Antes se desejava transmitir conhecimentos disciplinares padronizados, na forma de informações e procedimentos estanques; agora se deseja promover competências gerais, que articulem conhecimentos, sejam estes disciplinares ou não. Essas competências dependem da compreensão de processos e do desenvolvimento de linguagens, a cargo das disciplinas que, por sua vez, devem ser tratadas como campos dinâmicos de conhecimento e de interesse, e não como listas de saberes oficiais (PCN+, 2002, p.11-12).

O PCN+ aponta direções para a organização dos componentes curriculares com competências e habilidades, no sentido em que estes termos são tratados nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) ou no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

> Nessa nova compreensão do Ensino Médio e da educação básica, a organização do aprendizado não seria conduzida de forma solitária pelos professores de cada disciplina, pois as escolhas pedagógicas feitas numa disciplina não seriam independentes do tratamento dado às demais, uma vez que é uma ação de cunho interdisciplinar que articula o trabalho das disciplinas, no sentido de promover competências (PCN+, 2002, p. 13).

As orientações para o ensino médio não objetivam a fusão ou redefinição das disciplinas, mas propõem uma organização a fim de que, na sua especificidade, cada disciplina possa contribuir para a obtenção de competências gerais. Essa superação é buscada utilizando temas transversais, no contexto real da escola. Quando as disciplinas forem trabalhadas na área de conhecimento, juntamente com as competências da disciplina deverão ser apresentados temas estruturadores do ensino da disciplina. Dessa forma, é necessário encontrar pontos de intersecção reais entre as disciplinas para poder fazer a ponte entre elas. ´´Em suma, há que se compreender e trabalhar convergências e divergências, reais ou aparentes, determinar e desenvolver temáticas e métodos comuns e, com esse conhecimento, preparar o trabalho de cada disciplina e de seu conjunto”(PCN+, 2002, p.19).

> As competências gerais, que orientam o aprendizado no Ensino Médio, devem ser promovidas pelo conjunto das disciplinas dessa área, que é mais do que uma reunião de especialidades. Respeitando a diversidade das ciências, deve-se conduzir o ensino de forma real e unificada, a partir da compreensão de que muitos aprendizados científicos devem ser promovidos em comum, ou de forma convergente, pela Biologia, pela Física, pela Química e pela Matemática, a um só tempo reforçando o sentido de cada uma dessas disciplinas e propiciando ao aluno a elaboração de abstrações mais amplas (PCN+, 2002, p. 24).

A matemática está presente em muitas situações do dia a dia e, dessa forma, é essencial para a formação de todos os alunos do ensino médio, proporcionando-lhes a construção de uma visão abrangente e capacitando-os a interpretar a realidade e buscar soluções que lhe serão necessárias no mundo do trabalho e na sua vida social. Como salientam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), de acordo com os PCNEM (2002) e PCN+ (2002) ´´o ensino da matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural"(OCEM, 2006, p. 69).

É preciso ensinar a matemática de uma forma interdisciplinar que configura uma prática educativa contextualizada, integrada e relaciona a outros conhecimentos. Adotar a interdisciplinaridade como processo de circularidade não significa menosprezar as disciplinas, mas, pelo contrário, fazer cada uma delas crescer em competência, num processo de articulação cada vez maior com as outras, que alargará os seus horizontes. Não se quer, com o ensino interdisciplinar, excluir totalmente a disciplinaridade, pois a fragmentação e disjunção são fontes de subsídios para a construção do metaconhecimento, isso é, do conhecimento acerca do conhecimento. Entretanto, a interdisciplinaridade favorece:

> O desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (PCN+, 2002, p. 111).

O ensino interdisciplinar decorre do reconhecimento de que, apesar do seu caráter multidimensional, o conhecimento, por mais complexo que seja, é sempre inacabado e nunca atinge a sua plenitude. Fica claro, portanto, que na interdisciplinaridade do processo de ensino, predomina o aspecto da circularidade, sugerindo o diálogo e o interrelacionamento entre as diversas disciplinas, para que se possa atingir um conhecimento mais global e abrangente da realidade. Assim, estabelece-se a circularidade entre as disciplinas e áreas de estudo e, mais ainda, entre os indivíduos, entre si e em relação à sociedade, numa comunicação dialógica e dialética.

A interdisciplinaridade não desvaloriza as disciplinas isoladamente, mas sua intenção é que cada disciplina cresça em sua competência, de modo a se articular cada vez mais e melhor com as competências das outras disciplinas e conhecimentos, para construir, de forma encadeada e progressiva, um conhecimento mais complexo e profundo da realidade.

Nessa perspectiva, a resolução de problemas aplicáveis em outras disciplinas do currículo escolar deve ser a peça central no ensino da matemática, dando ao aluno oportunidade de pensar e construir estratégias para resolver a situação. É inaceitável que a matemática continue restrita à simples aplicação de conceitos e técnicas matemáticas. Sabe-se da importância da resolução de exercícios para o aprendizado das técnicas matemáticas, no entanto este tipo de exercício não é suficiente para preparar o aluno para que continue aprendendo pelo resto de sua vida e utilizando os conhecimentos e habilidades adquiridos na escola em sua vida profissional e social.

A partir da Geometria Analítica, o aluno terá a oportunidade de transformar problemas geométricos em algébricos. Além disso, o aluno deverá observar que um mesmo problema pode ser abordado e resolvido de diferentes formas. Ainda tratando da Geometria Analítica, os PCN+, afirmam que ´´mais importante do que memorizar diferentes equações para o mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a geometria analítica propõe"(2002, p.124).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio, a Geometria Analítica fica realmente adequada para ser abordada no 3º ano do ensino médio, onde se

> ampliaria os aprendizados das séries anteriores com temas mais abrangentes que permitissem ao aluno observar e utilizar um grande número de informações e procedimentos, aprofundando sua compreensão sobre o que significa pensar em Matemática e utilizar os conhecimentos adquiridos para análise e intervenção na realidade (PCN+, 2002, p. 128).

Com o objetivo de contribuir com o diálogo entre professores e escola, sobre a organização curricular para o Ensino Médio, o MEC oferece o material ´Orientações Curriculares para o Ensino Médio' (2006), que apresenta um conjunto de reflexões sobre a prática docente.

No que se refere à escolha dos conteúdos, estes devem estar de acordo com a formação matemática da educação básica. Como salientam as OCEM

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática do desenvolvimento científico e tecnológico (OCEM, 2006, p. 69).

No estudo da Geometria analítica no Ensino Médio, deve-se estudar o plano cartesiano, associando equações de reta e círculo ao plano cartesiano, tendo o cuidado de deduzir as equações e não apenas apresentá-las.

> Entendido o significado de uma equação, deve-se iniciar o estudo das equações da reta e do círculo. Essas equações devem ser deduzidas, e não simplesmente apresentadas aos alunos, para que, então, se tornem significativas, em especial quanto ao sentido geométrico de seus parâmetros. As relações entre os coeficientes de pares de retas paralelas ou coeficientes de pares de retas perpendiculares devem ser construídas pelos alunos. Posições relativas de retas e círculos devem ser interpretadas sob o ponto de vista algébrico, o que significa discutir a resolução de sistemas de equações. Aqui estamos tratando do entendimento de formas geométricas via álgebra (OCEM, 2006, p.77).

A OCEM (2006) sugere, ainda, que a metodologia utilizada para o ensino da matemática seja a socioconstrutivista, segundo a qual a aprendizagem se realiza por um processo dinâmico, em que, segundo Vygotsky (2001), há a construção de conceitos pelo próprio aluno através da interação entre sujeito e objeto e da ação do sujeito sobre o objeto. A aplicação do socioconstrutivismo de Piaget ou do sociointeracionismo de Vygotsky à matemática configura o caminho inverso do que vem sendo feito. Dessa forma, os novos conceitos matemáticos devem ser formalizados a partir de situações-problema, tendo o professor como mediador. Deve haver, ainda, grande preocupação com o tipo de problema a ser utilizado, visto que problemas fechados podem mascarar a aprendizagem, pois o aluno antecipa o conteúdo e resolve o problema de forma mecânica.

A OCEM (2006) sugere que os problemas escolhidos para motivar a aprendizagem sejam ´problemas abertos' que envolvam ´situações-problema'. Nesse tipo de situação, o aluno deve realizar tentativas, estabelecer hipóteses e testá-las para poder validar seus resultados.

Enquanto o ´problema aberto' visa a levar o aluno a certa postura em relação ao conhecimento matemático, a situação-problema apresenta um objetivo distinto, porque leva o aluno à construção de um novo conhecimento matemático. De maneira bastante sintética, pode-se caracterizar uma situação-problema como uma situação geradora de um problema cujo conceito, necessário à sua resolução, é aquele que queremos que o aluno construa.

Uma ideia bastante difundida na atualidade para se trabalhar a Matemática na escola é a modelagem matemática. Essa estratégia de ensino visa a ´´transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real"(OCEM, 2006, p. 84). Pode-se, também, articular a ideia de modelagem matemática com o trabalho de projetos.

> Para desenvolver o trabalho com projetos, o professor deve estabelecer os objetivos educativos e de aprendizagem, selecionar os conteúdos conceituais e procedimentais a serem trabalhados, preestabelecer atividades, provocar reflexões, facilitar recursos, materiais e informações, e analisar o desenvolvimento individual de cada aluno. Essa modalidade de trabalho pode ser muito educativa ao dar espaço para os alunos construírem e socializarem conhecimentos relacionados a situações problemáticas significativas, considerando suas vivências, observações, experiências, inferências e interpretações (OCEM, 2006, p. 85).

Ressalta-se, ainda, que a tecnologia pode ser bastante importante para o ensino da matemática, como um todo e em especial no estudo da Geometria Analítica, devido aos programas de computadores nos quais os alunos poderão explorar os conceitos matemáticos. A construção de pontos, retas, vetores, círculos e cônicas é bem simples em vários tipos de softwares. No GeoGebra (www.geogebra.org), por exemplo, o aluno poderá explorar bastante o plano cartesiano e, a partir de comandos simples, traçar linhas que podem ser inseridas diretamente no plano cartesiano ou através de equações, fazendo a ponte álgebra e geometria.

3 ANÁLISE DO ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

3.1 Introdução à geometria analítica

Foram selecionados doze livros de 3º ano do Ensino Médio, Barroso(2010), Bucchi (1998), Ceará (2004), Piracema (2000), Dante (2005), Dolce (1997), Iezzi(2010), Longen (2003), Machado (2011), Paiva (2009), Smole (2010) e Souza (2010), de diversos autores e editoras, considerando livros editados entre os anos 1997 até 2013.

Os livros didáticos analisados atribuem a Renè Descartes (1596-1650) os alicerces da Geometria Analítica, em seu livro Geometry, e alguns deles também chamam a atenção para as contribuições de Piere de Fermat (1601-1665), através de seu ensaio Introdução aos lugares planos e sólidos.

De acordo com Paiva (2009, p. 29), ´´A Geometria Analítica possibilita a representação de figuras geométricas por meio de pares ordenados, equações ou inequações."Com pensamento semelhante, Dante (2005, p.395) acrescenta que ´´as linhas no plano (reta, circunferência, elipse, etc.) são descritas por meio de equações."De forma mais abrangente, Ceará (2004) fala da contribuição de Descartes,

> A Geometria Analítica de Descartes surgiu com a sua obra 'Geometry'. Seu objetivo é ligar a geometria e a álgebra, objetivando resolver problemas geométricos por meios algébricos, e, inversamente, resolver problemas aritméticos por métodos geométricos. Descartes sintetizou as relações entre Geometria e Álgebra de forma tão simples que o seu método, aplicado de maneira apropriada, abolia a necessidade da engenhosidade na solução de problemas geométricos (CEARÁ, 2004, p.21).

Rosa ressalta que

> Quando algum conteúdo da geometria analítica é ensinado no Ensino Médio, mesmo em centros de excelência neste ensino, comete-se o erro de ensinar a complicada geometria analítica renascentista de Descartes e seus contemporâneos, em vez da geometria analítica com vetores, muito mais simples, surgida nos séculos XVIII e XIX (ROSA, 2003, p.2).

Os livros didáticos analisados sempre começam o ensino da Geometria Analítica apresentando o Plano Cartesiano. O estudo do plano se inicia no Ensino Fundamental, com a apresentação de pares ordenados, produtos cartesianos, relações e funções, com a construção de gráficos que os representam. Já no Ensino Médio, as funções de 1º grau, 2º grau, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas têm seus gráficos no plano cartesiano construídos atribuindo-se valores às funções. Mesmo assim, é necessário retomar o assunto, pois grande parte dos alunos não aprendeu a construir gráficos e, muitas vezes, nem entende o Plano Cartesiano.

De acordo com Lima,

> O emprego de coordenadas no plano serve a dois propósitos que se complementam: o primeiro é o de atribuir um significado geométrico a fatos de natureza numérica, como o comportamento de uma função real de uma variável real, que ganha muito em clareza quando se olha para seu gráfico. Com isso, torna-se o conteúdo mais intuitivo. O segundo propósito do uso das coordenadas vai no sentido oposto: recorre-se a elas a fim de resolver problemas de Geometria (LIMA, 2006, p.6).

Pedindo-se a um aluno para ir à esquina da Av. Bezerra de Menezes, imediatamente ele perguntará: Esquina com qual rua? Entende-se, assim, que são necessárias as duas coordenadas para que se possa localizar o ponto referido. Mesmo assim, não conseguem entender que, dadas as coordenadas x e y, podem-se localizar pontos (x,y) no plano e, assim, construir gráficos.

Após a apresentação do plano cartesiano são tratadas, principalmente, distância entre dois pontos, coordenadas do ponto médio, condições de alinhamento de três pontos, podendo serem incluídas as coordenadas do baricentro de um triângulo e áreas de triângulos, tomando como ferramenta indispensável a resolução de determinantes de ordem 3, com métodos práticos, muitas vezes sem sentido para o aluno e, também, sem visualização geométrica. O livro Machado (2011) também inclui a divisão de um segmento em partes iguais, apresentando exemplos e generalizando o resultado.

Ressalta-se que a distância entre dois pontos é demonstrada sempre usando o Teorema de Pitágoras; já o ponto médio é demonstrado utilizando o Teorema de Tales e a Semelhança de triângulos. Por outro lado, as coordenadas do baricentro, em alguns livros, são apresentadas apenas por meio de exemplos e, em outros, demonstradas utilizando ponto médio ou semelhança de triângulos, enquanto alguns não tratam do assunto.

Acredita-se que esse seria o momento ideal para a introdução de vetores, visto que os itens apresentados na sequência são, na maioria das vezes, condições de alinhamento de três pontos, cálculo de área de triângulo e os vários tipos de equações de retas.

Infelizmente, nenhum dos livros analisados estuda vetores e, consequentemente, não os utiliza em estudos de Geometria Analítica. Em um único livro analisado (DANTE, 2005, p. 261-264) os vetores no plano e no espaço são apresentados como uma leitura opcional, inserido no final do capítulo que trata de determinantes, explorando exercícios que envolvem discussão de sistemas lineares, área de triângulos, equação de reta e volume de tetraedro, mas que são resolvidos com o uso de determinantes.

É importante, portanto, fazer elos entre os diversos conteúdos abordados na Matemática do Ensino Básico. Entretanto, a abordagem de vetores não é utilizada para, por exemplo, verificar a condição de alinhamento de três pontos, calcular a áreas de triângulos e paralelogramos, ou determinar equações de retas, pois eles são, na maioria das vezes, solucionados utilizando determinantes de ordem três e este tipo de conteúdo não oferece ao aluno uma visão da álgebra sob o olhar da geometria, como recomendam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006).

> No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema 2 x 2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência, ou não, de soluções desse sistema, o que significa, geometricamente, os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. A resolução de sistemas 2 x 3 ou 3 x 3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação 3 x 3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração e, portanto, de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes (OCEM, 2006, p.77-78).

Nove dos livros analisados, Barroso (2010), Bucchi (1998), Dante (2005), Dolce (1997), Iezzi (2010), Longen (2003), Machado (2011), Smole (2010) e Souza (2010), demonstram condições de alinhamento de três pontos utilizando semelhança e determinantes de ordem 3 e na resolução dos determinantes recorrem abusivamente a regras práticas. Os livros Ceará (2004) e Piracema (2000) não tratam a condição de alinhamento e as áreas de triângulos e Paiva (2009) usa a inclinação da reta.

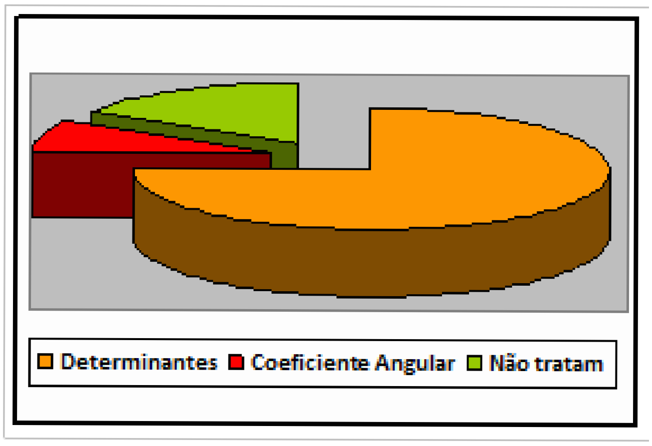

Figura 1: Apresentação de condição de alinhamento de três pontos.

Como pode ser observado na figura 1, apresentada anteriormente, a quantidade de livros analisados que utiliza determinantes para demonstrar condição de alinhamento é significativa.

No exemplo 3.1.1, a seguir, selecionado de Smole (2010), pode-se observar o distanciamento entre a Álgebra e a Geometria, quando são utilizados métodos práticos, como determinantes 3 x 3 para a resolução de exercícios.

Exemplo 3.1.1 Verifique se os pontos A(-3,-5), B(1,3) e C(-1,-1) são colineares.

Resolução do livro Smole (2010, p.44):

$$\begin{vmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -5 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -9+5-1+3-3+5 = 0.$$

Como D=0, os pontos estão alinhados ou são colineares.

O mesmo exemplo poderá ser resolvido de forma mais simples e de melhor visualização geométrica, se os conteúdos de vetores e/ou inclinação da reta forem abordados antes, como será visto na proposta apresentada no capítulo 4.

Mais um exemplo chama a atenção em Souza (2010).

Exemplo 3.1.2 Sejam $P(a,2)$, $Q(4,-3)$ e $R(b,-6)$ pontos de uma mesma reta. determine a e b, sabendo que $a+b=10$.

Resolução do livro Souza (2010, p. 158):

Temos que P, Q e R são colineares, logo:

$$D = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ b & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 & a & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 4 & -3 \\ b & -6 & 1 & b & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$3b + 6a - 8 - 3a + 2b - 24 = 3a + 5b - 32 = 0$$

$$3a + 5b = 32.$$

Como $a+b=10$, podemos escrever e resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b = 10 \cdot (-3) \\ 3a + 5b = 32 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3a - 3b = -30 \\ 3a + 5b = 32 \end{cases}.$$

$2b = 2 \Longrightarrow b = 1.$

Substituindo $b=1$ na equação $a+b=10$:

$a + 1 = 10 \Longrightarrow a = 9.$

Portanto, $a=9$ e $b=1$.

O exemplo citado poderia ser resolvido recorrendo aos vetores, como será apresentado na proposta do capítulo 4.

3.2 A reta

Dos livros didáticos analisados, sete, Barroso (2010), Bucchi (1998), Piracema (2000), Iezzi (2010), Longen (2003), Machado (2011) e Smole (2010) apresentam a equação geral da reta utilizando a mesma ferramenta da condição de alinhamento de três pontos, ou seja, novamente depara-se com determinantes de ordem 3. Quatro destes livros, Dante (2005), Dolce (1997), Paiva (2009) e Souza (2010), partem do estudo da inclinação da reta e Ceará (2004) utiliza translação e coeficiente angular. O estudo da equação da reta, a partir da noção de coeficiente angular ou vetores, é bem mais simples e de melhor visualização do que usando determinantes. De qualquer maneira, nenhum dos livros analisados utiliza vetores.

Na figura 2 pode-se visualizar melhor a grande quantidade de livros didáticos que apresentam a equação geral da reta a partir do uso de determinantes, em detrimento da utilização do coeficiente angular e/ou translação.

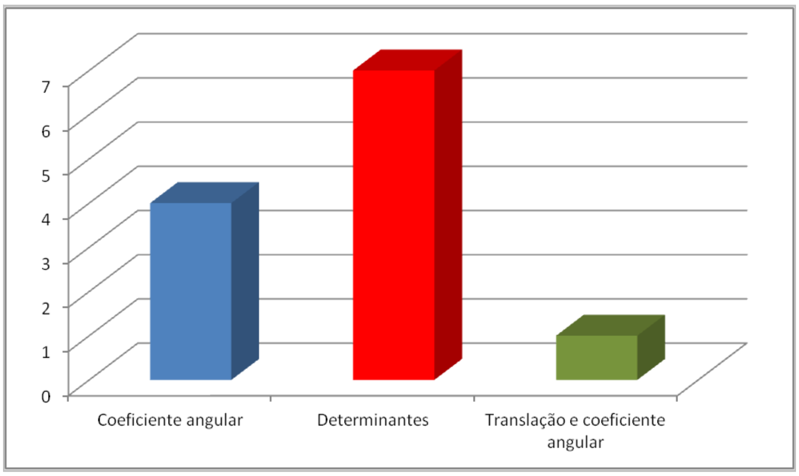

Figura 2: Apresentação da equação geral da reta.

Observa-se que, para determinar a equação geral de uma reta, quando são dados dois pontos, a maioria dos livros de Ensino Médio utiliza determinante e suas regras para resolução, como pode ser observado a seguir, nos exemplos 3.2.1 selecionado do livro Bucchi (1998) e 3.2.2 do livro Machado (2011).

Exemplo 3.2.1 Obter a equação geral da reta r que passa pelos pontos $A(1,1)$ e $B(6,5)$.

Resolução do livro Bucchi (1998, p. 26):

Considere $P(x,y)$ um ponto pertencente à reta r. Ele está alinhado com os pontos A e B. Então, pela condição de alinhamento de três pontos, tempos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 & x & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + 6y + 5 - 6 - 5x - y = 0$$

$$-4x + 5y - 1 = 0.$$

Portanto, $4x - 5y + 1 = 0$ é a equação da reta que passa pelos pontos A e B.
Resolução utilizando o método do livro Piracema (2000):

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 6 & x \\ y & 1 & 5 & y \end{bmatrix} = 0$$

$$x + 6y + 5 - 6 - 5x - y = 0$$

$$-4x + 5y - 1 = 0.$$

Questiona-se, então: - qual a associação geométrica da reta que o aluno poderá fazer com esta equação geral? Verifica-se que o mesmo exercício poderia, dada a noção de vetores, ser resolvido de maneira simples e com melhor visualização geométrica, como será apresentado na proposta do capítulo 4.

Exemplo 3.2.2 Obtenha uma equação da reta que passa por $A(2, 0)$ e $B(4, 1)$.
Resolução do livro Machado (2011, p. 27):
A equação é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y-1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -1(x-4) + 2(y-1) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -x + 4 + 2y - 2 = 0 \Longrightarrow -x + 2y + 2 = 0.$$

Lembramos o cálculo do determinante, repetindo as duas primeiras colunas:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 & x & y \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$0 + 4y + 2 - 0 - x - 2y = 0$$

$$-x + 2y + 2 = 0$$

e o cálculo desenvolvendo o determinante pela primeira linha:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow x(0-1) - y(2-4) + 1(2-0) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -x + 2y + 2 = 0.$$

Use a regra que preferir!

O exemplo apresentado demonstra uma grande preocupação com a utilização dos métodos para resolução dos determinantes.

Na proposta, capítulo 4, será visto que o conhecimento do vetor direção e de um ponto da reta é o suficiente para determinar sua equação e isso tornará bem simples a determinação da equação paramétrica da reta e a posição relativa entre retas e planos.

Dos doze livros analisados, onze apresentam a equação geral, apenas o livro Ceará (2004) fala somente da equação reduzida. Onze dos livros falam da equação reduzida, somente Piracema (2000) não apresenta esta forma de apresentação da reta. Somente os livros Ceará (2004) e Piracema (2000) não falam da equação fundamental. A equação segmentária é apresentada em sete livros, que são Barroso (2010), Bucchi (1998), Dante (2005), Dolce (1997), Iezzi (2010), Machado (2011), e Smole (2010). Somente os livros Barroso (2010), Bucchi (1998), Iezzi (2010) e Paiva (2009) abordam as equações paramétricas da reta. Observa-se que o total dessa soma, quarenta e três, é bem maior do que a quantidade de livros analisados, doze, e isso se deve ao fato de que a maioria dos livros aborda a equação da reta de várias maneiras diferentes. Conforme verificou-se no capítulo 2, o livro PCN+ ressalta que estas memorizações de vários tipos de equações para estudar o mesmo ente geométrico são totalmente desnecessárias.

A obra Ceará (2004) aborda o conhecimento de translação e inclinação e, a partir destes conteúdos apresenta a equação da reta em sua forma reduzida sem muita preocupação com citar os outros nomes dados à reta de acordo com a sua apresentação. Esse livro, em nenhum momento, utiliza determinantes de ordem 3.

Deseja-se destacar, também, os livros Souza (2010), Paiva (2011), Dante (2005) e Dolce (1997), que melhoram muito a apresentação da equação da reta, partindo da inclinação para encontrar a equação da reta, mesmo que depois utilizem os métodos práticos de determinantes 3 x 3.

Para estudar as posições relativas entre retas, são utilizados os coeficientes angulares de cada uma delas, às vezes associados a determinantes de ordem 2, para fazer ponte com os sistemas de duas equações com duas variáveis. A condição de perpendicularismo é demonstrada, ora utilizando trigonometria, ora utilizando distância. Observa-se, no entanto, que as equações não são comparadas, apenas seus coeficientes e a simples comparação de equações deixaria claro se as equações são paralelas, coincidentes, concorrentes ou perpendiculares.

Há, ainda, uma preocupação dos autores de todos os livros com tratar a resolução de sistemas e associá-la à posição relativa das retas, o que é bem importante e atinge bem os objetivos da geometria analítica no sentido de fazer ponte entre a álgebra e a geometria. Sete dos livros citados, que são Barroso (2010), Bucchi (1998), Iezzi (2010), Machado (2011), Paiva (2009), Smole (2010) e Souza (2010), abordam a representação gráfica das inequações do 1º grau.

Antes de iniciar o estudo da circunferência, ressalta-se que dez livros, Barroso (2010), Bucchi (1998), Dante (2005), Dolce (1997), Iezzi (2010), Longen (2003), Machado (2011), Paiva (2009), Smole (2010) e Souza (2010) que representam $83,3\%$ das obras analisadas, ainda tratam da distância de um ponto a uma reta (alguns apresentando a fórmula sem demonstração, outros com exemplos, alguns utilizando trigonometria e coeficiente angular) e área de triângulo (usando determinantes). Os livros Barroso (2010), Bucchi (1998), Dante (2005), Dolce (1997), Iezzi (2010), Longen (2003), Smole (2010) e Souza (2010) apresentam o ângulo entre retas (utilizando tangente).

Alguns poucos livros abordam outros pontos, como bissetriz de um ângulo, abordado por Bucchi (1998), Dolce (1997), Iezzi (2010) e Longen (2003), feixe de retas tratado em Machado (2011) e Smole (2010) e translação de reta em reta que é abordado em Ceará (2004).

3.3 A circunferência

Dez dos doze livros analisados, que são Barroso (2010), Bucchi (1998), Dante (2005), Dolce (1997), Iezzi (2010), Longen (2003), Machado (2011), Paiva (2009), Smole (2010) e Souza (2010) e que representam $(83,3\%)$, fazem, praticamente, a mesma apresentação da definição da circunferência, utilizam a distância entre pontos para determinar a equação geral, desenvolvem quadrados para obter sua equação geral e tratam da posição entre ponto e circunferência, reta e circunferência e entre duas circunferências.

Os livros Bucchi (1998), Dolce (1997), Iezzi (2010), Longen (2003), Machado (2011), Paiva (2009) e Smole (2010) chamam a atenção para a condição de a equação do 2º grau completa ser uma circunferência, enquanto que o livro Barroso (2010) apresenta apenas em exercício resolvido. Alguns poucos livros ainda acrescentam o estudo de inequações do 2º grau, Bucchi (1998), Iezzi (2010) e Machado (2011), e problemas de tangência, Dante (2005), Dolce (1997), Iezzi (2010), Machado (2011)e Smole (2010).

O livro Ceará (2004) trata a equação reduzida da circunferência logo após a distância entre dois pontos e acrescenta a interseção entre uma reta e um círculo. O livro Piracema (2000) não aborda a equação geral da circunferência.

3.4 As cônicas

No que se refere às cônicas no plano, os livros Ceará (2004), Piracema (2000) e Dolce (1997), que representam (25%) dos doze livros analisados não abordam o assunto e os demais (75%) fazem o mesmo tratamento. Inicialmente, fazem uma apresentação geral das cônicas e, ao abordar cada uma das cônicas (elipse, hipérbole e parábola), definem, fazem a construção da cônica, desenham, apresentam seus elementos e deduzem a equação.

3.5 Vetores

Como já foi mencionado anteriormente, um único livro de Matemática do Ensino Médio (DANTE, volume único, 2005, p. 261-264), dentre os analisados, menciona o estudo de vetores, inserido no capítulo de determinantes, deixando a leitura como opcional. Dessa forma, não utiliza os conhecimentos de vetores no capítulo seguinte que trata da Geometria Analítica.

Os vetores são utilizados na disciplina de Física do Ensino Médio e por isso selecionou-se o livro de Sant'Anna (2010), intitulado ´Conexões com a física', da referida disciplina e nele observou-se que ainda no 1º ano do Ensino Médio o aluno estuda Cinemática vetorial e, nesse momento, já entra em contato com conceito e operações de vetores.

É importante salientar que, em Sant'Anna (2010), a noção de vetor é dada como ´´vetor é um ente matemático que caracteriza a direção, o sentido e a intensidade ou módulo de uma grandeza física"(p.123); no entanto, o aluno passou nove anos no Ensino Básico e em nenhum momento este conceito matemático lhe foi apresentado.

Diante dessa constatação, abordar o conteúdo de vetores com alunos do 3º ano do Ensino Médio, não passaria de uma revisão de conhecimentos adquiridos na disciplina de Física. A partir desse conhecimento, é possível a aplicação desses conceitos, em conteúdos da Matemática, e inserção de alguns conteúdos que não são ministrados no Ensino Médio como equações e planos para que se possa tratar melhor as posições relativas entre retas e planos.

4 PROPOSTA PARA INCLUSÃO DO USO DE VETORES NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA NO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dentre as principais características da Geometria Analítica, pode-se destacar a conexão que esta faz entre geometria e álgebra. Dessa forma, apresentam-se formas geométricas, de modo numérico, e podem-se explicar e demonstrar situações no espaço. A noção do estudo de vetores será uma importante ferramenta para relacionar geometria e álgebra. Com base nessa convicção, apresenta-se a proposta para inclusão do uso de vetores no ensino de Geometria Analítica, no 3º ano do Ensino Médio e um material adequado para que a proposta seja colocada em prática.

4.1 A Proposta

4.1.1 Objetivos

A partir da análise dos livros didáticos adotados no Ensino Médio, abordados no capítulo 3, pôde-se identificar que a Geometria Analítica é apresentada na forma cartesiana sem o conceito de vetores e que, devido a essa ausência, a demonstração e visualização dos conteúdos torna-se mais mecânica. Alguns conceitos poderiam ser incluídos, como a visualização de vetores paralelos e normais à reta, além de atenderem à interdisciplinaridade com conteúdos da disciplina de física.

> É desejável, também, que o professor de Matemática aborde, com seus alunos, o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir essa distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física (OCEM, 2006, V.2 p.77).

Dessa forma, a intenção principal da proposta que se pretende apresentar, neste capítulo, é trabalhar a compreensão de que as figuras geométricas podem ser representadas por equações e mostrar a necessidade de utilizar os conceitos de vetores e produto interno, para facilitar o ensino e a aprendizagem da Geometria Analítica plana. Pretende-se enriquecer o estudo da reta com a visualização de vetores paralelos e normais que não são abordados no Ensino Médio e que podem ser introduzidos com a noção de vetores. É importante, também, que ainda no Ensino Médio se possa fazer uma iniciação ao estudo de Geometria Analítica no espaço.

> Uma característica importante da Geometria Analítica se apresenta na definição de formas geométricas de modo numérico, extraindo dados informativos da representação. Com base nesses estudos, a Matemática passa a ser vista como uma disciplina moderna, capaz de explicar e demonstrar situações relacionadas ao espaço. As noções intuitivas de vetores começam a ser exploradas de forma contundente, na busca por resultados numéricos que expressem as ideias da união da Geometria com a Álgebra. Os vetores constituem a base dos estudos do espaço vetorial, objetos que possuem as características relacionadas a tamanho, direção e sentido. Eles são muito utilizados na Física, como ferramenta auxiliar nos cálculos relacionados à Cinemática Vetorial, Dinâmica, Campo Elétrico, entre outros conteúdos relacionados. Os cientistas Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz concentraram seus estudos na Geometria Analítica, que serviu como base teórica e prática para o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, muito utilizado atualmente na Engenharia (http://www.brasilescola.com/ matematica/geometria-analitica.htm).

4.1.2 Descrição dos conteúdos com seus objetivos

Conteúdos:

Coordenadas cartesianas. Retas no plano. Retas no espaço. Vetores no plano e no espaço. Álgebra vetorial na geometria analítica. Sistemas lineares em duas variáveis.

No que se refere às cônicas no plano e no espaço, acredita-se ser desnecessário apresentá-las na proposta, visto que no plano elas seriam abordadas da mesma forma como já vem sendo realizada nos diversos livros didáticos que apresentam o tema no $\mathbb{R}^3$ o conteúdo não seria viável para alunos do Ensino Médio.

Objetivos:

- utilizar vetores como instrumento para a resolução de problemas geométricos envolvendo pontos, retas e planos;

- identificar vetores paralelos e normais nas equações das retas;

- identificar geometricamente equações lineares e quadráticas com até duas variáveis;

- identificar geometricamente sistemas lineares de duas e três equações com duas variáveis.

Conteúdo programático:

1. Introdução à Geometria Analítica.

2. O Plano cartesiano: sistema cartesiano ortogonal; distância entre dois pontos do plano e coordenadas do ponto médio de um segmento.

3. Vetores no plano: equipolência de segmentos orientados; definição de vetores no plano; operações com vetores e combinação linear; condição de alinhamento de três pontos; comprimento de um vetor e produto interno; e área de paralelogramos e triângulos.

4. Equações da reta no plano: formas de apresentação de equação da reta; posição relativa entre duas retas; distância de ponto a uma reta; distância entre duas retas no plano e ângulo entre duas retas.

5. Vetores no espaço: coordenadas no espaço; distância entre dois pontos do espaço; vetores no espaço; operações com vetores; colinearidade e coplanaridade de pontos

no espaço e produto interno.

6. A reta no espaço: equações paramétricas da reta no espaço; equação simétrica da reta no espaço.

4.1.3 Público alvo

O público alvo desta proposta são alunos do 3º ano do Ensino Médio, pois é nesse nível que se estuda a Geometria Analítica. Apesar de estar indicada pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM, 2006), a utilização do conceito de vetor na disciplina de matemática, professores e livros didáticos não utilizam este conceito.

4.1.4 Pré-requisitos

Acredita-se que o aluno com domínio dos conhecimentos de Ensino Fundamental tem condições de aprender Geometria Analítica; no entanto, quando apresentada no 3º ano do Ensino Médio, possibilita que o professor possa associá-la a diversos conteúdos ministrados nas outras séries do Ensino Médio, tais como: funções, trigonometria, matrizes, sistemas lineares, geometria de posição, dentre outros. A partir da abordagem da Geometria Analítica com a utilização de vetores, pode-se também associá-la à física.

4.1.5 Materiais e tecnologias

Na falta de material didático adequado, elaborou-se um instrumental próprio, recorrendo a livros do Ensino Médio selecionados para a pesquisa, Barroso(2010), Bucchi (1998), Ceará (2004), Piracema (2000), Dante (2005), Dolce (1997), Iezzi(2010), Longen (2003), Machado (2011), Paiva (2009), Smole (2010) e Souza (2010), que apresentam a Geometria Analítica de maneira convencional, e de livros de Geometria Analítica de Ensino Superior, como Boulos (2005), Lehmann (1998), Lima (2006), Mello (2011), Rosa (2003), material da disciplina de Geometria Analítica do PROFMAT e resumos de aulas do PROFMAT, elaboradas pelos professores João Xavier da Cruz Neto e Ralph Costa Teixeira, que fazem o tratamento vetorial. Sugere-se, ainda, que os professores façam uso do GeoGebra (www.geogebra.org) na representação geométrica, o que facilitará a visualização e compreensão, por parte do aluno. No entanto, este não é o foco deste trabalho.

4.1.6 Recomendações metodológicas

A modificação da apresentação da Geometria Analítica, com a aplicação do conhecimento de vetores, não modifica muito os recursos que já são normalmente utilizados. O professor, de maneira geral e em particular o de Matemática, deve utilizar sempre recursos que facilitem a compreensão e a visualização dos conceitos que deseja abordar. Dessa forma, a utilização de material concreto e do computador é indispensável, podendo-se recorrer a: papel quadriculado, malha pontilhada, compasso, esquadros, réguas, barbante, palitos de madeira, placas de isopor, cartolina, cones de cartolina, computadores ligados à internet e softwares.

Em sua maioria, as aulas serão expositivas e dialogadas, com uso de material concreto, exemplos, resolução de exercícios, utilização de Geogebra, lista de exercícios, trabalhos individuais ou em grupo.

4.1.7 Dificuldades previstas

Acredita-se que os alunos do 3º ano do Ensino Médio sejam capazes de absorver facilmente o conteúdo de vetores e que esta ferramenta tornará mais fácil a apresentação dos conteúdos e a resolução de problemas. Possivelmente, a maior barreira para essa inovação não se encontra nos alunos, mas na aceitação de mudanças por parte dos próprios professores.

4.1.8 Descrição do material elaborado

O material elaborado para a aplicação da proposta refere-se a uma carga horária de 60h/a. Este material introduz no estudo de Geometria Analítica, abordado no 3º ano do Ensino Médio, a noção de vetores, a fim de facilitar a compreensão dos conteúdos. São apresentadas as definições, sempre que possível com representações no Plano Cartesiano e seguidas de exercícios resolvidos.

4.1.9 Possíveis continuações

Sugere-se que seja elaborada uma avaliação com questões de geometria analítica, que possam ser resolvidas, com ou sem a utilização de vetores, e que esta avaliação seja aplicada em uma turma de 3º ano do Ensino Médio, na qual tenha sido aplicada a proposta aqui apresentada, utilizando o material produzido, e em uma outra turma de 3º ano do Ensino Médio na qual a geometria analítica tenha sido apresentada sem a utilização de vetores, de acordo com a apresentação convencional dos livros didáticos de Ensino Médio. Os resultados podem ser tabulados, comparados e oferecer conclusões. Acredita-se que a utilização do material elaborado nesta proposta e a aplicação da avaliação sugerida serão de grande valia no sentido de validar a proposta.

4.2 O material para a aplicação da proposta

4.2.1 Introdução à Geometria Analítica

O estabelecimento das bases da Geometria Analítica foi no século XVII. Nesse período estavam abaladas as antigas crenças e atitudes dominantes da Idade Média e foi um ambiente propício para a geração de novos conhecimentos. O homem voltou-se para novas descobertas e revivia o conhecimento da filosofia grega e oriental.

Dentre os destaques desse período ressalta-se René Descartes, formado em direito, mas um estudioso da Matemática. Por volta de 1619, ele afirmou ter descoberto os alicerces de uma nova ciência, provavelmente referindo-se à Geometria Analítica. Em sua publicação 'Geometry', Descartes oferece as bases da Geometria Analítica.

Contemporâneo de Descartes, Pierre de Fermat foi um estudioso de ciências e matemática que também deu contribuições para a Geometria analítica. Fermat não teve sua obra sobre geometria analítica publicada em vida e é dele o princípio: "uma equação que apresenta duas quantidades de incógnitas descreve uma linha, reta ou curva".

A geometria analítica estuda curvas e figuras por meio de suas equações e analisa as equações utilizando gráficos, ou seja, estabelece uma relação entre Álgebra e Geometria. Esta conexão possibilita, por exemplo, compreender soluções de sistemas como interseções de retas em um plano e associar equações a curvas.

Neste material aborda-se a geometria analítica e estudam-se conceitos de ponto, reta, vetor, plano e circunferência, no plano, e noções de geometria analítica no espaço, iniciando com uma recordação do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

4.2.2 O plano cartesiano

Sistema cartesiano ortogonal

Observando os mapas de uma cidade, podem-se localizar ruas e cruzamentos, como pode ser visto na figura a seguir.

Figura 3: Mapa de ruas.

Desejando-se ir a um determinado local, localiza-se a rua desejada e procura-se uma rua próxima para melhor posicionar-se. Por exemplo, observando a figura 3, se você deseja ir a Rua 27, próximo à Rua 6, deverá localizar as duas ruas e procurar o ponto de encontro das mesmas, ou seja, dadas as duas coordenadas facilmente localizará o ponto desejado.

O sistema cartesiano ortogonal é formado por dois eixos perpendiculares entre si (eixo Ox e eixo Oy), que se cruzam em um ponto chamado de origem do sistema, e que determinam o chamado plano cartesiano. O eixo horizontal (Ox) é chamado eixo das abscissas e o eixo vertical (Oy) é o eixo das ordenadas. Os eixos dividem o plano em quadro quadrantes que recebem numeração no sentido anti-horário.

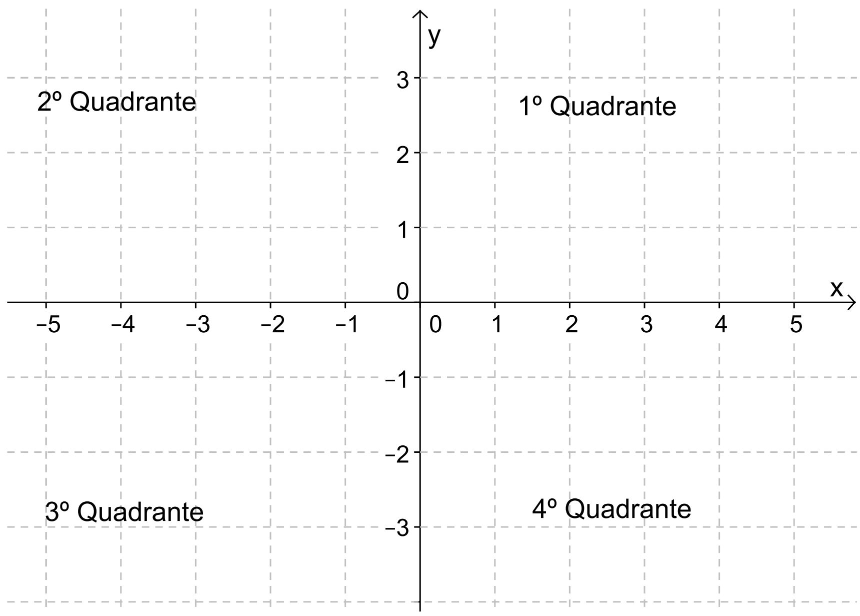

Figura 4: Sistema cartesiano ortogonal.

Escolhido um sistema de eixos ortogonais, permite-se estabelecer uma correspondência biunívoca entre pontos do plano π e pares ordenados de números reais $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ da seguinte maneira:

Seja $P \in \pi$, faz-se corresponder do ponto P um único par ordenado $(a, b) \in \pi$. Reciprocamente, dado o par ordenado (a,b), fica de maneira única, determinado o ponto $P \in \mathbb{R}^2$.

Sabendo-se que $(a, b) = (a_1, b_1)$ no $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, $a = a_1$ e $b = b_1$, verifica-se que a correspondência entre ponto do plano π e par ordenado de $\mathbb{R}^2$ é bijeção.

Para representar um ponto P no plano cartesiano, pode-se pensar na mesma ideia do endereço da figura 3, utiliza-se um par ordenado (x_p, y_p). Por exemplo, o ponto $A(2, 3)$ que é representado no plano cartesiano como mostra a figura 5:

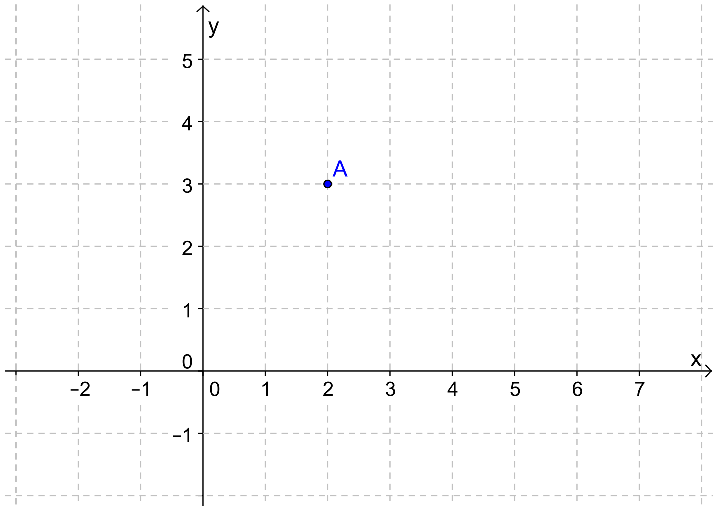

Figura 5: Representação do ponto A(2,3) no plano cartesiano.

Exemplo 4.2.1 Representar no plano cartesiano, os pontos A (2,-2), B (0,3), C (-2,-1) e D (-3,0).

Solução:

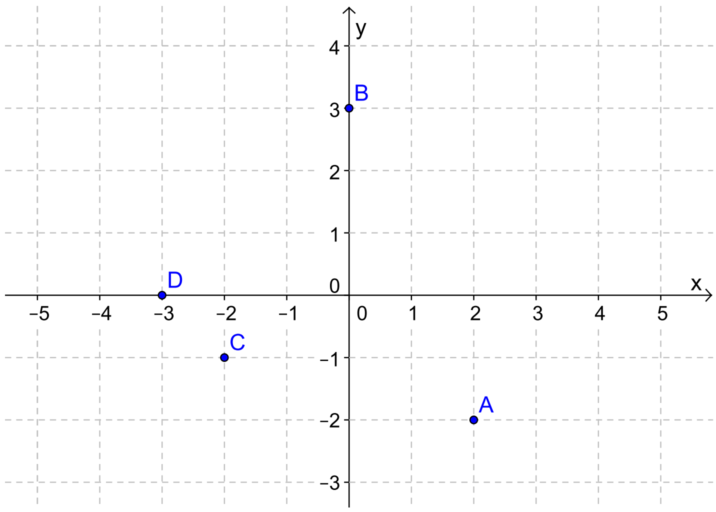

Figura 6: Representação gráfica da solução do exemplo 4.2.1.

Exemplo 4.2.2 O ponto $P(4m-2,2)$ pertence ao 1º quadrante. Determine o número real m tal que a abscissa seja o triplo do valor da ordenada.

Solução:

$$4m-2=3\cdot 2 \Longleftrightarrow 4m=3\cdot 2+2 \Longleftrightarrow m=2.$$

Exemplo 4.2.3 Para que valores de a e b o ponto $P(a-2, b+3)$ pertence ao 2º quadrante?

Solução:

$$a-2<0 \quad \text{e} \quad b+3>0 \iff a<2 \quad e \quad b>-3.$$

Distância entre dois pontos no plano

Imagine a seguinte situação. Um jogo de computador é idealizado em uma tela por um plano cartesiano e o eixo das ordenadas é um estreito rio retilíneo. O objetivo do jogo é levar o herói, que está de um lado do rio, até o castelo, que está do outro lado do rio, pelo menor caminho. Para atravessar o rio, o herói precisa de uma senha que é dada pela distância entre o herói e o castelo e as coordenadas do ponto onde o herói atravessa o rio. Suponha que o herói esteja no ponto $(-2,-2)$ e que o castelo esteja no ponto $(3,5)$, fazendo o caminho mais curto, qual a senha utilizada pelo herói para cruzar o rio? O que você faria para determinar a distância entre o herói e o castelo e como encontraria o ponto da travessia do rio?

A menor distância entre dois ponto é uma reta. Observa-se na figura 7 um triângulo retângulo de lados a e b e, desta forma, pode-se calcular de maneira simples a distância d entre o herói e o castelo, usando o Teorema de Pitágoras. O ponto de travessia do rio será retomado mais adiante.

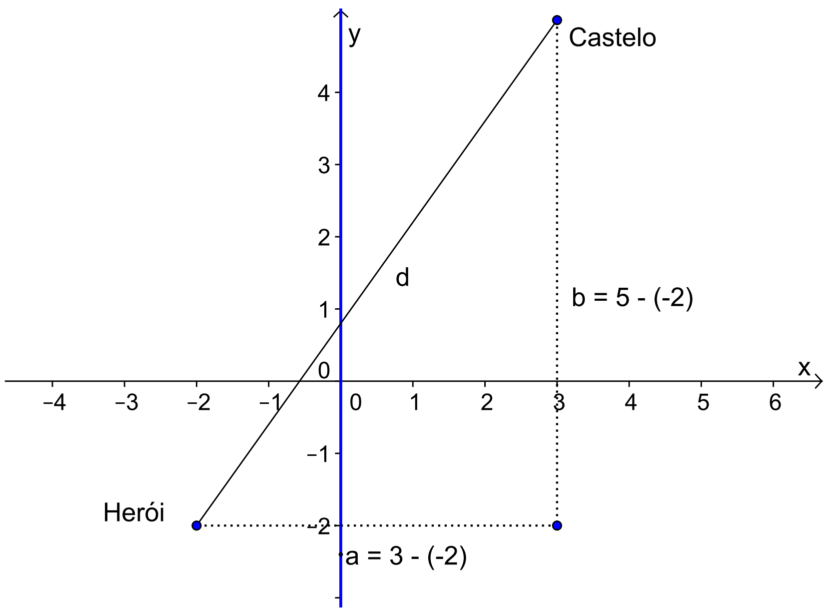

Figura 7: Representação gráfica da distância entre o herói e o castelo

Pode-se então generalizar a situação descrita anteriormente. Dados dois pontos no plano cartesiano $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, a distância d entre eles pode ser facilmente calculada utilizando o conhecido Teorema de Pitágoras.

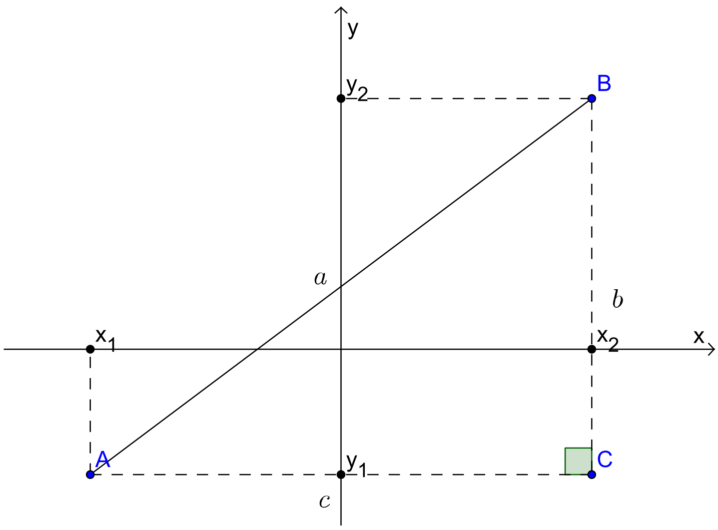

Figura 8: Representação gráfica da distância entre dois pontos

$$d(A, C) = |x_2 - x_1| \qquad e \qquad d(B, C) = |y_2 - y_1|.$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$d(A, B)^2 = d(A, C)^2 + d(B, C)^2$$

$$d(A, B)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Observação: Se $A \neq B$, então $d(A, B) > 0$ e $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \Longleftrightarrow C \in AB$, ou seja, o pontos estão sobre uma mesma reta.

Exemplo 4.2.4 Calcule a distância entre os pontos $A(-1, 3)$ e $B(-2, 1)$.

Solução:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{1 + 4} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.5 O ponto $A(3y, y)$ é equidistante de B(1,2) e C(6,7). Determine as coordenadas do ponto A.

Solução:

$$d(A, B) = d(A, C)$$

$$\sqrt{(3y-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(3y-6)^2 + (y-7)^2}$$

$$9y^2 - 6y + 1 + y^2 - 4y + 4 = 8y^2 - 36y + 36 + y^2 - 14y + 49$$

$$36y - 6y - 4y + 14y = 36 + 49 - 1 - 5$$

$$40y = 80.$$

Concluímos então que $y = 2$ e assim $A = (6, 2)$.

Exemplo 4.2.6 Determine o vértice C do triângulo equilátero ABC, sabendo que $A(x, 0)$ e $B(-x, 0)$.

Solução:

Como $d(A, C) = d(B, C) = d(A, B)$ e no triângulo equilátero a mediana coincide com a altura, vê-se que o ponto $(0, 0)$ divide $\overline{AB}$ ao meio, o que indica que o vértice é da forma $C = (0, y)$, para algum $y \in \mathbb{R}$. Para encontrar y, considere

$$d(A, B) = d(A, C)$$

$$2x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$4x^2 = x^2 + y^2$$

$$y = \pm x\sqrt{3}.$$

Ou seja, $C(0, x\sqrt{3})$ ou $C(0, -x\sqrt{3})$.

Definição 4.2.1 Um círculo C no plano, de centro no ponto $A(a, b)$ e raio $r > 0$ é o conjunto de ponto $P(x, y)$ do plano situados à distância r do ponto A, isto é,

$$d(P, A) = r$$

$$d(P, A)^2 = r^2$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{(Equação do círculo).}$$

Exemplo 4.2.7 Determine o centro e o raio dos círculos cujas equações são $C_1 : x^2 + y^2 = 2x + 4y$ e $C_2 : x^2 + y^2 = 4y - 8x$. Encontre, caso existam, as coordenadas dos pontos de interseção dos círculos.

Solução:

$$C_1 : x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 5 \quad \text{e} \quad C_2 : x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 10$$

$$C_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{5})^2 \quad \text{e} \quad C_2 : (x-4)^2 + (y-2)^2 = (2\sqrt{5})^2.$$

Ou seja, C_1 tem centro em $O_1(1,2)$ e raio $r_1 = \sqrt{5}$ e C_2 tem centro em $O_2(4,2)$ e raio $r_2 = 2\sqrt{5}$. Verifica-se, ainda, que os círculos têm pontos de interseção, pois a distância entre os centros é menor que a soma dos raios, isto é:

$$d(O_1, O_2) = \sqrt{(4-1)^2 + (2-2)^2} = 3 < r_1 + r_2 = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

Para encontrar os pontos de interseção dos círculos resolve-se o sistema:

$$r : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 4y \\ x^2 + y^2 = 4y - 8x \end{cases}$$

$$x = 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \quad \text{ou} \\ y = 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow 2x + 4y = 4y - 8x, \quad \text{mas} \quad 2x + 4y = 4y - 8x \Longrightarrow (0, a), a \in \mathbb{R}.$$

Os pontos de interseção dos círculos são $(0,0)$ e $(0,4)$ como se pode visualizar na figura a seguir.

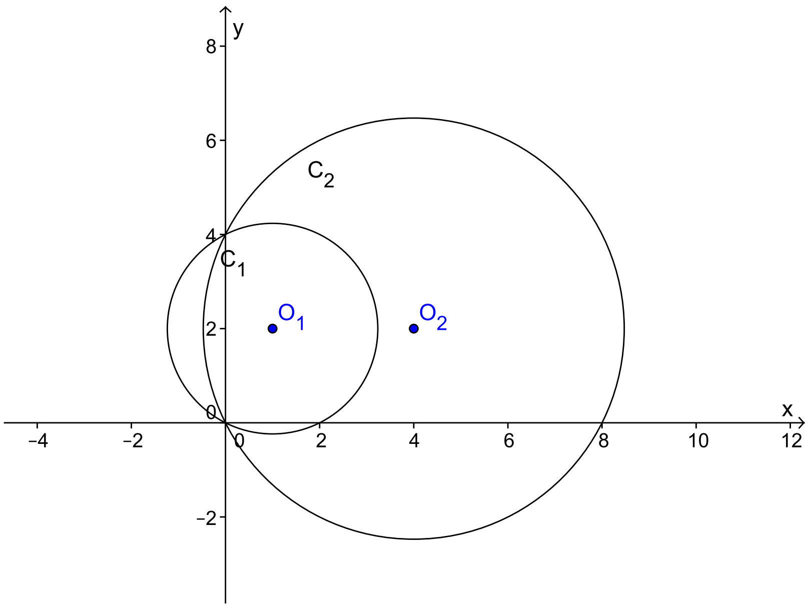

Figura 9: Representação gráfica da solução do exemplo 4.2.7.

Coordenadas do ponto médio de um segmento

Dados $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ dois pontos distintos do plano e M um ponto que pertence ao segmento $\overline{AB}$. Se M divide $\overline{AB}$ em dois segmentos congruentes é chamado de ponto médio do segmento de coordenadas (x_m, y_m), além disso,

$$x_m - x_1 = x_2 - x_m \quad \text{e} \quad y_m - y_1 = y_2 - y_m$$

$$2x_m = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad 2y_m = y_1 + y_2$$

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

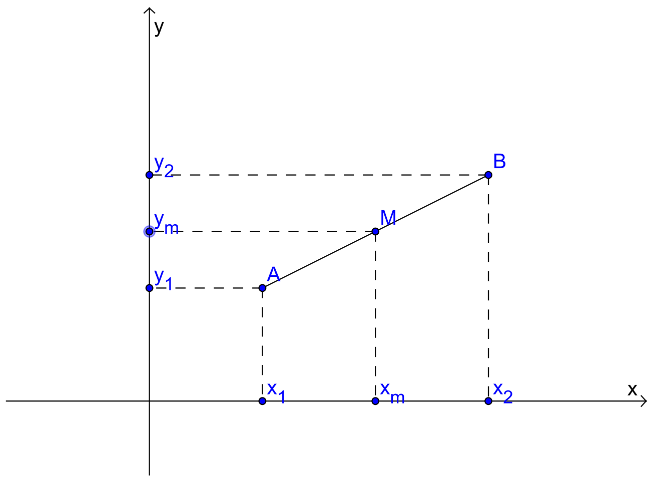

Figura 10: Representação gráfica do ponto médio de um segmento.

Exemplo 4.2.8 Sejam $A(-2, 6)$ e $B(6, 4)$ pontos do plano. Determine as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Solução:

$$x_m = \frac{-2 + 6}{2} \quad \text{e} \quad y_m = \frac{6 + 4}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x_m = 2 \quad \text{e} \quad y_m = 5.$$

4.2.3 Vetores no plano

Equipolência de segmentos orientados

Definição 4.2.2 Um segmento $\overline{AB}$ é orientado quando fica estabelecido que um de seus extremos é o inicial e o outro o final.

Dois segmentos de reta orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, do mesmo plano, são equipolentes, e escreve-se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, quando:

(a) têm o mesmo comprimento;

(b) são paralelos ou colineares;

(c) têm o mesmo sentido.

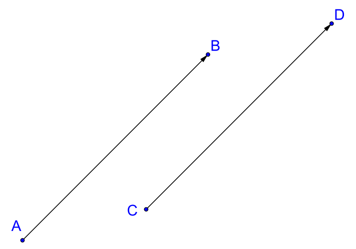

Figura 11: Representação de segmentos equipolentes.

Se $\overline{AB}$ é um segmento orientado, então para $A \neq B$, $\overline{AB} \neq \overline{BA}$, são chamados de segmentos orientados opostos. Caso $A = B$, tem-se que $\overline{AA}$ é um ponto, chamado de segmento orientado nulo.

Dois segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm o mesmo comprimento quando $d(A, B) = d(C, D)$ e têm a mesma direção se, e somente se, as retas suporte que contem os segmentos forem paralelas ou coincidentes.

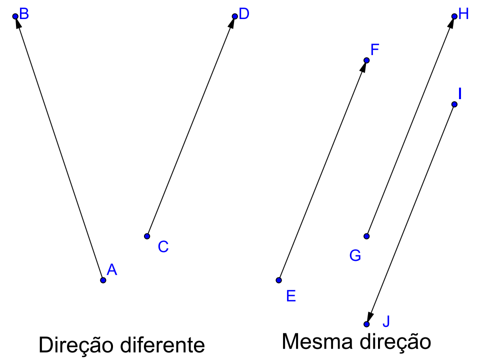

Figura 12: Representação da direção de segmentos orientados.

Observação: A reta formada pelas origens de dois segmentos distintos divide o plano em dois semiplanos.

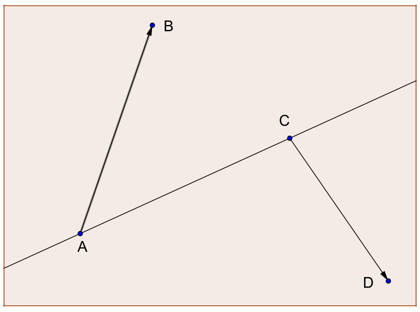

Figura 13: Representação da divisão do plano em dois semiplanos a partir das origens dos segmentos orientados.

Dois segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, de mesma direção, têm o mesmo sentido se, e somente se, as extremidades B e D estiverem ambas no mesmo semiplano determinado pelas origens A e C. Se os segmentos forem colineares, considera-se um outro segmento de mesma direção para fazer a comparação.

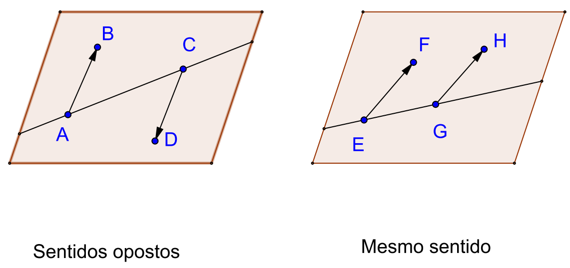

Figura 14: Representação do sentido de dois segmentos orientados.

Proposição 4.2.1 Dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes se, e somente se, o ponto médio de $\overline{AD}$ é igual ao ponto médio de $\overline{BC}$.

Demonstração:

Como pode ser observado na figura 15, se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes, tem-se que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, $M\hat{A}B \equiv M\hat{D}C$ e $M\hat{B}A \equiv M\hat{C}D$, logo $\Delta ABM \equiv \Delta DCM$, donde se conclui que $\overline{AM} \equiv \overline{MD}$ e $\overline{BM} \equiv \overline{MC}$, ou seja, M é o ponto médio de $\overline{AD}$ e de $\overline{BC}$.

Se ponto médio de $\overline{AD}$ é igual ao ponto médio de $\overline{BC}$, $\overline{AM} \equiv \overline{MD}$, $\overline{BM} \equiv \overline{MC}$ e $A\hat{M}B \equiv C\hat{M}D$, logo $\Delta ABM \equiv \Delta DCM$, donde se conclui que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes.

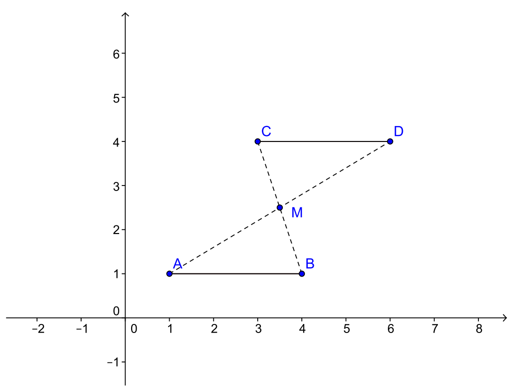

Figura 15: Representação gráfica da proposição 4.2.1.

Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes então $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, assim, $ABCD$ é um paralelogramo e suas diagonais se intersectam no ponto médio de ambas.

Se $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ e $D(d_1, d_2)$, tem-se que:
$b_1 - a_1 = d_1 - c_1$ e $b_2 - a_2 = d_2 - c_2$.

Exemplo 4.2.9 Determine o ponto D, sabendo que $A(-1, -1)$, $B(2, 3)$, $C(1, 1)$ e que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Solução:

Seja $D = (a, b)$. Como $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, tem-se que o ponto médio de $\overline{AD}$ é igual ao ponto medio de $\overline{BC}$, assim:

$$\left(\frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}\right) = \left(\frac{2+1}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

$$2 + 1 = a - 1 \quad \text{e} \quad 3 + 1 = b - 1$$
$$a = 4 \quad \text{e} \quad b = 5.$$

Definição de vetores no plano

Definição 4.2.3 Seja $\overline{AB}$ um segmento orientado. Chama-se de vetor e representa-se por $\overrightarrow{AB}$, ao conjunto de todos os segmentos equipolentes a $\overline{AB}$. Pode-se usar também uma letra minúscula com uma flecha para representar um vetor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$.

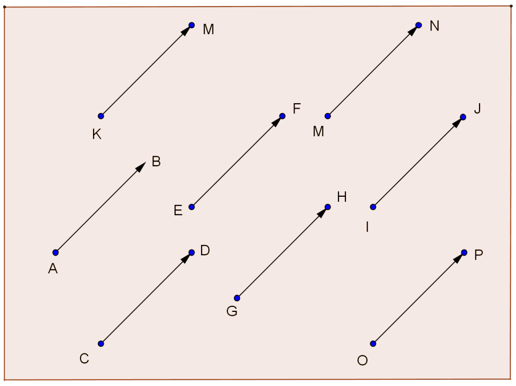

Figura 16: Representação de vetores no plano

Dados $A(a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, pode-se representar no sistema cartesiano o vetor $\overrightarrow{AB}$ por suas coordenadas $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Observação: Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes, então as coordenadas de um vetor podem ser calculadas usando qualquer segmento orientado que o representante, ou seja,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = \overrightarrow{CD}.$$

Para todo vetor $\overrightarrow{v}$ no plano existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, onde O é usado para denotar a origem do plano cartesiano.

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas, um vetor no plano é determinado por suas coordenadas, $\overrightarrow{v} = (a, b)$, como na figura 17.

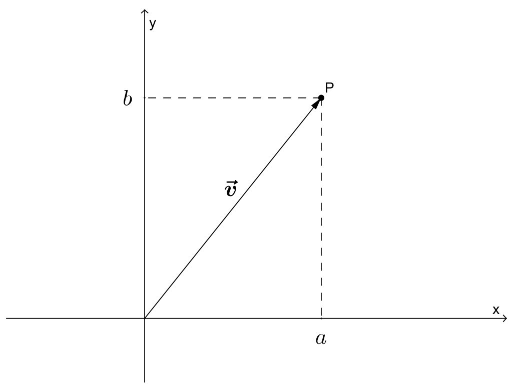

Figura 17: Representação de um vetor no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

Exemplo 4.2.10 Sejam $A(-2, 0)$ e $B(-1, -3)$, determine o ponto P tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$, onde O é a origem.

Solução:
$\overrightarrow{AB} = (-1 - (-2), -3 - 0) = (1, -3)$.
Para $P(x, y)$, tem-se que,
$\overrightarrow{OP} = (x, y)$
$P = (x, y) = (1, -3)$.

Operações com vetores no plano

A soma de dois vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ define-se como: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$

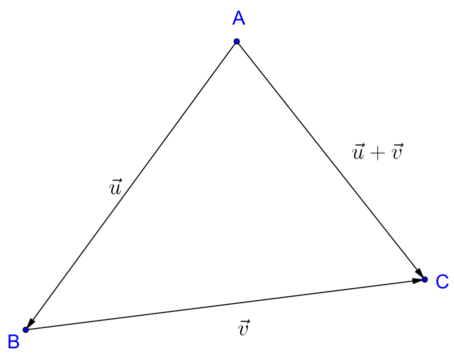

Figura 18: Representação da soma de dois vetores no plano.

Afirmação: *Sejam* $\overrightarrow{u} = (a, b)$ *e* $\overrightarrow{v} = (c, d)$, *então:* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a + c, b + d)$.

Demonstração: Se $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$, então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ} = (c, d)$. Seja S $= (w_1, w_2)$, como na figura 19, tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PS}$, isto é $(c-0, d-0)$=(w_1-a, w_2-b), desta forma,

c $= w_1 - a$ e d $= w_2 - a \Longrightarrow w_1 = a + c$ e $w_2 = b + d$.

Assim,

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} = (a + c, b + d)$. □

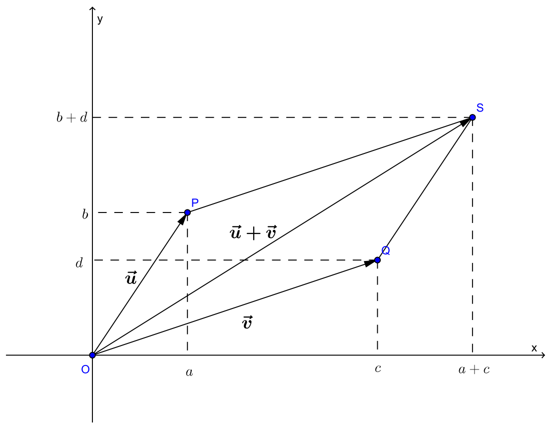

Figura 19: Representação gráfica da soma de dois vetores.

Seja $\overrightarrow{AB}$ um vetor. Se $A \neq B$ então $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$, neste caso $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, chamado de vetor oposto ao vetor $\overrightarrow{AB}$. Caso $A = B$, tem-se que $\overrightarrow{AA}$ é um ponto, chamado de vetor nulo, que tem por coordenadas $\overrightarrow{AA} = (0, 0) = \overrightarrow{0}$.

Outra forma de visualizar a soma de dois vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ não paralelos é escolhendo os pontos P, Q e R, no plano, tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PR}$, tem-se que:

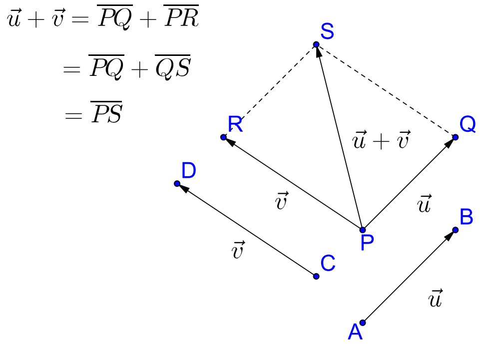

Figura 20: Representação da soma de dois vetores no plano.

A subtração de vetores é a soma de um vetor com o oposto do outro, isto é: $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$, onde $-\overrightarrow{v}$ é o oposto de $\overrightarrow{v}$.

Na multiplicação de um vetor por um número, a cada vetor $\overrightarrow{v}$ e a cada número $k \in \mathbb{R}$ associa-se o vetor $k \cdot \overrightarrow{v}$, denominado de produto de $k \in \mathbb{R}$ por $\overrightarrow{v}$. Dessa forma, o produto de $k \in \mathbb{R}$ por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, é o vetor $k \cdot \overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, representado por $\overrightarrow{AC}$, tal que:

(a) A, B e C são colineares,

(b) $d(A, C) = |k| \cdot d(A, B)$,

(c) $B = C$ se $k = 1$,

(d) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ tem o mesmo sentido se $k > 0$ e sentidos opostos se $k < 0$.

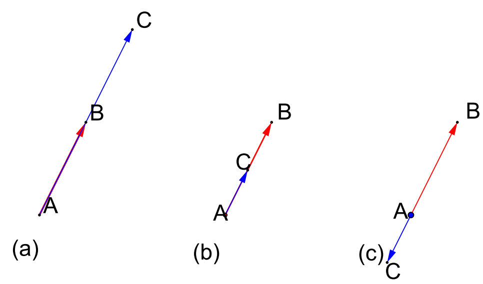

Figura 21: Representação gráfica do produto de um número real por um vetor, para: (a) $k > 0$; (b) $0 < k < 1$; (c) $k < 0$.

Se $\overrightarrow{v} = (a, b)$ e $k \in \mathbb{R}$ tem-se que: $k \cdot \overrightarrow{v} = k \cdot (a, b) = (k \cdot a, k \cdot b)$.

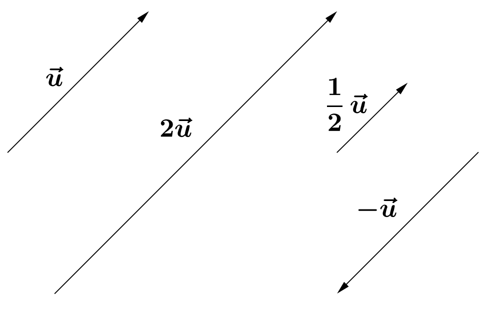

Figura 22: Representação do produto de um número real por um vetor no plano.

Definição 4.2.4 (a) $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$ se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = k.\overrightarrow{u}$.

(b) $\overrightarrow{v}$ é combinação linear de $v_1, v_2, ..., v_n$, se existem $k_1, k_2, ...k_n \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + ... + k_n\overrightarrow{v_n}$.

Exemplo 4.2.11 Sejam dados $A(-3,5)$, $B(1,1)$ e $C(3,-1)$. Verifique se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos um do outro.

Solução:
$\overrightarrow{AB} = (4,-4) = 4(1,-1)$ e $\overrightarrow{AC} = (6,-6) = 6(1,-1) \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{6}{4}\overrightarrow{AB}$.
Os vetores são múltiplos um do outro.

Observação: O inverso aditivo do vetor $\overrightarrow{u} = (a,b)$ é o vetor $-\overrightarrow{u} = (-a,-b)$.

Exemplo 4.2.12 Escreva, se possível, o vetor $\overrightarrow{w} = (5,6)$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u} = (1,1)$ e $\overrightarrow{v} = (1,2)$.

Solução:

Verifica-se, inicialmente, que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos. Se $(1,2) = k \cdot (1,1) = (k,k)$, então $k=1$ e $k=2$, que é uma contradição, pois k deve ser único.

Assim, o vetor $\overrightarrow{w}$ pode ser escrito de forma única como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, ou seja, existem $a, b \in \mathbb{R}$, tais que:

$$(5,6) = a \cdot (1,1) + b \cdot (1,2).$$

Os valores de a e b podem ser encontrados resolvendo o sistema abaixo.

$$r : \begin{cases} a + b = 5 \\ a + 2b = 6. \end{cases}$$

A solução do sistema é $a = 4$ e $b = 1$. Desta forma, o vetor $\overrightarrow{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, da seguinte maneira:

$$\overrightarrow{w} = 4\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}.$$

Condição de alinhamento de três pontos

Na seção de operações com vetores definiu-se o produto de um número $k \in \mathbb{R}$ por um vetor $\overrightarrow{AB}$ como o vetor $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, onde A, B e C são colineares. Na definição 4.2.4 viu-se que um vetor $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de um vetor $\overrightarrow{u}$ quando existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{u}$. Desta forma conclui-se que se A, B e C são pontos distintos do plano então $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ se, e somente se, A, B e C são colineares.

Observe que um ponto P pertence ao segmento A e B se, e somente se, para algum $k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, isto é, um vetor é múltiplo do outro.

Considerando dois vetores $\overrightarrow{u} = (a,b)$ e $\overrightarrow{v} = (c,d)$, múltiplos um do outro, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $(a,b) = k \cdot (c,d)$. Dessa forma, $(a,b) = (kc, kd) \Longrightarrow a = kc$ e $b = kd \Longrightarrow ad = kcd$ e $bc = kcd \Longleftrightarrow ad - bc = 0$, ou seja:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

A conclusão apresentada anteriormente fornece um bom critério para verificar se dois vetores são múltiplos ou se três pontos são colineares. Fazendo a comparação com a solução de um sistema com duas equações e duas coordenadas, pode-se concluir que se trata de um sistema que possui mais de uma solução, ou seja, os vetores estão sobre a mesma reta suporte e possuem.

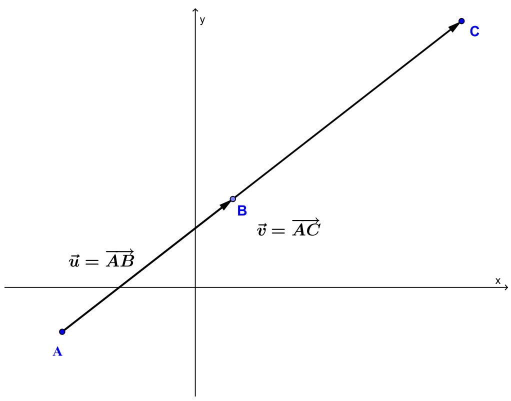

Figura 23: Representação gráfica de dois vetores, múltiplos um do outro.

Esta já pode ser uma possível saída para o problema que pedia o ponto onde o herói deveria cruzar o rio para chegar ao castelo. Como a menor distância entre o herói e o castelo é uma reta, o ponto de interseção com o rio (eixo das ordenadas) é um par do tipo $P(0, y)$.

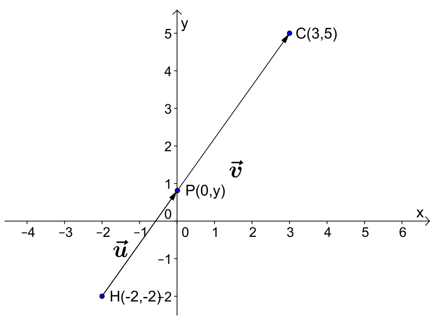

Figura 24: Representação gráfica do problema proposto no item da distância entre dois pontos.

Se os pontos H, P e C estão alinhados então os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são múltiplos um do outro e H é um ponto comum, logo

$$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{v} = (3 - (-2), 5 - (-2)) = (5, 7) \text{ e}$$

$$\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{u} = (0 - (-2), y - (-2)) = (2, y + 2)$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{u}$$
$$(5, 7) = k \cdot (2, y + 2)$$

$$k = \frac{5}{2}, \quad \text{e daí} \quad \frac{5}{2}(y + 2) = 7.$$

Donde conclui-se que $P = \left(0, \frac{4}{5}\right)$.

De forma mais simples, pode-se impor que os vetores são múltiplos

$$\begin{vmatrix} 2 & y+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$5(y + 2) = 14, \text{ e assim } y = \tfrac{4}{5}.$$

Exemplo 4.2.13 Verifique se os pontos $A(-1, 3)$, $B(2, 4)$ e $C(-4, 10)$ são colineares.

Solução:

Para verificar se os pontos são colineares, consideram-se os vetores $\overrightarrow{AB} = (2 - (-1), 4 - 3) = (3, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-4 - (-1), 10 - 3) = (-3, 7)$ e analisa-se a condição de serem múltiplos um do outro, ou seja,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 3 = 24 \neq 0.$$

Logo, os três pontos dados não são colineares.

Veja outra forma de apresentar a solução para o exemplo 4.2.11.

Exemplo 4.2.14 Sejam dados $A(-3, 5)$, $B(1, 1)$ e $C(3, -1)$. Verifique se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos um do outro.

Solução:

A partir dos pontos A, B e C, determinam-se os vetores $\overrightarrow{AB} = (4, -4)$ e $\overrightarrow{AC} = (6, -6)$. Utilizando-se a condição da multiplicidade dos vetores, tem-se que:

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -24 + 24 = 0.$$

Conclui-se, portanto, que os vetores são múltiplos um do outro.

Exemplo 4.2.15 Para quais valores de a os pontos $A(2, 1)$, $B(a + 1, 2)$ e $C(-3, -1)$ são vértices de um triângulo?

Solução:

Observe que $\overrightarrow{AB} = (a+1-2, 2-1) = (a-1, 1)$ e $\overrightarrow{BC} = (-3-a-1), -1-2) = (-a-4, -3)$. Para que ABC seja um triângulo é necessário que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ não sejam múltiplos um do outro, ou seja:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ -a-4 & -3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Assim, $-3a + 3 + 4 + a \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq \frac{7}{2}$.

Produto interno de vetores no plano

Seja OXY um sistema de coordenadas ortogonais no plano.

Definição 4.2.5 A norma ou comprimento de um vetor é o número $\|\overrightarrow{v}\|$ dado pelo comprimento de um representante de $\overrightarrow{v}$.

Dados $A(a, b)$ e $B(c, d)$, tais que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, tem-se que:
$\|\overrightarrow{v}\| = d(A, B) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.

Observações:

1) Se $O(0, 0)$ e $P(a, b)$, são tais que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, então

$$\|\overrightarrow{v}\| = d(A, B) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2) $\|\overrightarrow{v}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = 0$.
3)$\|k \cdot \overrightarrow{v}\| = |k| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$, $k \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{v}$ um vetor.
4)Se $\|\overrightarrow{v}\| = 1$ o vetor é chamado de unitário.
5) Se $\overrightarrow{v} \neq 0$, $\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ é unitário e chamado de normalizado do vetor $\overrightarrow{v}$.

Definição 4.2.6 Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores não nulos no plano. Define-se o ângulo θ entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ como o menor ângulo entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ representantes de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Designa-se $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, desta forma, $0^o \leq \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leq 180^o$.

Definição 4.2.7 O produto interno de dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do plano é o número real $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$, definido por:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } \overrightarrow{u} = 0 \text{ ou } \overrightarrow{v} = 0 \\ \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\theta & , \quad \text{se } \overrightarrow{u} \neq 0, \overrightarrow{v} \neq 0 \text{ e } \theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{cases}.$$

Proposição 4.2.2 Sejam $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (c, d)$ vetores do plano, então:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = a \cdot c + b \cdot d.$$

Demonstração: Se um dos dois vetores é nulo tem-se o resultado. Se os dois vetores são não nulos, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ} = (c, d)$. Logo,

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = (c, d) - (a, b) = (c, d) + (-a, -b) = (c - a, d - b)$.

Pela construção da figura 25, aplicando a lei dos cossenos, tem-se que:

$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\theta$.

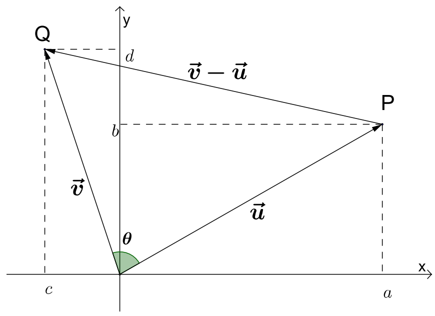

Figura 25: Representação gráfica da diferença de vetores.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\theta &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (c - a)^2 - (d - b)^2}{2} \\ &= a \cdot c + b \cdot d. \end{aligned}$$

□

Observa-se que a proposição 4.2.2 poderia ter sido apresentada como definição e, a partir dela, seria obtida a definição 4.2.7, donde se conclui que elas são equivalentes.

Proposição 4.2.3 Dois vetores são perpendiculares se, e somente se, o produto interno entre eles é zero.

Demonstração: Se um dos dois vetores é nulo então $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$. Se os dois vetores são não nulos e $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \theta$,

$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90^{\circ}$. □

Exemplo 4.2.16 Usando um sistema de coordenadas cartesianas, mostre que o ângulo inscrito num semicírculo é reto.

Solução:

$P(x, y) \in C : x^2 + y^2 = r^2$, $\overrightarrow{u} = (x + r, y)$ e $\overrightarrow{v} = (x - r, y)$.

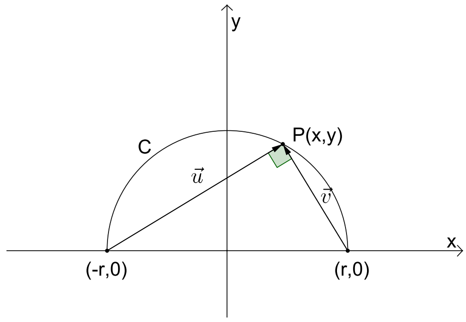

Figura 26: Representação gráfica do exemplo 4.2.16.

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = (x+r)\cdot(x-r) + y\cdot y$$
$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x^2 - r^2 + y^2 = r^2 - r^2 = 0, \text{ pois } x^2 + y^2 = r^2.$$

Proposição 4.2.4 Se $\overrightarrow{u} = (a, b)$ é um vetor não nulo, então $\overrightarrow{v} = k \cdot (-b, a)$ se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{u}$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v}$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Sejam $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = k \cdot (-b, a)$, tem-se que:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = a \cdot (-b \cdot k) + b \cdot (k \cdot a) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}.$$

($\Leftarrow$) Seja $\overrightarrow{v} = (c, d)$ e $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ então, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ e tem-se que:

$$a \cdot c + b \cdot d = 0 \Rightarrow 0 = c \cdot a - d \cdot (-b) = \begin{vmatrix} c & d \\ -b & a \end{vmatrix}.$$

Logo, (c, d) é múltiplo de $(-b, a)$, ou seja, existe um $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = k(-b, a)$.

□

Área de paralelogramos e triângulos

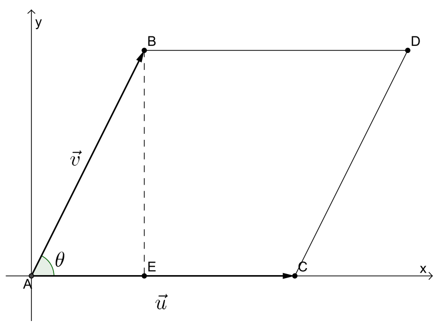

Figura 27: Representação gráfica do paralelogramo ACDB.

Seja P o paralelogramo da figura apresentada anteriormente:

Note que $|\overline{BE}| = |\overline{AB}| \cdot sen\theta$.

Tem-se:

$$\begin{aligned}
(\text{Área } P)^2 &= \|\overrightarrow{AC}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{AB}\|^2 \cdot sen^2\theta \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{v}\|^2 \cdot (1 - cos^2\theta) \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{v}\|^2 \cdot \cos^2\theta.
\end{aligned}$$

Conclui-se que Área $P = \sqrt{\|\overrightarrow{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle^2}$.

Em termos de coordenadas, para $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (c, d)$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\text{Área } P &= \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - 2acbd - b^2d^2} \\
&= \sqrt{a^2d^2 - 2acbd + b^2c^2} \\
&= \sqrt{(ad - bc)^2} \\
&= |ad - bc|,
\end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\text{Área } P = \left| det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|.$$

Desta forma, a área do triângulo de vértices A, B e C é dada por:

$$\text{Área T} = \tfrac{1}{2} \cdot \left| det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|.$$

Exemplo 4.2.17 Determine a área do triângulo ABC de vértices $A(1, 4)$, $B(2, 3)$ e $C(-1, -2)$.

Solução:

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (-2, -6)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \left| det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |-6-2| = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$$

4.2.4 Equação da reta no plano

Geometricamente, se você possui dois pontos da reta ou um ponto e a direção já se pode construir tal reta e determinar sua equação.

Exemplo 4.2.18 Existe uma única reta que passa por dois pontos distintos (1º Postulado de Euclides). Veja na figura 28 a representação da reta r que passa pelos dois pontos $A(1,2)$ e $B(4,4)$ no plano cartesiano.

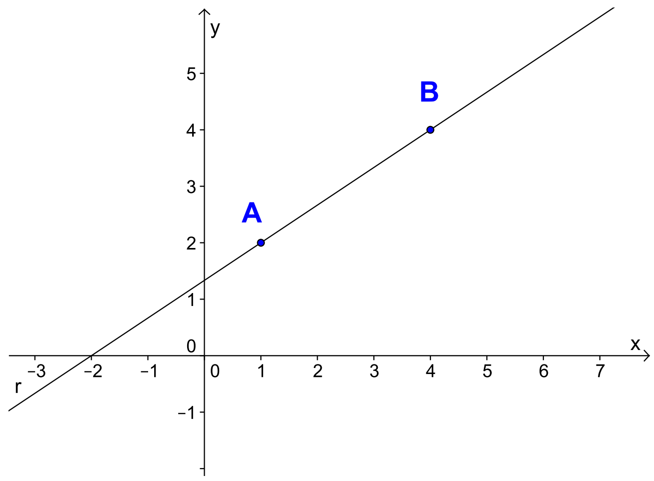

Figura 28: Representação gráfica da única reta que passa pelos pontos A e B.

Um dos objetivos da Geometria Analítica é obter equações associadas a conjuntos de pontos.

Exemplo 4.2.19 Sejam $A(1,2)$ e $\overrightarrow{v} = (3,2)$ (vetor direção da reta). O ponto A e um vetor $\overrightarrow{u}$ paralelo a $\overrightarrow{v}$ são suficientes para traçar a reta r.

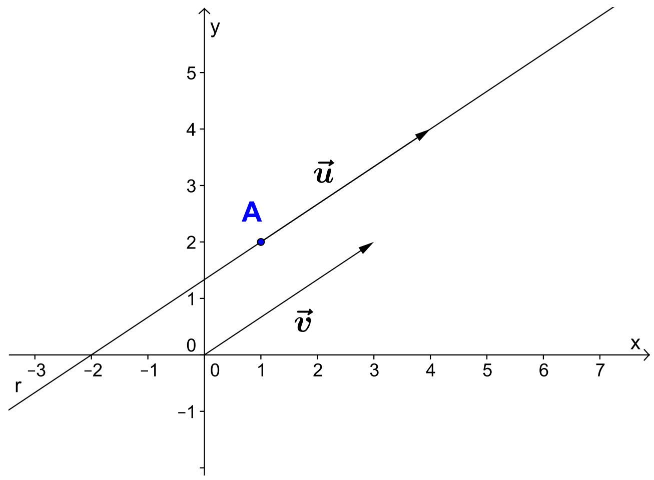

Figura 29: Representação gráfica da única reta que passa pelo ponto A e tem a direção do vetor $\vec{v}$.

Formas de apresentação da equação da reta no plano

Se uma reta r passa por dois pontos distintos $A(a, b)$ e $B(c, d)$, e se $P(x, y)$ é um terceiro ponto de r, pela condição de alinhamento de três pontos, tem-se:

$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$

$P - A = t \cdot \overrightarrow{AB}$

$P = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$

Em termos de coordenadas dos pontos dados, tem-se:

$(x, y) = (a, b) + t \cdot (c - a, d - b)$

$$r : \begin{cases} x = a + t \cdot (c - a) \\ y = b + t \cdot (d - b), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

As equações apresentadas anteriormente são chamadas de equações paramétricas da reta r, sendo t unicamente determinado e chamado de parâmetro. Note que $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) = (c - a, d - b)$ é um vetor paralelo que dá a direção da reta r.

Graficamente, tem-se:

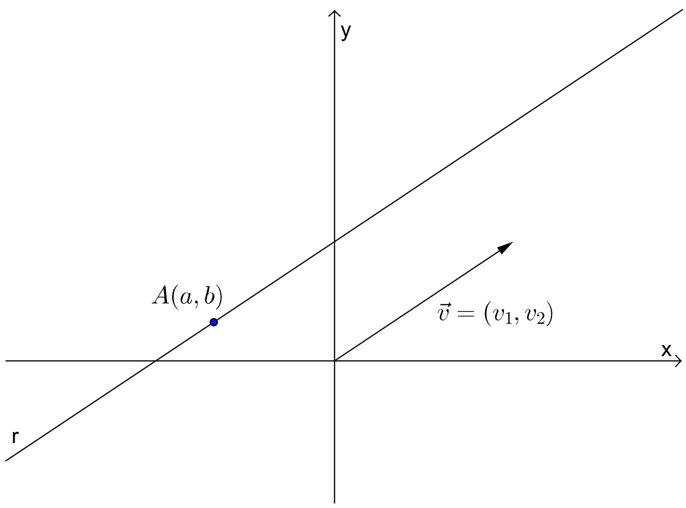

Figura 30: Representação gráfica da reta r que passa pelo ponto A e tem a direção do vetor $\vec{v}$.

Sejam A $(a, b) \in r$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ um vetor paralelo a reta r, pode-se determinar as equações paramétricas.

$$r : \begin{cases} x = a + t \cdot v_1 \\ y = b + t \cdot v_2, \quad t \in \mathbb{R} \quad e \quad \overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \parallel r. \end{cases}$$

Exemplo 4.2.20 Determine as equações paramétricas da reta r que passam pelos pontos $A(4,-2)$ e $B(5,-5)$.

Solução:

$\overrightarrow{AB} = (1,-3)$ assim, $r : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - 3t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

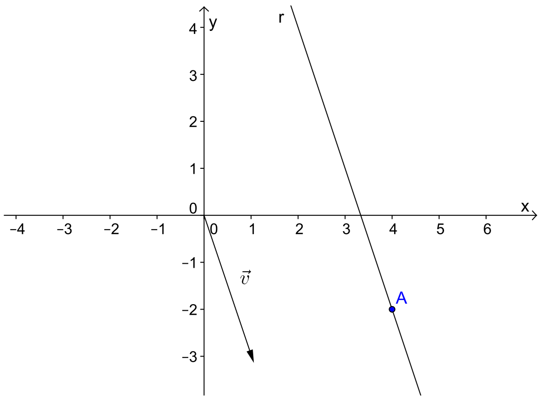

Figura 31: Representação gráfica da reta r do exemplo 4.2.20

Observe que $\overrightarrow{v} = (1,-3) \parallel r$ é um vetor diretor da reta r.

Exemplo 4.2.21 Determine as equações paramétricas da reta r que passam pelo ponto $A(-1,4)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (2,-1)$.

Solução:

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 - t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

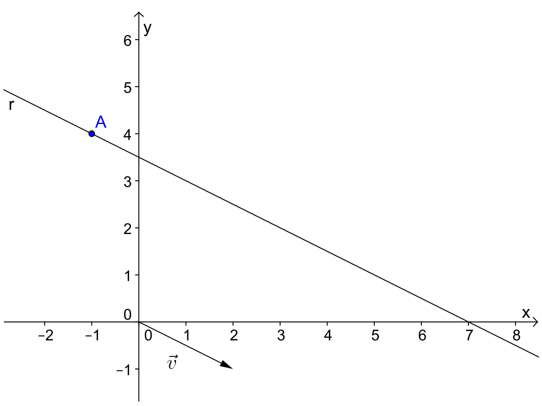

Figura 32: Representação gráfica da reta r do exemplo 4.2.21.

Observe que o parâmetro t das equações paramétricas pode ser eliminado, caso as coordenadas do vetor diretor sejam ambas diferentes de zero. No caso em que $\overrightarrow{v} = 0$, tem-se apenas um ponto.

$$x - a = t \cdot v_1 \quad \text{e} \quad y - b = t \cdot v_2$$

$$\frac{x-a}{v_1} = t \quad \text{e} \quad \frac{y-b}{v_2} = t.$$

Fazendo a igualdade obtém-se uma equação chamada de equação simétrica da reta.

$$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2}.$$

A equação simétrica também oferece a mesma visualização geométrica das equações paramétricas, ou seja, apresenta um ponto $A(a,b) \in r$ e o vetor $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ que dá a direção da reta r.

Note que se nos exemplos anteriores o vetor apresentado fosse o vetor normal (perpendicular) também seria fácil encontrar a reta, pois como já foi visto $(-v_2, v_1) \perp (v_1, v_2)$.

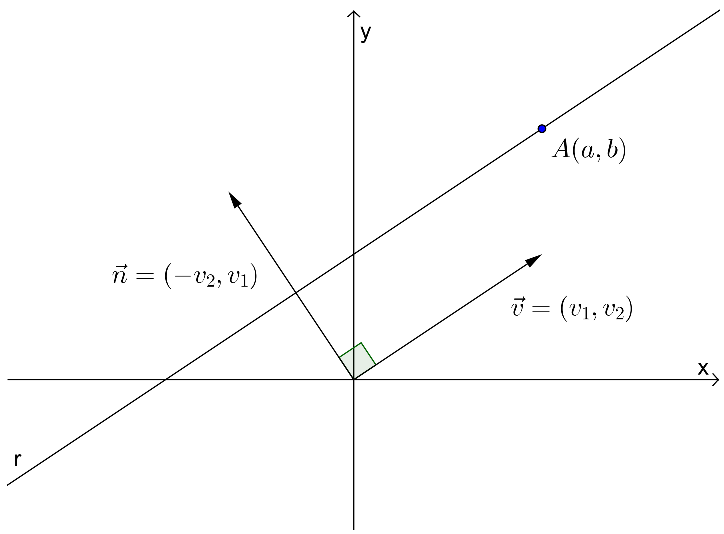

Figura 33: Representação gráfica de um vetor paralelo e de um vetor normal à reta r.

Reordenando a equação simétrica, pode-se escrever uma equação em que aparecerá o vetor normal à reta r, que é o vetor dado por $(-v_2, v_1)$:

$$v_2x - v_2a = v_1y - v_1b$$
$$-v_2x + v_1y = -v_2a + v_1b.$$

Note que $\overrightarrow{n} = (-v_2, v_1)$ é um vetor perpendicular à $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ e $A(a,b) \in r$.

Dessa forma, define-se a equação chamada de equação cartesiana da reta. Dados $\overrightarrow{n} = (a,b) \neq \overrightarrow{0}$ um vetor perpendicular (normal) à reta r e $A(x_o, y_o) \in r$, pode-se encontrar a equação cartesiana, usando o resultado apresentado anteriormente:

$$ax + by = a \cdot x_0 + b \cdot y_o, \text{ ou seja,}$$

$$ax + by = c, \text{ onde } c = a.x_o + b.y_o.$$

Note que esta equação poderia ser deduzida usando produto interno. Sejam $\{A, P\} \subset r$ e $\overrightarrow{n} = (a,b) \neq \overrightarrow{0}$, com $\overrightarrow{n} \perp r$, tem-se que:

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{AP} = (x - x_o, y - y_o) \perp \overrightarrow{n} = (a,b) \\
\langle (x - x_o, y - y_o), (a,b) \rangle = 0 \\
ax - ax_o + by - by_o = 0 \\
ax + by = ax_o + by_o \\
ax + by = c, \text{ onde } c = ax_o + by_o.
\end{gathered}$$

Dessa forma, tem-se mais uma maneira de determinar a equação de uma reta, neste caso, conhecendo-se um vetor normal à reta e um ponto pertencente à reta.

Exemplo 4.2.22 Determine a equação cartesiana da reta r que passa pelos pontos $A(-1,4)$ e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (1,2)$.

Solução:
Sabe-se que a equação cartesiana é da forma:
$ax + by = c$, onde (a,b) é o vetor normal e $c = a \cdot x_o + b \cdot y_o$, com $(x_o, y_o) \in r$.

Assim,
$x + 2y = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \Longrightarrow x + 2y = 7$ é a equação cartesiana da reta r.

Observe que se o exemplo pedisse para encontrar as equações paramétricas, também seria fácil determinar, pois $\overrightarrow{v} = (-2,1)$ é paralelo à reta r, assim,

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 - t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A equação da reta será chamada de equação geral quando for escrita da forma:

$$ax + by + c = 0.$$

Exemplo 4.2.23 Encontre a equação geral da reta r, sabendo que a sua equação paramétrica é:

$$r: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solução:

Dada a equação paramétrica da reta r, observa-se que o vetor $\overrightarrow{u} = (2, 1)$ é paralelo à reta r e $P(4, -3) \in r$. A partir do vetor paralelo, identifica-se um vetor normal à reta, dado por $\overrightarrow{n} = (-1, 2)$. Utilizando os conhecimentos de equação cartesiana tem-se que:

$$-x + 2y = (-1) \cdot 4 + 2 \cdot (-3) \Longrightarrow -x + 2y = -10.$$

Logo, $-x + 2y + 10 = 0$ é a equação geral da reta r.

Note que a equação da reta recebe várias denominações de acordo com a forma que ela é apresentada, mas isso não é relevante, o que é importante mesmo é a visualização geométrica que se tem a partir da equação apresentada e que partindo de entes geométricos pode-se escrever a equação da reta e vice-versa.

Chama-se, ainda, a atenção para outra forma de apresentação da reta, já conhecida como função afim e recebendo também o nome de equação reduzida.

Da equação cartesiana da reta, onde $(a, b) \perp r$ e $r : ax + by = c$, pode-se escrever:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}, \qquad \text{se} \qquad b \neq 0$$

$$y = mx + n, \qquad \text{onde} \qquad m = -\frac{a}{b} \qquad \text{e} \qquad n = \frac{c}{b}.$$

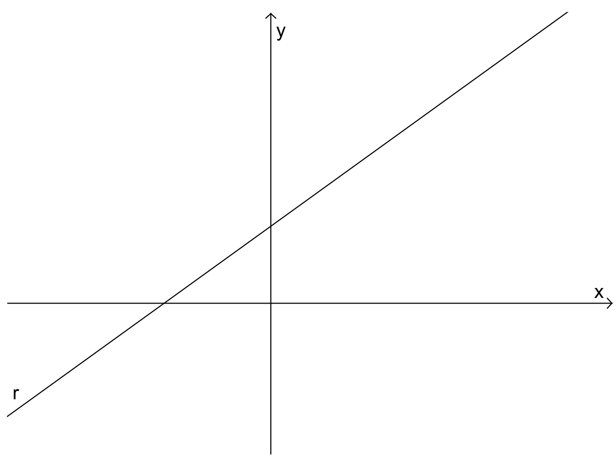

Figura 34: Representação gráfica da reta r, onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Note que, se $b = 0$, $ax = c \rightarrow x = \frac{c}{a}$.

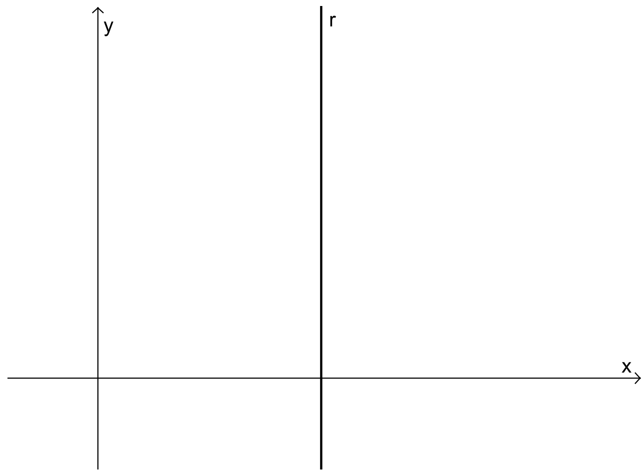

Figura 35: Representação gráfica da reta r, onde b=0.

E ainda, se $a = 0$, $by = c \rightarrow y = \frac{c}{b}$.

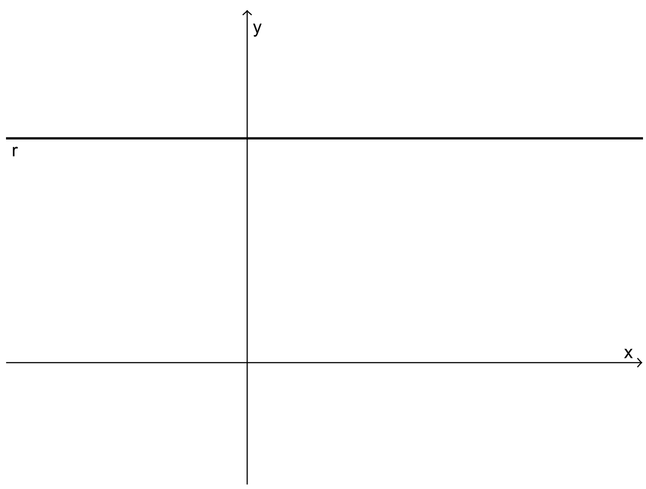

Figura 36: Representação gráfica da reta r, onde a=0.

Dessa forma, toda reta não vertical pode ser escrita da forma $y = mx + n$, onde m é o coeficiente angular ou inclinação da reta e n é o coeficiente linear.

Observa-se que m é a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x, ou seja, se $x_1 \neq x_2$, $y_1 = mx_1 + n$ e $y_2 = mx_2 + n$, tem-se que:

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, também conhecida como equação fundamental da reta.

Logo, a inclinação da reta pode ser determinada conhecendo-se dois pontos da reta, por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Analisando-se graficamente a inclinação da reta, observa-se que esta coincide com a definição da tangente do ângulo α.

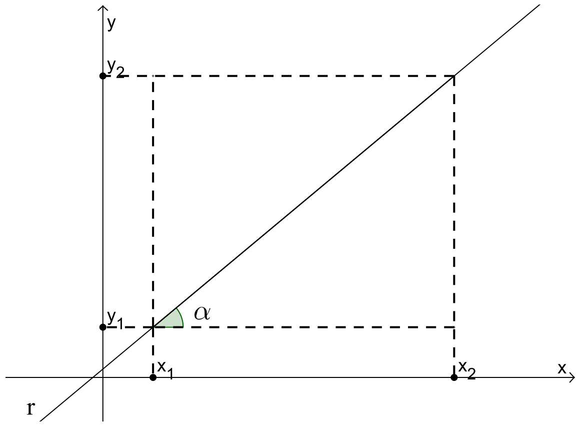

Figura 37: Representação gráfica do ângulo de inclinação da reta.

$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = m$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1).$$

Exemplo 4.2.24 Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto $A(0, -4)$ e tem coeficiente angular $-\frac{2}{3}$.

Solução:

Utilizando a equação fundamental da reta, podem-se substituir os valores do coeficiente angular e do ponto pertencente à reta. Assim,

$$y - (-4) = -\frac{2}{3}(x - 0) \Longrightarrow y + 4 = -\frac{2}{3}x$$

$$\Longrightarrow 2x + 3y = -12, \text{ que é a equação cartesiana da reta.}$$

Posições relativas entre retas no plano

Se as inclinações de duas retas no plano são iguais então elas são paralelas ou coincidentes, caso contrário, elas serão concorrentes.

A identificação da posição relativa entre duas retas pode ser feita analisando seus coeficientes angulares ou suas equações. Dada a equação cartesiana de uma reta r, pode-se identificar facilmente seu coeficiente angular $m_r = tg\ \alpha_r$, considerando $0 \leq \alpha_r \leq \pi$ e $\alpha_r \neq \frac{\pi}{2}$:

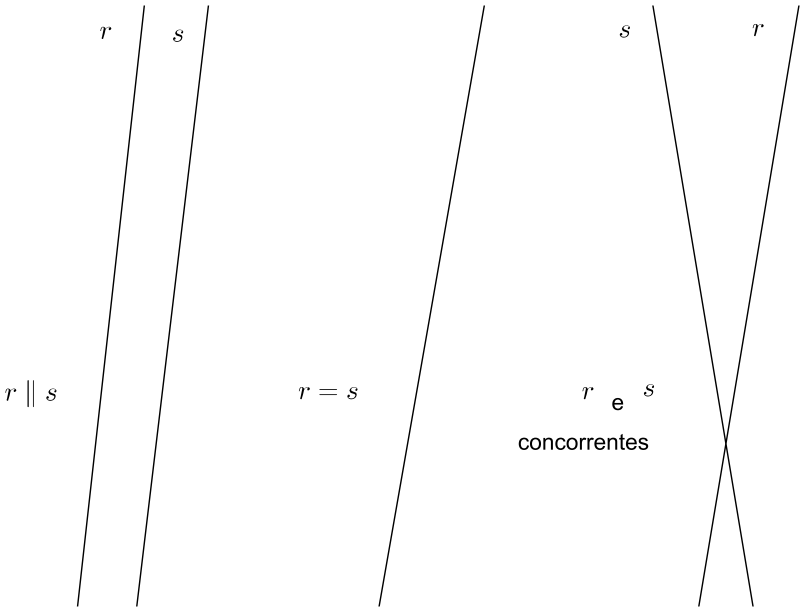

Figura 38: Representação das posições relativas entre retas do plano.

$$r : ax + by = c \qquad \rightarrow \qquad r : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \qquad \rightarrow \qquad m_r = -\frac{a}{b}$$

Dessa forma, dadas as equações das retas r e s, tem-se três casos à considerar:

$$\begin{cases} r : y = m_r x + n_r \\ s : y = m_s x + n_s \end{cases},$$

(1) $r \parallel s \iff r : \begin{cases} \alpha_r = \alpha_s \Longrightarrow tg\alpha_r = tg\alpha_s \Longrightarrow m_r = m_s \\ n_r \neq n_s \end{cases}.$

(2) $r = s \iff r : \begin{cases} m_r = m_s \\ n_r = n_s \end{cases}.$

(3) r e s são concorrentes $\iff m_r \neq m_s$.

Exemplo 4.2.25 Obtenha a equação geral da reta s, que passa pelo ponto $P(-4, 3)$ e é paralela à reta $r : 2x + 3y - 6 = 0$.

Solução:

$$m_r = -\frac{2}{3}.$$

Usando-se a equação fundamental:

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x - (-4))$$

$$3y - 9 = -2x - 8$$

$$2x + 3y - 1 = 0.$$

Os conhecimentos adquiridos sobre vetores podem facilmente resolver o exemplo 4.2.25, evitando a memorização da equação fundamental e da determinação do coeficiente angular usando os coeficientes da equação:

$(2, 3) \perp r \Rightarrow (2, 3) \perp s$, assim s é da forma:
$2x + 3y = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3$
$2x + 3y - 1 = 0.$

Outras análises podem ser feitas conhecendo-se a equação geral da reta para determinar as posições relativas entre duas retas:

$$\begin{cases} r : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ s : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}.$$

Analisando-se os vetores normais (a_1, b_1) e (a_2, b_2):

As retas são paralelas ou coincidentes quando $(a_1, b_1) = k \cdot (a_2, b_2), k \in \mathbb{R}$, ou equivalentemente, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$

Dessa forma, novamente tem-se três casos:

(1) $(a_1, b_1) = k \cdot (a_2, b_2)$ e $c_1 = k \cdot c_2 \Longleftrightarrow r = s.$

(2) $(a_1, b_1) = k \cdot (a_2, b_2)$ e $c_1 \neq k \cdot c_2 \Longleftrightarrow r \parallel s.$

(3) $(a_1, b_1) \neq k \cdot (a_2, b_2) \Longleftrightarrow r$ e s são concorrentes.

Esta análise remete à resolução de sistemas lineares com duas equações e duas variáveis:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}.$$

Tem-se três casos a considerar:

- No sistema possível e determinado (uma solução) as retas são concorrentes;
- No sistema possível e indeterminado (mais de uma solução), as retas são coincidentes;
- No sistema impossível (não tem solução) as retas são paralelas.

A análise da posição de duas retas pode ser estendida para o caso de três ou mais retas. Caso se deseje analisar a posição relativa de três retas encontram-se as seguintes possibilidades:

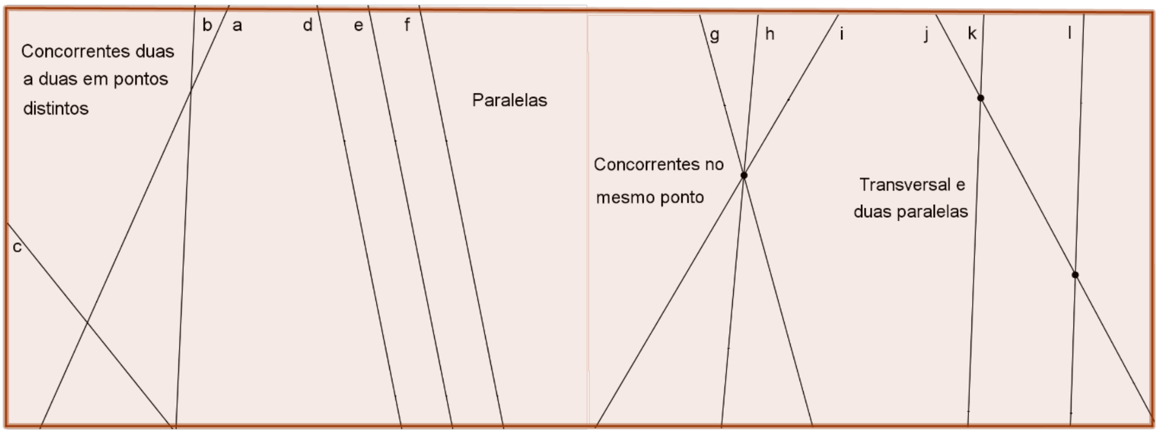

Figura 39: Posições relativas de três retas.

Exemplo 4.2.26 Verifique se as retas $r : 2x + 3y - 8 = 0$, $s : 4x + 7y - 18 = 0$ e $t : 5x - y - 3 = 0$, passam pelo mesmo ponto.

Solução:

De imediato, pode-se notar que as retas não são paralelas, pois seus vetores normais não são múltiplos uns dos outros.

Analisando r e s, tem-se que:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 8 = 0 \\ 4x + 7y - 18 = 0 \end{cases}, \text{ que tem como solução } P(1,2).$$

Verifica-se que $P(1,2) \in t$, pois $5 \cdot 1 - 2 - 3 = 0$, donde se conclui que $P(1,2)$ é um ponto comum das três retas, logo estas retas são concorrentes em um ponto comum.

É fácil observar se duas retas são perpendiculares, analisando seus vetores normais, ou seja, dadas as retas $r : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, seus vetores normais são perpendiculares se, e somente se, elas se intersectam perpendicularmente.

Pode-se também fazer a seguinte relação entre os coeficientes angulares de duas retas perpendiculares, que não sejam verticais ou horizontais, ou seja, com

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle = 0$$

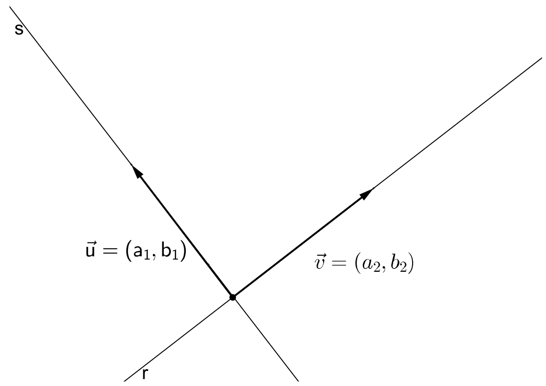

Figura 40: Representação de que retas com vetores normais perpendiculares são perpendiculares.

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$$

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1$$
$$m_r \cdot m_s = -1.$$

Distância entre ponto e reta no plano

O menor caminho de um ponto P a uma reta r é a perpendicular de P a r. Desta forma, se $\overrightarrow{v}$ é um vetor paralelo à reta, deve-se encontrar um ponto $Q(x, y) \in r$ tal que $\overrightarrow{u} = P - Q \perp \overrightarrow{v}$.

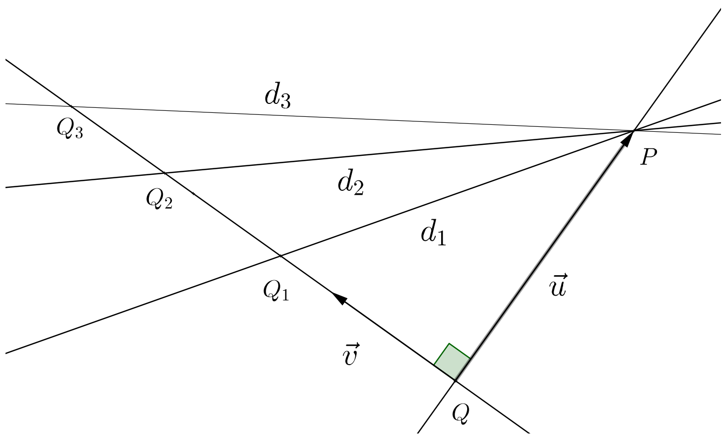

Figura 41: Representação geométrica da distância entre um ponto e uma reta.

Exemplo 4.2.27 Determine a distância entre $P(2,3)$ e a reta $r: x+2y-2=0$.

Solução:

Observa-se que $(1,2) \perp (r)$, logo $(-2,1) \parallel r$. Deseja-se determinar o ponto $P_1 = (x,y) \in r$ que realiza a menor distância a $P(2,3)$, ou seja, se $\overrightarrow{u} = P - P_1$,

$\overrightarrow{u} = (2,3) - (x,y) = (2-x, 3-y)$.

$\overrightarrow{u} \perp (-2,1) \Longrightarrow \langle (2-x,3-y),(-2,1)\rangle = 0 \quad \text{e} \quad x = 2-2y$

$$(2-(2-2y)) \cdot (-2) + (3-y) = 0$$

$$-4y + 3 - y = 0 \Longrightarrow y = \frac{3}{5} \text{ e } x = \frac{4}{5}.$$

Assim,

$$d(P,P_1) = \sqrt{\left(\frac{4}{5}-2\right)^2 + \left(\frac{3}{5}-3\right)^2}$$

$$d(P,P_1) = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

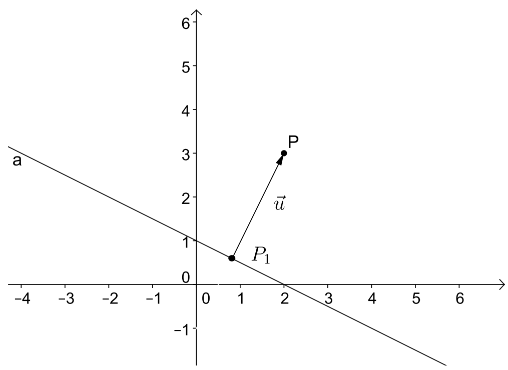

Figura 42: Visualização gráfica do exemplo 4.2.27.

Teorema 4.2.1 Sejam $r: ax+b=c$ uma reta e $P(x_o,y_o)$ um ponto do plano. Então a distância do ponto P a reta r é:

$$d(P,r) = \frac{|ax_o + by_o - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Demonstração:

Seja s uma reta perpendicular à reta r e que passa pelo ponto P. Como $(a,b) \perp r \Longrightarrow (a,b) \parallel s$, ou seja, $S(t) = P(x_o,y_o) + t(a,b)$.

Seja $S(x_o + at, y_o + bt) \in s$, existe $t_o \in \mathbb{R}$ tal que $S(t_o) \in r$, conforme a figura 43 . Dessa forma,

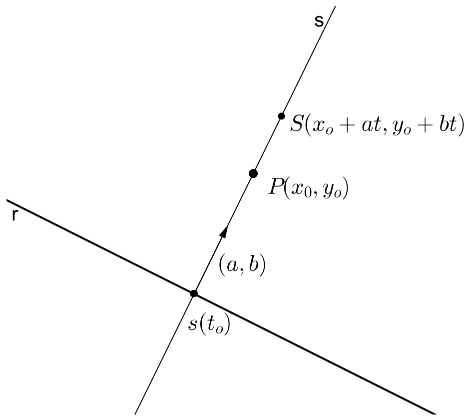

Figura 43: Representação das retas r e s.

$$a(x_o + at_o) + b(y_o + bt_o) = c$$

$$t_o = \frac{-ax_o - by_o + c}{a^2 + b^2}.$$

Como $d(P, r) = d(P, s(t_o))$, tem-se que:

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \sqrt{(x_o + at_o - x_o)^2 + (y_o + bt_o - y_o)^2} \\ &= |t_o|\sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{|ax_o + by_o - c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{|ax_o + by_o - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Distância entre duas retas no plano

De acordo com a posição relativa das retas r e s, tem-se:

- Retas coincidentes ou concorrentes $\Rightarrow d(r, s) = 0$.
- Retas paralelas $\Rightarrow d(r, s) = d(P, Q)$, onde $P \in r$ e $Q \in s$, são tais que $\overrightarrow{PQ} \perp r$ e $\overrightarrow{PQ} \perp s$.

Exemplo 4.2.28 Calcule a distância da reta $r : x + y = 2$ à reta $s : x + y = 3$.

Solução:

Note que $P(1, 1) \in r$ e que a reta que passa por P e é perpendicular a r é da forma $t : -x + y = 0$. Desta forma, deve-se encontrar $Q \in t$, tal que $Q \in s$ e determinar $d(P, Q)$.

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ x+y=3 \end{cases}$$, que tem como solução $Q(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

Logo,

$$d(P,Q) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-1\right)^2}$$

$$d(r,s) = d(P,Q) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

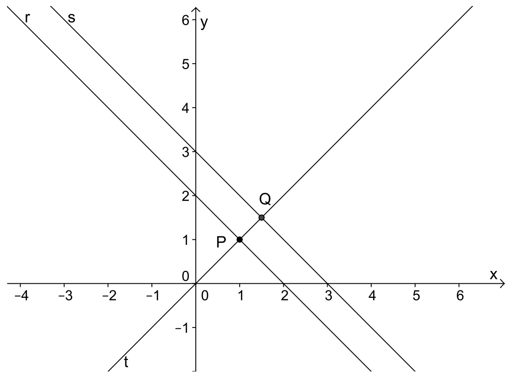

Figura 44: Visualização gráfica do exemplo 4.2.28.

Exemplo 4.2.29 Determine as equações das retas paralelas à reta $r : x + 2y = 2$ que distam 5 unidades da reta r.

Solução:
Devem-se encontrar r_1 e r_2 paralelas à r, conforme a figura 4.43, ou seja:
$r_1 : x + 2y = c_1$ e $r_2 : x + 2y = c_2$.

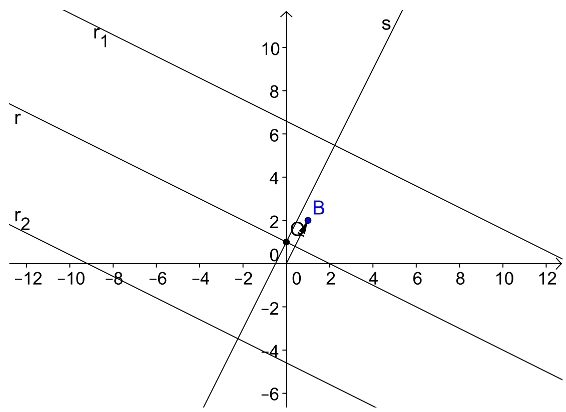

Figura 45: Representação gráfica do exemplo 4.2.29.

Observa-se, na figura 45, que $\overrightarrow{v}(1,2)$ é perpendicular a reta r e $Q(0,1) \in r$, assim $s : -2x + y = 1$ é uma reta perpendicular às retas r, r_1 e r_2 e contém Q. Seja

$P(x_p, y_p) \in r_1$ ou r_2, tem-se:

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_p - 0)^2 + (y_p - 1)^2}, \quad \text{onde} \quad y_p = 2x_p + 1.$$

$$\sqrt{x_p^2 + (2x_p + 1 - 1)^2} = 5$$

$$5x_p^2 = 25 \Longrightarrow x_p = \pm\sqrt{5}$$

$$x_p = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad y_p = 1 + 2\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x_p = -\sqrt{5} \quad \text{e} \quad y_p = 1 - 2\sqrt{5}.$$

Assim,

$$r_1 : x + 2y = 5\sqrt{5} + 2 \quad \text{e} \quad r_s : x + 2y = -5\sqrt{5} + 2.$$

Ângulo entre duas retas no plano

Definição 4.2.8 O ângulo entre duas retas $\angle(r, s)$ é, por definição:

- zero, se r e s são paralelas ou coincidentes;

- o menor dos ângulos determinados pelas retas, quando estas forem concorrentes.

Sejam r e s duas retas concorrentes. Dados $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores paralelos às retas r e s, respectivamente, então $\angle(r, s) = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ou $\angle(r, s) = \pi - \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Portanto, como $0 < \angle(r, s) \leq \frac{\pi}{2}$, tem-se:

$$\cos\angle(r, s) = |\cos\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|}.$$

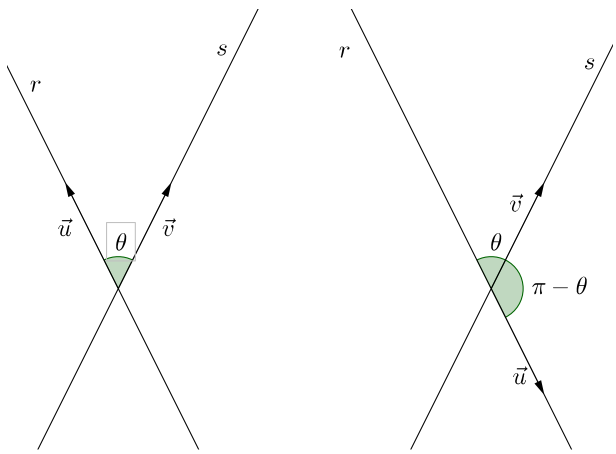

Figura 46: Ângulo entre as retas concorrentes r e s.

4.2.5 Coordenadas e vetores no espaço

Coordenadas no espaço

Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ consiste de três eixos mutuamente perpendiculares, OX, OY e OZ, com mesma origem. Denota-se por Πxy, Πyz e Πxz os planos contendo as retas OX e OY; OY e OZ; OX e OZ, respectivamente.

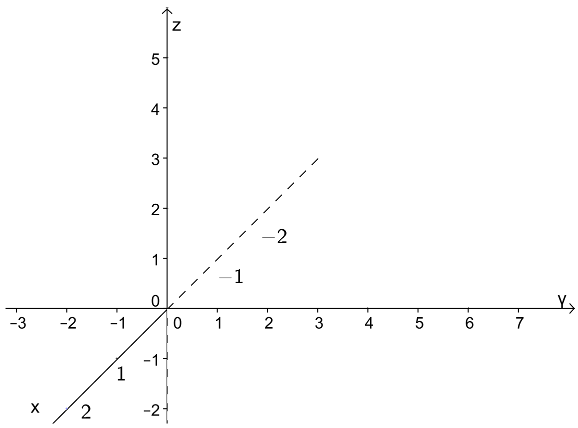

Figura 47: Representação do sistema de coordenadas ortogonais no espaço.

De maneira análoga ao plano, o espaço também estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e os ternos (x, y, z), designado por $\mathbb{R}^3$.

Para representar um ponto P no espaço, utiliza-se o terno ordenado (x_p, y_p, z_p). Na figura 48, representa-se o ponto $A(3, 4, 5)$, que pode ser visualizado como um dos vértices de um paralelepípedo.

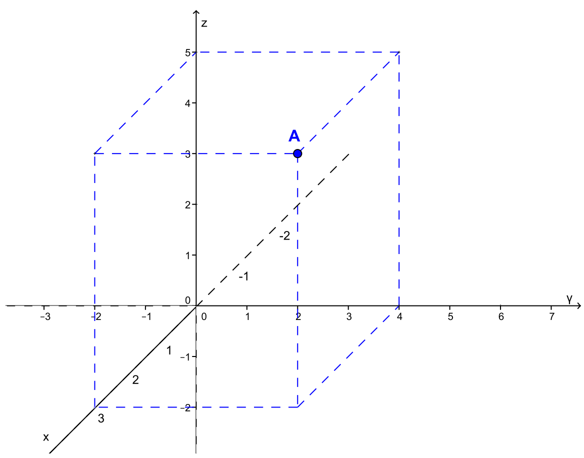

Figura 48: Representação gráfica de um ponto no espaço.

Distância entre dois pontos no espaço

A distância entre dois pontos do espaço, em um sistema cartesiano ortogonal, pode ser calculada de maneira análoga ao que foi feito no plano e sua demonstração também utiliza o Teorema de Pitágoras.

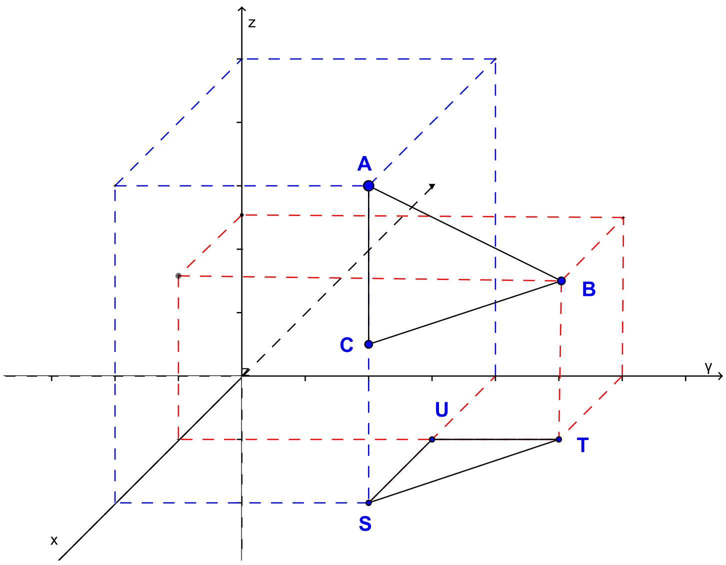

Figura 49: Representação gráfica da distância entre os pontos A e B no espaço.

Sejam $A(a, b, c)$ e $B(a_1, b_1, c_1)$, como mostra a figura.

Note que no ΔUST, de coordenadas $S(a, b, 0)$, $T(a_1, b_1, 0)$ e $U(a_1, b, 0)$, reto em U, tem-se que:

$d(S, U) = |a_1 - a|$ e $d(U, T) = |b_1 - b| \Rightarrow d(S, T)^2 = (a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2$.

Além disso, $\overline{ST} = \overline{BC} \Rightarrow d(S, T)^2 = d(B, C)^2$.

Assim, do ΔABC, reto em C pode-se concluir que:

$d(A, C)^2 = (c_1 - c)^2$ e que $d(B, C)^2 = (a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2$ e pelo Teorema de Pitágoras tem-se que:

$$d(A, B)^2 = d(B, C)^2 + d(A, C)^2$$

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 + (c_1 - c)^2}.$$

Exemplo 4.2.30 Calculando distâncias, mostre que o triângulo de lados $A(3, -1, 6)$, $B(-1, 7, -2)$ e $C(1, -3, 2)$ é retângulo.

Solução:

Calculando a distância entre os pontos obtêm-se os lados do triângulo:

$$d(A,B) = \sqrt{(-1-3)^2 + (7+1)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{144}$$
$$d(A,C) = \sqrt{(1-3)^2 + (-3+1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{24}$$
$$d(B,C) = \sqrt{(1+1)^2 + (-3-7)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{120}.$$

Para verificar se o triângulo é retângulo, usa-se o Teorema de Pitágoras.

$d(A,B)^2 = d(A,C)^2 + d(B,C)^2 \iff 144 = 24 + 120$, donde se conclui que ΔABC é retângulo.

Definição 4.2.9 Uma esfera S, de centro $C(x_o, y_o, z_o)$ e raio $r > 0$ é o conjunto de todos os pontos $P(x,y,z)$ do espaço, cuja distância ao centro é igual a r.

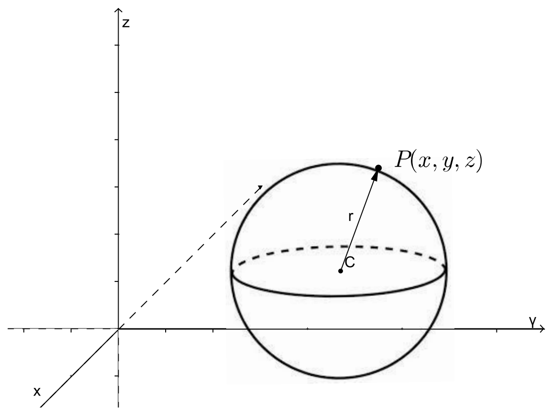

Figura 50: Representação gráfica de uma esfera, de centro c e raio r, no espaço.

Se $P \in S$ então $d(P,C) = r \iff \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2} = r$.
Assim,

$$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = r^2 \quad \text{(Equação da esfera)}.$$

Exemplo 4.2.31 Mostre que a equação abaixo é a equação de uma esfera, determinando o seu centro e o seu raio:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 15 = 0.$$

Solução:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + -6y + 9 + z^2 = 15 + 1 + 9$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 25.$$

Logo, tem-se uma esfera de centro $C(-1,3,0)$ e raio $r = 5$.

Vetores no espaço

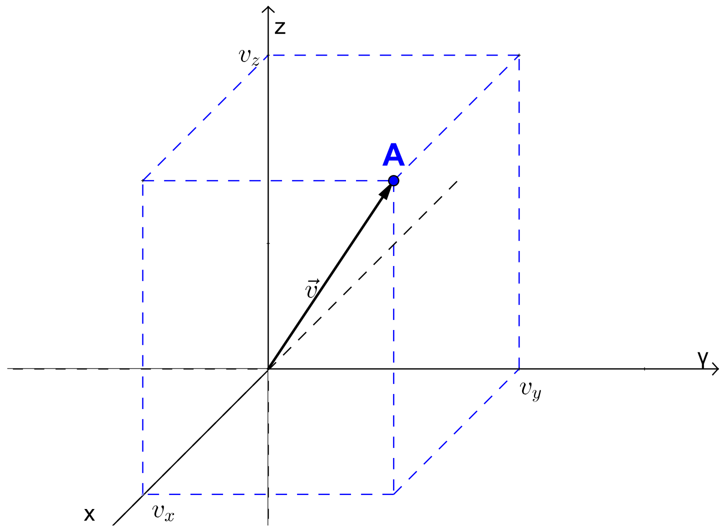

Figura 51: Representação gráfica de um vetor no espaço.

Definição 4.2.10 Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos orientados no espaço. Dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes, e representamos, $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, quando satisfazem às condições:

- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm comprimentos iguais;
- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ estão contidos em retas paralelas ou na mesma reta;
- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm o mesmo sentido.

O conjunto dos segmentos orientados do espaço é dividido em subconjuntos chamados de classes de equivalências em relação à equipolência e cada classe de equipolência é denominada um vetor do espaço.

Como no estudo de vetores no plano, dado um ponto P no espaço e um vetor $\overrightarrow{v}$, existe um único ponto Q tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Definição 4.2.11 Sejam $A(a, b, c)$ e $B(a_1, b_1, c_1)$ pontos no espaço. As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são:

$$\overrightarrow{v} = (a_1 - a, b_1 - b, c_1 - c).$$

Observação: Dados $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ e $P(a, b, c)$, o vetor $\overrightarrow{OP}$ é o representante de $\overrightarrow{v}$ na origem O do espaço.

Operações com vetores no espaço

A soma de dois vetores recai na soma de vetores no plano, visto que três pontos A, B e C estão contidos num mesmo plano.

Definição 4.2.12 Dados $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{v} = (a_1, b_1, c_1)$ vetores no espaço, seja A um ponto qualquer no espaço e $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ segmentos orientados representantes de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Define-se $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ como o vetor soma, representado pelo segmento orientado $\overline{AC}$. Em coordenadas, isso significa:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a, b, c) + (a_1, b_1, c_1) = (a + a_1, b + b_1, c + c_1).$$

De maneira análoga ao plano, dado um vetor $\overrightarrow{u}$ no espaço, existe um único vetor $-\overrightarrow{u}$, chamado de inverso aditivo de $\overrightarrow{u}$.

Definição 4.2.13 A subtração de um vetor $\overrightarrow{v}$ por um vetor $\overrightarrow{v}$ e dada pela soma com o inverso aditivo e denominada $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u})$.

Definição 4.2.14 O produto de um escalar $k \in \mathbb{R}$ por um vetor $\overrightarrow{AB}$ do espaço é o vetor $\overrightarrow{AB_1} = |k| \cdot \overrightarrow{AB}$, tal que:

- A, B e B_1 são colineares;
- $|\overline{AB_1}| = |k| \cdot |\overline{AB}|$;
- $\overline{AB}$ e $\overline{AB_1}$ tem o mesmo sentido se $k > 0$ e sentidos opostos se $k < 0$.

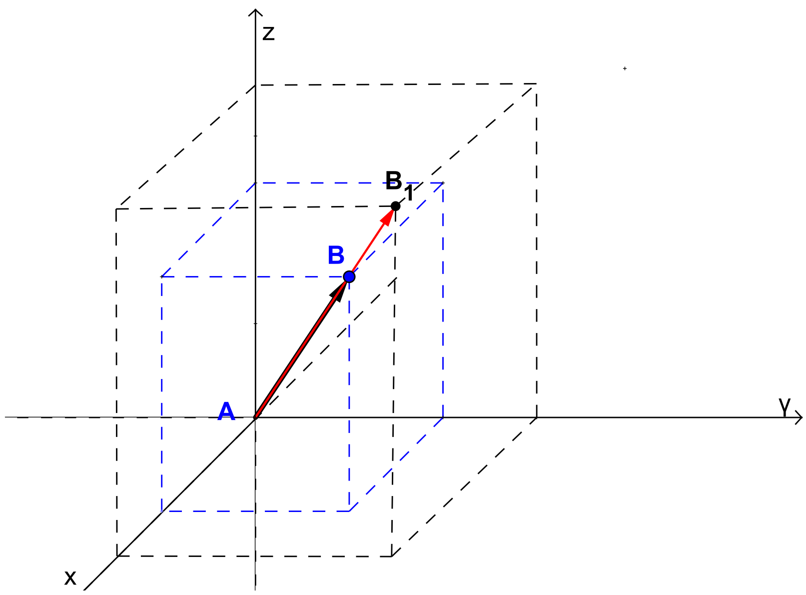

Figura 52: Representação gráfica do produto de um vetor por um escalar no espaço.

Exemplo 4.2.32 Ache as coordenadas do ponto médio M do segmento de extremidades $A(-2,4,5)$ e $B(0,1,3)$.

Solução:
O vetor $\overrightarrow{AB} = (0-(-2), 1-4, 3-5) = (2,-3,-2)$ e,
$M_{AB} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$= (-2.4,5) + \frac{1}{2}\cdot(2,-3,-2)$
$= (-2,4,5) + (1,-\frac{3}{2},-1)$
$= (-1,\frac{5}{2},4)$.
Pode-se ainda fazer a mesma conclusão do ponto médio do plano, ou seja:

$$M_{AB} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

Definição 4.2.15 Dois vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares quando um deles é múltiplo do outro.

Exemplo 4.2.33 Mostre que os pontos $A(0,1,0)$, $B(1,1,1)$ e $C(-2,1,-2)$ são colineares.

Solução:
Determinam-se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AB} = (1-0, 1-1, 1-0) = (1,0,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2-0, 1-1, -2-0) = (-2,0,-2)$.
Note que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$, donde se conclui que A, B e C são colineares.

Sabe-se que três pontos A, B e C não colineares determinam um único plano. Usa-se Π para denotar o plano no espaço que contém A, B e C.

Definição 4.2.16 Um vetor $\overrightarrow{v}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ com coeficientes $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$, se:

$$\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{v_n}.$$

Exemplo 4.2.34 Escreva o vetor $\overrightarrow{w} = (4,-6,10)$, como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v_1} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,1,-1)$ e $\overrightarrow{v_3} = (1,-1,1)$.

Solução:
Deseja-se escrever o vetor $\overrightarrow{w}$, da forma:
$\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3}$, ou seja:

$$\overrightarrow{w} = x(1,1,1) + y(1,1,-1) + z(1,-1,1).$$

Da igualdade apresentada anteriormente, pode-se obter o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+4-z=-6 \\ x-y+z=10 \end{cases}$$, que tem como solução $x=2$, $y=-3$ e $z=5$.

Portanto, o vetor $\overrightarrow{w}$ pode ser escrito como:

$$\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{v_1} - 3\overrightarrow{v_2} + 5\overrightarrow{v_3}.$$

Para saber se um ponto D pertence ou não a um determinado plano Π recorre-se ao teorema a seguir.

Teorema 4.2.2 Sejam A, B e C pontos não colineares no espaço e Π o plano por eles determinado. O ponto $D \in \Pi \iff \overrightarrow{AD}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, isto é, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AD} = k_1 \cdot \overrightarrow{AB} + k_1 \cdot \overrightarrow{AC}$.

Demonstração no apêndice (Geometria Analítica/PROFMAT).

Exemplo 4.2.35 Dados $A(1,2,3)$, $B(2,3,4)$ e $C(3,4,6)$ pontos não colineares do espaço. Verifique se o ponto $P(4,5,2)$ pertence ao plano Π determinado por A, B e C.

Solução:

Pelo teorema acima, se $P \in \Pi$ então $\overrightarrow{AP}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, ou seja:

$$\overrightarrow{AP} = k_1 \cdot \overrightarrow{AB} + k_2 \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$(3,3,-1) = k_1 \cdot (1,1,1) + k_2 \cdot (2,2,3).$$

Desta igualdade encontra-se o sistema:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 3 \\ k_1 + 3k_2 = -1 \end{cases},$$

que tem como solução $k_1 = 11$ e $k_2 = -4$. Logo, $\overrightarrow{AP} = 11 \cdot \overrightarrow{AB} - 4 \cdot \overrightarrow{AC}$, donde $P \in \Pi$.

Produto interno de vetores no espaço

As noções de norma, ângulo e produto interno de vetores no espaço são análogas às noções vistas no plano.

Definição 4.2.17 O comprimento ou norma de um vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ no espaço é dado pelo número:

$$\|\overrightarrow{v}\| = d(A,B).$$

Definição 4.2.18 Dados dois vetores no espaço $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ não nulos, o ângulo $\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$ entre eles é dado pelo menor ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, medido no plano que contém os pontos A, B e C.

Definição 4.2.19 O Produto interno de dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ no espaço, é o número real:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \overrightarrow{u} = 0 \text{ ou } \overrightarrow{v} = 0 \\ \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\theta & , \text{ se } \overrightarrow{u} \neq 0, \overrightarrow{v} \neq 0 \text{ e } \theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{cases}.$$

Proposição 4.2.5 Sejam $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{v} = (d, e, f)$ vetores do espaço, então:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f.$$

Demonstração:

A demonstração é análoga ao efetuado no plano. Se um dos vetores é nulo tem-se o resultado. Se os dois vetores são não nulos, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ} = (d, e, f)$. Logo,

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = (d, e, f) - (a, b, c) = (d - a, e - b, f - c)$.

Aplicando a lei dos cossenos, tem-se que:

$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\theta$.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\theta &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - (d-a)^2 - (e-b)^2 - (f-c)^2}{2} \\ &= a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f. \end{aligned}$$

Definição 4.2.20 O vetor $\overrightarrow{u}$ é perpendicular ou ortogonal (figura 53) ao vetor $\overrightarrow{v}$ quando o ângulo formado entre eles é reto ou quando um dos vetores é nulo, e escreve-se $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Observe que $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

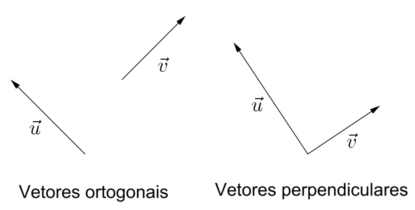

Figura 53: Representação de vetores ortogonais e perpendiculares.

4.2.6 A reta no espaço

Equações paramétricas da reta no espaço

Observe que uma equação da forma $ax + by = c$ que no plano representa a equação de uma reta, no espaço representa um plano, no qual $z \in \mathbb{R}$.

Dados dois pontos distintos $A(a, b, c)$ e $B(a_1, b_1, c_1)$ no espaço e r a reta que os contém, então:

$P \in r \iff \exists \ t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$.

Logo, $P - A = t \cdot \overrightarrow{AB} \iff P = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$.

Em termos das coordenadas, dados os pontos $A(a, b, c)$, $B(a_1, b_1, c_1)$ e $P(x, y, z) \in r$, tem-se que: $(x, y, z) = (a, b, c) + t \cdot \overrightarrow{v}$, onde $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) = (a_1 - a, b_1 - b, c_1 - c)$ é paralelo à reta r.

$$r : \begin{cases} x = a + t \cdot v_1 \\ y = b + t \cdot v_2 \\ z = c + t \cdot v_3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exemplo 4.2.36 Verifique se o ponto $A(-2, 1, -1)$ pertence à reta $r : P = (1, 2, 1) + k \cdot (3, 1, 2)$.

Solução:

Se $A \in r$, deve existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $(-2, 1, -1) = (1, 2, 1) + k \cdot (3, 1, 2)$, ou seja,

$$r : \begin{cases} -2 = 1 + 3 \cdot k \\ 1 = 2 + k \\ -1 = 1 + 2 \cdot k \end{cases} .$$

O sistema tem solução $k = -1$, logo $A \in r$.

Definição 4.2.21 Diz-se que um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é paralelo a uma reta r quando, para quaisquer pontos distintos $A, B \in r$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é um múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

Duas retas no espaço podem ser coplanares ou não. No caso das retas serem coplanares, já foram estudados três casos: paralelas, concorrentes ou coincidentes. Se as retas não forem coplanares são chamadas de reversas.

As retas $r_1 : P = A + t \cdot \overrightarrow{v}$, $t \in \mathbb{R}$, e $r_2 : P = B + s \cdot \overrightarrow{w}$, $s \in \mathbb{R}$, podem ser:

- coincidentes $\iff \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são múltiplos e $B \in r_1$ ou $A \in r_2$;
- paralelas $\iff \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são múltiplos e $B \notin r_1$ e $A \notin r_2$;
- concorrentes $\iff \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são múltiplos e $r_1 \bigcap r_2 \neq \emptyset$;
- reversas $\iff \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são múltiplos e $r_1 \bigcap r_2 = \emptyset$.

Exemplo 4.2.37 Estude a posição relativa das retas r e s, dadas por suas equações paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{e } s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Solução:

Os vetores paralelos às retas r e s são, respectivamente, $v_r(1, 2, 3)$ e $v_s(1, 1, -1)$. É fácil verificar que v_r e v_s não são múltiplos, caso contrário existiria um $k \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 = k \cdot v_2$.

Se $(1, 2, 3) = k \cdot (1, 1, -1)$, da primeira igualdade $k = 1$, da segunda $k = 2$ e da terceira $k = -3$, logo v_1 e v_2 não são múltiplos e as retas podem ser concorrentes ou reversas.

Resolvendo o sistema gerado pelas duas retas, tem-se que:

$$\begin{cases} -3 + t = \lambda \\ 2 + 2t = 2 + \lambda \\ 1 + 3t = 2 - \lambda, \quad t, \lambda \in R. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3 + t = \lambda \\ 2t = \lambda \\ 1 - 3t = \lambda, \quad t, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

O sistema não tem solução, pois das duas primeiras equações tem-se: $t = -3 \Longrightarrow \lambda = -6$, substituindo na terceira equação $1 - 3 \cdot (-3) \neq -6$. Assim as retas são reversas.

Equação simétrica da reta no espaço

Partindo-se das equações paramétricas de uma reta r, que passa pelo ponto $A(a, b, c)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, caso as três coordenadas do vetor direção $\overrightarrow{v}$ sejam todas diferentes de zero, pode-se reescrever as equações isolando o valor de t. Fazendo as igualdades, tem-se a equação simétrica da reta no espaço:

$$r: \frac{x - a}{\alpha} = \frac{y - b}{\beta} = \frac{z - c}{\gamma}.$$

Exemplo 4.2.38 Analise a posição relativa das retas r e s dadas por suas equações:

$$r: \frac{x}{2} = y - 1 = -z + 2 \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 3 + 2t \\ z = -2t \end{cases}.$$

Solução:

Pelas equações anteriormente apresentadas, pode-se concluir que:
$\overrightarrow{u} = (2, 1, -1) \parallel r$ e $A(0, 1, 2) \in r$
$\overrightarrow{v} = (4, 2, -2) \parallel s$ e $B(4, 3, 0) \in s$.
Como $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são múltiplos, as retas são paralelas ou coincidentes. Para determinar se são coincidentes ou paralelas testa-se um ponto de uma das retas na outra para saber se elas têm ponto em comum, por exemplo, se $B \in r$.

Substituindo B em r tem-se:

$$\frac{4}{2} = 3 - 1 = 0 + 2, \quad \text{donde se conclui que as retas são coincidentes.}$$

Exemplo 4.2.39 Verifique se as retas r e s, dadas a seguir por suas equações, são ortogonais (podem ser concorrentes ou reversas); em caso afirmativo, se são também perpendiculares (são obrigatoriamente concorrentes).

$$r: \frac{x-4}{2} = y - 4 = -z \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 3t, \quad t \in R \end{cases}.$$

Solução:

Os vetores $v_s = (2, 1, -1)$ e $v_s = (1, 1, 3)$ são paralelos às retas r e s, respectivamente. Como $\langle (2, 1, -1), (1, 1, 3) \rangle = 2 + 1 - 3 = 0$, então os vetores são ortogonais ou perpendiculares. Para verificar se são perpendiculares ou apenas ortogonais é necessário avaliar se o sistema formado pelas retas tem solução.

$$\frac{-3 + t - 4}{2} = t - 4 = -3t \Longrightarrow t = 1.$$

Como o sistema possui solução para t=1, as retas possuem ponto comum, logo são perpendiculares.

4.3 Leitura complementar sobre vetores paralelos e normais à uma curva.

No estudo da reta no plano vê-se que é possível identificar, a partir da equação da reta, vetores paralelos e, consequentemente, vetores normais (perpendiculares). Nessa seção deseja-se mostrar o mesmo tipo de interpretações de vetor normal e tangente para curvas mais gerais no plano.

Definição 4.3.1 - Sejam as curvas em $\mathbb{R}^2$, $C(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [a, b] \in \mathbb{R}$.

$$x, y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{deriváveis.}$$

- Uma base $\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\}$ do plano é positiva se, dados $\overrightarrow{V_1} = (a, b)$ e $\overrightarrow{V_2} = (c, d)$, $ad - bc = 0$, ou, equivalentemente, $\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\}$ tem a mesma orientação de $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

- Vetor tangente unitário (mesma inclinação da derivada):

$$T(s) = \frac{c'(s)}{||c'(s)||}$$

- Vetor normal unitário:

$$||N(s)|| = 1, \quad \langle N(s), T(s) \rangle = 0$$

Note que, se N é um vetor unitário normal, $-N$ também será. Para fixar a notação escolhe-se o normal unitário N de modo que $\{T(s), N(s)\}$ seja uma base positiva.

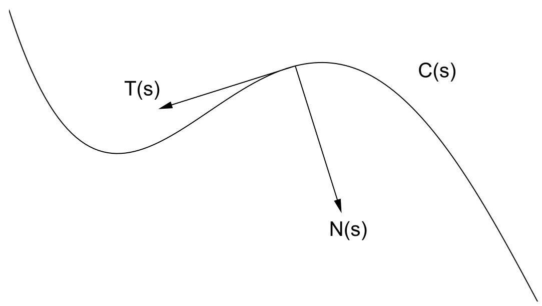

Figura 54: Representação do vetor normal e do vetor tangente em um ponto da curva C(s).

Exemplo 4.3.1 Reta

$C(s) = (s, as + b)$, $s \in \mathbb{R}$ descreve a reta.

$$C'(s) = (1, a) \Longrightarrow T(s) = \frac{(1, a)}{\sqrt{1 + a^2}}$$

$$N(s) = \frac{(-a, 1)}{\sqrt{1 + a^2}}$$

O vetor normal unitário à reta é constante e só depende da inclinação da reta (coeficiente angular).

Exemplo 4.3.2 Elipse centrada na origem.

$C(s) = (a \cdot \cos(s), b \cdot sen(s))$ descreve a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

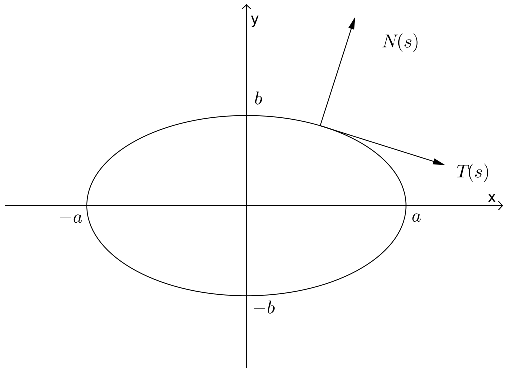

Figura 55: Representação gráfica da elipse do exemplo 4.3.2.

$C'(s) = (-a \cdot sen(s), b \cdot \cos(s))$

$$T(s) = \frac{(-a \cdot sen(s), b \cdot \cos(s))}{\sqrt{a^2 sen^2 s + b^2 cos^2 s}}$$

$$N(s) = -\frac{(b \cdot \cos(s), a \cdot sen(s))}{\sqrt{a^2 sen^2 s + b^2 cos^2 s}}.$$

Exemplo 4.3.3 Gráficos de funções deriváveis

$C(s) = (s, f(s))$ $s \in \mathbb{R}$ descreve o gráfico de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$T(s) = \frac{C'(s)}{||C'(s)||} = \frac{(1, f'(s))}{\sqrt{1 + (f'(s)^2)}}$$

$$N(s) = \frac{(-f'(s), 1)}{\sqrt{1 + (f'(s)^2)}}$$

Observe que $\langle N(s), (0,1) \rangle > 0$, geometricamente $N(s)$ e $(0,1)$ formam um ângulo menor que 90° ao longo do gráfico $C(s)$, pois

$$\langle (0,1), N(s) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(s)^2)}} > 0.$$

O estudo do vetor normal unitário N(s) facilita a visualização da curva. Além disso, toda a informação de C(s) está contida em N(s), ou seja,

Afirmação: A curva $C(s)$ pode ser recuperada a partir de seu vetor normal $N(s)$.

Exemplo 4.3.4 Se $C(s)$ é uma curva tal que o vetor normal $N(s) = N(0)$ é constante, então $C(s)$ é uma reta normal a $N(0)$. De fato, tem-se que:

$$0 = \langle N(s), C'(s)\rangle = \langle N(0), C'(s)\rangle = \frac{d}{ds}\langle N(0), C(s)\rangle.$$

Logo, existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $\langle N(0), C(s)\rangle = k$.

Se $N(0) = (a,b)$ e $C(s) = (x(s), y(s)) \Longrightarrow a \cdot x(s) + b \cdot y(s) = k$, donde se conclui que $C(s)$ é uma reta perpendicular a $N(0)$.

Exemplo 4.3.5 Seja $||N(s)|| = 1$ vetor unitário, com $N = (N_1, N_2)$. Suponha que

$$\langle N(s), (0,1)\rangle > 0, \forall s,$$

ou seja, $N_2(s) > 0, \forall s$ e, neste caso, a afirmação acima é satisfeita, isto é, existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $N(s)$ é o normal de $C(s) = (s, f(s))$, gráfico da função f.

Assim, achar a função f equivale a resolver uma equação diferencial:

$$N(s) = \frac{(-f', 1)}{\sqrt{1 + (f')^2}}$$

A solução é dada por:

$$f\left(\int_0^s N_2(t)dt\right) = -\int_0^s N_1(t)dt$$

Observe que $N = (N_1, N_2)$ e que a função f é bem definida porque $N_2(s) > 0$ implica que

$$s \mapsto \int_0^s N_2(t)dt \quad \text{é função crescente, logo, bijeção.}$$

Verifica-se que a função f funciona, desde que:

$$C(s) = \left(\int_0^s N_2(t)dt, f\left(\int_0^s N_2(t)dt\right)\right) = \left(\int_0^s N_2(t)dt, -\int_0^s N_1(t)dt\right).$$

$$C'(s) = (N_2(s), -N_1(s))$$

$$T(s) = C'(s), \quad \text{pois} \quad ||(N_2, -N_1)|| = 1$$

$$N(s) = (N_1, N_2)(s), \forall s.$$

Na verdade, não é necessário ter-se todas as informações do vetor normal $N(s)$ para recuperar a curva $C(s)$. Note que $N(s) = (N_1(s), N_2(s))$ contém informações de duas funções, $N_1(s)$ e $N_2(s)$ que são as duas coordenadas de $N(s)$. O ente que se usa é a curvatura de $C(s)$, definido por $k(s) = \langle T'(s), N(s)\rangle$ caso $C(s)$ seja tal que $||C'(s)|| = 1$.

Pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas, $k(s)$ determina $C(s)$ a menos de translações e rotações.

Exemplo 4.3.5 Teorema Fundamental das Curvas Planas: Seja $K : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^{∞}. Então dados $s_o \in I$, $P(P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$ e $V_o(V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2$, com $||V_o|| = 1$, existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que a curvatura em cada ponto $\alpha(s)$ é dada por $k(s)$, $\alpha(s_o) = P$ e $\alpha'(s_o) = V_o$

(ALENCAR, 2013, p. 55-56).

5 CONCLUSÃO

A orientação para o uso de vetores no estudo de geometria analítica é uma recomendação das Orientações Curriculares do Ensino Médio (2006), que não vem sendo adotada pelos livros didáticos deste nível, excetuando-se o livro Dante (2005) que apresenta vetores, mesmo que em uma unidade opcional no capítulo de determinantes. O livro mais próximo do que sugerem os PCNEM, o PCN+ e as OCEM é o livro Ceará (2004), que tem como autores professores da UFC, mesmo assim não aborda a noção de vetores.

Mesmo com a solicitação das OCEM de que sejam evitados procedimentos sem significado para o aluno, a maioria dos livros didáticos analisados ainda abusa da utilização de métodos práticos, com uso de determinantes de ordem 3, como ocorre na condição de alinhamento de três pontos e na determinação da equação da reta. Também se observou muito o uso de fórmulas para determinar a distância entre ponto e reta e entre retas, o que pode até tornar os cálculos menores, mas trata-se de um trabalho mecânico e sem significado geométrico.

Acredita-se que o material elaborado possibilita uma nova abordagem para pontos importantes da geometria analítica, como: condição de alinhamento de três pontos, equação da reta no plano, além de uma introdução ao estudo da geometria espacial. Em diversos momentos foi possível deixar claro que o uso de vetores possibilita outras maneiras, diferentes das utilizadas atualmente, para se pensar e resolver os problemas e que a construção geométrica é indispensável para dar significado às equações.

Ressalta-se a importância de utilizar vetores paralelos e normais às retas, que possibilitam uma melhor compreensão das diversas formas de apresentação das retas e das posições relativas, tanto no plano como no espaço. Constatou-se, através das demonstrações e dos exemplos, que o conhecimento de vetores facilita cálculos e tornam mais clara a visualização geométrica.

Outro ponto importante deste estudo foi a verificação de que o mesmo tipo de interpretação de vetor normal e tangente feito para a reta, também é válido para curvas mais gerais no plano.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. **Geometria diferencial das curvas planas**. Disponível em:<www.im.ufal.br/posgraduacao/posmat/livro.geometria.diferencial.das.curvas.planas.02.07.2013.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2014.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a matemática**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2010. v. 3

BRASIL. **Lei 9394/96**. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: Senado Federal, 1996.

BUCCHI, Paulo. **Curso prático de matemática**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 1998. v. 3

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria analítica**. 3 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CEARÁ. Secretaria de Educação Básica. Coordenadoria de Desenvolvimento Técnico Pedagógico. Célula de Ensino Médio. Núcleo de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. MAZULO, Antônio de Pádua Raposo (Org). **Construindo a Matemática**: ensino médio. Fortaleza: SEDUC, 2004.

CETEB, **Projeto Piracema**: ensino médio. 2000. v. 3

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. Volume único: livro do professor. 1 ed. São Paulo: Ática, 2005.

DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; DEGENSZAJN, David Mauro. **Matemática**: volume único: manual do professor. São Paulo: Atual, 1997.

DOMINGUES, Hygino H.; Iezzi, Gelson. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

DOMINGUES, Hygino H. **Surgimento da geometria analítica**. Disponível em:<www.somatematica.com.br/historia/analitica.php>. Acesso em 05/02/2014.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática**: ciência e aplicação: ensino médio. 5 ed. São Paulo: Atual, 2010. v. 3

LEHMANN, Charles H. **Geometria analítica**. 9 ed. São Paulo: Globo, 1998.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 3

LONGEN, Adilson. **Matemática**: uma atividade humana, ensino Médio. Curitiba: Base Editora, 2003. v. 3

MACHADO, Antônio dos Santos. **Aprender e aplicar matemática**. 1 ed. São Paulo: Atual, 2011. v. 3

MEC. **Orientações curriculares para o ensino médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. v. 2

MEC. **PCN + Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2002.

MELLO, Dorival A. de; WATANABE, Renate G. **Vetores e uma iniciação à geometria analítica**. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2011.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2009. v. 3

PROFMAT, **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROSA, Marcio Antônio de Faria. **Geometria analítica e vetores**: atualidade e simplicidade no ensino da geometria. 2003. Disponível em http://www.ime.unicam.br/ marcio/hpteia/vect01/vect01.htp. In. FARIAS, Ademaria Ferreira do Nascimento. 2012.Disponível em http://pt.slideshare.net/bibliotecauneb7/monografia-ademaria-matemtica-2012. Acesso em: 21/01/2014.

SANT'ANNA, Blaidi et al. **Conexões com a física**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2010. v. 1

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez Vieira. **Matemática**: ensino médio. 7 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**. 1 ed. São Paulo: FTD: 2010. v. 3

VYGOSTKY, L. Semenovich. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

APÊNDICE - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 4.2.2 (Geometria Analítica, PROFMAT, 2012, Unidade 13, p. 20)

($\Longrightarrow$) Suponhamos primeiro que $D \in \Pi$.

Seja r_1 a reta paralela a $\overrightarrow{AC}$ que passa por D e seja r_2 a reta paralela a $\overrightarrow{AB}$ que passa por D.

Então, r_1 está contida no plano Π e intersecta a reta que contém os pontos A e B num ponto D_1. Analogamente, r_2 está contida no plano Π e intersecta a reta que contém os pontos A e C num ponto D_2.

Como os pontos A, B e D_1 são colineares, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AD_1} = x\overrightarrow{AB}$.

Também, como os pontos A, C e D_2 são colineares, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AD_2} = y\overrightarrow{AC}$.

Logo, sendo AD_1DD_2 um paralelogramo,
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD_2} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos agora que $\overrightarrow{AD}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Isto é, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço tal que a origem O é o ponto A e os eixos OX e OY estejam sobre o plano Π. Assim, neste sistema de eixos, $\Pi = \Pi_{XY}$.

Sendo as terceiras coordenadas de A, B e C iguais a zero e
$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, concluímos que a terceira coordenada do ponto D é também igual a zero. Logo, $D \in \Pi_{XY} = \Pi$.