UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO DE MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

JOSIVALDO NASCIMENTO DOS PASSOS

USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE RETAS E PLANOS

São Luís
2014

JOSIVALDO NASCIMENTO DOS PASSOS

USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE RETAS E PLANOS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Maranhão para obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Félix Silva Costa

São Luís
2014

Passos, Josivaldo Nascimento dos
Uso do Geogebra no ensino de retas e planos/ Josivaldo Nascimento dos Passos . — 2014.
93 f.
Impresso por computador (Fotocópia).
Orientador: Felix Silva Costa
Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, Programa de Mestrado Profissional em Matemática, 2014.
1. Software matemático 2. Geogebra 3. Ensino I. Título
CDU 51:004.4

JOSIVALDO NASCIMENTO DOS PASSOS

USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE RETAS E PLANOS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Maranhão para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 28 de abril de 2014

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Felix Silva Costa - UEMA (Orientador)

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva - UFMA

Prof Dr. Moisés dos Santos Cecconello

"Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana, seja apenas outra alma humana." Carl Jung

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por se fazer presente em todos os momentos de minha vida, em particular, durante essa árdua caminhada, me dando saúde e força para suportar uma intensa maratona de viagens e longos dias de estudo e pesquisa.

Presto meus agradecimentos aos meus pais, por serem suportes, nos momentos de insegurança e confiarem em mim a todo momento.

Agradeço aos meus irmãos, por serem motivadores e incentivadores nessa eterna busca por conhecimentos.

Agradeço, em especial à Francilucia, minha esposa, por me apoiar nos momentos mais difíceis, dando a mim suporte para ultrapassar barreiras, que pareciam intransponíveis.

Agradeço ao Brendow, meu filho (autista), que deu à minha vida um novo sentido, me motivando a ser uma pessoa melhor e um profissional cada vez mais dedicado.

Resumo

Este Trabalho de Conclusão de Curso sugere uma sequência de atividades para desenvolver conteúdos de Geometria Analítica, particularmente retas e planos, com alunos do Ensino Médio, tendo em vista que a necessidade do uso de Softwares educacionais em todas as áreas da educação cresce à medida que as tecnologias estão cada vez mais presente no dia a dia dos nossos alunos na educação básica.

O *Geogebra*, um software matemático, vem sendo utilizado no ensino aprendizagem de matemática em boa parte das escolas publicas do Brasil, porém, o mesmo não acontece nas escolas da Rede Estadual no Município de Açailândia-MA. Assim sendo, apresentamos aqui um trabalho que visa motivar o uso dessa importantíssima ferramenta de fácil manuseio e de riquíssimos recursos na construção, visualização e modificação de figuras geométricas, entre outras funções de uso contínuo no ensino de matemática.

Palavras-chaves: *Geogebra*, software matemático, ensino.

Abstract

This Labor Completion of course suggests a sequence of activities to develop content Analytic Geometry, particularly lines and planes, with high school students, given that the need of using educational software in all areas of education grows as technologies are increasingly present in the daily lives of our students in basic education.

The *Geogebra*, a mathematical software, is being used in the teaching and learning of mathematics in much of the public schools in Brazil, however, the same does not happen in schools in the State Network in the Municipality of Açailândia-MA. So, here is a work that seeks to motivate the use of this important tool easy to use and very rich resources in the construction, visualization and modification of geometric figures, among other functions continuous use in teaching mathematics.

Keywords: *Geogebra, mathematical software, teaching.*

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Diante do constante avanço das tecnologias, faz-se necessário o uso de ferramentas computacionais na educação de uma forma geral, em particular, no ensino de Matemática. Em pleno século XXI com o uso da informática e todo avanço tecnológico, ainda é comum, na prática docente algumas fragilidades nessa área. Acreditasse que o professor, possivelmente, em sua formação, não teve a oportunidade de acesso ao conhecimento necessário para o uso desta ferramenta. Vale ressaltar que os nossos alunos, em sua maioria, já possuem uma maior facilidade de aceitação e uso destas tecnologias, pois já nasceram nesta era digital e desde cedo já vivenciam o uso destas, fazendo com que os recursos do computador lhe sejam mais agradáveis e fáceis de serem utilizados.

Em sua Tese de Doutorado, Allevato, diz que

> "Na Educação Matemática, várias pesquisas vêm sendo realizadas e é, também, bastante extensa e variada a produção. A literatura mostra, no caso específico do computador, que a maneira de utilizá-lo no ensino de Matemática foi gradualmente modificada. De qualquer modo as observações, feitas nos estudos já realizados, geralmente indicam que o comportamento dos estudantes que usam essa tecnologia informática (TI) parecia diferente dos demais, ou seja, daqueles que não tinham contato com ela. Em linhas gerais, essas pesquisas trazem evidências de que a utilização dos computadores nos ambientes de ensino de Matemática conduz os estudantes a modos de pensar e de construir conhecimento que são típicos do ambiente informático e, por vezes, favoráveis à aprendizagem de conteúdos ou à compreensão de conceitos matemáticos. Tais pesquisas destacam aspectos como o uso regular de representações múltiplas, a construção do conhecimento como rede de significados, as discussões desses significados com os colegas e com o professor, entre outros" (ALLEVATO, 2005, P. 73).

Nos último anos, tem-se notado uma grande dificuldade dos alunos do Ensino Médio, nas Escolas Estaduais no Município de Açailândia-MA, no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de Geometria, em particular, no de retas e planos no plano cartesiano, tendo em vista, que a mesma, faz uma relação entre os conceitos de Geometrica Plana e a Álgebra. Acreditasse que haja uma dificuldade no ensino-aprendizagem desses dois temas, em especial o primeiro, nas séries/anos anteriores, devido entre ouros fatores, à não devida utilização dos recursos computacionais para o ensino de Matemática.

Ao longo do trabalho, procuramos dá um enfoque teórico, seguido sempre de atividades propostas, a serem respondidas primeiramente sem o uso do Geogebra. Em seguida propomos a resolução das mesmas com o uso do Geogebra. Ressalto ainda, que algumas dessas atividades são resolvidas e ilustradas das respectivas figuras e outras são deixadas a cargo do leitor.

No Capítulo 1, fazemos uma breve apresentação do *Geogebra*, de alguns recursos e algumas ferramentas, que serão utilizadas ao longo dos demais capítulos. Por sua vez no

Capítulo 2, apresentamos o plano cartesiano, seguido de uma rápida explanação sobre vetores, no plano e no espaço.

Seguimos o nosso trabalho, falando no Capítulo 3, fazemos o estudo da reta, onde destacamos entre outros tópicos: posições relativas de duas retas, formas da equação da reta, condições de paralelismo e de perpendicularismo, etc. Por fim, no Capítulo 4, fazemos um estudo das retas no espaço e de planos, pois entendemos, que em vista dos alunos nesse nível da educação básica, ja terem o contato com a *Geometria Espacial*, possibilita um estudo, mesmo que básico, do contexto analítico dos mesmos.

Capítulo 1

O Geogebra

O *Geogebra* é um software (livre) de matemática dinâmica, que permite trabalhar, em sala de aula, com **GEO**metria, ál**GEBRA** e o cálculo. Segundo Zulatto (2002 p. 19), "O termo geometria dinâmica foi originalmente usado por Nick Jackiw e Steve Rasmussen, de forma genérica, apenas com a intenção de ressaltar a diferença entre os softwares de Geometria Dinâmica e outros softwares de Geometria. Os que são de Geometria Dinâmica possuem um recurso que possibilita a transformação contínua, em tempo real, ocasionada pelo "arrastar" (Goldenberg e Cuoco, 1998)."

O software *Geogebra* recebeu entre outros, os seguintes prêmios internacionais:

- EASA 2002 - European Academic Software Award (Ronneby, Suécia).
- Learnie Award 2003 - Austrian Educational Software Award (Viena, Áustria).
- Digita 2004 - German Educational Software Award (Colônia, Alemanha).
- Comenius 2004 - German Educational Media Award (Berlim, Alemanha).

O *GeoGebra* é um programa intuitivo e autoexplicativo. Assim sendo, os usuários não precisam ter conhecimentos avançados em informática. O ponto crucial no uso do *Geogebra* no ensino-aprendizagem de Matemática é o conhecimento matemático do professor e sua interação na sala de aula e claro o domínio do software.

De maneira geral, o *Geogebra* pode auxiliar no estudo de diversos conteúdos matemáticos. Em face de sua potencialidade, destacamos abaixo alguns dos conteúdos e conceitos que podem ser explorados por meio de seus recursos:

- O estudo de figuras planas, podendo explorar conceitos como perímetros, áreas; os Teoremas de Tales e Pitágoras, semelhança de triangulo, bissetriz de um ângulo, mediatriz, mediana, Teorema do ângulo externo, trigonometria no triângulo retângulo, e muitos outros.
- Plano cartesiano, funções polinomiais, funções trigonométricas, círculo trigonométrico, geometria analítica, probabilidade e estatística, seções cônicas, cônicas, integral e derivada, etc.

Para fazer o download do software, bem como, adquirir todas as informações de instalação e o tutorial contendo instruções de uso e exemplos do GeoGebra basta acessar o site : http://www.geogebra.org/cms/pt-BR/.

1.1 Familizariando-se com o Geogebra

O GeoGebra fornece três diferentes vistas dos objetos matemáticos: a Zona Gráfica, a Zona Algébrica ou numérica, e a Folha de Cálculo. Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representaçãoes: graficamente (pontos, gráficos de funções), algebricamente (coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados. [1]

Ao acessar o *Geogebra*, temos a seguinte janela:

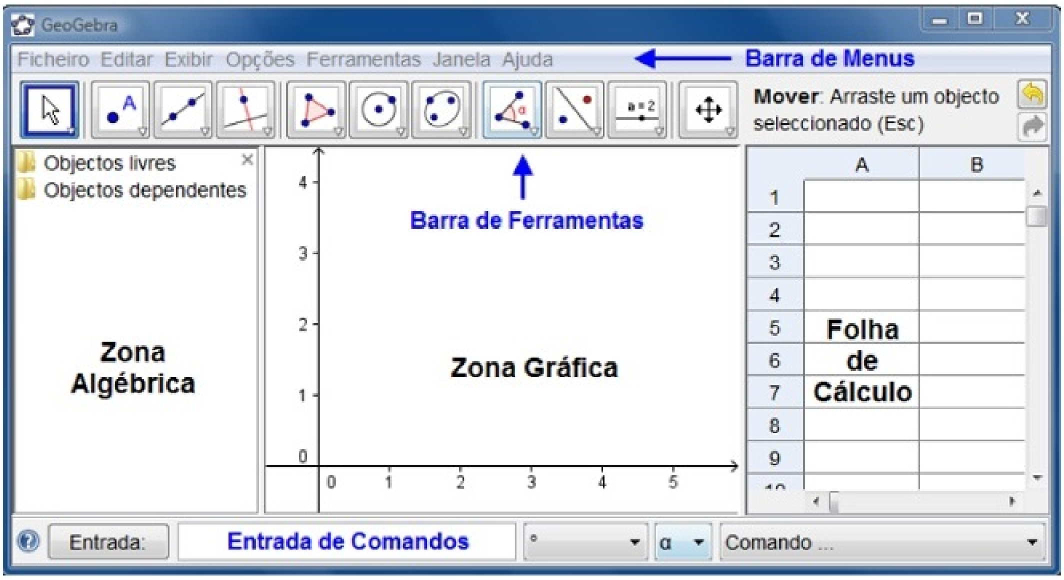

Figura 1.1: Tela inicial do Geogebra

De acordo com a Figura 1.1, temos as barras de menus e de ferramentas, a entrada de comandos, além das três diferentes vistas dos objetos matemáticos: Zona Gráfica, Zona Algébrica ou numérica e a Folha de Cálculo.

1.1.1 Barra de Menus

Possui 7 comandos que permitem entre outras coisas, alterar/salvar os arquivos criados.

1.1.2 Barra de ferramentas

Possui 11 janelas, que doravante, serão contados da direita (da tela) para a esquerda, as quais apresentam várias ferramentas que podem ser visualizadas clicando no drop-down list (lista suspensa) de cada ícone.

1.1.3 Entrada de comando

Espaço destinado à entrada dos comandos/condições que definem os objetos. Neste, escrevemos as equações, funções e coordenadas dos pontos e teclamos enter para

[1] Retirado de **Ajuda GeoGebra** Manual Oficial da Versão 3.2

representá–los na janela de gráficos. [2].

1.1.4 Zona Gráfica

Pode-se realizar construções geométricas na *Zona Gráfica* de dois modos:

1. Selecionando um objeto qualquer na *Barra de Ferramentas*;

2. Digitando o objeto na *Entrada de Comandos*.

Cada objeto criado na *Zona Gráfica* têm também uma representação na *Zona Algébrica*. Pode-se mover alguns objetos (livres), utilizando o botão mover da *Barra de Ferramentas*, sendo que, ao passo que se move os objetos, suas representações na *Zona Algébrica*, são atualizadas automaticamente.

Podemos "fixar" um objeto, isto é, fazer com que o mesmo não seja modificado e ou arrastado na *Zona Gráfica*. Para tanto, clique com o botão direito do mouse sobre o objeto, em *Propriedades*, na guia *Básico*, marque a opção *Fixar Objeto*.

1.1.5 Zona Algébrica

Usando a *Entrada de Comandos* pode inserir diretamente expressões algébricas no GeoGebra. Após ter clicado a tecla Enter, a expressão algébrica digitada aparece na *Zona Algébrica* e a respectiva representação gráfica aparece na Zona Gráfica. Por exemplo, inserindo $f(x) = x^2$, aparece a função f na *Zona Algébrica* e o respectivo gráfico na *Zona Gráfica*.

Na *Zona Algébrica*, os objetos matemáticos são organizados em duas classes: *Objetos Livres* e *Objetos Dependentes*. Ao se criar um novo objeto sem que para tal se use qualquer objeto existente, ele é classificado como *Objeto Livre*. Por outro lado, se o seu novo objeto for criado com recurso relacionando-o a objetos já existentes, ele é classificado como *Objeto Dependente*.[3] Por exemplo, inserindo os pontos $A = (-3, 2), B = (2, 4)$ e $C = (-3, 4)$ e criando, com o botão *Polígono*, o triângulo ABC, aparecerão na *Zona Algébrica*, como *Objetos Livres* os referidos pontos, pois os mesmos podem ser modificados e, os *Objetos Dependentes* $a = 5, b = 2$, $c = 5,39$ e $pol1 = 5$, indicando as medidas dos lados e a área do triângulo, pois os mesmos dependem das posições dos vértices A, B e C, como indicado na Figura 1.2.

Se não quisermos que um objeto apareça na *Zona Algébrica*, podemos defini-lo, como *Objeto Auxiliar*, que por padrão, não é exibido na mesma. Para tanto, clique com o botão direito do mouse sobre o objeto, em *Propriedades*, como na Figura 1.3.

Na guia *Básico*, marque a opção *Definir como Objeto Auxiliar* (Figura 1.4). Observe que $pol1 = 5$ deixou de ser exibido na *Zona Algébrica*.

Além disso, podemos modificar os *Objetos Livres* na *Zona Algébrica*. O mesmo pode ser feito de dois modos, a saber:

1. Estando a ferramenta *Mover* ativa, dê um duplo clique sobre o objeto, abre-se uma pequena caixa, com fundo azul, pronta para que sejam feitas as devidas modificações, após fazê-las, confirme clicando em *Enter* (Figura 1.5).

2. Clique com o botão direito sobre o objeto, em *Propriedades*, na guia *Básico*, faça as alterações necessárias e feche a caixa.

[2](alguns comandos podem ser representados direto através da barra de ferramentas)

[3]Fonte: http://www.geogebra.org/help/docupt$_PT.pdf$

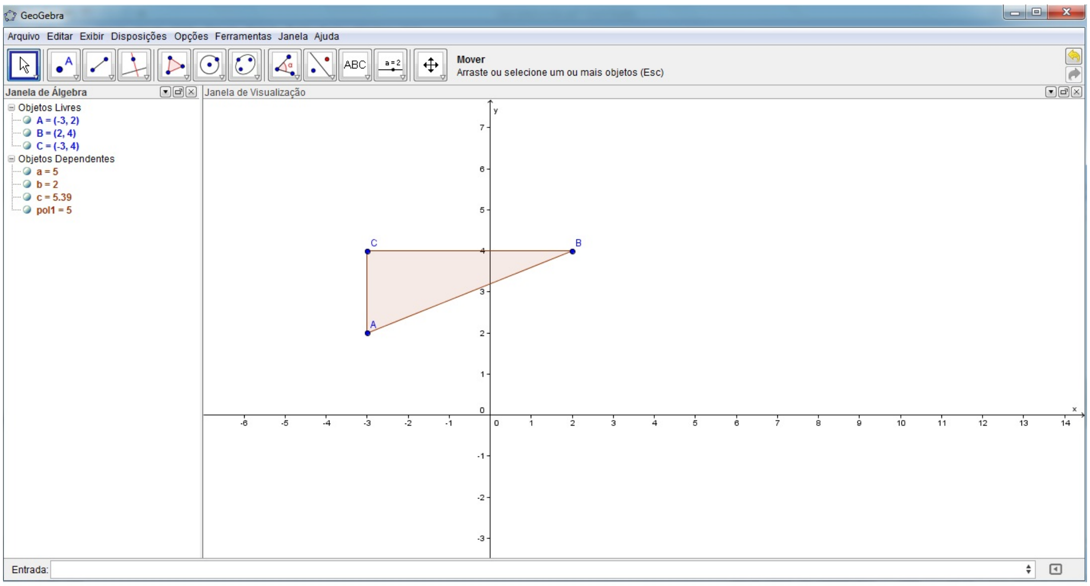

Figura 1.2: Objetos livres e Dependentes

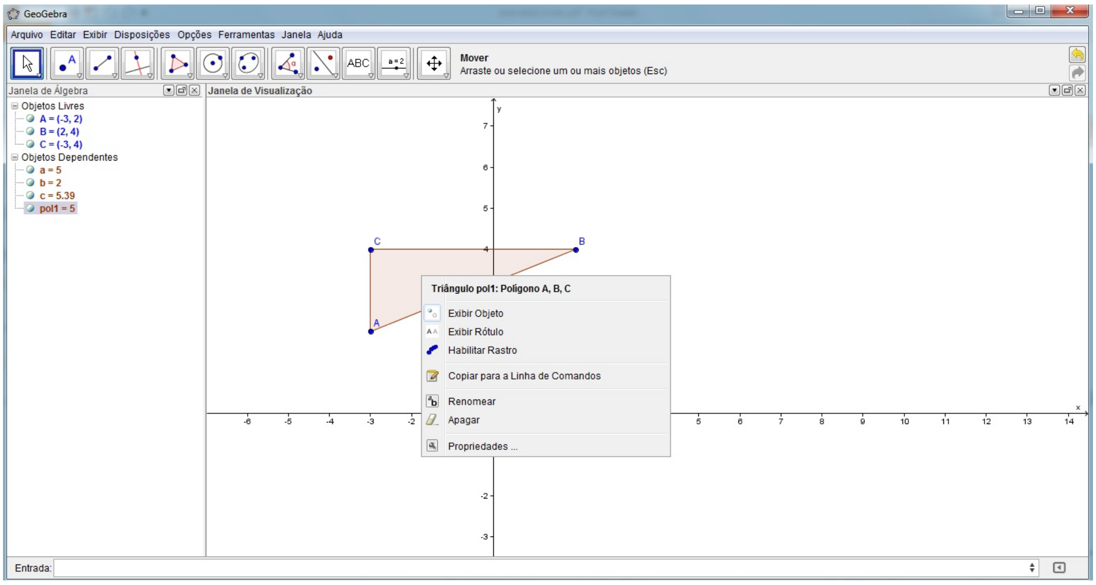

Figura 1.3

Esse último modo, bem como o resultado do mesmo, são mostrados nas Figuras 1.6 e 1.7.

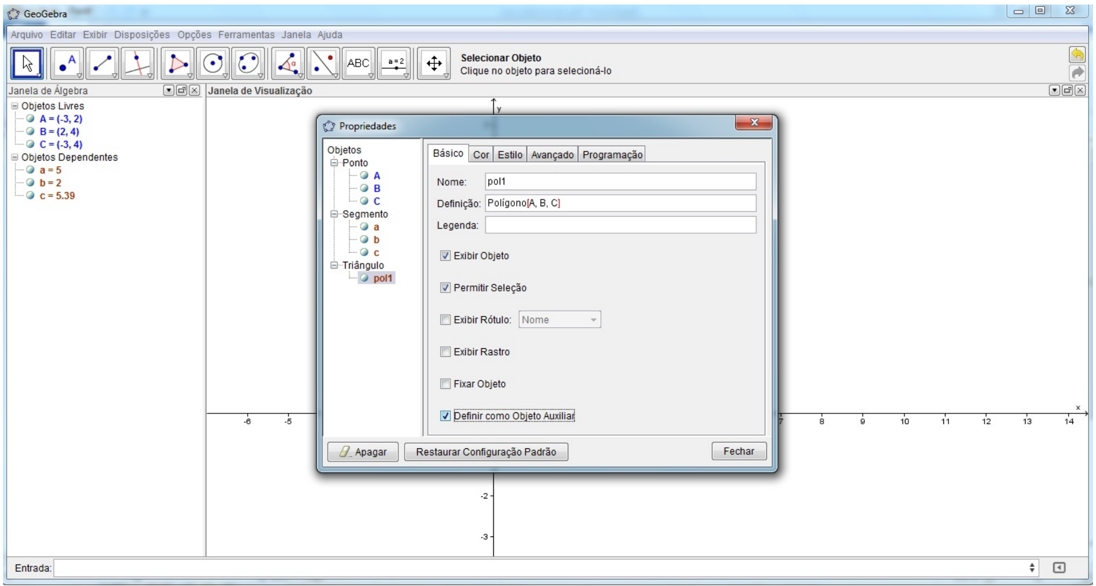

Figura 1.4

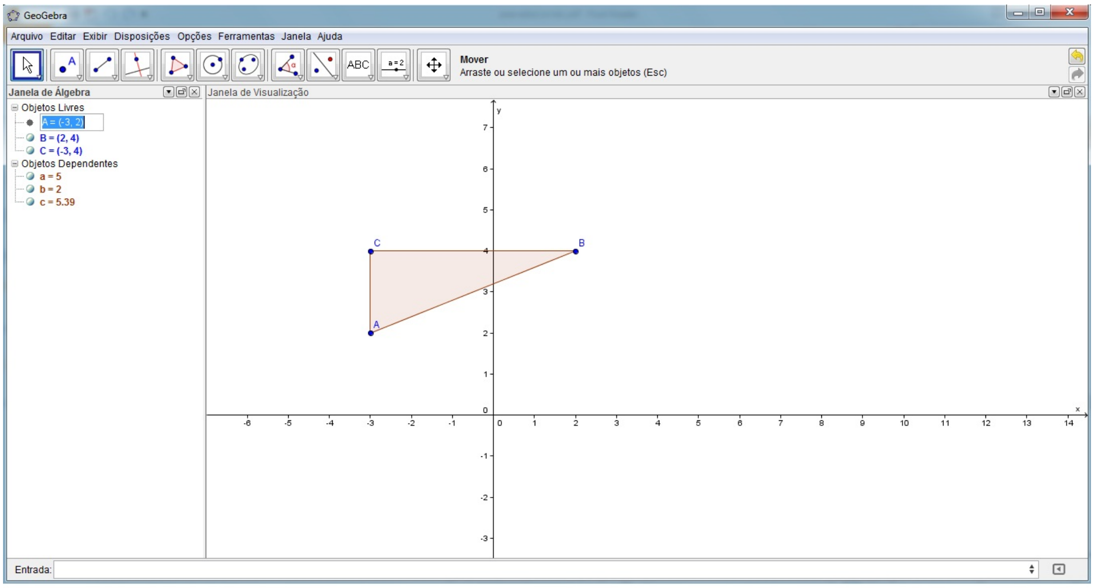

Figura 1.5: Modificando um objeto

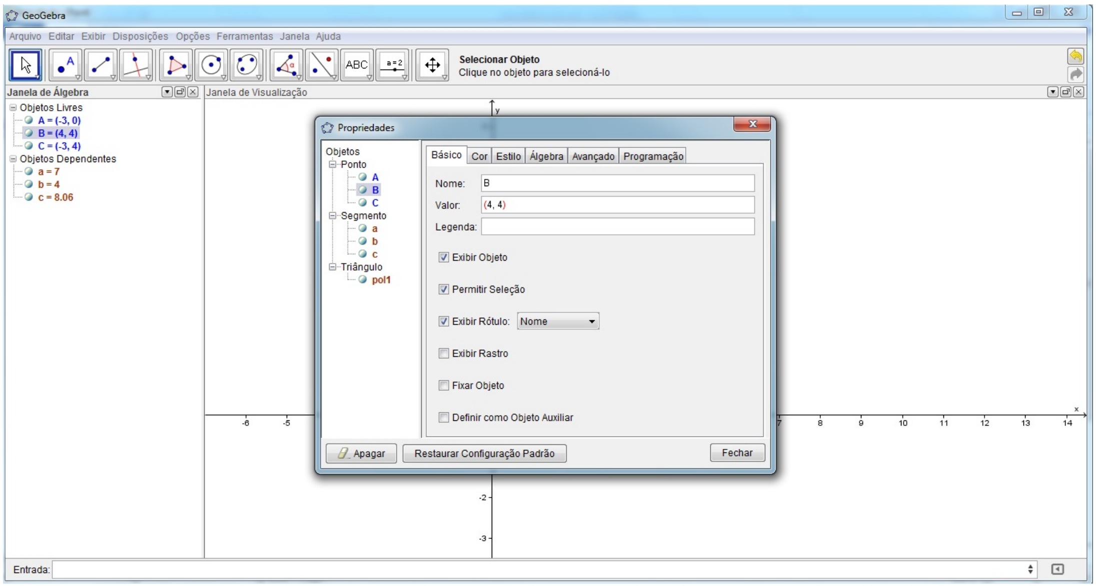

Figura 1.6: Modificando um objeto com o botão direito

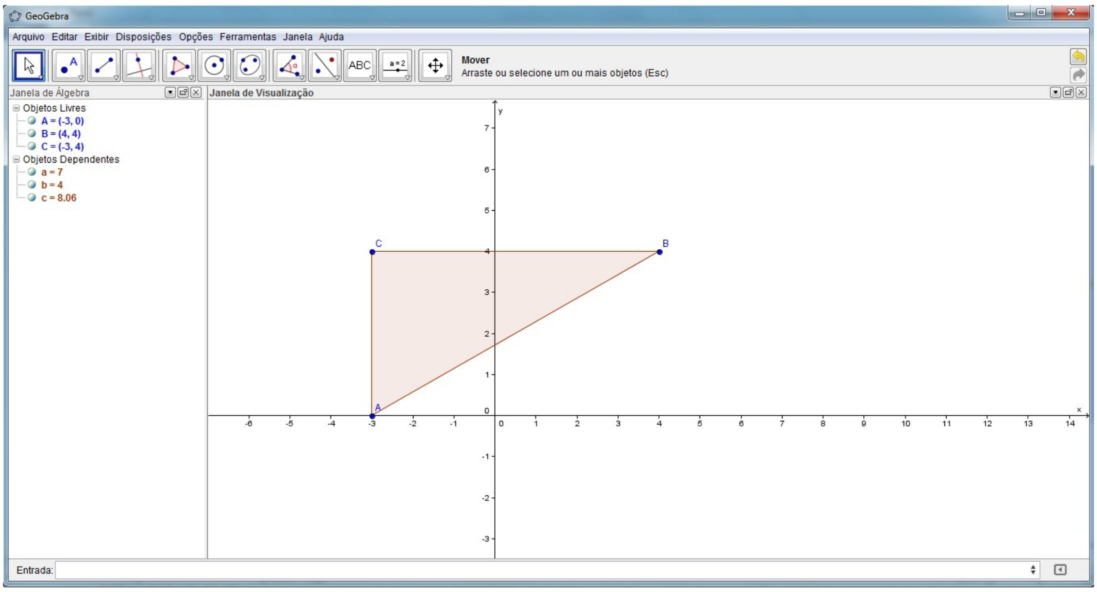

Figura 1.7: Figura modificada

1.1.6 Folha de Cálculo

Na *Folha de Cálculo* ou *Planilha* do *GeoGebra*, cada célula é identificada diretamente por um *nome*, sendo primeiro identificada a *coluna* e em seguida a *linha*. Por exemplo, a célula na coluna A e linha 2, é nomeada A2.

O nome de uma célula pode ser usado em expressões e em comandos para identificar o conteúdo da célula correspondente. Por exemplo, inserindo $f(x) = A1^{*}x + 1$, na *Entrada de Comandos*, aparece, na *Zona Algébrica*, a função f, com o coeficientede de x, igual ao que se encontra na célula A1, bem como na *Zona Gráfica* o seu respectivo gráfico. Por exemplo, se digitarmos 1 na célula A1, então a função $f(x) = A1^{*}x + 1$, gera o seguinte gráfico:

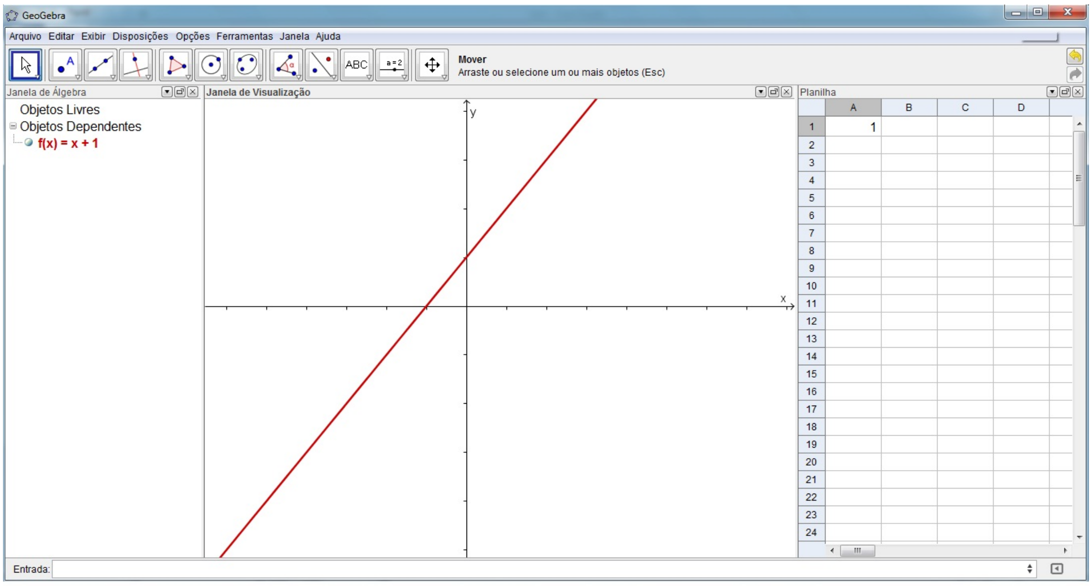

Figura 1.8: $f(x) = A1^{*}x + 1$

Nas células da folha de cálculo pode-se inserir não só números mas também todo o tipo de objetos matemáticos suportados pelo GeoGebra (coordenadas de pontos, funções, comandos).

Por padrão, os objetos na folha de cálculo são classificados como *Objetos Auxiliares* na *Zona Algébrica*. Pode-se exibir ou esconder estes *Objetos Auxiliares*. Para tanto, clique com o botão direito na *Zona Algébrica*, marcando ou desmarcando o item *Objetos Auxiliares*.

Sabemos que para a realização de cálculos, operações, trabalhar com funções, etc. utilizando *Planilhas Eletrônicas*, tais como *Excel, Calc*, etc., necessitamos do sinal de igualdade antes das mesmas. Por outro lado, na Folha de Cálculo do *GeoGebra*, pode-se escolher a opção, da não exigência do sinal de *igualdade*, antes de uma operação. Para tanto, clique com o botão direito, em qualquer célula, em *Opções da Planilha*, na guia *Layout*, desmarque (caso esteja marcada), a caixa *Exigir "=" Antes dos Comandos*.

Capítulo 2

Estudo do sistema cartesiano e de vetores

Vamos abordar o estudo de Geometria Analítica, sobre duas vertentes, uma sobre o ponto de vista conceitual e a outra com o recurso do *Geogebra*, para tanto, utilizamos principalmete [2].

2.1 Coordenadas Cartesianas

Consideremos dois eixos x e y perpendiculares em O, os quais determinam o plano α (Figura 2.1).

Dado um ponto P qualquer, $P \in \alpha$, tracemos por ele duas retas: $x' \parallel x$ e $y' \parallel y$

Denominemos P_1 a intersecção de x com y' e P_2 a intersecção de y com x'.

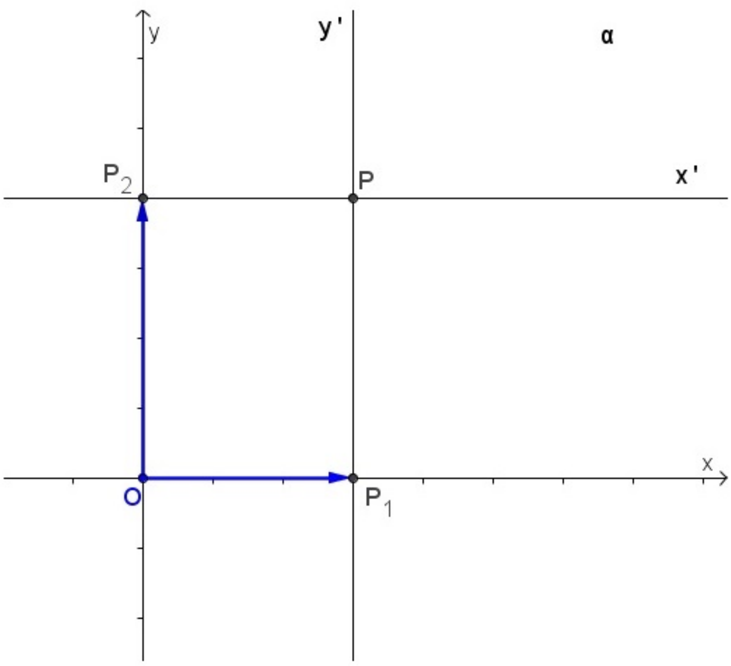

Figura 2.1: *Coordenadas do ponto P*

Nessas condições, temos:

Definição 1. *Dado um ponto qualquer P do plano cartesiano, traçamos por P as retas paralelas aos eixos x e y. Sejam P_1 e P_2 os pontos de intersecção com os eixos x e y, respectivamente.*

Dizemos que:

- *a abscissa de P (indica-se por x_P) é a medida do segmento $\overline{OP_1}$;*
- *a ordenada de P (indica-se por y_P) é a medida do segmento $\overline{OP_2}$;*
- *as coordenadas de P são os números reais x_P e y_P, indicados na forma do par ordenado (x_P, y_P)*

Atividade 2.1. *1. Considere os pontos $P = (2,3)$, $A = (2,5)$ e $B = (1,3)$ qual a relação entre:*

a) as abscissas dos pontos P e A, quando movemos o ponto A ao longo da reta $x = 2$?

b) as ordenadas dos pontos P e B quando movemos o ponto B ao longo da reta $y = 3$?

2. Abra o Geogebra e, realize os seguintes procedimentos:

- *Com o botão Novo ponto, crie o ponto $P = (2,3)$, fixando-o;*
- *Através do comando Reta Paralela, crie duas retas, uma paralela ao eixo x e outra ao eixo y ambas passando pelo ponto P;*
- *Com o botão Ponto em Objeto, crie os pontos A e B, sobre as retas $x = 2$ e $y = 3$, respectivamente.*
- *Mova os pontos A e B sobre as retas às quais os mesmos pertencem, observando, na Janela Algébrica, os valores de suas respectivas coordenadas.*

Responda:
Qual a relação entre:

a) as abscissas dos pontos P e A, quando movemos o ponto A ao longo da reta $x = 2$?

b) as ordenadas dos pontos P e B quando movemos o ponto B ao longo da reta $y = 3$?

Do exposto acima, podemos concluir que:

- Se uma reta é paralela ao eixo das abscissas, então seus pontos têm a mesma ordenada, em particular todos os pontos do eixo das abscissas têm ordenada nula;
- Se uma reta é paralela ao eixo das ordenadas, então seus pontos têm a mesma abscissa, em particular todos os pontos do eixo das ordenadas têm abscissa nula.

2.2 Distância entre dois pontos

A distância permeia todos os conceitos da geometria analítica, pois nesta área da matemática temos a relação de elementos geométricos com os algébricos, e o elemento básico da geometria é o ponto.

Um dos conceitos básicos da geometria plana é que a menor distância entre dois pontos é dada por um segmento de reta, contudo, na geometria analítica esses pontos recebem coordenadas no plano cartesiano e por meio dessas coordenadas podemos encontrar o valor da distância entre dois pontos.

Teorema 1 *Dados dois ponto $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, temos que a distância entre esses é dada por*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demonstração 1. *Tracemos inicialmente as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, paralelas aos eixos $0x$ e $0y$, respectivamente. Consideremos o triângulo ABC, retângulo em C, como na Figura2.2*

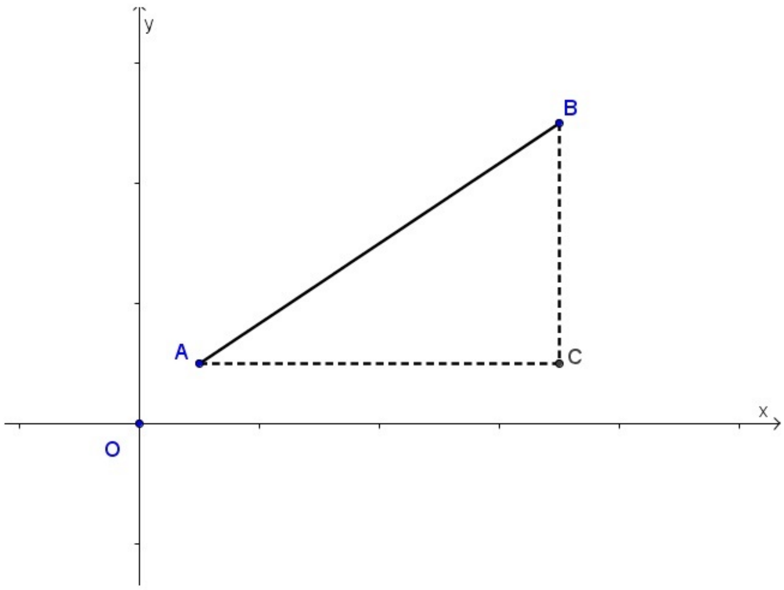

Figura 2.2: *Distância entre dois pontos*

Pelo Teomera de Pitágoras, temos que

$$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

O que conclui a demonstração.

Atividade 2.2. *1. Calcular a distância entre os pontos $A = (-2, 5)$ e $B = (4, -3)$.*

2. Abra o Geogebra e, realize os seguintes procedimentos:

- *Com o botão Novo ponto, crie os pontos $A = (-2, 5)$ e $B = (4, -3)$.*
- *Com o botão Segmento definido por Dois Pontos, clique nos pontos A e B.*
- *Com o botão Distância, Comprimento ou Perímetro, clique sobre o segmento AB, observando o valor que aparece tanto na Janela Algébrica, quanto na Janela Gráfica.*

2.3 Razão de Secção

Definição 2. *Dados três pontos colineares A, B e C (com $A \neq B \neq C$), chama-se razão de secção do segmento AB pelo ponto C o número real r tal que:*

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Assim, nessas condições, se $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, então

$$r = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3}$$

Atividade 2.3. *1. Dados $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ e $C = (7, 8)$, determine:*

a) a razão (ABC) pelas projeções no eixo $0x$

b) a razão (ABC) pelas projeções no eixo $0y$

2. Determine a relação entre as razões obtidas, na questão anterior, procurando justificar o sinal obtido em ambas.

3. Abra o Geogebra e, realize os seguintes procedimentos:

i Com o botão Novo ponto, crie os pontos $A = (1, 2)$ e $B = (3, 4)$.

ii Com o botão Reta definida por Dois Pontos, crie a reta AB.

iii Com o botão Ponto em Objeto, marque o ponto C sobre a reta AB.

iv Com o botão Mover, arraste o ponto C até as coordenadas $x = 7$ e $y = 8$, observando o valor encontrado na Janela Algébrica.

4. Com os pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ e $C = (7, 8)$, ja devidamente criados, no Campo de Entrada, digite:

a) $r = (x(C) - x(A))/(x(B) - x(C))$ e confirme (clicando em Enter), observando na Zona Algébrica o resultado encontrado.

b) $r = (y(C) - y(A))/(y(B) - y(C))$ e confirme (clicando em Enter), observando na Zona Algébrica o resultado encontrado.[1] Qual a relação entre os resultados obtidos, nos itens a e b?

2.4 Coordenadas do Ponto Divisor

Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ e a razão de secção r, $(r \neq -1)$, do segmento AB pelo ponto C. Calculemos as coordenadas (x_3, y_3) deste ponto. Temos:

$$r = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} \Rightarrow r.x_2 - r.x_3 = x_3 - x_1 \Rightarrow x_3 + r.x_3 = x_1 + r.x_2$$

$$\Rightarrow$$

[1] $x(C)$ e $y(C)$ são as notações do *Geogebra*, para abscissa e ordenada do ponto C respectivamente

$$x_3 = \frac{x_1 + r.x_2}{1 + r}$$

Analogamente, temos:

$$y_3 = \frac{y_1 + r.y_2}{1 + r}$$

Atividade 2.4. *1. Obter as coordenadas do ponto C que divide AB na razão 2, quando $A = (1, 5)$ e $B = (4, 17)$.*

2. No Geogebra, realize os seguintes procedimentos:

- *Com o botão Controle Deslizante*[2]*, crie o número r como na Figura2.3.*

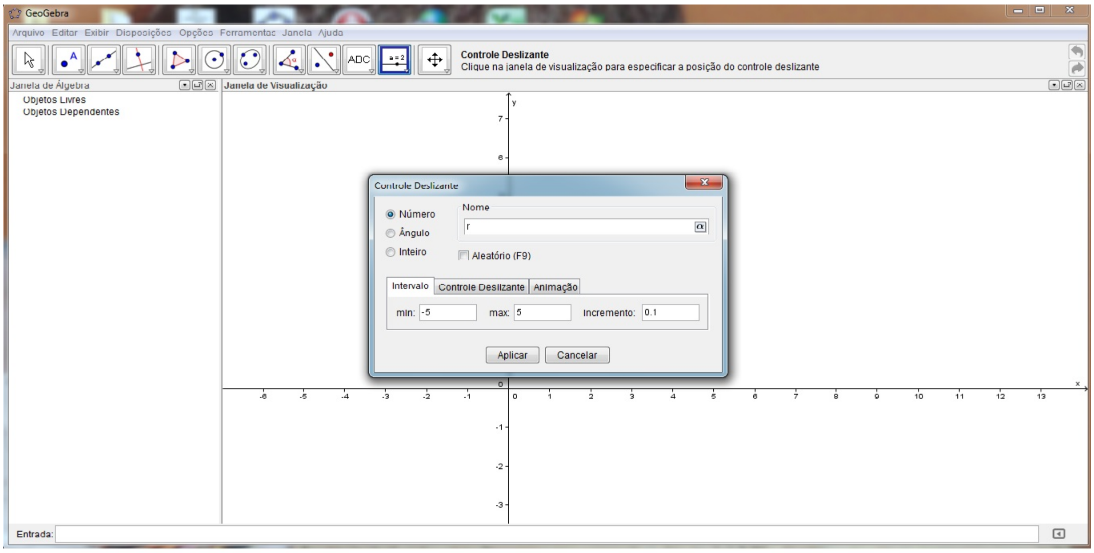

Figura 2.3: *Controle deslizante*

- *Com o botão Novo ponto, crie os pontos $A = (1, 5)$ e $B = (4, 17)$.*
- *No Campo de Entrada, digite:*

  *x_C=(1+r*4)/(1+r)*

  e

  *y_C=(5+r*17)/(1+r)*

  Observe, na Janela Algébrica, os resultados obtidos.
- *No Campo de Entrada, digite $C = (x_C, y_C)$. Esse é o ponto que divide o segmento AB na razão $r = 2$.*

2.4.1 Ponto Médio

No caso particular de C ser o ponto médio de AB então $r = 1$.

Atividade 2.5. *1. Obter o ponto médio C do segmento AB quando $A = (7, -1)$ e $B = (-3, 11)$.*

2. No Geogebra, com o botão Novo Ponto, ou usando o Campo de Entrada, crie os pontos $A = (7, -1)$ e $B = (-3, 11)$. No Campo de Entrada, digite:

[2]Representação gráfica de um número livre ou de um ângulo livre

a) C=PontoMédio(A,B)

b) $x_C = \frac{x(A)+x(B)}{2}$ *e* $y_C = \frac{y(A)+y(B)}{2}$

O que podemos concluir a respeito, das coordenadas obtidas no item b?

2.5 Condição de alinhamento de três pontos

Sabemos que por dois pontos distintos passa uma única reta, ou seja, dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ eles estarão sempre alinhados.

Vejamos, agora, a condição para que três pontos sejam colineares, em função de suas coordenadas.

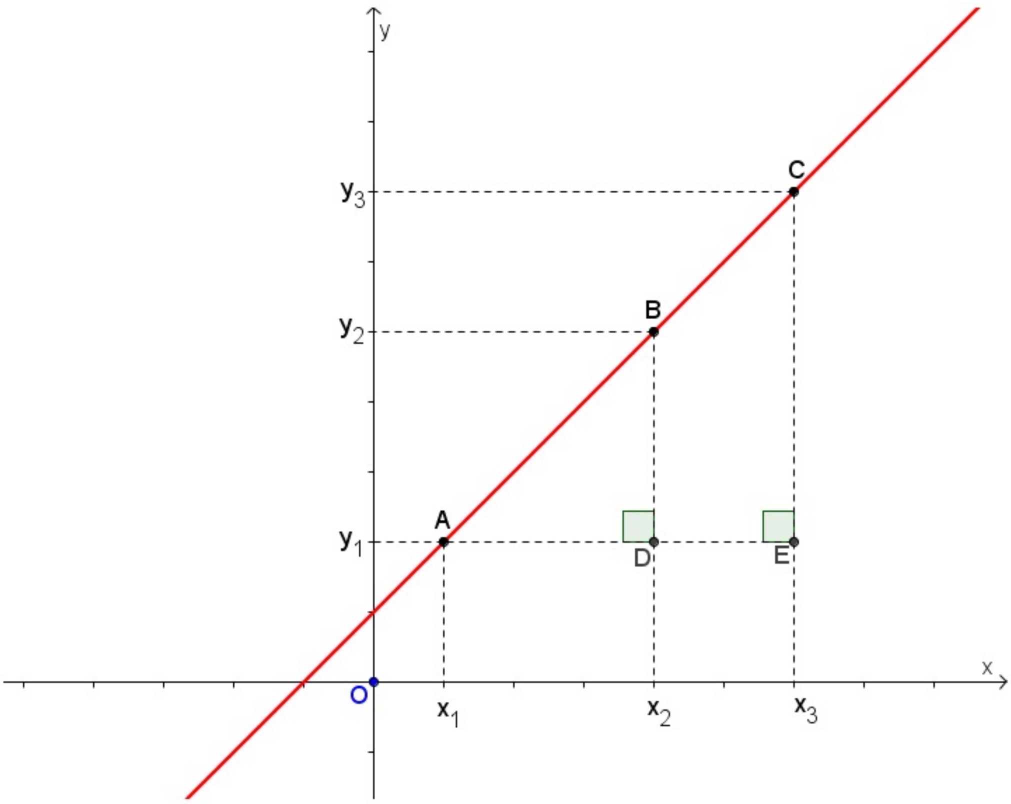

Figura 2.4: *Alinhamento de três pontos*

Observando a Figura 2.4, temos:

$$\Delta ACE \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DB}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

Transformando a igualdade:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)$$

$$x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_3 + x_2y_1 + x_1y_3 - x_1y_1 = 0$$

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

Essa igualdade é equivalente a:

$$x_1 . \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2 . \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3 . \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Daí:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ estão alinhados se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Atividade 2.6. *1. Mostrar que $A = (-1, 1)$, $B = (1, 3)$ e $C = (7, 9)$ são colineares.*

2. Abra o Geogebra, crie os pontos $A = (-1, 1)$, $B = (1, 3)$ e $C = (7, 9)$ e:

- *no menu Exibir, clique em Planilha;*
- *nos intervalos $A1 : C1$, $A2 : C2$ e $A3 : C3$, digite as ternas $(-1, 1, 1)$, $(1, 3, 1)$ e $(7, 9, 1)$, respectivamente;*
- *selecione o intervalo $A1 : C3$, clique com o botão direito sobre o conjunto selecionado e na guia Criar, selecione a opção Matriz (Figura 2.5)*

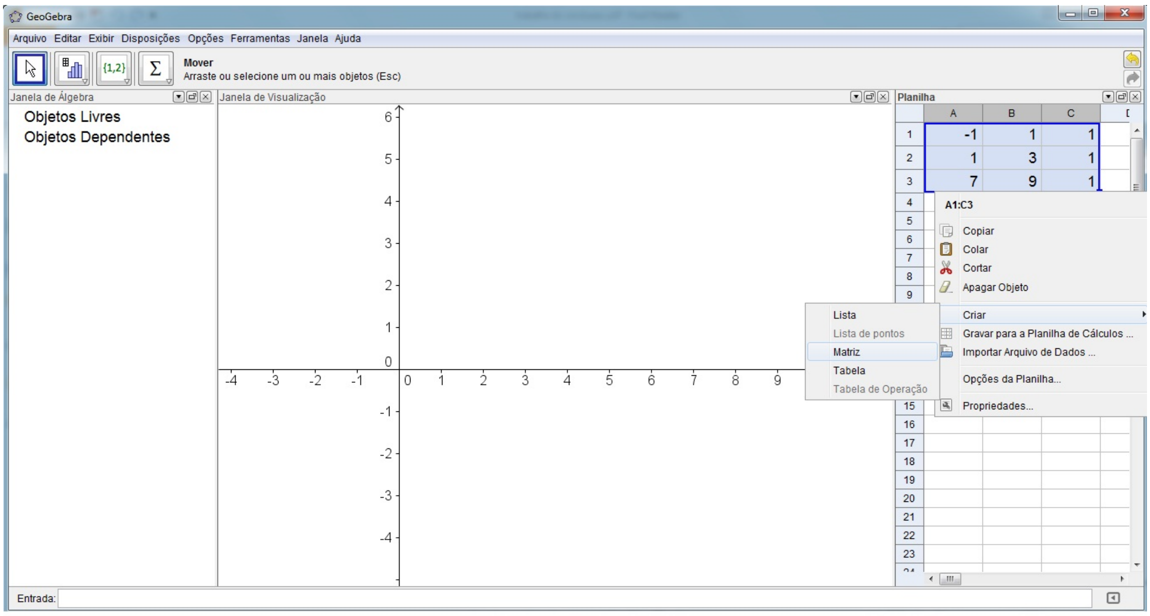

Figura 2.5: *Criando a matriz*

Observe a matriz que aparece na Janela Algébrica.

- *No Campo de Entrada, digite o comando $D = Determinante[matriz1]$. (Figura 2.6).*

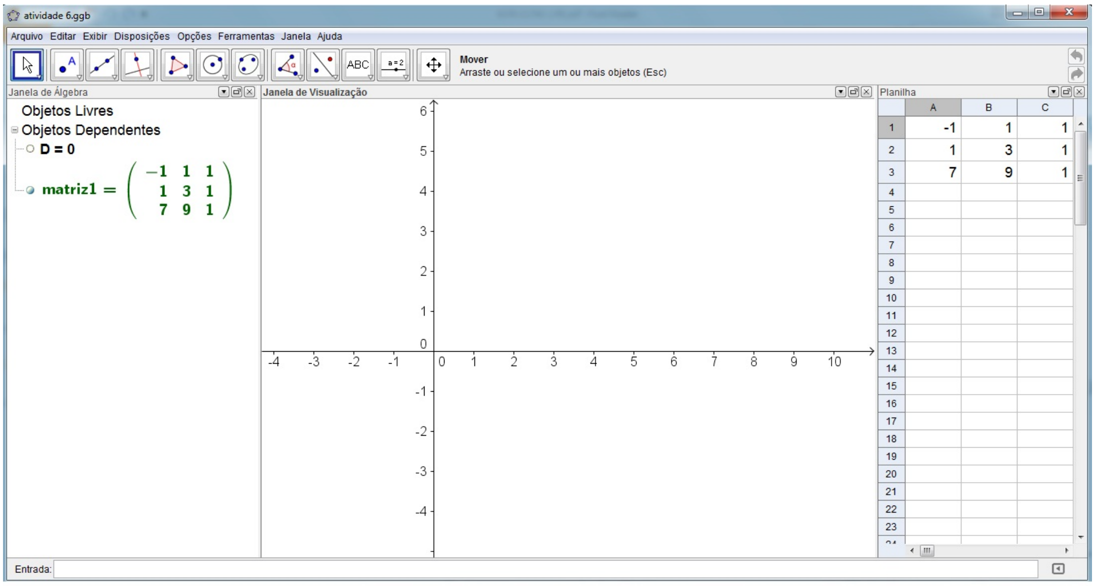

Figura 2.6: Calculando o Determinante

Observe o valor de D, que aparece na Janela Algébrica. De acordo com esse, podemos concluir que os pontos acima citados, são colineares?

3. Confime geometricamente o resultado do item anterior, como segue:

- *Criando as retas* $\overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{AC}$ *e* $\overleftrightarrow{BC}$

- *Com o botão Relação entre Dois Objetos, clique sobre: Ponto A e* $\overleftrightarrow{BC}$; *Ponto B e* $\overleftrightarrow{AC}$; *Ponto C e* $\overleftrightarrow{AB}$.

Observação 1. *Clicando por exemplo sobre o Ponto C e sobre a reta* $\overleftrightarrow{AB}$, *o Geogebra retorna o resultado dizendo "Ponto C pertence a Reta a (Verificado numericamente)" (Figura 2.7).*

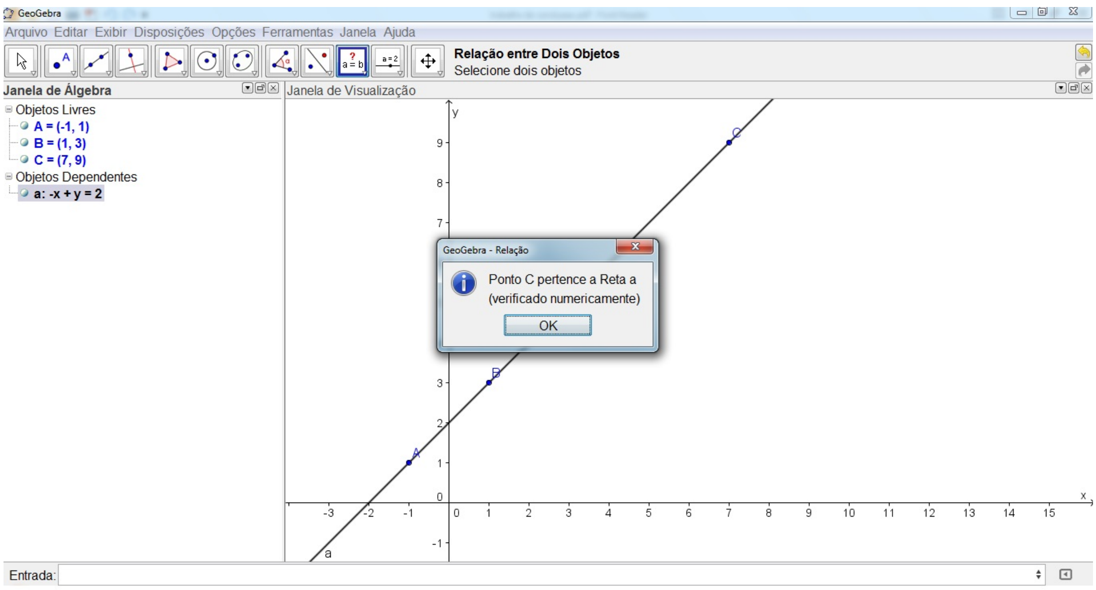

Figura 2.7: Comparando os pontos A, B e C

2.6 Segmentos orientados no plano

Dados dois pontos no plano, digamos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, o *segmento orientado* $\overline{AB}$ é o segmento de reta ligando A e B, nesta ordem. Como conjunto de pontos, os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ são iguais. Entretanto, eles representam segmentos orientados diferentes: $\overline{BA}$ será chamado segmento orientado oposto de $\overline{AB}$.

Dado um segmento orientado $\overline{AB}$, $A \neq B$, consideraremos três objetos importantes para seu estudo, a saber: a reta l que o contém (Figura 2.8), a diferença $B - A = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ e a inclinação (declividade) de l dada por

$$m(l) = \text{tg}\alpha = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

que está bem definida para $b_1 - a_1 \neq 0$. Aqui α é o ângulo que l ou $(\overline{AB})$ faz com o eixo

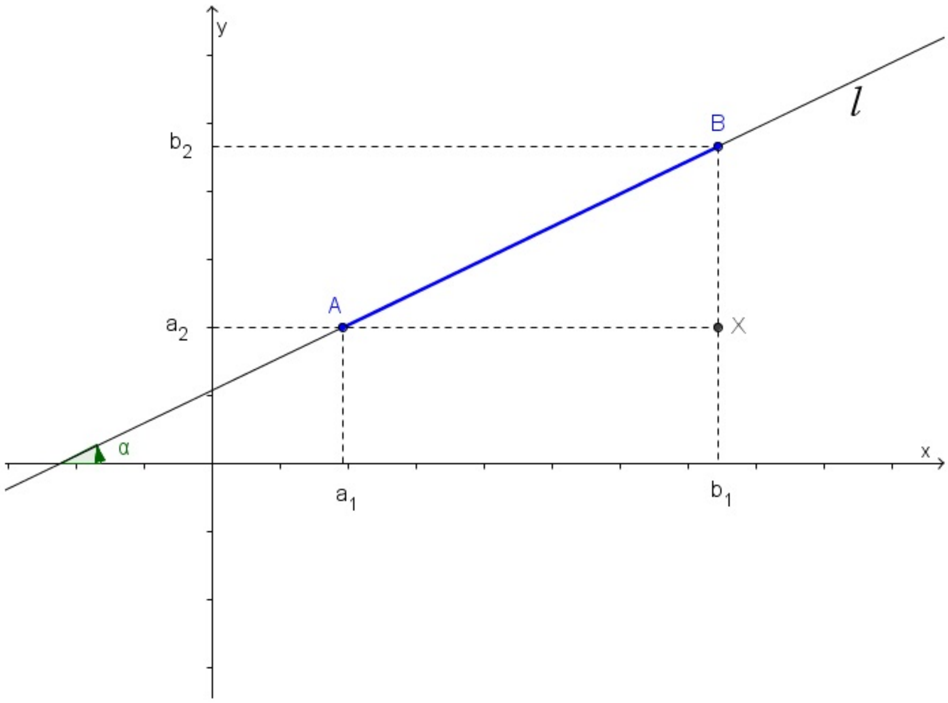

Figura 2.8: Segmento orientado $\overline{AB}$

x. No caso em que não podemos definir $m(l)$, isto é, quando $b_1 = a_1$, diremos que $\overline{AB}$ é vertical.

A partir da Figura 2.8, vamos definir o comprimento de $\overline{AB}$, que indicaremos por $\|\overline{AB}\|$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔABX, vem que

$$\|\overline{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Dizemos que dois segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ tem a mesma direção se as retas que os contém são paralelas. Em outras palavras, se l é a reta que contém $\overline{AB}$ e r é aquela que contém $\overline{CD}$, os segmentos têm a mesma direção, se $m(l) = m(r)$, ou ambos os segmentos são verticais. Por outro lado, consideremos a Figura 2.9, onde as retas l e r são paralelas. Nessas condições, temos a seguinte

Definição 3. *Diremos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm o mesmo sentido se*

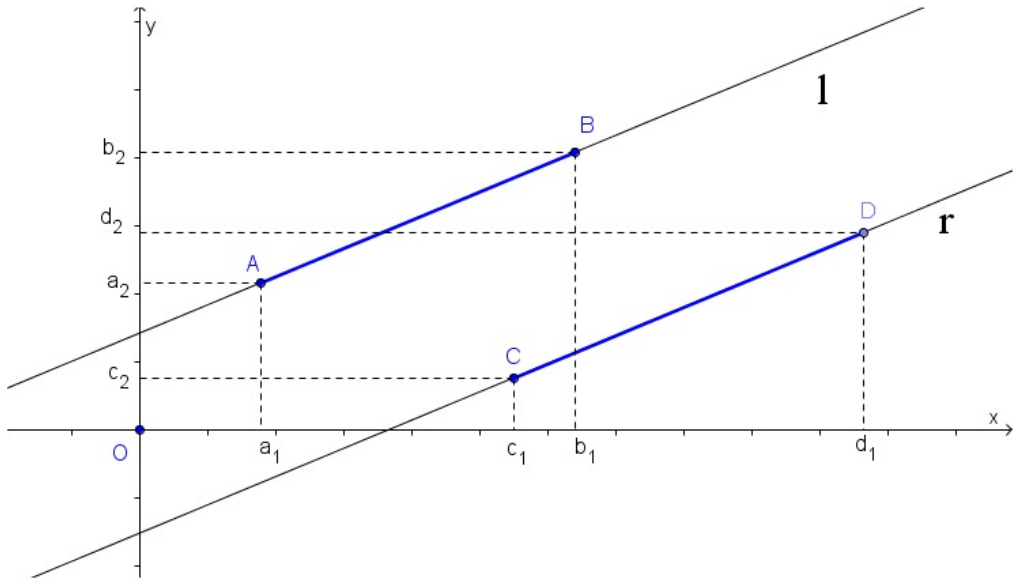

Figura 2.9: Segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ com mesma direção

$$m(l) = m(r),\ (b_1 - a_1).(d_1 - c_1) > 0,\ e\ portanto\ (b_2 - a_2).(d_2 - c_2) > 0$$

ou, no caso em que os segmentos são verticais, exigimos apenas que

$$(b_2 - a_2).(d_2 - c_2) > 0$$

Observação 2. *Em particular, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ têm a mesma direção, mas não têm o mesmo sentido. De fato, $B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ e $A - B = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ e o produto de suas abscissas é*

$$(b_1 - a_1).(a_1 - b_1) = -(b_1 - a_1)^2 < 0$$

Note também que $\overline{AB}$ tem o mesmo sentido e comprimento que o segmento orientado ligado a origem dado por $\overline{OX}$, onde $X = B - A$ (Figura 2.10).

Atividade 2.7. *1. Considere os pontos $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (2, 1)$ e $D = (1, 3)$. Verifique se os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, possuem a mesma direção, o mesmo sentido e calcule o comprimento dos mesmos.*

2. Abra o Geogebra:

- *Com o botão Novo Ponto ou digitando no Campo de Entrada, crie os pontos $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (2, 1)$ e $D = (1, 3)$.*
- *Com o botão Segmento definido por Dois Pontos, clique sobre os pontos A e B; C e D.*
- *No Campo de Entrada, digite: Inclinação [a] e Inclinação [b].*
- *No Campo de Entrada, digite: $(x(B) - x(A))(x(D) - x(C))$.*

Observe na Figura 2.11, os valores que surgem na Zona Algébrica, onde $a = 2.24$, $b = 2.24$, representam, respectivamente os comprimentos dos segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Além disso, $e = 1$, é o valor de $(x(B) - x(A))(x(D) - x(C))$, indicando assim, que os segmentos em questão, têm o mesmo sentido, uma vez que o mesmo é maior do que zero.

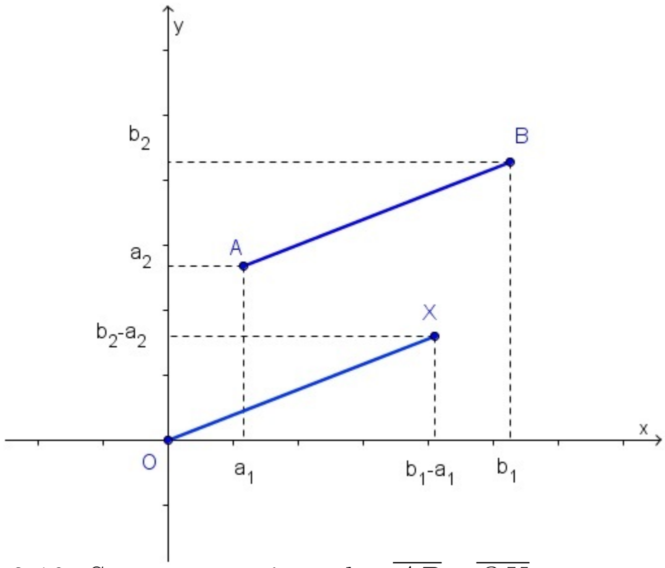

Figura 2.10: Segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{OX}$ com mesma direção

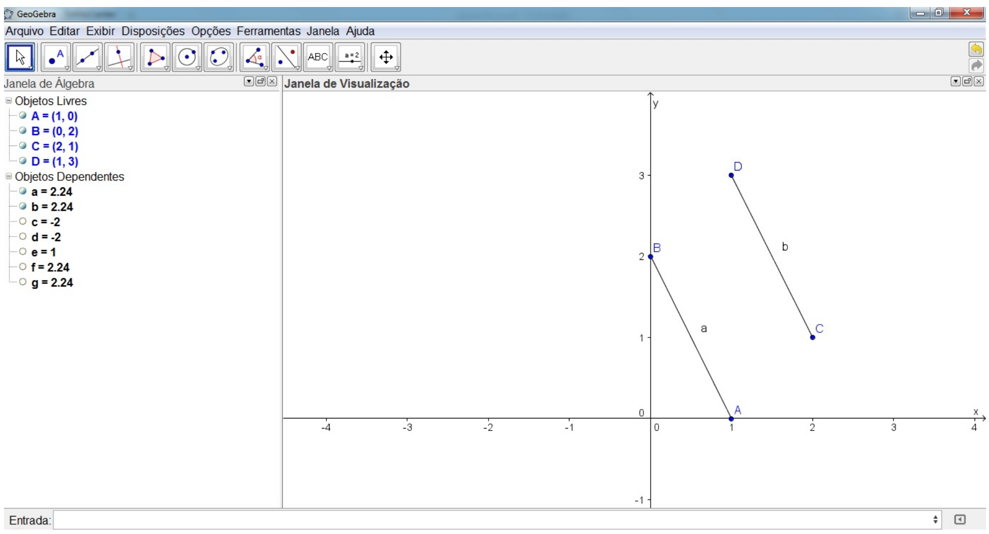

Figura 2.11: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ com mesma direção, sentido e mesmo comprimento

2.7 Vetores no plano

Seja $\overline{AB}$ o segmento orientado determinado pelos pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$. Agora imagine todos os outros segmentos que têm o mesmo comprimento e sentido que $\overline{AB}$.

Considere a Figura 2.12, onde representamos alguns desses segmentos e, introduzimos uma outra forma de ver o segmento orientado: uma seta ligando o ponto inicial ao ponto final de cada segmento orientado. É essa coleção de segmentos orientados "parecidos" que chamaremos de **vetor AB**, e que indicaremos por $\overrightarrow{AB}$.

De agora em diante, vamos indicar o vetor AB, por $\overrightarrow{AB}$ ou por

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

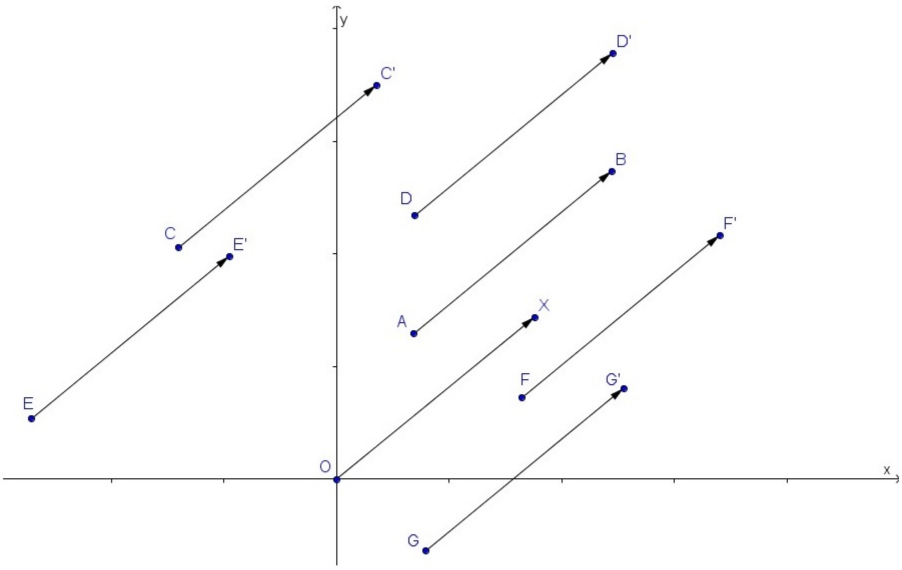

Figura 2.12: vetor AB

Definição 4. *Como os representantes de um vetor* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *têm o mesmo comprimento, a saber, a distância de* A *a* B*, esse valor comum será chamado* **comprimento ou norma** *do vetor* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$*, o que indicaremos por* $\|\vec{u}\|$*. Em particular, se tomarmos o representante* $\overrightarrow{OU}$*,* $U = (u_1, u_2)$*, temos*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Atividade 2.8. *1. Considere os vetores* $\vec{u} = (3,2)$ *e* $\vec{v} = (1,3)$*. Localize-os em* $O = (1,5)$ *e em* $P = (4,1)$*. Determine o comprimento dos mesmos.*

2. Abra o Geogebra:

- *Com o botão Novo Ponto, ou digitando no Campo de Entrada, crie os pontos* $O = (1,5)$ *e* $P = (4,1)$*.*
- *Crie os vetores*[3] $\vec{u} = (3,2)$ *e* $\vec{v} = (1,3)$*.*
- *Com o botão Vetor a Partir de um Ponto, clique sobre:* $\vec{u}$*,* $O = (1,5)$ *e* $P = (4,1)$*;* $\vec{v}$*,* $O = (1,5)$ *e* $P = (4,1)$*.*
- *No Campor de Entrada, digite: Comprimento[u] e Comprimento[v](Figura 2.13).*

[3] O Geogebra diferencia entre ponto e vetor, fazendo a distinção entre maíuscula e minúscula. Se por exemplo digitarmos $A = (1,1)$, teremos o ponto A e, se digitarmos $a = (1,1)$, teremos o vetor $\vec{a}$.

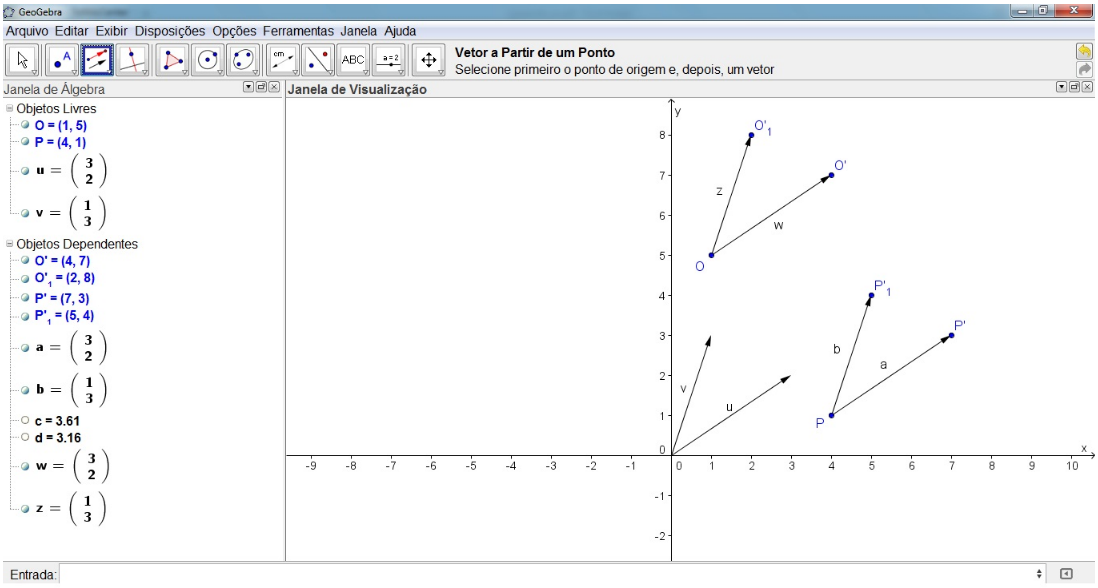

Figura 2.13: Representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Definição 5. *Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dois vetores. A* **soma** *de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é definida como sendo o vetor (de coordenadas) $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (Figura 2.14)*

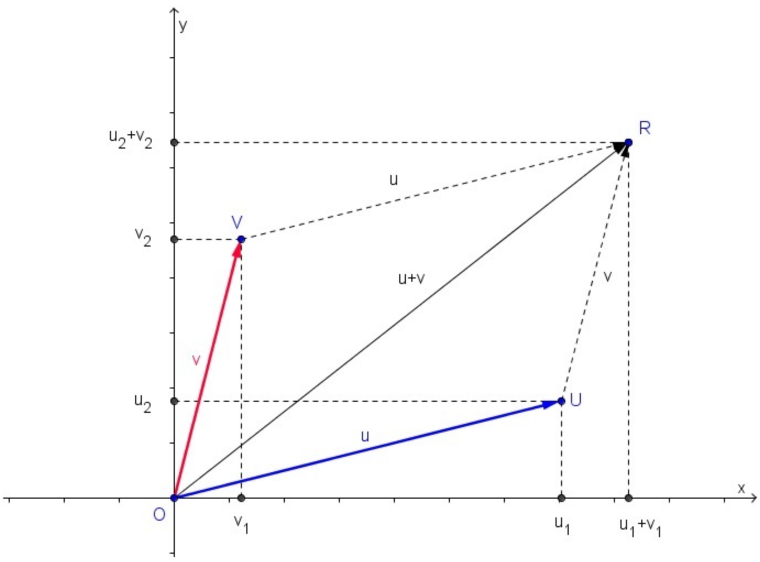

Figura 2.14: Soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Definição 6. *Sejam $\vec{v} = (v_1, v_2) = V$ um vetor e $a \in \mathbb{R}$ um número real. O* **produto** *de a por $\vec{v}$ é definido como sendo o vetor $a\vec{v} = (av_1, av_2) = aV$.*

Portanto, se $a > 0$, os representantes de $a\vec{v}$ têm todos o mesmo sentido que os representantes de $\vec{v}$. Se $a < 0$, os representantes de $a\vec{v}$ têm todos o sentido contrário ao de $\vec{v}$.

Proposição 1. *Sejam $\vec{v} = (v_1, v_2)$ um vetor e $a \in R$ um número real. O comprimento do vetor $a\vec{v}$ é $|a|$ vezes o comprimento do vetor $\vec{v}$.*

Demonstração 2.

$$\|a\vec{v}\| = \sqrt{(av_1)^2 + (av_2)^2} = \sqrt{a^2v_1^2 + a^2v_2^2} = |a|\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |a|\,\|\vec{v}\|$$

O que conclui a demonstração.

Atividade 2.9. *1. Sejam $\vec{u} = (2,1)$ e $\vec{v} = (-1,2)$ dois vetores. Determine os vetores: $\vec{a} = 2\vec{u}$; $\vec{b} = 3\vec{v}$ e $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.*

2. Abra o Geogebra:

- *No campo de entrada, digite: $u = (2,1)$ e $v = (-1,2)$.*
- *No campo de entrada, digite: $a = 2u$, $b = 3v$ e $c = a + b$.*

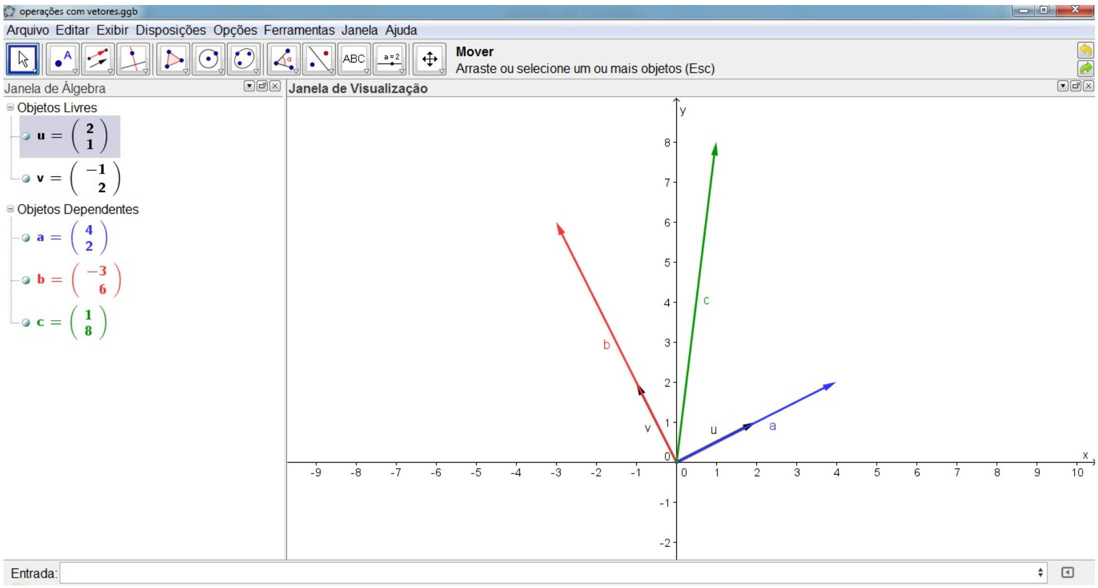

Figura 2.15: Operações com vetores

Observação 3. *Por padrão, o Geogebra, escolhe para o resultado das operações entre vetores, o representante com início na origem do sistema cartesiano. Se por exemplo tivermos os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, com $A = (-2,3)$, $B = (3,2)$ e $C = (1,5)$ e desejarmos obter o vetor $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, o Geogebra fornece o representante $\vec{w} = (8,1)$, como mostra a Figura 2.16*

Proposição 2. *Se $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ são vetores no plano e $a, b \in \mathbb{R}$, então valem as seguintes propriedades:*

(i) **[Comutatividade]** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

(ii) **[Associatividade]** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;

(iii) **[Elementro Neutro]** *O vetor $\vec{0} = (0,0)$, chamado vetor nulo é o único vetor tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;*

(iv) **[Simétrico]** *O vetor $-\vec{u} = (-1)\vec{u}$, chamado* **simétrico** *de $\vec{u}$, é o único vetor tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;*

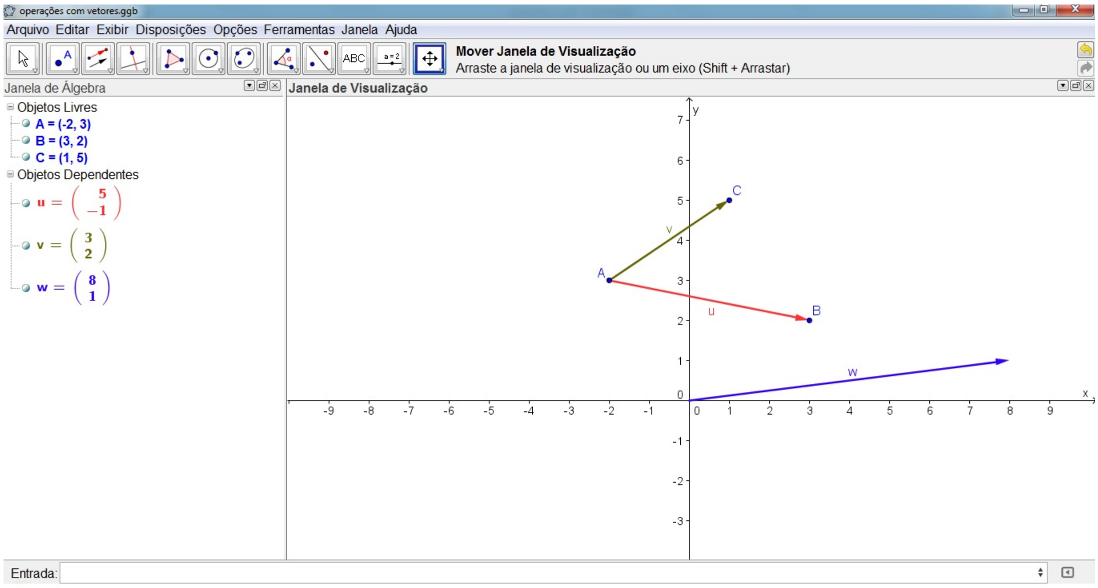

Figura 2.16: Representante da soma de vetores com origem na origem do sistema

(v) **[Distributividade]** $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$;

(vi) **[Distributividade]** $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$;

(vii) **[Associatividade]** $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$;

(viii) **[Elemento Neutro]** $1\vec{u} = \vec{u}$

Observação 4. *Através do aspecto geométrico da soma de vetores, observamos que as propriedades comutativa e associativa mostram que para somar vários vetores, precisamos apenas colocá-los, em qualquer ordem, seguidos um do outro e a sua soma estará ligando a extremidade inicial do primeiro à extremidade final do último.*

Atividade 2.10. *1. Considere os vetores* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{z} = \overrightarrow{DE}$, $\vec{a} = \overrightarrow{EF}$ *e* $\vec{b} = \overrightarrow{FG}$, *onde,* $A = (1,3)$, $B = (3,4)$, $C = (6,5)$, $D = (8,3)$, $E = (11,5)$, $F = (12,3)$ *e* $G = (13,1)$. *Determine o vetor* $\vec{r} = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}+\vec{z}+\vec{a}+\vec{b}$ *e represente-o geometricamente.*

2. Abra o Geogebra:

- *Com o botão Novo Ponto ou digitando no Campo de Entrada, crie os pontos* $A = (1,3)$, $B = (3,4)$, $C = (6,5)$, $D = (8,3)$, $E = (11,5)$, $F = (12,3)$ *e* $G = (13,1)$.
- *Com o botão Vetor Definido por Dois Pontos, clique na sequência em: A e B; B e C; C e D; D e E; E e F; F e G.*
- *No Campor de Entrada, digite:* [4] $r = u+v+w+z+a+b$.
- *Com o botão Vetor Definido por Dois Pontos, clique sobre A e G.*
- *Com o botão Relação entre Dois Objetos, clique sobre os vetores c e r (Figura 2.17).*

[4] Lembre que o Geogebra fornece o representante com início na origem do sistema cartesiano.

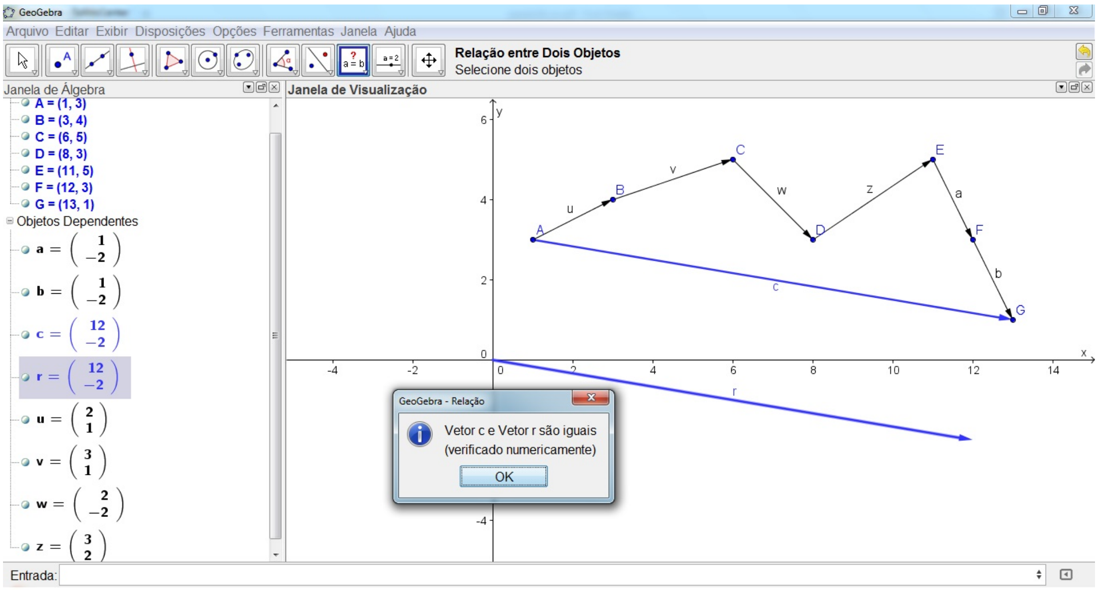

Figura 2.17: Soma de vários vetores

Fixemos um ponto $P = (p_1, p_2)$ e um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$, ou seja, $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$, sendo $V = (v_1, v_2)$. Localizando o vetor $\vec{v}$ em P, obtemos o representante $\overline{PQ}$. Assim, temos que $Q = (p_1 + v_1, p_2 + v_2)$. Com efeito,

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{v} = (p_1 + v_1, p_2 + v_2) \Rightarrow Q = (p_1 + v_1, p_2 + v_2)$$

nessas condições, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3. *Sejam $P = (p_1, p_2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ um vetor de coordenadas (v_1, v_2). Se $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, então $Q = (p_1 + v_1, p_2 + v_2) = P + V$. Em outras palavras, o representante de $\vec{v}$ que começa em P, termina em $Q = P + V$. Potanto, $V = Q - P$ determina as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.*

Existem dois vetores especiais no plano, que são conhecidos como **base canônica**. Eles são indicados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$, ou alternativamente sem usar setas acima, e_1 e e_2. Eles são os vetores dados por $e_1 = \vec{i} = (1, 0)$ e $e_2 = \vec{j} = (0, 1)$ (Figura 2.18).

Seja um vetor $\vec{v}$ qualquer, o mesmo pode ser escrito como combinção linear dos vetores i e j, como mostra a

Proposição 4. *Se $\vec{v} = (v_1, v_2)$, então*

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$$

Demonstração 3. *De fato,*

$$v_1\vec{i} + v_2\vec{j} = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = (v_1, 0) + (0, v_2) = (v_1, v_2) = \vec{v}$$

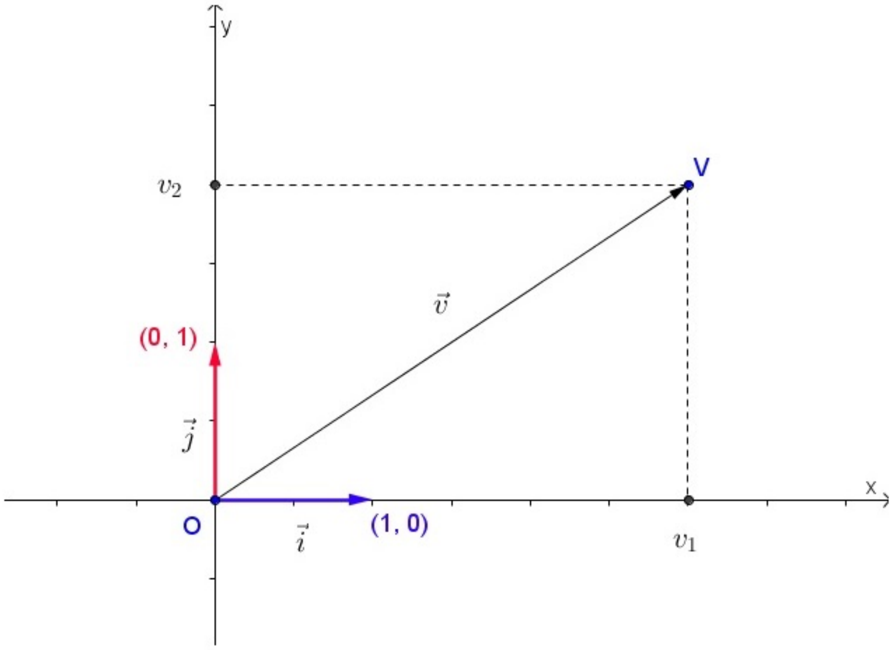

Figura 2.18: Base Canônica

Definição 7. *Dados dois vetores do plano* $\vec{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\vec{v} = (v_1, v_2)$ *chama-se* **produto escalar** *entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *ao número*

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Observação 5. *Também é usada a notação u.v para indicar o produto escalar dos vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*.*

Observação 6. *Denominamos vetor normal a um determinado objeto (reta, plano, etc.), ao vetor perpendicular a este objeto.*

Observação 7. *Vemos que para todo vetor* $v \neq 0$ *vale* $\langle v, v \rangle > 0$ *e que* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$*, para todo vetor v. Fixando-se também o ângulo entre dois vetores u e v como sendo* $0 \leq \theta \leq \pi$ *temos que*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|}.$$

Em particular dizemos que dois vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *no plano, são ortogonais, ou perpendiculares entre si, se* $\langle u, v \rangle = 0$*, o que equivale a termos* $\theta = \frac{\pi}{2}$*.*

Atividade 2.11. *1. Considere os vetores* $\vec{u} = (2, 1)$ *e* $\vec{v} = (-3, 6)$*:*

a) Determine o produto escalar de $\vec{u}$ *por* $\vec{v}$*;*

b) Determine o ângulo entre $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*;*

c) Os vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são ortogonais? Justifique.*

2. Abra o Geogebra:

- *No Campo de Entrada, digite:* $u = (2, 1)$ *e* $v = (-3, 6)$*.*

- *No Campo de Entrada, digite $u * v$* [5].

- *No Campo de Entrada, digite Ângulo$[u, v]$. (Renomei o ângulo com a letra θ).*

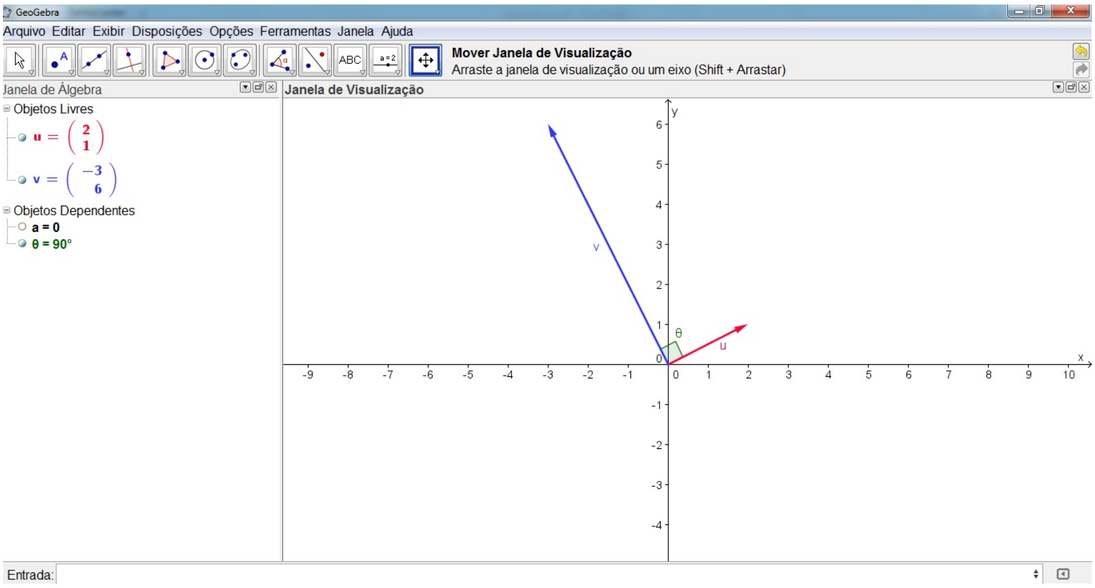

Figura 2.19: Ângulo entre dois vetores

2.8 Coordenadas no espaço

Seja E o espaço euclidiano tridimensional. Um sistema de coordenadas (cartesianas) em E consiste em três eixos OX, OY e OZ, com a mesma origem O, tais que qualquer um deles é perpendicular a cada um dos outros dois. O sistema é indicado com a notação $OXYZ$.

Uma vez fixado o sistema $OXYZ$, chamaremos de Π_{xy}, Π_{yz} e Π_{xz} os planos determinados pelos eixos OX e OY, OY e OZ, OX e OZ, respectivamente.

A escolha do sistema $OXYZ$ faz com que se possa associar a cada ponto P do espaço um terno ordenado (x, y, z) de números reais, chamados as coordenadas do ponto P relativamente a esse sistema.

Para obter a coordenada x do ponto P fazemos passar por esse ponto um plano Π, paralelo a Π_{yz}. A coordenada, no eixo OX, da intersecção $\Pi \cap OX$ é o número x. Analogamente, y é a coordenada, no eixo OY, da intersecção deste eixo com o plano Π', paralelo a Π_{xz}, passando por P. Finalmente, z é a coordenada, no eixo OZ, da intersecção $\Pi'' \cap OZ$, onde Π'' é o plano paralelo a Π_{xy} passando por P. do

As coordenadas (x, y, z) do ponto P no sistema $OXYZ$ (Figura 2.20) podem também ser obtidas assim: a reta paralela ao plano OZ passando pelo ponto Pcortao plano Π_{xy} no ponto P_0. Sejam (x, y) as coordenadas de P_0 no sistema OXY do plano $\Pi_{x,y}$. Estas são as duas primeiras coordenadas de P. Por sua vez, a reta paralela ao eixo OX passando por P corta o plano Π_{yz} no ponto P_1. Sejam (y, z) as coordenadas de P_1 no sistema OYZ. O número y é o mesmo já obtido e z é a coordenada restante do ponto P. Usa-se a notação $\mathbb{R}^3$ para representar o conjunto cujos elementos são os ternos (x, y, z) de números reais.

[5] O Geogebra interpreta o comando $u * v$, como o produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

O número x é a primeira coordenada do terno (x, y, z), y é a segunda e z é a terceira. Dois ternos (x, y, z) e (x', y', z') são iguais se, e somente se, $x = x'$, $y = y'$ e $z = z'$.

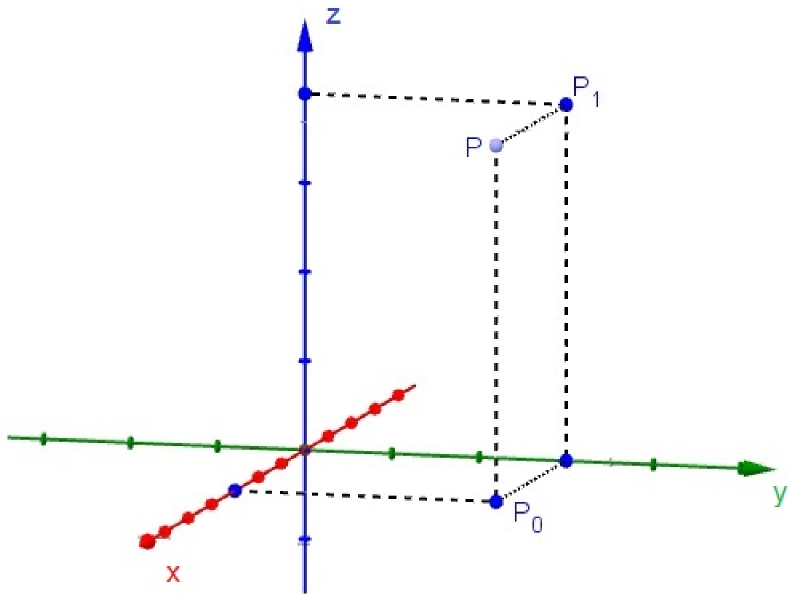

Figura 2.20: Ponto P no espaço tridimensional

O sistema $OXYZ$ determina uma correspondência biunívoca $E \to \mathbb{R}^3$ que a cada ponto P do espaço associa o terno (x, y, z) de coordenadas desse ponto no sistema dado. Estando claro o sistema $OXYZ$ que nos referimos, escreveremos $P = (x, y, z)$ para significar que x,y e z são as coordenadas do ponto P.

As coordenadas da origem são $O = (0, 0, 0)$. Os pontos dos planos Π_{xy}, Π_{yz} e Π_{xz} têm coordenadas $(x, y, 0)$, $(0, y, z)$ e $(x, 0, y)$, respectivamente.

Um plano chama-se vertical quando contém o eixo OZ ou é paralelo a ele. Um plano diz-se horizontal quando é perpendicular ao eixo OZ. Todos os pontos de um plano horizontal têm coordenadas (x, y, c), onde a constante c é a coordenada no eixo OZ, da intesecção do plano dado com esse eixo. diz-se então que $z = c$ é a equação do referido plano. De modo análogo, os planos perpendiculares aos eixos OX e OY têm equações do tipo $x = a$ e $y = b$, respectivamente.

Evidentemente, um plano horizontal é paralelo a, ou coincide com, o plano Π_{xy}.

Atividade 2.12. *1. Marque no espaço cartesiano* $\mathbb{R}^3$ *os pontos* $A = (1, 0, 0)$*,* $B = (2, -1, 4)$ *e* $C = (0, 3, 2)$*.*

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D*
- *No Campo de Entrada, digite:* $A = (1, 0, 0)$*,* $B = (2, -1, 4)$ *e* $C = (0, 3, 2)$

Como fizemos para o $\mathbb{R}^2$, podemos somar ternos e multiplicar ternos por um número real. Temos assim, as seguintes

Definição 8. *Se* $A = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $B = (b_1, b_2, b_3)$ *a* **soma** *de* A *com* B*, indicada por* $A + B$*, é o terno*

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Definição 9. *Se $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $a \in \mathbb{R}$ o* **produto** *de A pelo número real a, indicado por aA, é o terno*

$$aA = (aa_1, aa_2, aa_3)$$

Atividade 2.13. *1. Dados os pontos $A = (1,0,0)$, $B = (2,1,-1)$ e $C = (0,1,2)$, determine os pontos $D = A + C$, $E = (2A + B - C)$.*

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite: $A = (1,0,0)$, $B = (2,1,-1)$ e $C = (0,1,2)$.*
- *No Campo de Entrada, digite: $D = A + C$, $E = (2A + B - C)$.*

Como para o $\mathbb{R}^2$, vale a seguinte proposição.

Proposição 5. *Se $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então valem as seguintes propriedades:*

(i) **[Comutatividade]** $A + B = B + A$;

(ii) **[Associatividade]** $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(iii) **[Elementro Neutro]** *O terno $O = (0,0,0)$, chamado terno nulo é o único terno tal que $A + O = A$;*

(iv) **[Simétrico]** *O terno $-A = (-a_1, -a_2, -a_3)$, chamado* **simétrico** *do terno A, é o único terno tal que $A + (-A) = O$;*

(v) **[Distributividade]** $a(A + B) = aA + aB$;

(vi) **[Distributividade]** $(a + b)A = aA + bA$;

(vii) **[Associatividade]** $(ab)A = a(bA)$;

(viii) **[Elemento Neutro]** $1A = A$

As noções de segmentos orientados e vetores no plano que estudamos pode ser facilmente estendida para o espaço. Só precisamos ajustar a noção de segmentos com o mesmo sentido.

Dados dois pontos do espaço $\mathbb{R}^3$, digamos $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, o **segmento orientado** $\overline{AB}$ é o segmento de reta ligando A e B, nesta ordem. Como conjunto de pontos, os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ são iguais. Entretanto, eles representam segmentos orientados diferentes: $\overline{BA}$ será chamado **segmento orientado oposto** de $\overline{AB}$.

Dado um segmento orientado $\overline{AB}$, $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, a diferença

$$B - A = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

será fundamental para o que faremos a seguir.

Inicialmente definimos o **comprimento** de $\overline{AB}$, que coincide com a distância entre A e B, indicado por $\|\overline{AB}\|$, que é dado por

$$\|\overline{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Atividade 2.14. *1. Dados os pontos* $A = (2, 1, 0)$ *e* $B = (0, 5, -1)$*, determine o comprimento do segmento orientado* $\overline{AB}$*.*

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $A = (2, 3, 3)$ *e* $B = (3, 5, -1)$*.*
- *No Campo de Entrada, digite: Distância[A,B].*

Dois segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm a mesma direção se são paralelos, isto é, se estão contidos em retas paralelas. (Observe aqui que duas retas r e s são paralelas se são coplanares e não se cruzam). Em termos das diferenças $B - A$ e $D - C$, isso significa que existe um número real não-nulo a tal que $B - A = a(D - C)$. Agora, se tal número a é positivo, diremos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm o **mesmo sentido**[6].

2.9 Vetores no espaço

Seguindo as mesmas ideias do caso plano, vamos definir vetor, agora no $\mathbb{R}^3$. Sejam $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, segmentos orientados dados pelos pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ e $D = (d_1, d_2, d_3)$. Vamos supor que eles tenham o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Logo,

$$B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = a(d_1 - c_1, d_2 - c_2, d_3 - c_3) = a(D - C),\ a > 0$$

e

$$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{(d_1 - c_1)^2 + (d_2 - c_2)^2 + (d_3 - c_3)^2}$$

Comparando essas duas igualdades, vem que $a = 1$ e, portanto, $B - A = D - C$. Isto nos leva à seguinte definição, que poderia ser adotado em qualquer caso.

Definição 10. *Dado o segmento orientado* $\overline{AB}$*, o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é definido como sendo o conjunto de todos os segmentos orientados que têm o mesmo sentido e comprimento que* $\overline{AB}$*. Em outras palavras,*

$$\overrightarrow{AB} = \left\{\overline{PQ}; Q - P = B - A\right\}$$

A Figura 2.21, mostra alguns representantes do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Dentre esses, observemos o vetor $\overrightarrow{OV}$, com extremidade inicial, na origem do sistema e a outra no ponto digamos $V = (v_1, v_2, v_3)$. Assim, temos:

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow V = B - A$$

Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, o terno $B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ será chamado **coordenadas** do vetor $\vec{u}$.

[6] Obviamente, essa forma de definir mesmo sentido, vale para o caso plano.

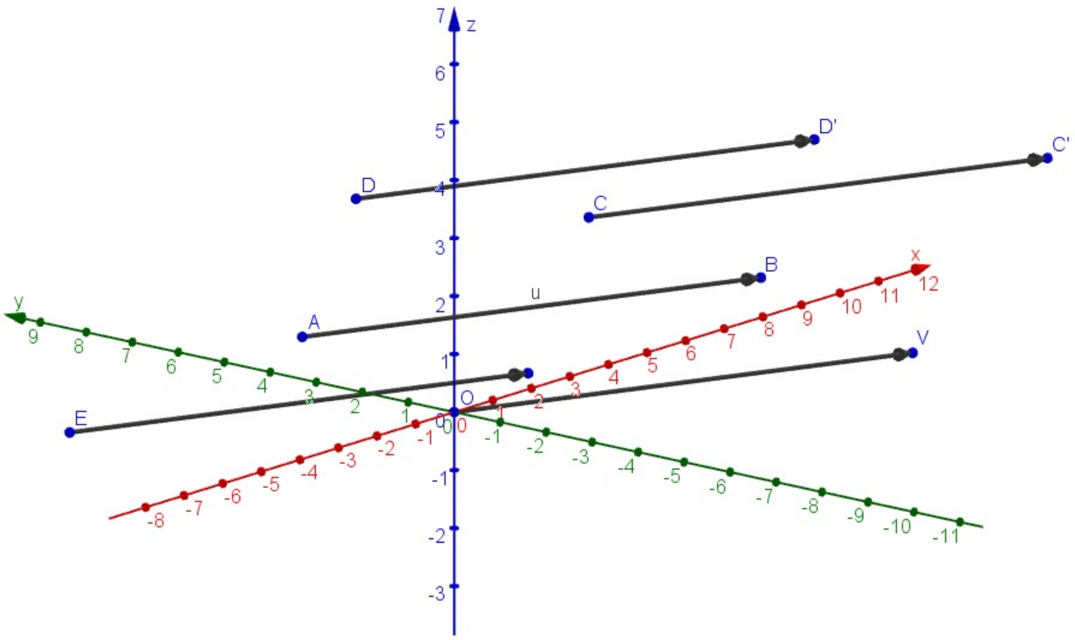

Figura 2.21: Representantes do vetor $\vec{u}$ no espaço

Definição 11. *Como os representantes de um vetor* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *têm o mesmo comprimento, a saber, a distância de* A *a* B*, esse valor comum será chamado* **comprimento ou norma** *do vetor* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$*, o que indicaremos por* $\|\vec{u}\|$*. Em particular, se tomarmos o representante* $\overrightarrow{OU}$*,* $U = (u_1, u_2, u_3)$*, temos*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Atividade 2.15. *1. Considere os vetores* $u = (4, 4, 3)$ *e* $v = (3, 2, -1)$*. Detemine suas normas.*

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $u = (4, 4, 3)$ *e* $v = (3, 2, -1)$*.*
- *No Campo de Entrada, digite: Comprimento[u] e Comprimento[v].*

Observe os valores dos números a e b na janela algébrica da Figura 2.22, os mesmos representam as normas dos vetores da Atividade 2.15.

Definição 12. *Sejam* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *e* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *dois vetores. A* **soma** *de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$ *é definida como sendo o vetor*

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Definição 13. *Sejam* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *um vetor e* $a \in \mathbb{R}$ *um número real. O* **produto** *de* a *por* $\vec{v}$*, é definido como sendo o vetor*

$$a\vec{v} = (av_1, av_2, av_3)$$

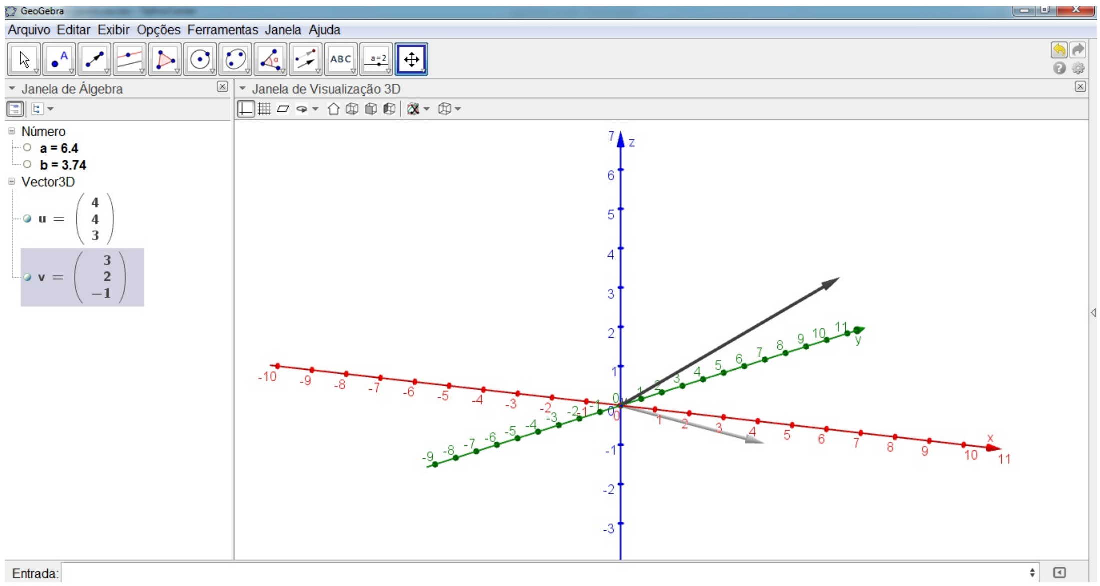

Figura 2.22: Normas dos vetores u e v

Atividade 2.16. *1. Considere os vetores* $u = (4, 4, 3)$ *e* $v = (3, 2, -1)$*. Determine:*

a) $u + v$

b) $3u - 2v$

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $u = (4, 4, 3)$ *e* $v = (3, 2, -1)$*.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $u + v$ *e* $3u - 2v$*.*

A **base canônica** do $\mathbb{R}^3$ tem três vetores. Eles são os vetores dados por $e_1 = \vec{i} = (1, 0, 0)$, $e_2 = \vec{j} = (0, 1, 0)$ e $e_3 = \vec{k} = (0, 0, 1)$.

Proposição 6. *Se* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$*, então*

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

Demonstração 4. *De fato,*

$$v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, , v_3)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} = (v_1, v_2, v_3) = \vec{v}$$

Definição 14. *Dados os vetores* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *e* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$*. O* **produto esclar ou (interno)** *de* $\vec{u}$ *por* $\vec{v}$*, indicado por* $\vec{u}.\vec{v}$*, ou por* $\langle u, v\rangle$*, é o número real dado por*

$$\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Observação 8. *Assim como para vetores no plano, temos também que, o ângulo entre dois vetores u e v no espaço* $\mathbb{R}^3$ *é dado por*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Em particular dizemos que u e v são ortogonais, ou perpendiculares entre si, se $\langle u, v\rangle = 0$, *o que equivale a termos* $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Atividade 2.17. *1. Sejam* $u = (1, 2, -1)$ *e* $v = (0, -2, -1)$ *dois vetores. Determine o produto escalar de u por v.*

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $u = (1, 2, -1)$ *e* $v = (0, -2, -1)$.
- *No Campo de Entrada, digite:* $u * v$.

2.9.1 Produto Vetorial

Imaginemos o seguinte problema: Dados dois vetores não paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como podemos encontrar um vetor $\vec{w}$ perpendicular aos dois vetores dados?

Note que, esse problema não possui uma única solução. De fato, se encontrarmos um vetor $\vec{w}$ satisfazendo as condições acima, qualquer vetor $\lambda\vec{w}$ também satisfará.

A esse vetor $\vec{w}$ chamaremos de **produto vetorial** de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e denotaremos por $\vec{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$.

Definição 15. *Chama-se produto vetorial de dois vetores* $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ *e* $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, *tomados nesta ordem, e se representa por* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, *ao vetor*

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Observemos que o segundo membro da expressão cima, pode ser obtida do desenvolvimento segundo o **Teorema de Laplace**, de

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Isso sugere a notação

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Observação 9. *O símbolo à direita na expressão acima, não é um determinante, pois a primeira linha contém vetores em vez de escalares. No entanto, usaremos esta notação pela facilidade de memorização que ela propicia no cálculo do produto vetorial.*

Atividade 2.18. *1. Determine o produto vetorial dos vetores* $\vec{u} = (3, -2, 6)$ *e* $\vec{v} = (2, -4, 5)$

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $\vec{u} = (3, -2, 6)$ *e* $\vec{v} = (2, -4, 5)$.
- *No Campo de Entrada, digite:* $u \otimes v$[7] *(Figura 2.23).*

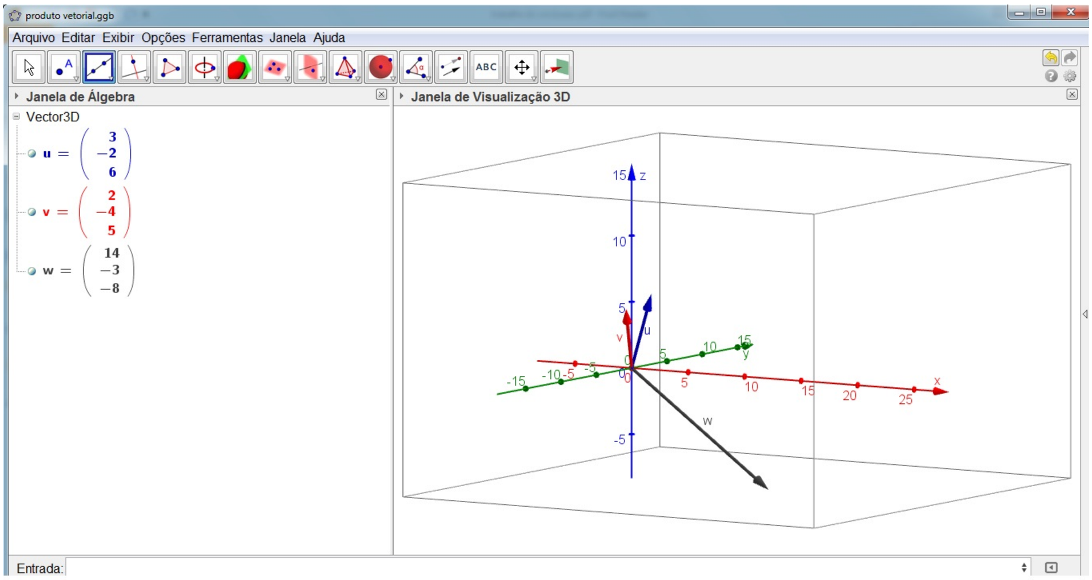

Figura 2.23: Produto vetorial de u e v

2.10 Distância entre dois ponto no espaço

Observamos inicialmente que se, num dado sistema $OXYZ$, os pontos $P = (a, b, c)$ e $Q = (a, b, z')$ têm as duas primeiras coordenadas iguais, então $d(P, Q) = |z - z'|$ pois esta é a distância entre dois pontos no eixo formado por todos os pontos (a, b, z), $z \in \mathbb{R}$. Um resultado análogo vale, evidentemente, para a primeira e terceira, ou para a segunda e terceira coordenadas.

Dados $P = (x, y, z)$ e $P' = (x', y', z')$, a distância entre esses, é dada por

$$d(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Em particular, a distância do ponto $P = (x, y, z)$ à origem $O = (0, 0, 0)$ é dada por

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Atividade 2.19. *1. Dados os pontos* $P = (2, 1, 3)$ *e* $Q = (1, 4, -1)$*, determine a distância eles.*

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $P = (2, 1, 3)$ *e* $Q = (1, 4, -1)$.

[7] No geogebra, $u \otimes v$ indica o produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$.

- *No Campo de Entrada, digite: Distância$[P, Q]$.*

Como no caso do plano, podemos caracterizar o perpendicularismo dos segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ em termos das coordenadas dos pontos $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$.

Com efeito, o ângulo $A\widehat{O}A'$ é reto se, e somente se, vale

$$d(A, A')^2 = d(O, A)^2 + d(O, A')^2,$$

ou seja,

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2 = a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

desenvolvendo os quadrados e, simplificando, obtemos a relação

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$

que fornece a condição necessária e suficiente para que sejam perpendiculares os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$, onde $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$.

Atividade 2.20. *1. Sejam $A = (2, -6, 2)$ e $A' = (1, 2, 5)$. Verifique que os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$, são perpendiculares.*

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite: $O = (0, 0, 0)$, $A = (2, -6, 2)$ e $A' = (1, 2, 5)$.*
- *Com o botão Segmento definido por Dois pontos, clique em: O e A; O e A'.*
- *Com o botão Ângulo, clique, na sequência, sobre: A, O e A'.*

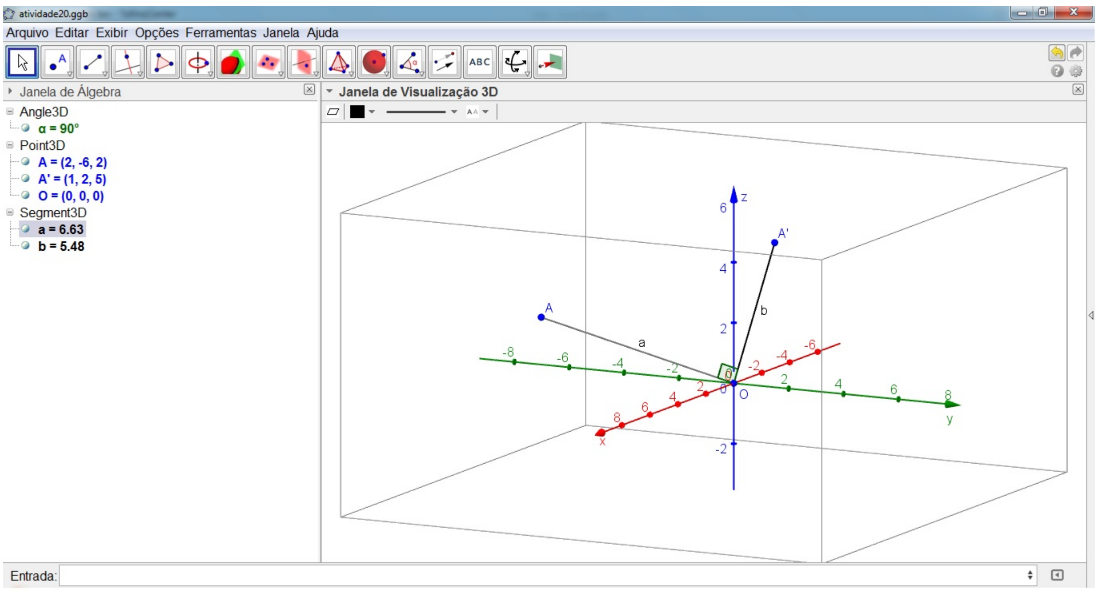

Figura 2.24: Ângulo entre os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$

Capítulo 3

Estudo da reta utilizando o Geogebra

3.1 Equação da Reta

Teorema 2 *A toda reta r do plano cartesiano está associada uma equação da forma*

$$ax + by + c = 0$$

onde a, b e c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) representa um ponto de r.

Demonstração 5. *Sejam $Q = (x_1, y_1)$, $R = (x_2, y_2)$ dois pontos distintos do plano cartesiano e r a reta definida por esses. Se $P = (x, y)$ é um ponto de r, então os pontos P, Q e R são colineares. Logo, pelo visto na Seção 2.5, temos:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo esse determinante pela regra de Laplace, teremos:

$$(y_1 - y_2).x + (x_2 - x_1).y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

Fazendo $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $x_1 y_2 - x_2 y_1 = c$, decorre que todo ponto $P \in r$ deve verificar a equação

$$ax + by + c = 0$$

chamada equação geral de r.

3.1.1 Comentários

1. Ficou provado que toda reta tem equação geral.

2. Convém notar que a mesma reta r admite infinitas equações gerais, isto é, está associada a um conjunto de equações equivalentes entre si.

3. Os coeficientes a e b não podem ser simultaneamente nulos pois:

$$a = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

$$b = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Dessas duas igualdades, concluímos que $Q = R$, porém, $Q \neq R$ por hipótese.

Atividade 3.1. *1. Obter a equação da reta que passa por $Q = (4,3)$ e $R = (0,7)$.*

2. Abra o Geogebra e:

- *Crie os pontos $Q = (4,3)$ e $R = (0,7)$.*
- *Com o botão Reta Definida por Dois Pontos, clique sobre os pontos Q e R.*

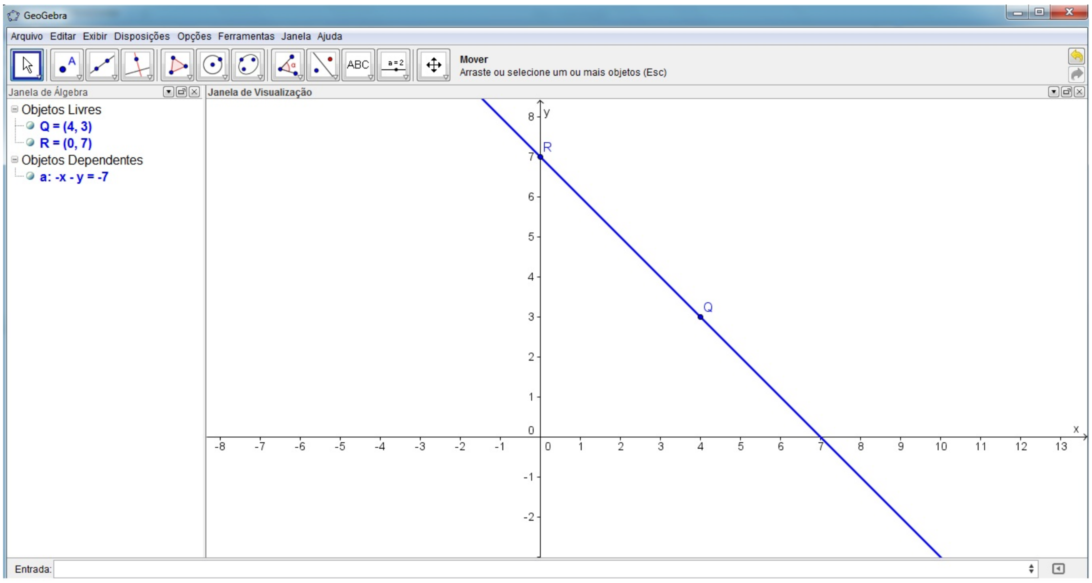

Figura 3.1: *Reta que passa por R e Q*

Teorema 3 *A toda equação da forma $ax + by + c = 0$, com $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, está associada uma única reta r do plano cartesiano cujos pontos $P = (x, y)$ são as soluções da equação dada.*

Demonstração 6. *Faremos a demonstração apenas para o caso geral $a \neq 0$ e $b \neq 0$.*

Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ três pontos dois a dois distintos que satisfazem a equação dada. Então temos:

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \Rightarrow ax_1 = -by_1 - c$$
$$ax_2 + b_2 + c = 0 \Rightarrow ax_2 = -by_2 - c$$
$$ax_3 + b_3 + c = 0 \Rightarrow ax_3 = -by_3 - c$$

Além disso

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{ax_3 - ax_1}{ax_2 - ax_3} = \frac{-by_3 - c - (-by_1 - c)}{-by_2 - c - (-by_3 - c)} = \frac{-by_3 + by_1}{-by_2 + by_3}$$

Segue que

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3}$$

Portanto P_1, P_2 e P_3 são colineares.

Está provado que todo ponto P_3 (variável), que satisfaz a condição $ax + by + c = 0$, pertence necessariamente à reta P_1P_2 (que existe e é única) à qual denominaremos de reta r.

3.1.2 Comentários

- O Teorema 3 mostra que, dada a equação $ax + by + c = 0$, o conjunto dos pares (x, y) que a satisfazem é uma reta.

- O Teorema 3 mostra também que só os pontos que satisfazem a equação $ax + by + c = 0$ pertencem à reta, portanto, um ponto está sobre uma reta somente se suas coordenadas verificam a equação dada.

Atividade 3.2. *1. Construir o gráfico dos pontos que verificam a equação* $x + 2y - 6 = 0$.

2. Abra o Geogebra e no Campo de Entrada, digite $x + 2y - 6 = 0$. *O resultado é mostrado na Figura 3.2.*

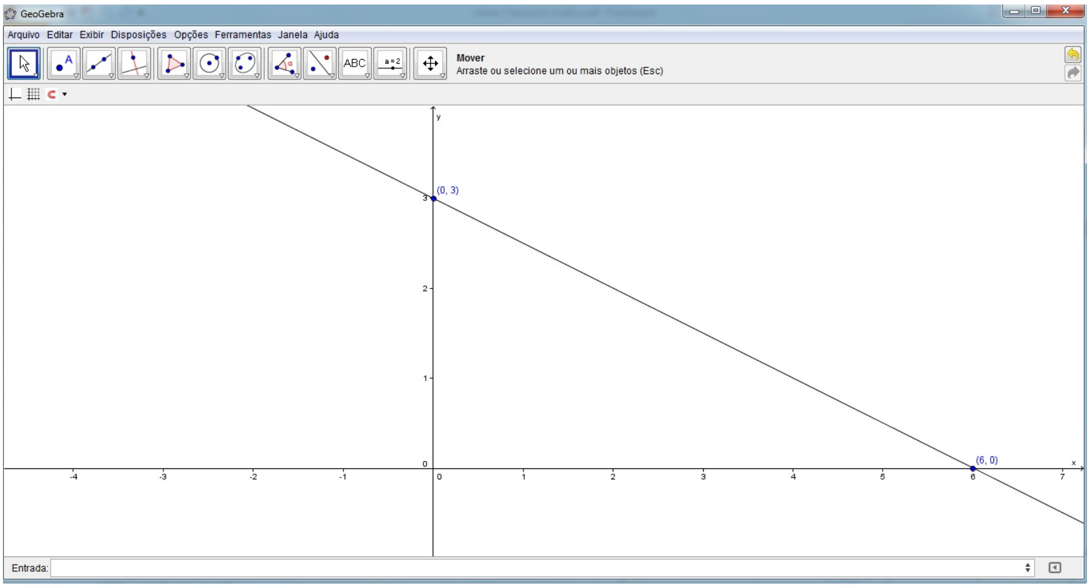

Figura 3.2: *reta* $x + 2y - 6 = 0$

Atividade 3.3. *1. Verificar se os pontos* $A = (2, 2)$, $B = (4, 1)$ *e* $C = (7, -1)$ *pertencem à reta* r *de equação* $x + 2y - 6 = 0$.

2. Abra o Geogebra:

- *No Campo de Entrada, digite:* $A = (2, 2)$, $B = (4, 1)$ *e* $C = (7, -1)$.

- *No Campo de Entrada, digite:* $r : x + 2y - 6 = 0$.

Observe, na Zona Gráfica, que os pontos $A = (2, 2)$ *e* $B = (4, 1)$ *estão sobre a reta* r*, mas que o mesmo não ocorre com o ponto* $C = (7, -1)$.

A relação entre os pontos A, B e C e a reta r, poderia ser feita, com o uso do botão *Relação entre Dois Objetos*, clicando sobre: A e r; B e r; C e r. Por exemplo, clicando sobre a reta r e sobre o ponto C, o *Geogebra*, apresenta a resposta, dizendo: "Ponto C não pertence a Reta r (verificado numericamente)", como mostra a Figura 3.3.

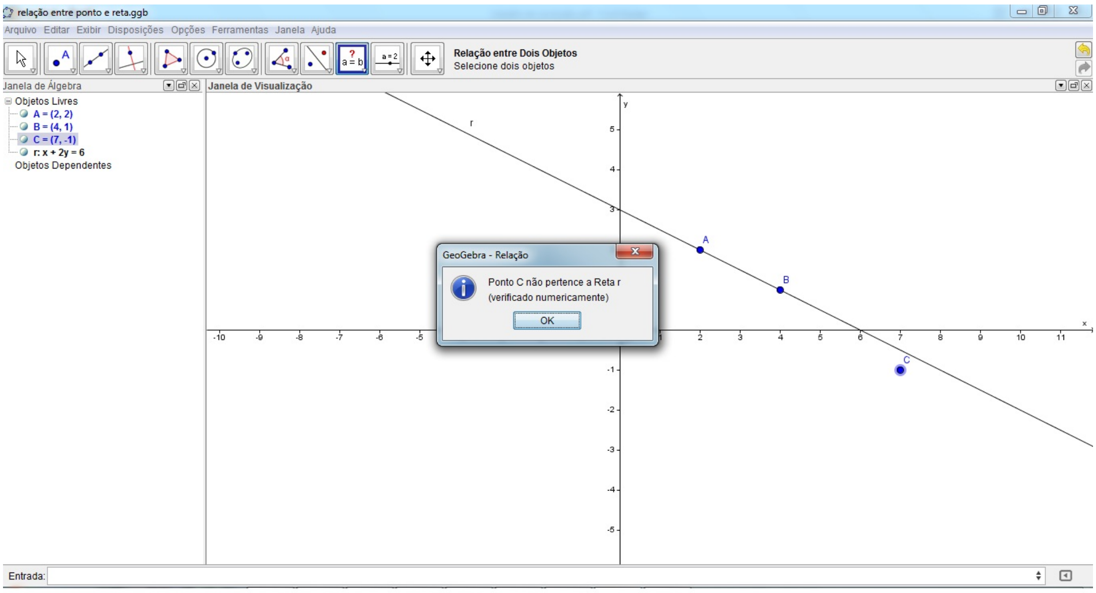

Figura 3.3: *Relação entre os pontos e a reta*

Atividade 3.4. *1. Determinar as equações das retas suportes dos lados do triângulo cujos vértices são* $A = (0, 0)$*,* $B = (1, 3)$ *e* $C = (4, 0)$*.*

2. No Geogebra, realize os seguintes procedimentos:

- *Com o botão Novo ponto ou digitando no Campo de Entrada, crie os pontos* $A = (0, 0)$*,* $B = (1, 3)$ *e* $C = (4, 0)$*.*
- *Com o botão Polígono crie o triângulo* ABC*.*
- *Com o botão Reta definida por dois pontos, crie as retas* $\overleftrightarrow{AB}$*,* $\overleftrightarrow{BC}$ *e* $\overleftrightarrow{AC}$*.*

Observe as equações obtidas na Janela Algébrica.

3. Abra o Geogebra e realize as seguintes operações:

- *Com o botão Novo ponto ou digitando no Campo de Entrada, crie os pontos* $A = (0, 0)$*,* $B = (1, 3)$ *e* $C = (4, 0)$*.*
- *No Campo de Entrada, digite: reta* $[A, B]$*, reta* $[B, C]$ *e reta* $[A, C]$

Observe as equações obtidas na Janela Algébrica.

3.2 Intersecção de duas retas

Todo ponto de intersecção de duas retas tem de satisfazer às equações de ambas as retas, pontanto, obtemos o ponto comum $P = (x_0, y_0)$ a duas retas concorrentes resolvendo o sistema formado pelas suas equações:

$$\begin{cases} r : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ s : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Atividade 3.5. *1. Obter a intersecção das retas:* $r : x + 2y = 3$ *e* $s : 2x + 3y = 5$

2. Abra o Geogebra e realize as seguintes operações:

- *No Campo de Entrada digite:* $r : x + 2y = 3$ *e* $s : 2x + 3y = 5$
- *Com o botão Intersecção de Dois Objetos, clique sobre as retas* r *e* s *na Janela Gráfica*
- *Clique com o botão direito sobre o ponto* A*, intersecção das retas* r *e* s*, em propriedades, na guia básico, em Exibir Rotulo, selecione NomeValor.*

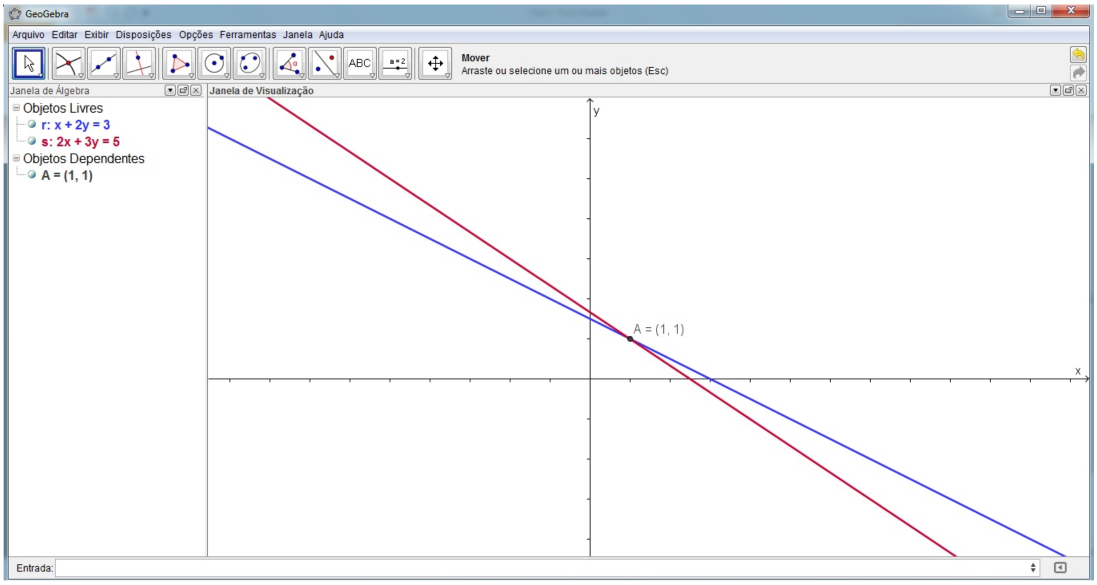

Figura 3.4: *Intersecção das retas* r *e* s

O ponto de intersecção[1] das retas r e s pode ser obtido, digitando, no *Campo de Entrada* o comando *Interseção*$[r, s]$.

3.3 Posições relativas de duas retas

Dadas duas retas r e s cujas equações são

$$\begin{cases} r : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ s : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

elas podem ocupar apenas três posições relativas no plano cartesiano. Essas posições são definidas com base no número de pontos comuns às retas, isto é:

$$r \text{ e } s \text{ concorrentes} \Leftrightarrow \text{um único ponto em comum, isto é, } r \cap s \neq \phi$$
$$r \text{ e } s \text{ paralelas e distintas} \Leftrightarrow \text{nenhum ponto em comum, ou seja, } r \cap s = \phi$$
$$r \text{ e } s \text{ coincidentes} \Leftrightarrow \text{infinitos pontos comuns, isto é, } r = s$$

Vejamos pois, as condições que devem ser satisfeitas, para cada um desses casos. Resolvedo o sitema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y - b_1c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)x + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$

[1]Observe que esse ponto não pode ser descolado, por se tratar de um *objeto dependente*.

$$\Rightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)x = b_1c_2 - b_2c_1$$

Por outro lado,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_2a_1x - a_2b_1y - a_2c_1 = 0 \\ a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2 = 0 \end{cases}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y + a_1c_2 - a_2c_1 = 0$$

$$\Rightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_2c_1 - a_1c_2$$

Fazendo:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$$

$$b_1c_2 - b_2c_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_1$$

$$a_2c_1 - a_1c_2 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = D_2$$

O sistema fica reduzido a:

$$\begin{cases} Dx = D_1 \\ Dy = D_2 \end{cases}$$

São três casos possíveis:

1. $D \neq 0 \Leftrightarrow$ tem uma única solução $r \cap s \neq \phi$
2. $D = 0$ e D_1 (ou D_2) $\neq 0 \Leftrightarrow$ não tem solução $\Leftrightarrow r \cap s = \phi$
3. $D = D_1 = D_2 = 0 \Leftrightarrow$ tem infinitas soluções $\Leftrightarrow r = s$

Atividade 3.6. *1. Determinar a posição relativa dos seguintes pares de retas:*

a) $r : 2x - y + 3 = 0$ *e* $s : x - 2y + 3 = 0$

b) $t : 2x - y + 5 = 0$ *e* $u : 2x - y + 3 = 0$

c) $v : x - 6y + 3 = 0$ *e* $z : 3x - 18y + 9 = 0$

2. No Geogebra, realize as seguintes operações:

a) *No Campo de Entrada, digite:*

- $r : 2x - y + 3 = 0$
- $s : x - 2y + 3 = 0$
- $t : 2x - y + 5 = 0$
- $u : 2x - y + 3 = 0$
- $v : x - 6y + 3 = 0$
- $z : 3x - 18y + 9 = 0$

b) *Clique com o botão direito sobre qualquer umas equações, na guia Propriedades, selecione Cor, escolha uma cor para cada reta.*

c) *Com o botão Intersecção de Dois Objetos, clique, na sequência, sobre as retas: r e s; t e u; v e z.*

Observe os valores que aparecem na *Janela Algébrica.*

3.4 Formas Da Equação da Reta

3.4.1 Forma Geral

Vimos, pelo Teorema 2, que dada uma reta r, podemos determinar pelo menos uma equação do tipo

$$ax + by + c = 0$$

denominada equação geral da reta r, à qual é satisfeita por todos os pontos $P = (x, y)$ pertecentes à reta r.

Atividade 3.7. *1. Determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (-4, -2)$.*

2. Abra o Geogebra:

- *Digitando no Campo de Entrada ou com o botão Novo Ponto, crie os pontos $A = (1, 2)$ e $B = (-4, -2)$*
- *Com o botão Reta definida por Dois Pontos, clique sobre os pontos A e B.*
- *No Campo de Entrada, digite Reta[A,B].*

Observe e compare as equações que surgem na *Zona Algébrica.*

3.4.2 Forma Reduzida

Considere uma reta r, de equação geral $ax + by + c = 0$, com $b \neq 0$, assim

$$by = -ax - c \Rightarrow y = (-\frac{a}{b})x + (-\frac{c}{b})$$

fazendo $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$, temos:

$$y = mx + q$$

que é denominada equação reduzida da reta r, em que m é o coeficiente angular, isto é, o valor da tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas e o número q ordenada do ponto onde a reta r corta o eixo y, é o coeficiente linear da reta. Desse modo se m é negativo o ângulo formado pela reta e o eixo x é maior do que 90 graus o que implica dizer que a reta é decrescente. Por outro lado, se m é positivo, então o ângulo é menor do que 90 graus, logo a reta é crescente.

Atividade 3.8. *1. Determinar a equação reduzida da reta AB quando $A = (-1, 1)$ e $B = (2, 10)$.*

2. Abra o Geogebra:

- *Crie os pontos $A = (-1, 1)$ e $B = (2, 10)$.*
- *Com o botão Reta definida por Dois Pontos, clique sobre os pontos A e B.*
- *Na Janela Algébrica, clique com o botão direito sobre a equação obtida e selecione a opção $y = ax + b$ (Figura 3.5).*

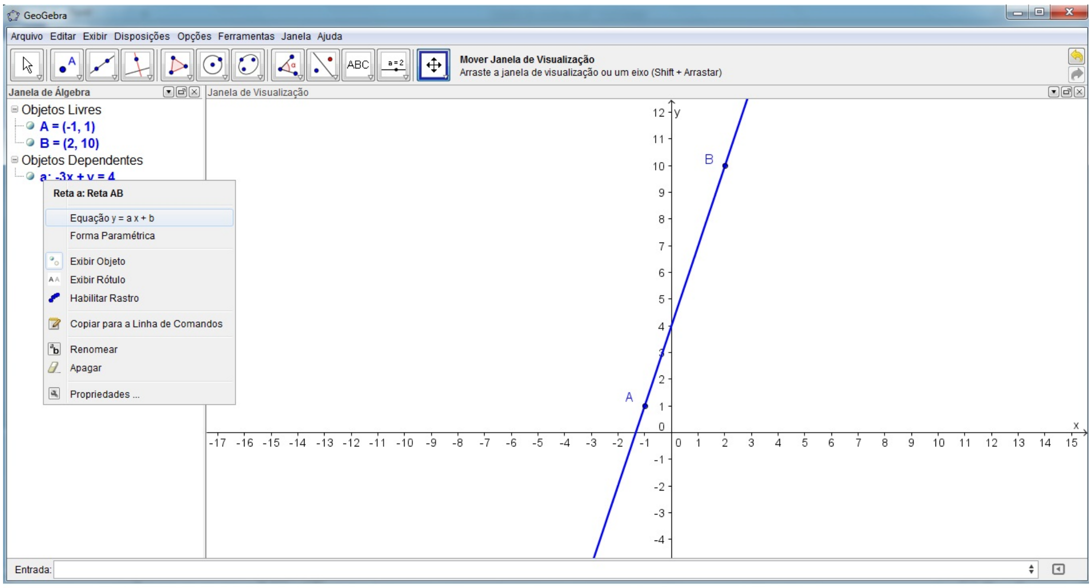

Figura 3.5: *Equação reduzida da reta*

3.4.3 Cálculo do coeficiente angular

Consideremos a reta r que passa pelos pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, com $x_1 \neq x_2$, e que forma com o eixo x um ângulo de medida α.

Se α é agudo, isto é, $0° < \alpha < 90°$, então pela Figura 3.6,
sendo o triângulo ABC retângulo em C, temos:

$$\text{tg}\alpha = \frac{CB}{AC} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por outro lado, se α é obtuso, isto é, $90° < \alpha < 180°$, então pela Figura 3.7, no triângulo retângulo ABC, temos:

$$\text{tg}(180° - \alpha) = \frac{CB}{CA} \Rightarrow \text{tg}(180° - \alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \Rightarrow -\text{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Portanto, para os dois casos, temos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Atividade 3.9. *1. Determine o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos* $A = (1, 1)$ *e* $B = (5, 7)$.

2. Abra o Geogebra:

- *Com o botão Novo Ponto ou digitando no Campo de Entrada, crie os pontos* $A = (1, 1)$ *e* $B = (5, 7)$.
- *Com o botão Reta definida por Dois Pontos, clique sobre os pontos* A *e* B.
- *No Campo de Entrada, digite: Inclinação [a].*

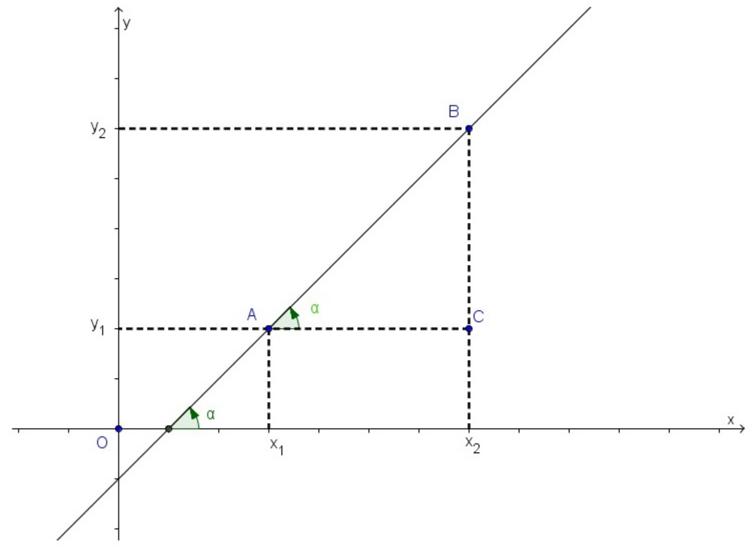

Figura 3.6: *ângulo α agudo*

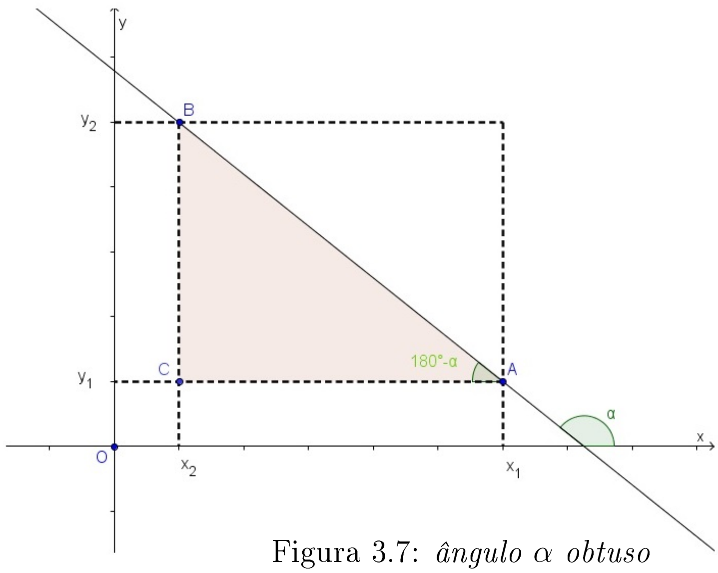

Figura 3.7: *ângulo α obtuso*

3.4.4 Forma Segmentária

Seja r uma reta que intersecta o eixo x no ponto $P = (p, 0)$ e o eixo y em $Q = (0, q)$, com $p \neq 0$ e $q \neq 0$, como mostra a Figura 3.8:

Uma equação de r é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow pq - qx - py = 0 \Rightarrow qx + py = pq$$

Dividindo ambos os membros da última equação por $pq \neq 0$, obtemos:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

que é denominada **equação segmentária** de r.

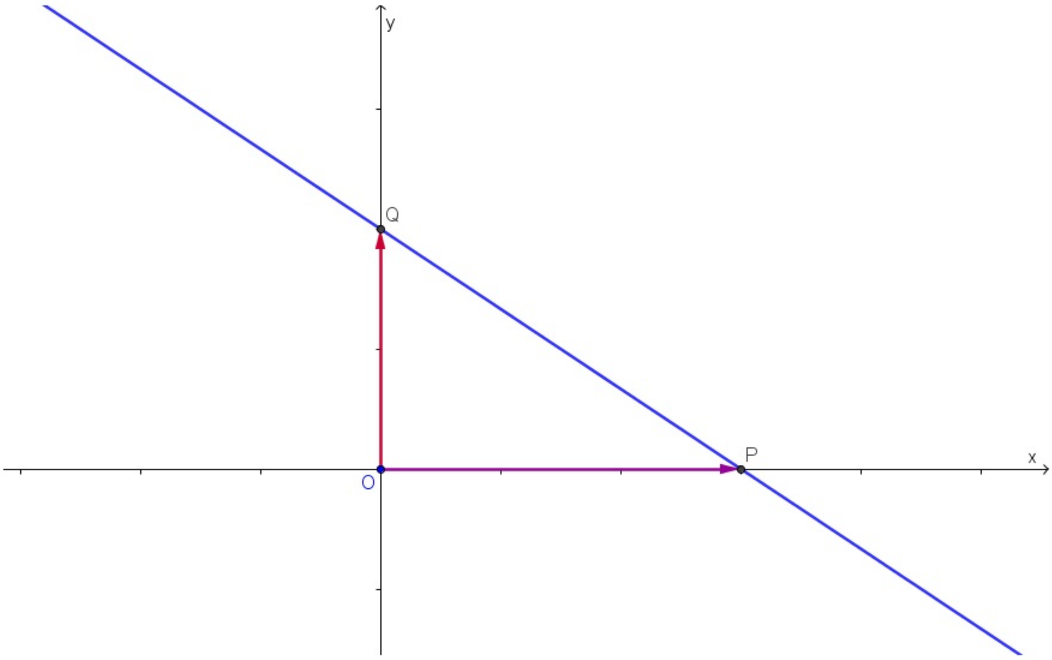

Figura 3.8: *Reta por P e Q*

Note que **p** e **q** são as medidas algébricas, respectivamente, dos segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$, daí o nome de equação segmentária.

Consideremos uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$ com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, tal que $P = (p, 0)$ e $Q = (0, q)$, pertençam ambos a r.

A equação segmentária da reta r é obtida da seguinte maneira:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + by = -c \Rightarrow \frac{a}{-c}x + \frac{b}{-c}y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{-c}{a}} + \frac{y}{\frac{-c}{b}} = 1$$

Por outro lado, como $P = (p, 0) \in r$ e $Q = (0, q) \in r$ por hipótese, temos:

$$a.p + b.0 + c = 0 \Rightarrow p = -\frac{c}{a}$$

e

$$a.0 + b.q + c = 0 \Rightarrow q = -\frac{c}{b}$$

Segue que

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Além disso, se na figura 3.8 traçarmos o segmento PQ, temos, pelo **Teorema de Pitágoras**, que

$$\overline{PQ} = \sqrt{p^2 + q^2}$$

isto é, a expressão

$$\sqrt{p^2 + q^2}$$

representa a distância entre os pontos de contatos da reta com os eixos coordenados.

No *Geogebra*, afim de transformarmos a equação geral de uma reta na forma segmentária, traçamos o gráfico da mesma e, observamos os pontos de contatos com os eixos coordenados.

Atividade 3.10. *1. Obter a equação segmentária da reta* $2x + 3y - 12 = 0$

2. Abra o Geogebra:

- *No Campo de Entrada, digite* $2x + 3y - 12 = 0$

- *Com o botão Intersecção de Dois Objetos, clique sobre: a reta e o eixo* x*; a reta e o eixo* y*, renomeando-os*[2] *para* P *e* Q *respectivamente.*

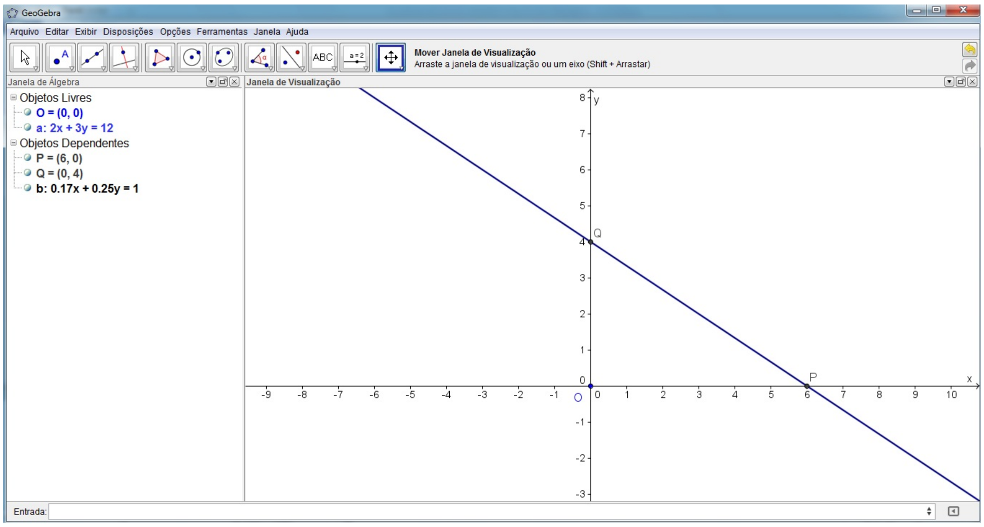

Figura 3.9: *Equação segmentária*

- *No Campo de Entrada, digite:* $\frac{x}{x(P)} + \frac{y}{y(Q)} = 1$

Por padrão o Geogebra apresenta o resultado, com os números na forma decimal. O resultado dessas operações é mostrado na Figura 3.9 e, de acordo com a mesma, a equação segmentária da reta é:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$$

3.4.5 Forma Paramétrica

Até o momento, mostramos que as equações geral, reduzida e segmentária de uma reta relacionam diretamente entre si as coordenadas de x e y.

Porém, podemos escrever a equação de uma reta em função de uma terceira variável λ, denominada parâmetro.

As equações abaixo são denominadas *equações paramétricas* da reta.

$$\begin{cases} x = x_1 + k_1\lambda \\ y = y_2 + k_2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in R, k_1 \neq 0 \ ou \ k_2 \neq 0)$$

Para obtermos a equação geral de uma reta definida por equações paramétricas, eliminamos o parâmetro λ das duas equações.

[2]Para renomear um objeto, clique com o botão direito sobre o mesmo e, escolha a opção renomear

Por outro lado, desenhemos, por exemplo, o gráfico da reta que passa pelos pontos $A = (1, 3)$ e $B = (-1, -1)$. Clique com o botão direito sobre a reta, em **Propriedades**, na aba **Básico**, marque **Exibir Rótulo** e selecione **Nome & Valor**. Em seguida, na **Zona Algébrica**, clique com o botão direito sobre a equação e selecione a opção **Forma Paramétrica** (Figura 3.10).

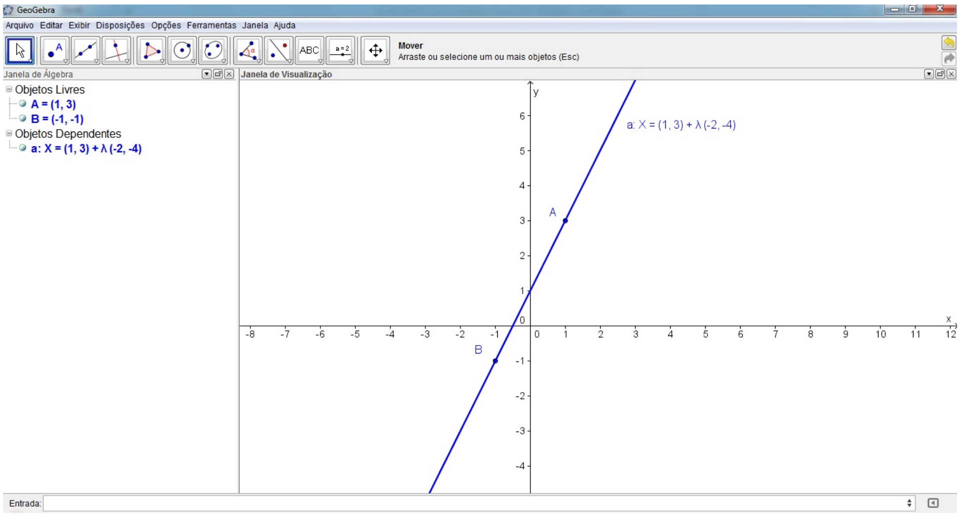

Figura 3.10: *Equação paramétrica da reta por* $A = (1, 3)$ *e* $B = (-1, -1)$

Dado um ponto $\mathbf{P} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e um vetor $\mathbf{v} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, existe uma única reta que passa por $\mathbf{A}$ e tem a direção do vetor $\mathbf{v}$.

Definição 16. *Se uma reta* $\mathbf{r}$ *passa por um ponto* $\mathbf{P}$ *e tem a direção de um vetor* $\mathbf{v}$*, então uma de suas equações pode ser* $\mathbf{r} : \mathbf{P} + \lambda.\mathbf{v}$ *, onde* λ *é um número real.*

A pergunta que surge é: Como obter o vetor $\mathbf{v}$?

O vetor diretor, possui extremidade inicial na origem do sistema cartesiano e extremidade final dada pela diferença entre as coordenadas de dois pontos quaisquer da reta.

No nosso exemplo, temos:

$$v = (-1, -1) - (1, 3) \Rightarrow v = (-2, -4)$$

e de acordo com a figura 3.10, a equação paramétrica é:

$$X = (1, 3) + \lambda.(-2, -4)$$

O número real λ, na expressão $\mathbf{r} : \mathbf{P} + \lambda.\mathbf{v}$, indica que todas as retas paralelas à reta r têm o mesmo vetor diretor, variando apenas o ponto por onde ela passa.

Atividade 3.11. *1. Determinar a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos* $A = (1, 2)$ *e* $B = (2, 1)$.

2. Abra o Geogebra e:

- *Com o botão Novo Ponto ou digitando no Campo de Entrada, Crie os pontos* $A = (1, 2)$ *e* $B = (2, 1)$.
- *Com o botão Reta definida por Dois Pontos, clique sobre os pontos* A *e* B.
- *Na Zona Algébrica, clique com o botão direito sobre a equação da reta e escolha a opção Forma Paramétrica (Figura 3.11).*

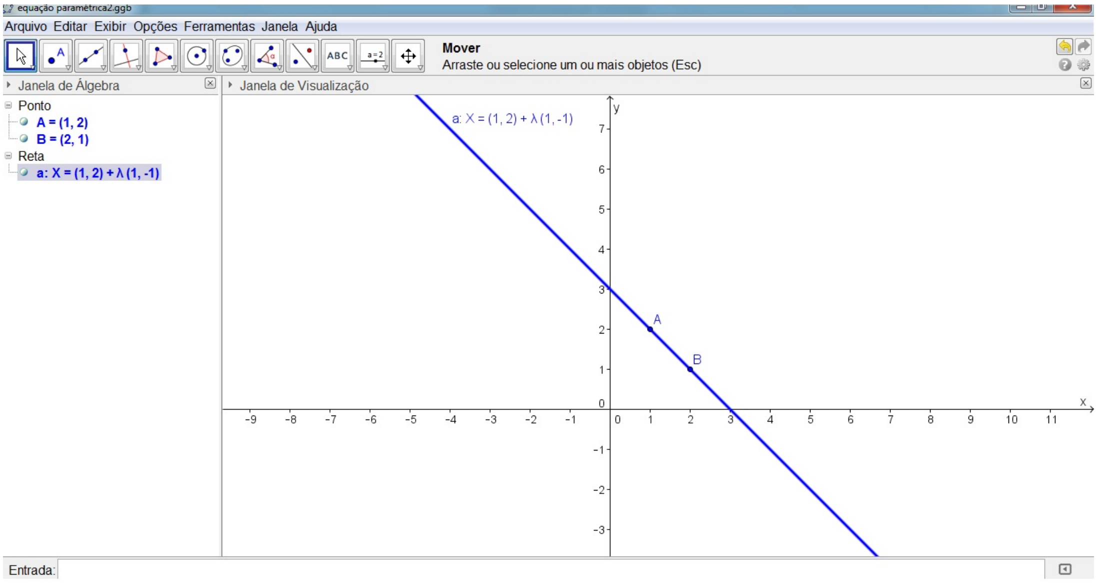

Figura 3.11: *Equação Paramética da reta por A e B*

3.5 Equação da reta que passa por um ponto $P = (x_0, y_0)$ e tem coefeiciente angular m

Consideremos, no plano cartesiano, as retas que passam por um mesmo ponto $P = (x_0, y_0)$:

- a reta **perpendicular** ao eixo x tem por equação $x = x_0$ (Figura 3.12);

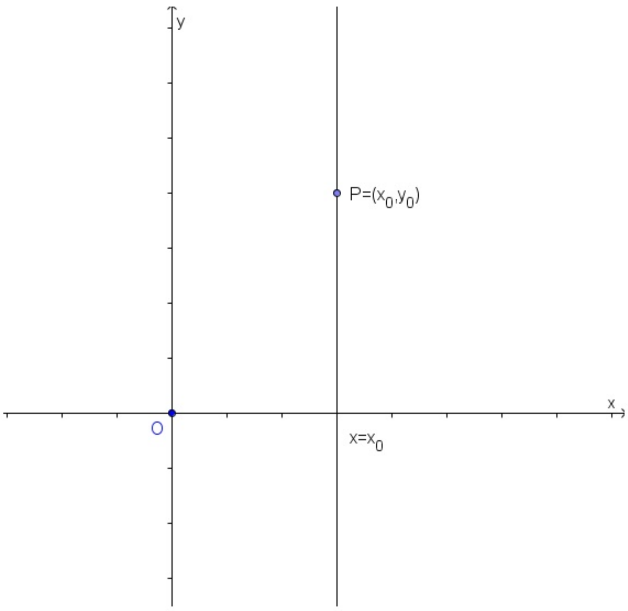

Figura 3.12: *Reta Perpendicular*

- cada uma das outras retas tem um coeficiente angular m e sua equação reduzida é $y = mx + q$, com a condição de **P** pertencer a ela (Figura 3.13) .

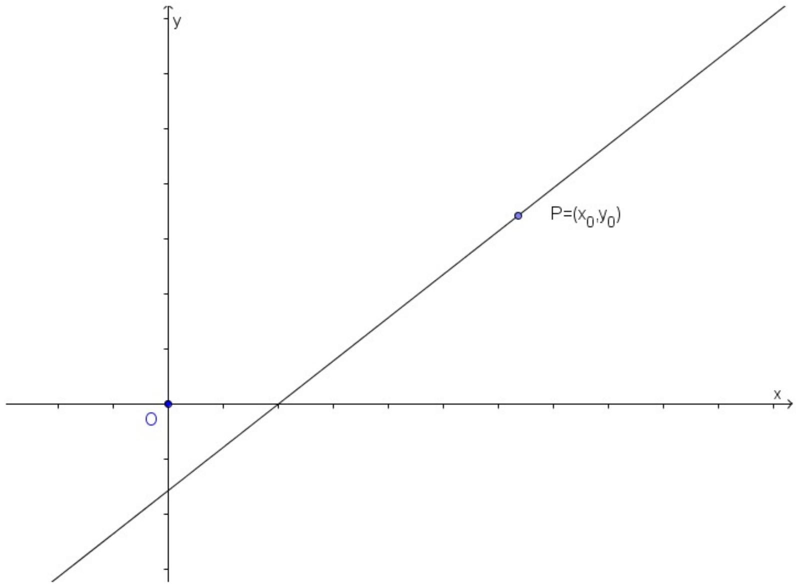

Figura 3.13: *Reta por* $P = (x_0, y_0)$

Logo:

$$y_0 = mx_0 + q \Rightarrow q = y_0 - mx_0$$

Substituindo em $y = mx + q$, vem:

$$y = mx + y_0 - mx_0 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

Portanto:

A equação de uma reta que passa por $P = (x_0, y_0)$ é:
$y - y_0 = m(x - x_0)$ ou $x = x_0$

Atividade 3.12. *1. Determine a equação da reta que passa pelo ponto* $P = (2, 5)$ *e tem inclinação de* $45°$.
2. Abra o Geogebra:

- *Digitando no Campo de Entrada ou com o botão Novo Ponto, crie o ponto* $P = (2, 5)$.
- *Com o botão Controle Deslizante, crie o ângulo* α.
- *No Campo de Entrada, digite* $y - y(P) = \mathrm{tg}(\alpha)(x - x(P))^3$

Observe, na *Zona Algébrica*, a equação obtida.

3.6 Condição de Paralelismo

Teorema 4 *Duas retas* $r : y = m_r x + q_r$ *e* $s : y = m_s x + q_s$, *não verticais, são paralelas entre si se, e somente se, possuem a mesma inclinação e cortam o eixo* $0Y$ *em pontos distinto, isto é:*

$$r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s \text{ e } q_r \neq q_s$$

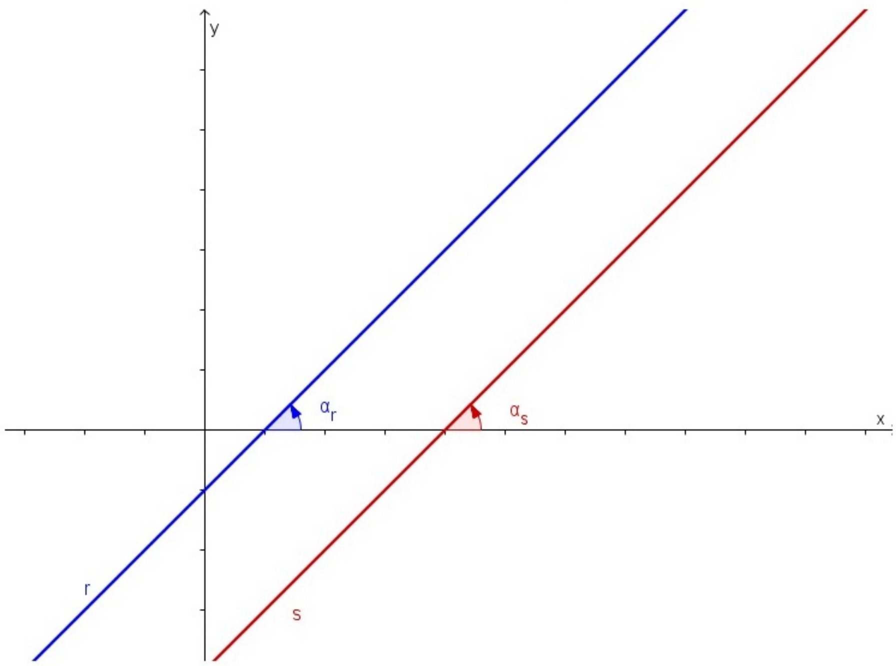

Figura 3.14: *Retas paralelas*

Demonstração 7. *Considere a Figura 3.14. Sejam* $y = m_r x + q_r$ *e* $y = m_s x + q_s$ *as equações reduzidas de* r *e* s *respectivamente. As retas* r *e* s *dadas são paralelas quando não existe um ponto* $P = (x, y)$ *comum a ambas, ou seja, quando o sistema*

$$\begin{cases} y = m_r x + q_r \\ y = m_s x + q_s \end{cases}$$

não possui solução. Ora esse sistema é equivalente a

$$\begin{cases} y - m_r x = q_r \\ (m_r - m_s)x = q_s - q_r \end{cases}$$

o qual é desprovido de solução se, e somente se, $m_r = m_s$ *e* $q_r \neq q_s$.

O que conclui a demonstração.

Observação 10. *Na seção 3.3 vimos que: duas retas* $r : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ *e* $s : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ *são paralelas se, e somente se,*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Nos casos em que r *e* s *não são verticais, vamos provar que as condições de paralelismo* $D = 0$ *e* $m_r = m_s$ *são equivalentes. Lembrando que* $b_1 \neq 0$ *e* $b_2 \neq 0$*, temos:*

$$D = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$
$$\Leftrightarrow m_r = m_s$$

Nos casos em $r \parallel s \parallel 0y$ *só vale a condição* $D = 0$ *pois não existem os coeficientes angulares* m_r *e* m_s.

[3]Na versão 4.2, que é a que estamos utilizando nesse trabalho, a tangete de um ângulo α, é obtida digitando no *Campo de Entrada*, o comando $tan(\alpha)$.

Atividade 3.13. *1. Determinar a equação da reta s que passa por $P = (6, -5)$ e é paralela a reta $r : 5x + +7y + 1 = 0$.*

2. Abra o Geogebra:

- *No Campo de Entrada digite $r : 5x + 7y + 1 = 0$*
- *Com o botão Novo Ponto ou digitando no Campo de Entrada, crie o ponto $P = (6, -5)$*
- *Com o botão Reta Paralela, clique sobre a reta r e em seguida sobre o ponto P.*
- *Renomear a reta assim obtida, denominando-a reta s.*

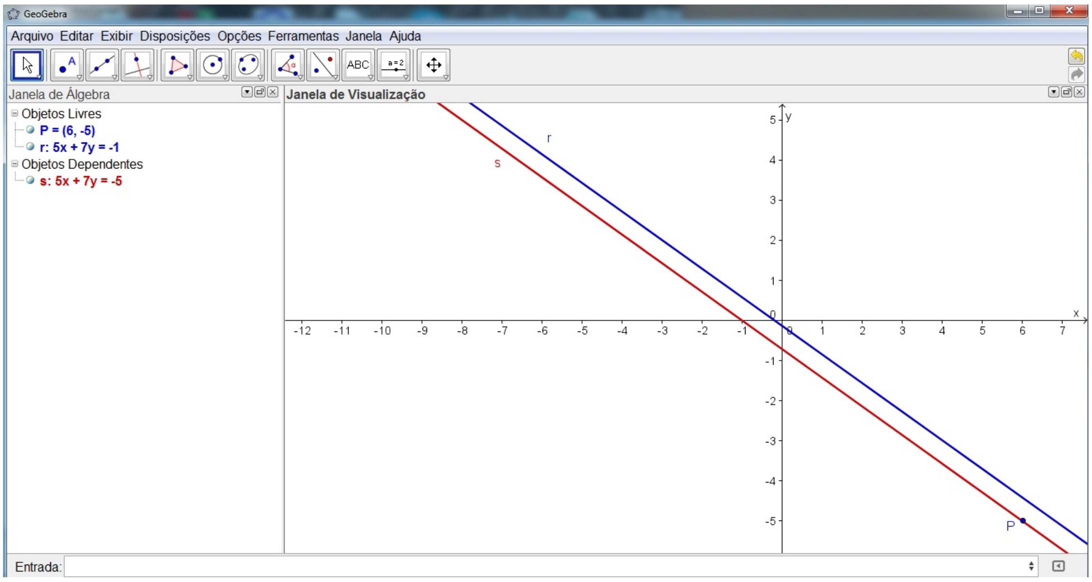

Figura 3.15: *Reta s paraela a r por P*

Vimos na seção 3.4.2 que a equação reduzida de uma reta r é

$$y = mx + q$$

onde $m = -\frac{a}{b}$ é o coeficiente angular de r e $q = -\frac{c}{b}$ é a ordenada do ponto onde a reta corta o eixo $0y$.

Supondo m constante e q variável, a equação reduzida passa a representar um conjunto de retas paralelas (mesma inclinação), iso é, um feixe de retas paralelas.

Assim, por exemplo, $y = 2x + q$ é a equação do feixe de retas paralelas com coeficiente angular 2. A Figura 3.16, mostra algumas dessas retas, com $q \in -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

3.7 Condição de Perpendicularismo

Definição 17. *Dadas no plano duas retas r e s, dizemos que r é perpendicular a s, que s é perpendicular a r ou, ainda, que r e s são* **perpendiculares** *quando r e s tiverem um ponto comum e formarem ângulos de 90°*

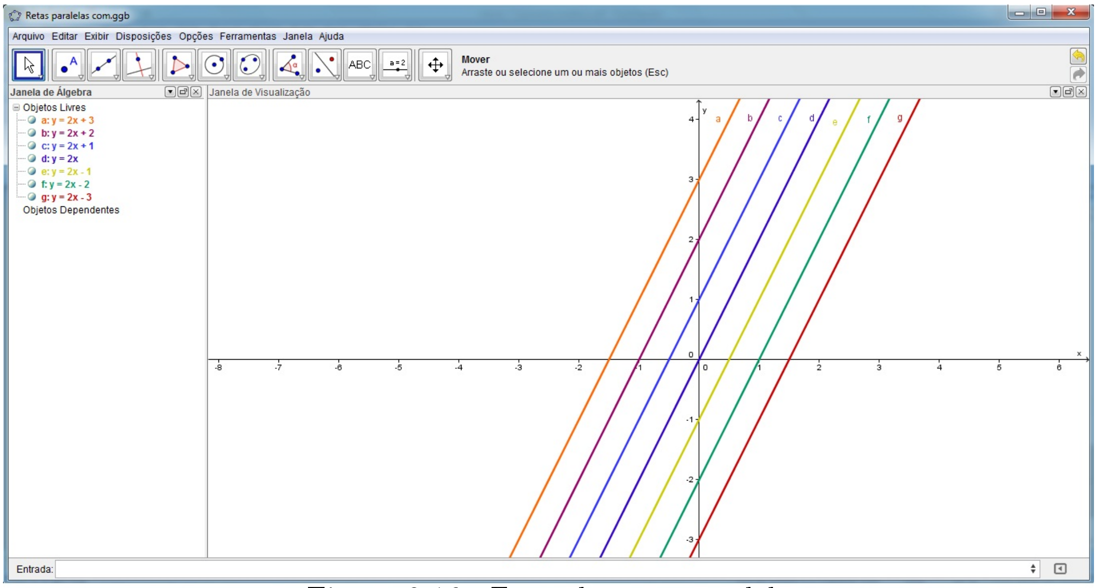

Figura 3.16: *Feixe de retas paralelas*

Teorema 5 *Duas retas r e s, não verticais, são perpendiculares entre si se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é -1.*

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r.m_s = -1$$

Demonstração 8. *Mostremos inicialmente que*

$$r \perp s \Rightarrow m_r.m_s = -1$$

No triângulo retângulo da Figura 3.17, uma vez que o ângulo externo é igual à soma dos internos não adjacentes, temos:

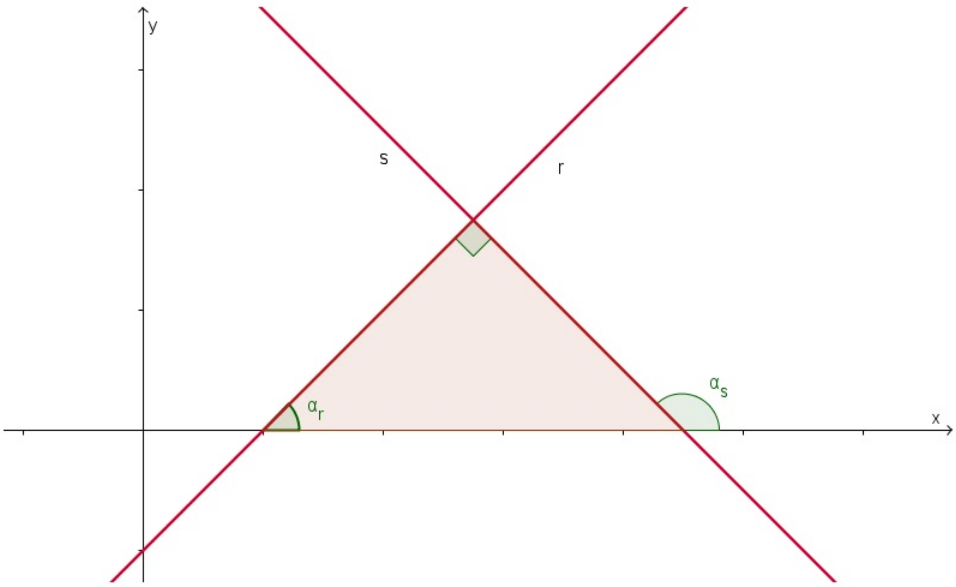

Figura 3.17: *Retas Perpendiculares*

$$\alpha_s = \frac{\pi}{2} + \alpha_r \Rightarrow \text{tg}\alpha_s = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_r\right)$$

Mas

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_r\right) = -\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_r\right) = -\cot\alpha_r = -\frac{\cos\alpha_r}{\sin\alpha_r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_r\right) = -\frac{1}{\frac{\sin\alpha_r}{\cos\alpha_r}} = -\frac{1}{\text{tg}\alpha_r}$$

Logo,

$$\text{tg}\alpha_s = -\frac{1}{\text{tg}\alpha_r} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r}$$

Portanto

$$m_r.m_s = -1$$

Por fim, mostremos que vale a recíproca, isto é:

$$m_r.m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$$

Considere o triângulo da Figura 3.18:

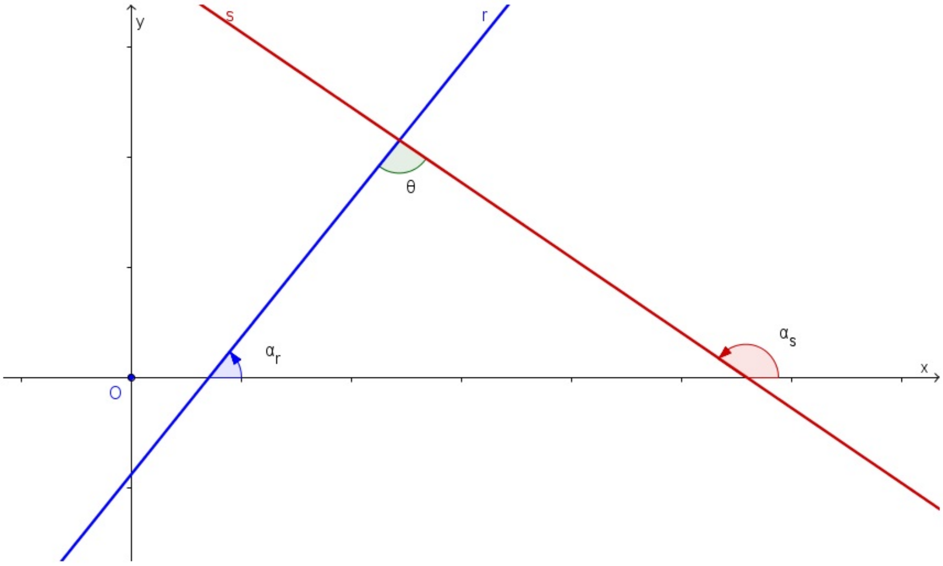

Figura 3.18: *Retas r e s, tais que $m_r.m_s = -1$*

$$m_r.m_s = -1 \Rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}$$

isto é,

$$m_r \neq m_s$$

as retas são concorrentes e formam um ângulo θ tal que

$$\alpha_s = \alpha_r + \theta$$

Além disso,

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow \text{tg}\alpha_s = -\frac{1}{\text{tg}\alpha_r} \Rightarrow \text{tg}\alpha_s = -\cot\alpha_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\alpha_s = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_r\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_s = \frac{\pi}{2}+\alpha_r$$

Comparando as duas igualdades, temos:

$$\alpha_r + \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha_r \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r \perp s$$

o que conclui a demonstração.

Atividade 3.14. *1. Verifique a posição relativa das retas* $r : 3x + 2y - 1 = 0$ *e* $s : 4x - 6y + 3 = 0$.

2. Abra o uso do Geogebra.

- *No Campo de Entrada, crie as retas* r *e* s*, digitando:* $r : 3x + 2y - 1 = 0$ *e* $s : 4x - 6y + 3 = 0$*, respectivamente.*

- *No Campo de Entrada, digite: inclinação* $[r]$ ** inclinação* $[s]$.

Observe o valor encontrado na Zona Algébrica.

Observação 11. *Podemos verificar que as retas* r *e* s *são perpendiculares de um outro modo bastante conveniente, a saber:*

- *Após a criação das retas* r *e* s*, com o botão Relação entre Dois Objetos, clique sobre as mesmas. Feito isso, o Geogebra, mostra o resultado, dizendo que "Reta* r *e Reta* s *são perpendiculares (verificado numericamente)", como mostra a Figura 3.19.*

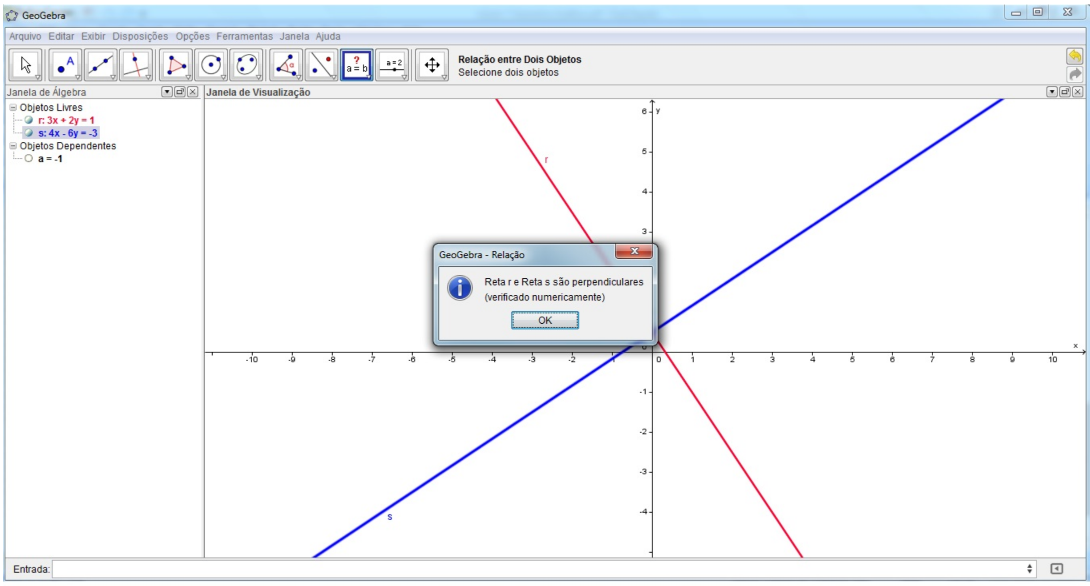

Figura 3.19: *Reta* r *perpendicular a reta* s

Atividade 3.15. *1. Dada a reta r de equação $2x - y + 5 = 0$ e o ponto $P = (3, 5)$, determine a equação da reta s que passa por P e é perpendicular à reta r.*

2. Abra o Geogebra

- *No Campo de Entrada, digite: $r : 2x - y + 5 = 0$, criando assim a reta r.*
- *No Campo de Entrada ou com o botão Novo ponto, crie o ponto $P = (3, 5)$.*
- *Com o botão Reta Perpendicular, clique sobre a reta r e sobre o ponto $P = (3, 5)$.*
- *Clique com o botão direito sobre reta construida após o passo anterior e renomeia, chamando-a de reta s.*

3. Determinar as equações das alturas do triângulo ABC e provar que eles concorrem no mesmo ponto H (Ortocentro). Dados: $A = (0, -3)$, $B = (-4, 0)$ e $C = (2, 1)$.

- *No Campo de Entrada, crie os pontos $A = (0, -3)$, $B = (-4, 0)$ e $C = (2, 1)$ e, com o botão Polígono, clique na sequência em A, B, C e novamente em A (Figura 3.20).*

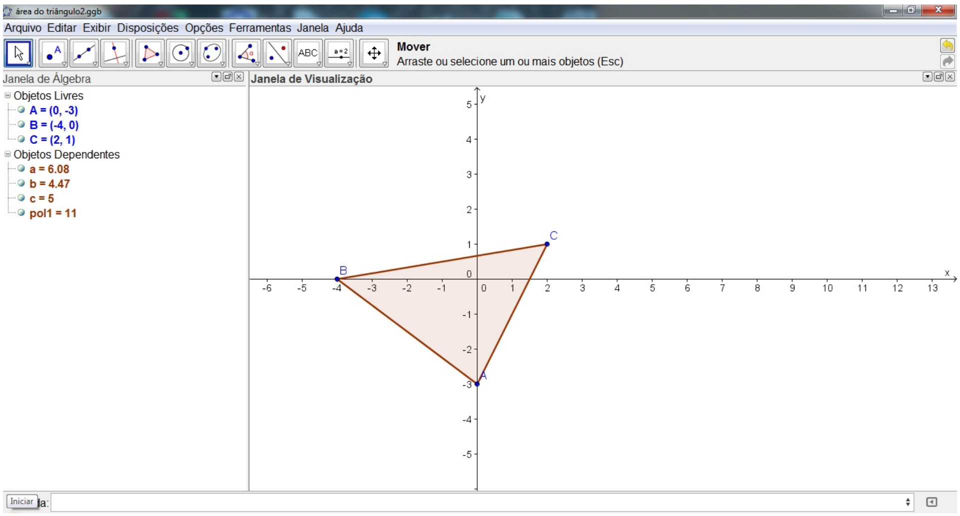

Figura 3.20: *Criando o triângulo ABC*

- *Com o botão Reta Perpendicular, crie as retas perpendiculares aos lados BC, AC e AB, clicando sobre: a reta BC e em A; a reta AC e em B e por último sobre a reta AB e em C, respectivamente.*
- *Renomei as respectivas retas do item anteior, para h_a, h_b e h_c, clicando com o botão direito sobre cada uma delas e usando o comando Renomear (Figura 3.21).*
- *Com o botão Intersecção de Dois Objetos, clique sobre as retas h_a e h_b e renomeio, chamando-o de ponto H.*
- *Com o botão Relação entre Dois Objetos, clique sobre: o ponto H encontrado no item anterior e a reta h_c.*
- *Após o passo anterior, o Geogebra, mostra o resultado, dizendo que "Ponto H pertence a Reta h_c (verificado numericamente)" (Figura 3.22)*

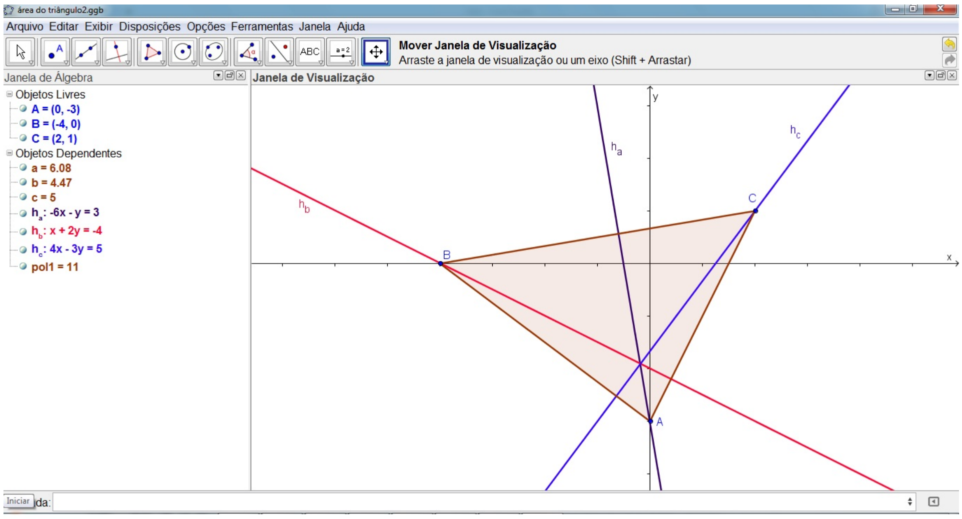

Figura 3.21: *Alturas dos triângulos*

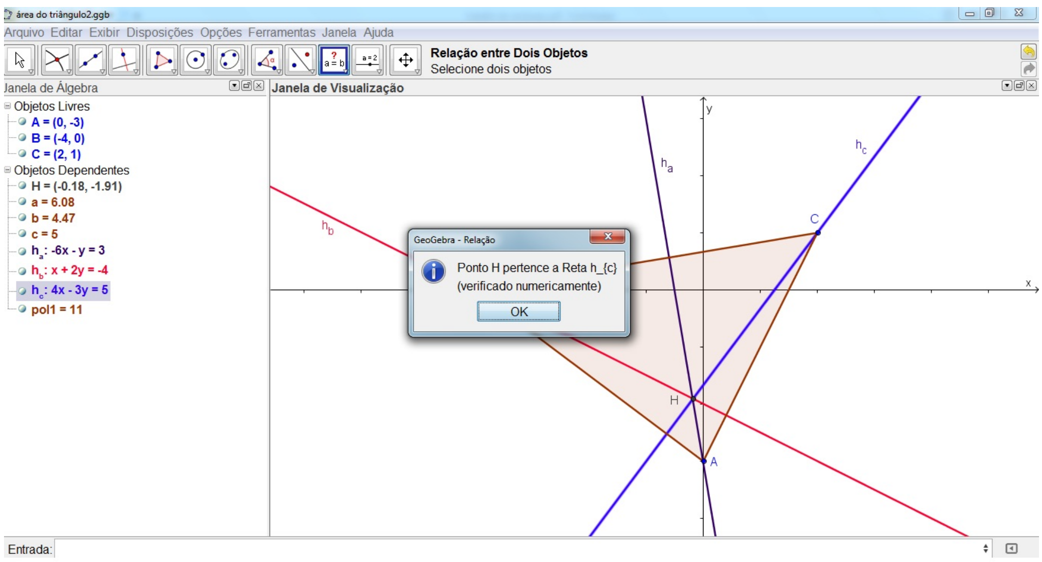

Figura 3.22: *Relação entre o ponto H e a reta h_c*

Observação 12. *Podemos determinar a intersecção das retas h_a e h_b, bem como a relação entre o ponto H e a reta h_c, respectivamente, assim:*

1. *Digitando no Campo de Entrada: Intersecção$[h_a, h_b]$.*

2. *Digitando no Campo de Entrada: Relação$[H, h_c]$.*

3.8 Ângulos entre duas retas

A Figura 3.23 mostra duas retas l_1 e l_2, não perpendiculares entre si e de coeficientes angulares m_1 e m_2, respectivamente.

Indicamos por θ a medida do ângulo formado pelas retas l_1 e l_2.

No ΔPAB, Pela propriedade do ângulo externo, temos:

$$\alpha_2 = \theta + \alpha_1 \Rightarrow \theta = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow \text{tg}\theta = \text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{\text{tg}\alpha_2 - \text{tg}\alpha_1}{1 + \text{tg}\alpha_2.\text{tg}\alpha_1}$$

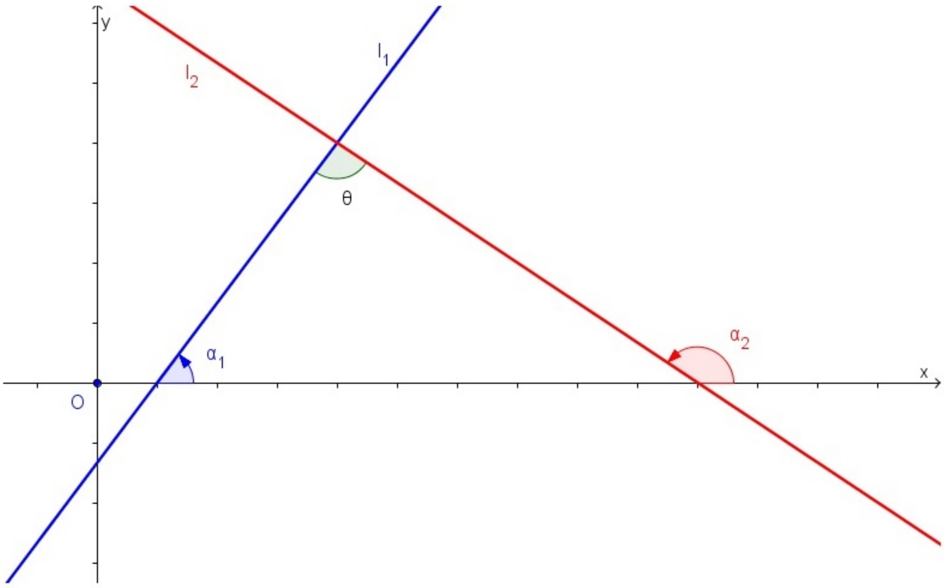

Figura 3.23: *Ângulo entre duas retas*

Como, por hipótese, l_1 e l_2 não são perpendiculares entre si, há duas possibilidades para θ, a saber:

- Se θ for agudo, então tg > 0
- Se θ for obtuso, então tg < 0

Assim, escrevemos:

$$\text{tg}\theta = \left|\frac{\text{tg}\alpha_2 - \text{tg}\alpha_1}{1 + \text{tg}\alpha_2.\text{tg}\alpha_1}\right|$$

Como $\text{tg}\alpha_2 = m_2$ e $\text{tg}\alpha_1 = m_1$, temos a expressão:

$$\text{tg}\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2.m_1}\right|$$

Caso particular

Um das retas é vertical.
No ΔPAB, Pela propriedade do ângulo externo, temos:

$$\theta + \alpha_1 = 90^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - \alpha_1 \Rightarrow \text{tg}\theta = \text{tg}(90^\circ - \alpha_1)$$

$$\Rightarrow \text{tg}\theta = \cot\alpha_1 \Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{1}{\text{tg}\alpha_1}$$

No triângulo da Figura 3.24, θ é necessariamente agudo, a sua tangente é positiva. Por outro lado, não sabemos o sinal de m_1[4] (pode ser positivo ou negativo). Daí, escrevemos:

$$\text{tg}\theta = \left|\frac{1}{m_1}\right|$$

[4]A reta l_1 pode está à direita de l_2.

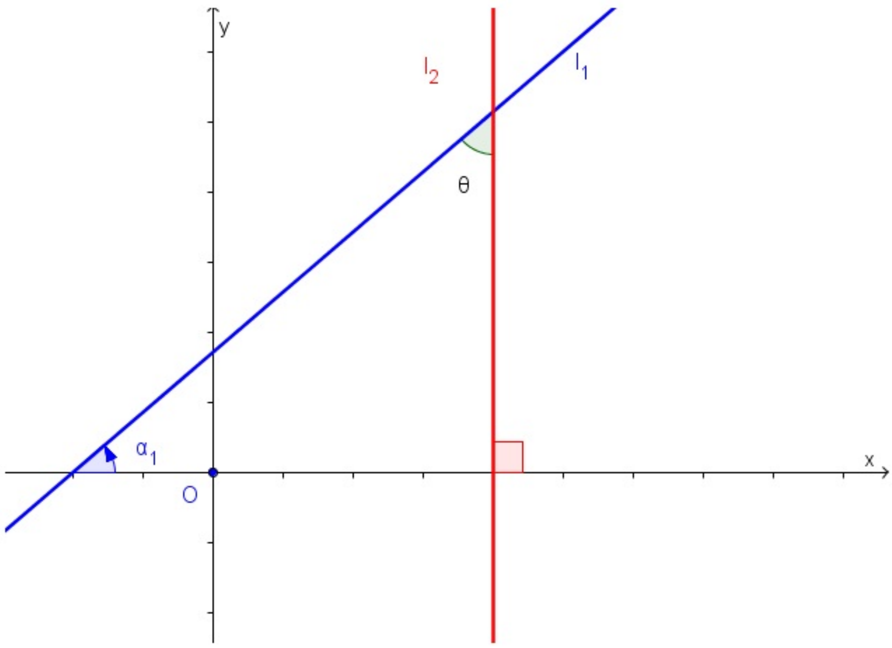

Figura 3.24: *Ângulo entre duas retas quando uma delas é vertical*

Atividade 3.16. *1. Determine o ângulo agudo formado pelas retas* $r : 2x - y + 1 = 0$ *e* $s : 3x + y - 2 = 0$.

2. Abra o Geogebra.

- *No Campo de entrada, digite:* $r : 2x - y + 1 = 0$ *e* $s : 3x + y - 2 = 0$.
- *Com o botão Intersecção de Dois Objetos, clique sobre: o eixo* x *e a reta* r*; o eixo* x *e a reta* s *e por fim sobre as retas* r *e* s*. Assim são criados os pontos* A, B *e* C *respectivamente.*
- *Com o botão Ângulo, clique na sequência em:* A, C *e* B.

Observação 13. *Na Atividade 3.16, após ser criada as retas* r *e* s*, o ângulo entre elas, poderia ser encontrado com o uso do botão ângulo, clicando na sequência sobre a reta* r *e em seguida sobre a reta* s.

3.9 Distância de ponto a reta

Consideremos um ponto $P = (x_p, y_p)$ e uma r de equação $ax + by + c = 0$. A distância entre P e r é a medida do segmento perpendicular a r passando por P, como na Figura 3.25.

Essa distância é dada pela expressão:

$$d(P, r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Demonstração 9. *Observamos que a fórmula é válida quando a reta é vertical, isto é, quando* $b = 0$*. Logo podemos supor* $b \neq 0$.

Consideremos a Figura 3.26, onde $P \neq r$. Se chamarmos de B o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta r, teremos a distância do ponto P à reta r igual à distância do ponto P ao ponto B. Logo:

$$\Delta PBC \Rightarrow \cos\alpha = \frac{PB}{PC} \Rightarrow PB = PC.\cos\alpha$$

$$d(P,r) = PC.\cos\alpha$$

Como o ponto $C = (x_p, y_c)$ pertence à reta r, temos:

$$ax + by + c - 0 \Rightarrow ax_p + by_c + c = 0 \Rightarrow by_c = -ax_p - c$$

$$y = \frac{-ax_p - c}{b}$$

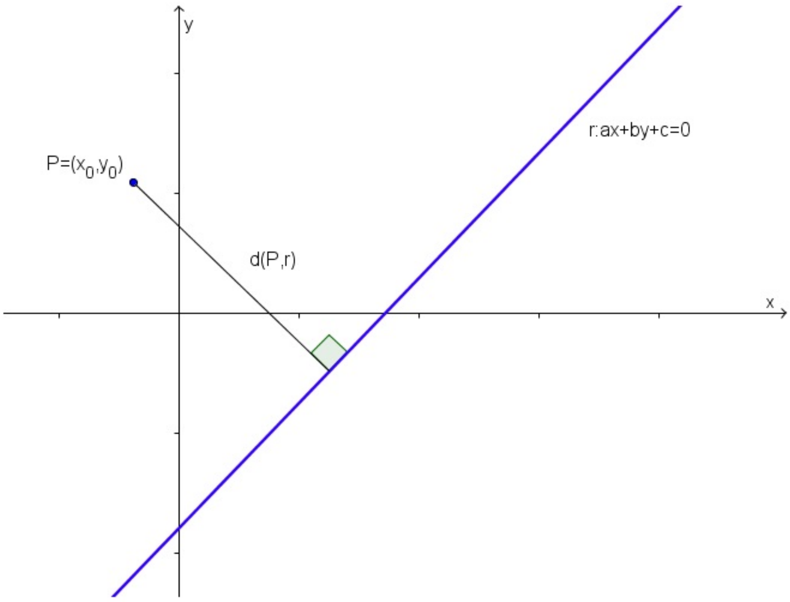

Figura 3.25: *Distância de Ponto a reta*

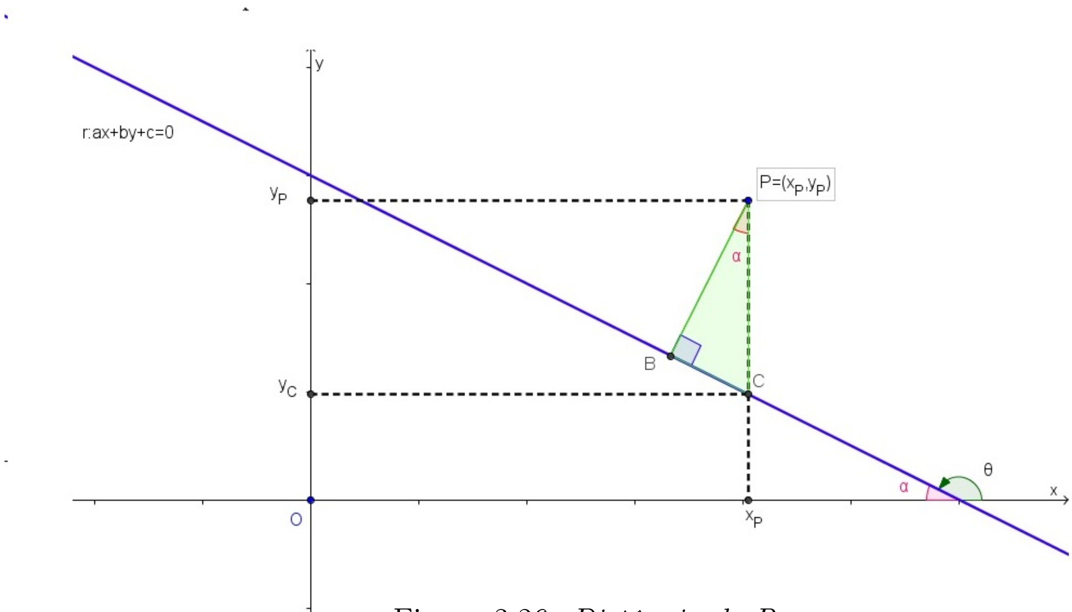

Figura 3.26: *Distância de P a r*

Mas $PC = |y_p - y_c| \Rightarrow PC = \left|y_p + \frac{ax_p+c}{b}\right| \Rightarrow PC = \left|\frac{ax_p+by_p+c}{b}\right|$
ou, então:

$$PC = \frac{|ax_p + by_p + c|}{|b|}$$

Além disso,

$$\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}\theta \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = -\left(-\frac{a}{b}\right) \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{a^2}{b^2}$$

Mas $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\frac{a^2}{b^2}} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2+b^2}$

$$\cos\alpha = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Segue daí que:

$$d(P,r) = PC.\cos\alpha \Rightarrow d(P,r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{|b|}.\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d(P,r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Atividade 3.17. *1. Calcule a distância entre o ponto* $P = (0,2)$ *e a reta* $r : 2x+3y-10 = 0$

2. Abra o Geogebra

- *No Campo de Entra, digite:* $r : 2x + 3y - 10 = 0$
- *Crie o ponto* $P = (0,2)$ *com o botão Novo Ponto ou digitando do Campo de Entrada*
- *No Campo de Entrada, digite: Distância[P,r]*

Observação 14. *Por padrão, o Geogebra mostra na Janela Algébrica, um valor aproximado[5], para a distância entre um ponto e um objeto. Afim de comparar os valores encotrados nos itens* **1** *e* **2** *da Atividade 3.17, faça o seguinte:*

1. *Clique em Exibir e no comando Planilha.*
2. *Em qualquer célula da Planilha, digite: 4/sqrt(13).*

A distância d é, em qualquer caso, um número real não negativo, isto é, $d \geq 0$ *quaisquer que sejam* P *e* r*, sendo:*

- *Se* $P \in r$*, então* $d = 0$.
- *Se* $P \neq r$*, então* $d > 0$.

3.10 Área do Triângulo

Calculemos a área do triângulo cujos vértices são $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$.

Considere o triângulo ABC da Figura 3.27, onde AH é a altura relativa ao lado BC:

Lembremos, da Geometria Plana, que se um triângulo ABC possui altura AH relativa ao lado BC então, a sua área S é dada por:

$$S = \frac{1}{2}.BC.AH$$

Por outro lado,

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

e a equação geral da reta BC é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + (x_2y_3 - x_3y_2) = 0$$

fazendo:

$$y_2 - y_3 = a,\ x_3 - x_2 = b \text{ e } x_2y_3 - x_3y_2 = c$$

temos:

$$ax + by + c = 0$$

Além disso, a distância do ponto A à reta BC é dada por:

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

então:

$$AH = d = \left| \frac{(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + (x_2y_3 - x_3y_2)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \right|$$

[5] quando não for um número inteiro ou decimal exato

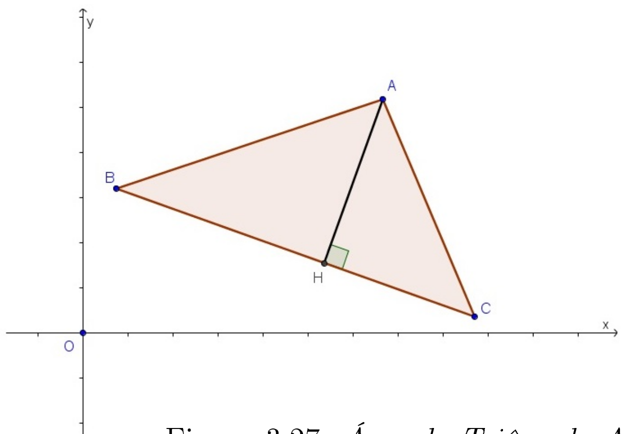

Figura 3.27: *Área do Triângulo ABC*

Indicando: $D_{ABC} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, temos:

$$S = \frac{1}{2}.BC.AH = \frac{1}{2}.\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2}.\frac{|D_{ABC}|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2}}$$

donde vem a fórmula:

$$S = \frac{1}{2}.\,|D_{ABC}|$$

Atividade 3.18. *1. Determine a área do triângulo ABC no qual os vétices são respectivamente as intersecções das retas: $y = x - 3$ e $y = 0$; $y = x - 3$ e $y = -x + 5$; $y = -x + 5$ e $y = 0$.*

2. Abra o Geogebra.

- *No Campo de Entrada, digite: $y = x - 3$, $y = 0$ e $y = -x + 5$*
- *Com o botão Intersecção de Dois Objetos, clique, na Zona Algébrica sobre as retas: $y = 0$ e $y = x - 3$; $y = x - 3$ e $y = -x + 5$; $y = -x + 5$ e $y = 0$.*
- *Com o botão Polígono, clique em: A, B, C e novamente em A, criados no item anterior.*
- *No Campo de Entrada, digite: Área[A,B,C].(Figura 3.28)* [6]

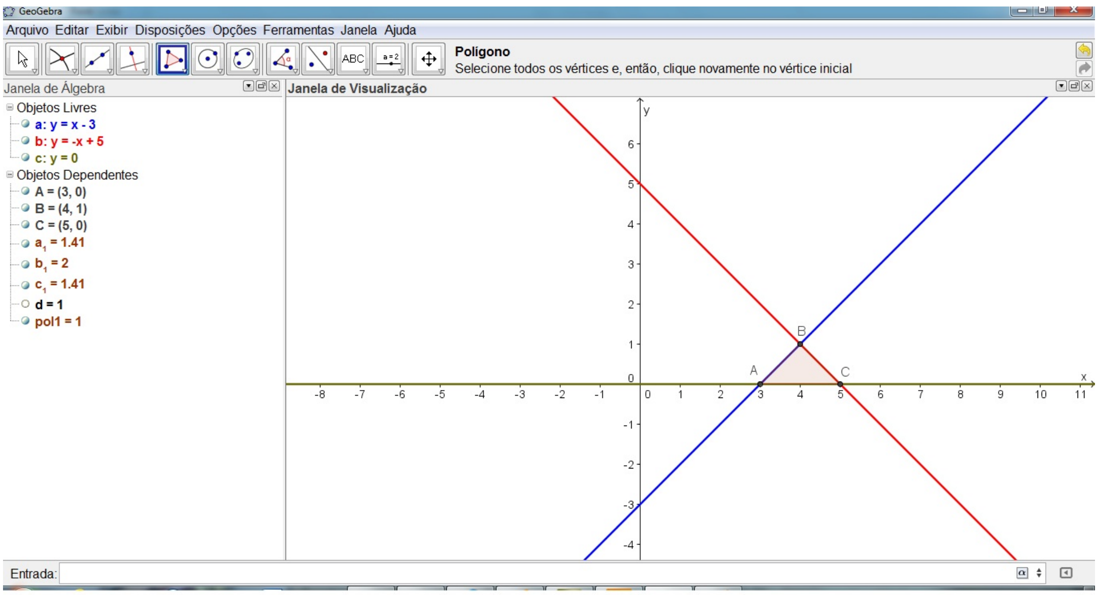

Figura 3.28: *Área do Triângulo*

[6] Ao fim do terceiro passo, o *Geogebra* mostra na *Zona Algébrica*, o valor $pol1 = 1$, dizendo assim que "o valor da área do triângulo ABC é 1", não sendo necessário, pois o quarto passo.

3.11 Inequações do 1° grau com duas variáveis

Uma *Inequação do 1º grau* nas variáveis reais x e y é um relação de uma das formas abaixo:

$$\begin{cases} ax+by+c>0, ax+by+c<0 \\ ax+by+c\geq 0, ax+by+c\leq 0 \end{cases}$$

onde a, b e c são números reais conhecidos, com a e b não-simultaneamente nulos.

Uma inequação do 1° grau com duas variáveis admite infinitas soluções. Ou seja, existem infinitos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a inequação dada.

Exemplo 3.1. $(0,0)$, $(1,1)$, *(-2,1) são algumas soluções de* $x+2y-4<0$, *pois* $0+2.0-4<0$, $1+2.1-4<0$, $(-2)+2.(1)-4<0$ *são verdadeiras.*

Para descobrir as soluções de uma inequação linear com duas variáveis, vamos estudar os semiplanos com sua fronteira, que é a reta.

Semiplanos

Seja a reta r de equação $ax+by+c=0$.

Temos dois casos a considerar:

1. **r é perpendicular ao eixo x, isto é,** $b=0$

   Nesse caso r tem equação $x=-\frac{c}{a}$, logo todo ponto à direita de r tem abscissa $x>-\frac{c}{a}$ e todo ponto à esquerda de r tem abscissa $x<-\frac{c}{a}$.

   Para $a>0$, temos $x>-\frac{c}{a}\Leftrightarrow ax+c>0$ e $x<-\frac{c}{a}\Leftrightarrow ax+c<0$.

   Para $a<0$, temos $x>-\frac{c}{a}\Leftrightarrow ax+c<0$ e $x<-\frac{c}{a}\Leftrightarrow ax+c>0$.

   Assim, para os semiplanos determinados por $r: ax+c=0$, temos:

   Se $a>0$, então temos a Figura 3.29:

   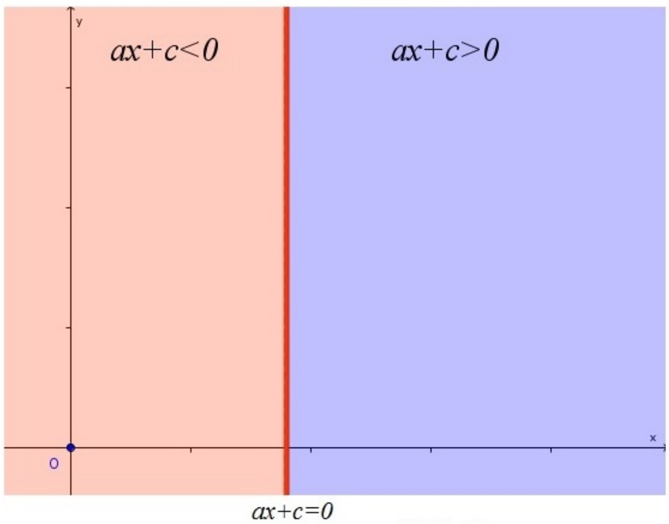

   Figura 3.29: *Semiplanos com* $a>0$

   Se $a<0$, então temos a Figura 3.30:

2. **r não-perpendicular ao eixo x, isto é,** $b\neq 0$.

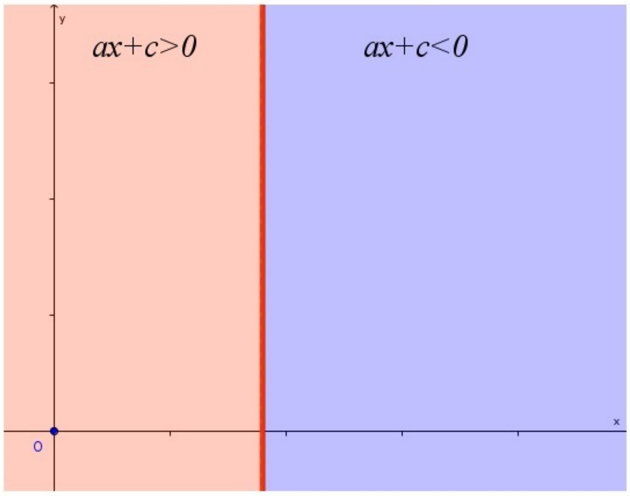

Figura 3.30: *Semiplanos com $a < 0$*

Nesse caso, r tem equação reduzida:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Assim, todo ponto do semiplano acima de $r : y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ satisfaz a condição:

$$y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

e todo ponto do semiplano abaixo de r satisfaz a condição:

$$y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Para $b > 0$, temos:

$y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Leftrightarrow ax + by + c > 0$ e $y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Leftrightarrow ax + by + c < 0$.

Para $b < 0$, temos:

$y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Leftrightarrow ax + by + c < 0$ e $y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Leftrightarrow ax + by + c > 0$.

Portanto para os semiplanos detrminados por $r : ax + by + c = 0$, temos:

Se $b > 0$, então teremos um gráfico como o da Figura 3.31:

Se $b < 0$, então então teremos um gráfico como o da Figura 3.32

Atividade 3.19. *1. Resolva graficamente a inequação $2x - y - 4 > 0$*

2. Abra o Geogebra:

- *No Campo de Entrada, digite: $2x - y - 4 > 0$*

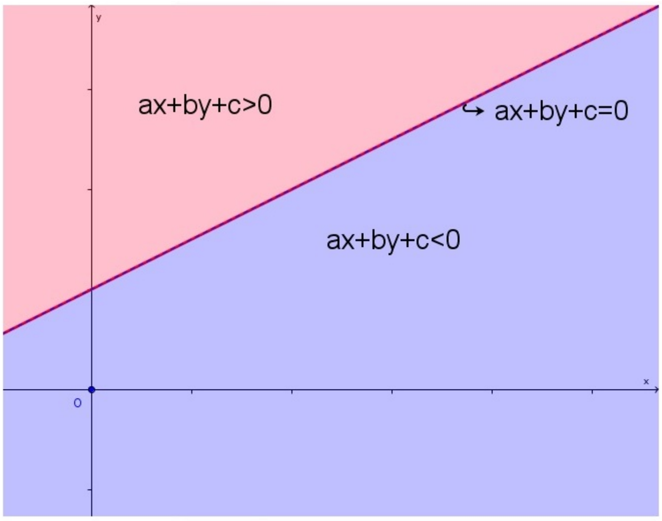

Figura 3.31: *Semiplanos definidos por r não-vertical e $b > 0$*

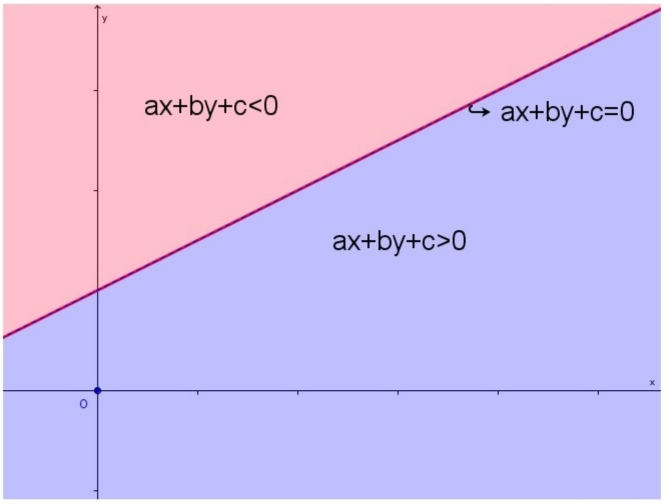

Figura 3.32: *Semiplanos definidos por r não-vertical e $b < 0$*

3.12 Bissetrizes de duas retas

Definição 18. *Dado um ângulo $\angle AOB$*[7]*, a* **bissetriz** *de $\angle AOB$ é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ que o divide em dois ângulos iguais.*

Consideremos, no plano cartesiano, duas retas concorrentes l_1 e l_2 (Figura 3.33), definidas por:

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ e } l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

O lugar geométrico dos pontos que equidistam de ambas é formado pelas bissetrizes b_1 e b_2.

Logo:

$$d_1 = d_2 \Rightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

[7] $\angle AOB$ indica ângulo AOB e $A\widehat{O}B$ indica medida do ângulo AOB. Notações usadas em [7]

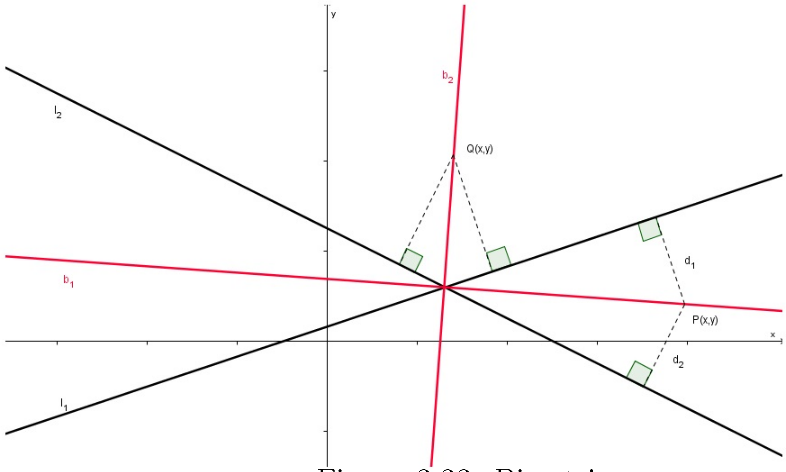

Figura 3.33: Bissetrizes

Eliminando os módulos, obtemos as equações das retas b_1 e b_2 suportes das bissetrizes:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = +\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Note que as retas b_1 e b_2 são perpendiculares.

Atividade 3.20. *1.Determine as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas $r : x - y = 0$ e $s : x + y = 0$.*

2. Abra o Geogebra:

- *No Campo de Entrada, digite: $r : x - y = 0$ e $s : x + y = 0$.*
- *No Campo de Entrada, digite: Bissetriz$[r, s]$*

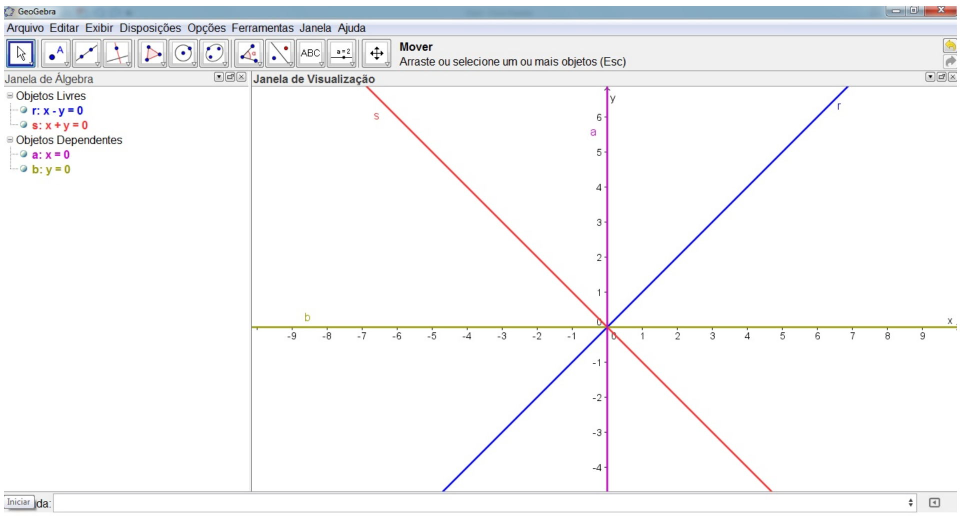

Figura 3.34: Bissetrizes das retas r e s

Observe na *Zona Algébrica* as duas equações que aparecem, sendo as mesmas, as bisstrizes das retas em questão.

Capítulo 4

Retas e planos no espaço

4.1 A reta

4.1.1 Equação vetorial da reta

Consideremos um ponto $A = (x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não-nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Só existe uma reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$ (Figura4.1), isto é,

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}$$

para algum real λ.

Dessa igualdade, vem que

$$P - A = \lambda\vec{v}$$

ou

$$P = A + \lambda\vec{v}$$

ou em coordenadas

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(a, b, c)$$

Qualquer uma dessas formas é denominada *equação vetorial* de r.

O vetor $\vec{v}$ é chamado *vetor diretor* da reta r e λ é denominado parâmetro.

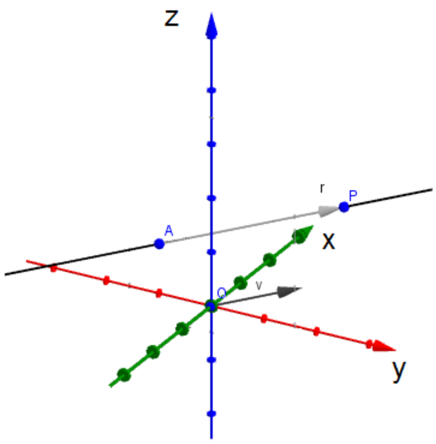

Figura 4.1: Reta no espaço

Atividade 4.1. *1. Determine a equação vetorial da reta que passa por* $A = (1, -1, 4)$ *e tem a direção do vetor* $\vec{v} = (2, 3, 2)$

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $A = (1, -1, 4)$ *e* $\vec{v} = (2, 3, 2)$.
- *No Campo de Entrada, digite: Reta*$[A, v]$.

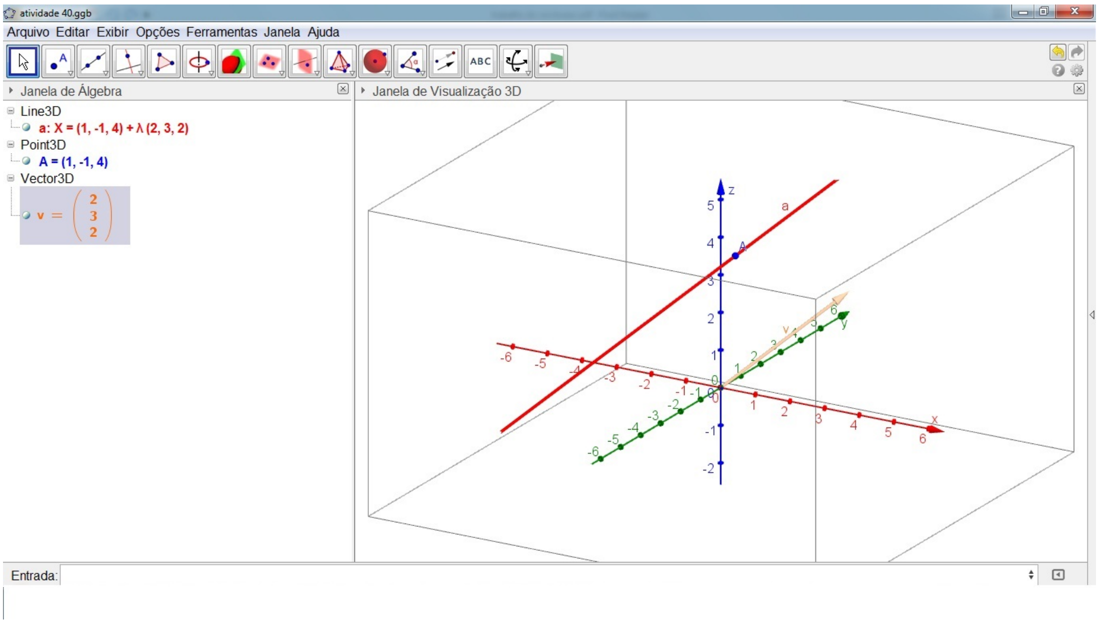

Figura 4.2: Reta que passa por A e têm a direção de $\vec{v}$

4.1.2 Reta Definida por Dois Pontos

A reta definida pelos pontos A e B é a reta que passo por A (ou B) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

Atividade 4.2. *1. Determinar a equação da reta* r *que passa por* $A = (3, -1, -2)$ *e* $B = (1, 2, 4)$.

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $A = (3, -1, -2)$ *e* $B = (1, 2, 4)$.
- *No Campo de Entrada, digite: Reta*$[A, B]$ *(Figura 4.3)* [1].

[1]Por padrão, o Geogebra, mostra a equação da reta em sua forma vetorial

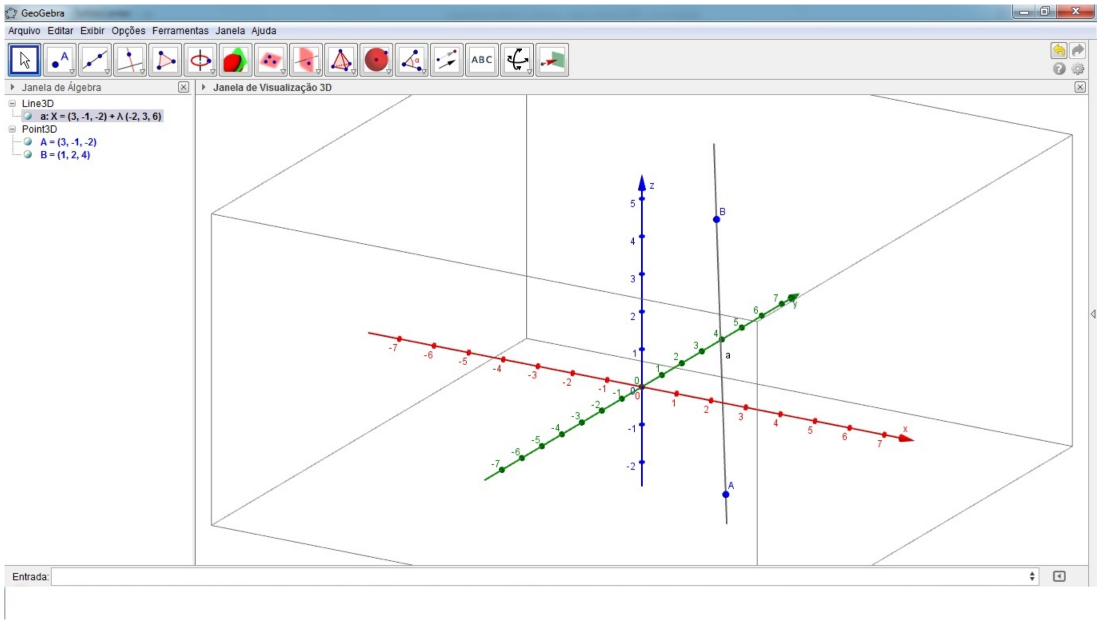

Figura 4.3: Reta definida por A e B

4.1.3 Retas Paralelas aos Planos Coordenados

Uma reta é paralela a um dos eixos xOy, xOz ou yOz se seus vetores diretores forem paralelos ao correspondente plano. Neste caso, *uma das componentes do vetor é nula.*

Exemplo 4.1. *A Figura 4.4 mostra a reta* r $(r \parallel xOy)$ *que passa pelo ponto* $A = (-1, 2, 4)$ *e tem vetor diretor* $\vec{v} = (2, 3, 0)$ *(a 3ª componente é nula porque* $\vec{v} \parallel xOy$*).*

Observação 15. *Como todos os pontos de* r *são do tipo* $(x, y, 4)$*, todos eles distam 4 unidades do plano* xOy *e por isso* $r \parallel xOy$*. Por outro lado, sendo* $P_1 = (x_1, y_1, 4)$ *e* $P_2 = (x_2, y_2, 4)$ *pontos distintos de* r*, o vetor diretor* $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$ *terá sempre 3ª componente nula.*

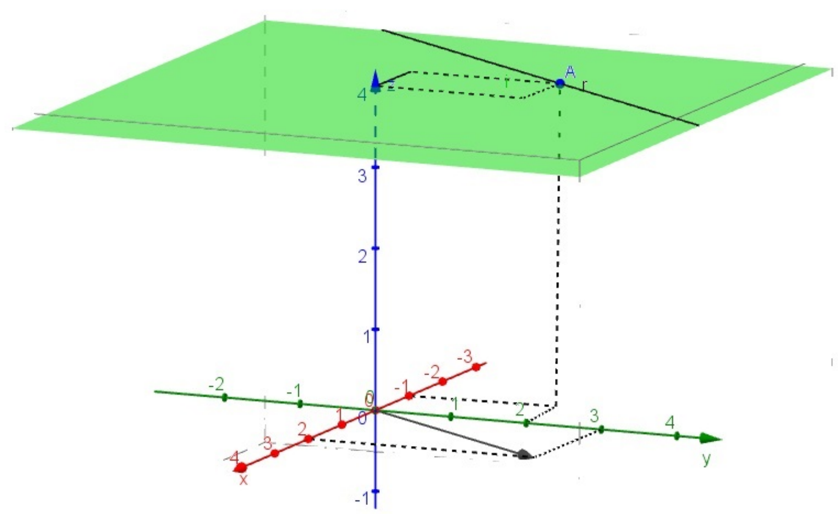

Figura 4.4: Reta paralela ao plano xOy

Comentário idêntico faríamos para os casos de uma reta ser paralela aos outros dois planos.

4.1.4 Retas Paralelas aos Eixos Coordenados

Uma reta é paralela aos eixos Ox, Oy ou Oz se seus vetores diretores forem paralelos a $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ou a $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ou a $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Neste caso, *duas das componentes do vetor são nulas.*

Exemplo 4.2. *Seja a reta r que passa por $A = (2, 3, 3)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (0, 0, 3)$. Como a direção de $\vec{v}$ é a mesma de $\vec{k}$, pois $\vec{v} = 3\vec{k}$, a reta é paralela ao eixo Oz (Figura 4.5)*

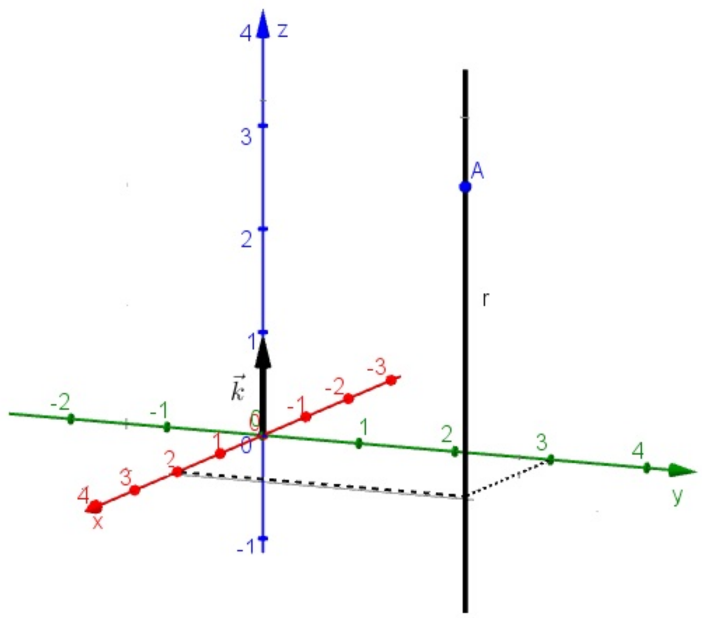

Figura 4.5: Reta paralela ao eixo Oz

4.1.5 Ângulo de Duas Retas

Definição 19. *O ângulo θ entre duas retas r_1 e r_2 se difine da seguinte maneira:*

- *$\theta = 0°$ se r_1 e r_2 são coincidentes;*
- *Se as retas são concorretes, isto é, $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, então θ é o menor dos ângulos positivos determinado pelas retas no plano que as contém.*

  Em particular $0° < \theta \leq 90°$.
- *Se $r_1 \cap r_2 = \phi$, temos duas situações a considerar:*
  - *se $r_1 \parallel r_2$, então $\theta = 0°$*

– *se r_1 e r_2 não são paralelas e não se intersectam, dizemos que as retas são* **reversas**. *Neste caso, seja $P \in r_1$ e seja r_2' a paralela a r_2 que passa por P. Então as retas r_1 e r_2' são concorrentes e definimos θ como sendo o ângulo entre r_1 e r_2'.*

Além disso, pelo paralelismo, o ângulo θ independe do ponto P escolhido.

Sejam $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ os vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente Figura 4.6. Então,

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v_1}.\vec{v_2}|}{\|\vec{v_1}\|\,\|\vec{v_2}\|},$$

com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

De fato, pela definição geométrica de produto escalar,

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$$

assim,

$$\cos\theta = \frac{\vec{v_1}.\vec{v_2}}{\|\vec{v_1}\|\,\|\vec{v_2}\|},$$

Como $\cos\theta \geq 0$ quando $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, o númerador da expressão acima deve ser positivo, logo

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v_1}.\vec{v_2}|}{\|\vec{v_1}\|\,\|\vec{v_2}\|}.$$

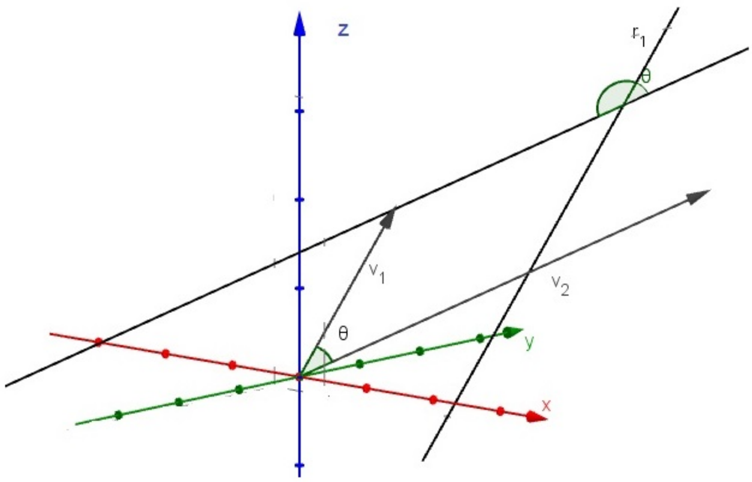

Figura 4.6: Ângulo de duas retas

Atividade 4.3. *1. Consideremos os pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (2, 1, 2)$ e os vetores $v = (1, 1, 1)$ e $u = (2, 2, 2)$. Determine o ângulo entre as retas r que passa por A e possui direção de $\vec{v}$ e s que passa por B e tem direção de $\vec{u}$.*

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite: $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 1, 2)$, $v = (1, 1, 1)$ e $u = (2, 2, 2)$.*

- *No Campo de Entrada, digite: Reta$[A, v]$ e Reta$[B, u]$.*
- *Renomei as retas do item acima, para r e s respectivamente.*
- *No Campo de Entrada, digite: Ângulo$[r, s]$*

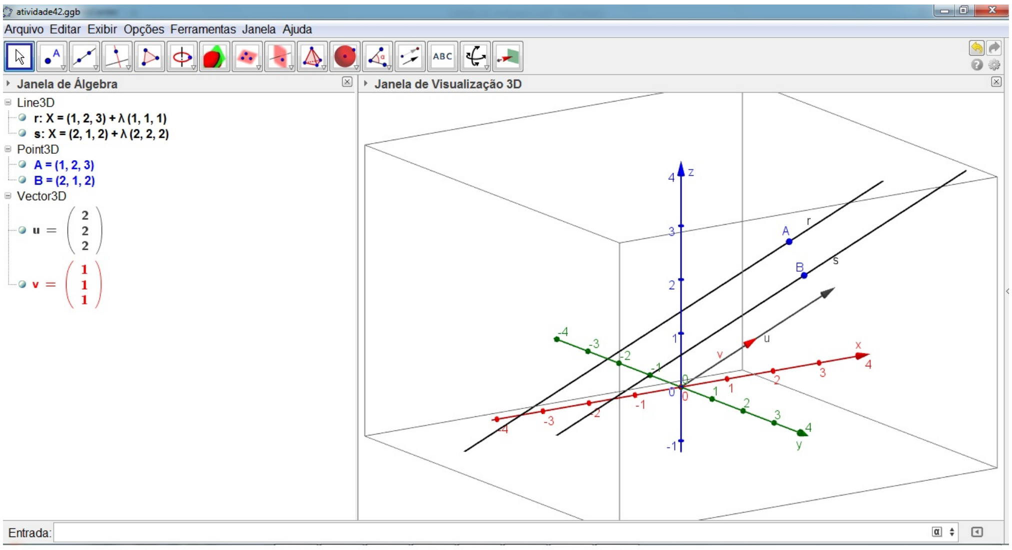

Figura 4.7: Ângulo entre as retas r e s

4.1.6 Retas Ortogonais

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de v_1 e v_2, respectivamente. Então,

$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{v_1}.\vec{v_2} = 0$$

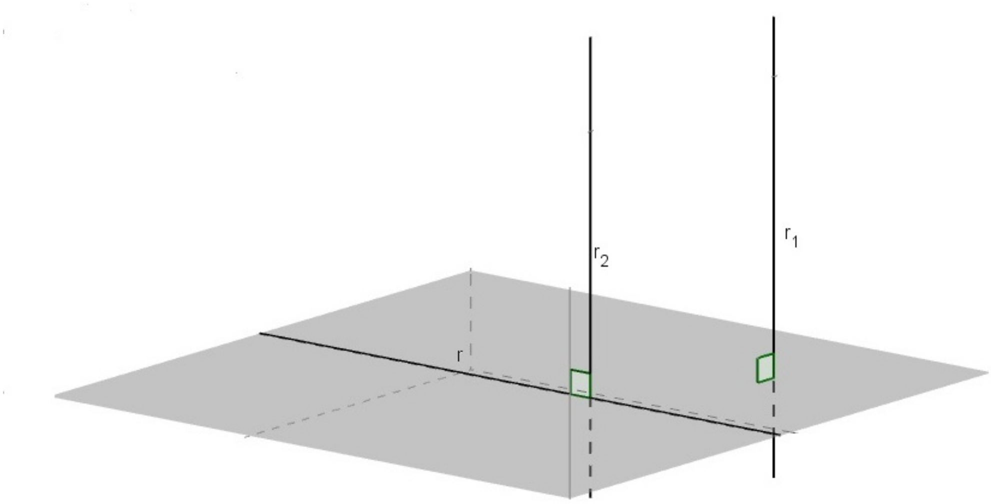

Figura 4.8: Retas ortogonais a r

Observação 16. *Duas retas ortogonais podem ser concorrentes ou não. Na Figura 4.8, as retas r_1 e r_2 são ortogonais a r. Porém, r_2 e r são concorrentes. Neste caso, diz-se que são perpendiculares.*

Atividade 4.4. *1. Consideremos os pontos $A = (2, -2, 3)$ e $B = (1, 1, 2)$. Sejam ainda os vetores $\vec{v} = (1, -2, 4)$ e $\vec{u} = (-2, 1, 1)$. Verifique se as retas r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$ e s que passa por B e tem direção de $\vec{u}$ são ortogonais.*

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite: $A = (2, -2, 3)$ e $B = (1, 1, 2)$, $v = (1, -2, 4)$ e $u = (-2, 1, 1)$.*
- *No Campo de Entrada, digite: Reta$[A, v]$ e Reta$[B, u]$.*
- *Renomei as retas do item acima, para r e s respectivamente.*
- *No Campo de Entrada, digite: $v_1 * v_2$.*

De acordo com o valor encontrado no último passo, o que se pode concluir a respeito?

4.2 Plano

4.2.1 Equação Geral do Plano

Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertecente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq 0$, um vetor normal (ortogonal) ao plano (Figura 4.9).

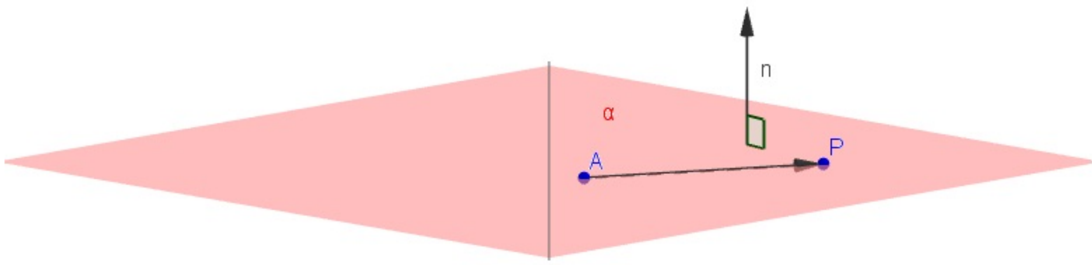

Figura 4.9: Plano π

Como $\vec{n} \perp \pi$, $\vec{n}$ é perpendicular a todo vetor representado em π. Então um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, isto é,

$$\vec{n}.(P - A) = 0,$$

ou

$$(a, b, c).(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

ou

$$a.(x - x_1) + b.(y - y_1) + c.(z - z_1) = 0$$

ou, ainda

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

Fazendo

$$-ax_1 - by_1 - cz_1 = d,$$

obtemos

$$ax + by + cz + d = 0$$

Esta é a *equação geral* do plano π.

Observação 17. *Sendo um vetor* $\vec{n} = (a, b, c)$ *normal a um plano* π*, temos:*

- *Qualquer vetor* $k\vec{n}$*,* $k \neq 0$*, é também vetor normal ao plano.*
- *Os três coeficientes* a*,* b *e* c *da equação*

$$ax + by + cz + d = 0,$$

representam as componentes do vetor $\vec{n}$*.*

Além disso, para obtermos pontos de um plano dado por uma equação geral, basta atribuir valores arbitrários a duas variáveis e calcular o valor da outra na equação dada.

4.2.2 Equação Vetorial e Equações Paramétricas do Plano

Seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a π (Figura 4.10), porém $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-paralelos. Para todo

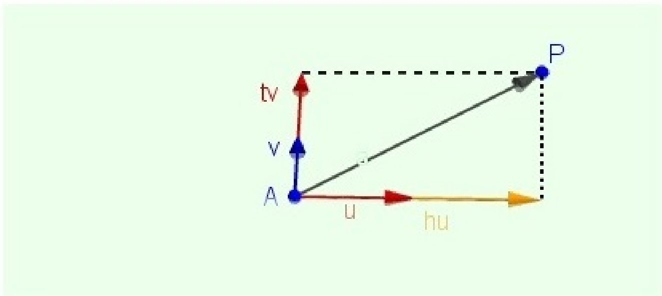

Figura 4.10: Plano π

ponto P do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π se, e somente se, existem números h e t tais que

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou em coordenadas

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

Esta equação é denominada **equação vetorial** do plano π. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são os **vetores diretores** de π.

Da equação vetorial do plano em coordenadas, obtém-se

$$(x, y, z) = (x_0 + a_1h + a_2t, y_0 + b_1h + b_2t, z_0 + c_1h + c_2t)$$

que, pela condição de igualdade, vem

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1h + a_2t \\ y = y_0 + b_1h + b_2t \\ z = z_0 + c_1h + c_2t \end{cases},$$

com $h, t \in \mathbb{R}$.

Estas equações são chamadas **equações paramétricas** de π, onde h e t são variáveis auxiliares denominadas **parâmetros**.

4.2.3 Ângulo de Dois Planos

Sejam os planos π_1 e π_2 com vetores normais $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$, respectivamente (Figura 4.11). Chama-se *ângulo de dois planos* π_1 e π_2 o menor ângulo que um vetor normal a π_1 forma

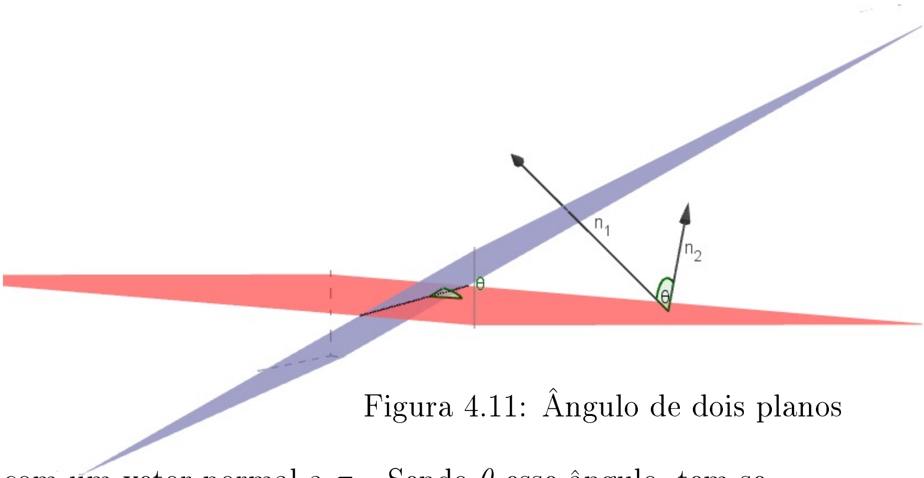

Figura 4.11: Ângulo de dois planos

com um vetor normal a π_2. Sendo θ esse ângulo, tem-se

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{\|n_1\|\,\|n_2\|},$$

com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Como o númerador da expressão acima deve ser positivo, razão pela qual tomou-se o produto escalar em módulo, pois que este poderá ser negativo quando o ângulo entre os vetores for o suplementar de θ.

Atividade 4.5. *1. Determinar o ângulo entre os planos* $\pi_1 : 2x + y - z + 3 = 0$ *e* $\pi_2 : x + y - 4 = 0$

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $\pi_1 : 2x + y - z + 3 = 0$ *e* $\pi_2 : x + y - 4 = 0$.
- *No Campo de Entrada, digite: Ângulo*$[\pi_1, \pi_2]$

4.2.4 Planos Perpendiculares

Consideremos dois planos π_1 e π_2 e sejam $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ vetores normais a π_1 e π_2 respectivamente. Pela (Figura 4.12) concluimos imediatamente:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1}.\vec{n_2} = 0$$

Atividade 4.6. *1. Verificar se os planos* $\pi_1 : 3x + y - 4z + 2 = 0$ *e* $\pi_2 : 2x + 6y + 3z = 0$ *são perpendiculares.*

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $\pi_1 : 3x + y - 4z + 2 = 0$ *e* $\pi_2 : 2x + 6y + 3z = 0$.
- *No Campo de Entrada, digite:* $n_1 = (3, 1, -4)$ *e* $n_2 = (2, 6, 3)$.
- *No Campo de Entrada, digite:* $n_1 * n_2$

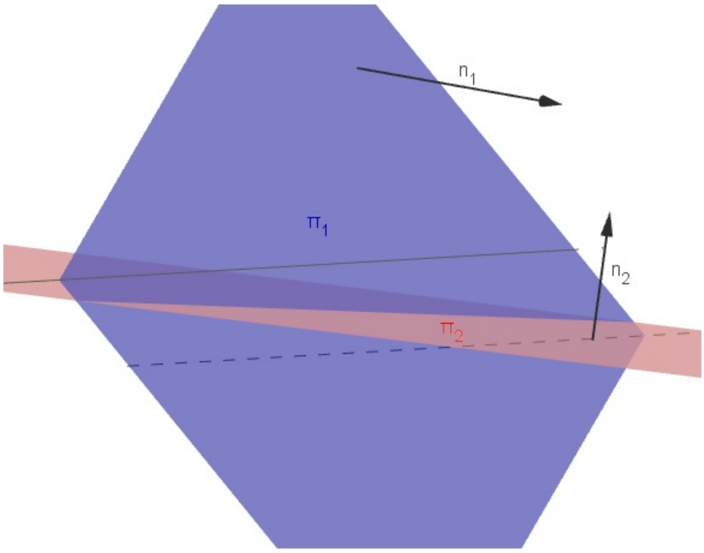

Figura 4.12: Planos perpendiculares

4.2.5 Paralelismo e Perpendicularismo entre Reta e Plano

Sejam uma reta r com a direção do vetor $\vec{v}$ e um plano π, sendo $\vec{n}$ um vetor normal a π. Temos que

$r \parallel \pi \iff \vec{v} \perp \vec{n} \iff \vec{v}.\vec{n} = 0$, (Figura4.13)

e $r \perp \pi \iff \vec{v} \parallel \vec{n} \iff \vec{v} = \alpha\vec{n}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ (Figura4.14)

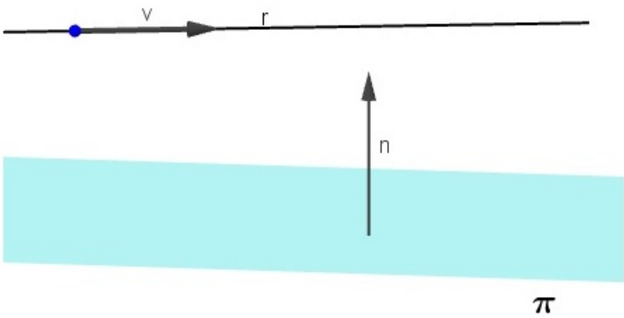

Figura 4.13: Reta paralela ao plano

Atividade 4.7. *1. Uma reta r têm vetor diretor $\vec{v} = (2, -3, 1)$. Verifique que a reta é r paralela ao plano $\pi_1 : 5x+2y-4z-1 = 0$. Verifique também que a mesma é perpendicular ao plano $\pi_2 : 4x - 6y + 2z - 5 = 0$.*

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite: $\pi_1 : 5x + 2y - 4z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 6y + 2z - 5 = 0$.*
- *No Campo de Entrada, digite: $n_1 = (5, 2, -4)$ e $n_2 = (4, -6, 2)$ [2].*

[2] Esses são os vetores normais a π_1 e π_2 respectivamente.

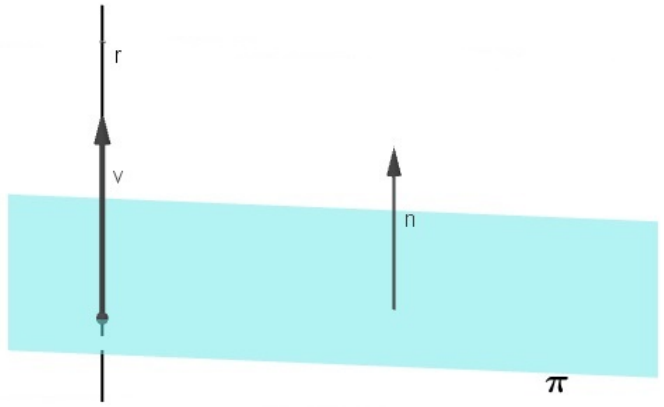

Figura 4.14: Reta perpendicular ao plano

- *No Campo de Entrada, digite:* $v = (2, -3, 1)$.
- *No Campo de Entrada, digite:* $n_1 * v$.
- *No Campo de Entrada, digite:* $\frac{1}{2}n_2$.

Verifique os resultados dos dois últimos itens e, tire suas conclusões.

4.2.6 Intersecção de Dois Planos

O terno $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ chama-se uma solução do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

quando suas coordenadas x, y, z satisfazem ambas equações.

Fixando um sistema de coordenadas $OXYZ$ no espaço, as equações acima representam planos π_1 e π_2 que são perpendiculares respectivamente aos segmentos OA_1 e OA_2, onde $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Os planos π_1 e π_2 podem ser paralelos, podem ser coincidentes ou podem intersectar-se segundo uma reta. Correspondentemente a estas altenativas, o sistema acima pode ser impossível, no primeiro caso, ou indeterminado no segundo caso.

O sistema acima da origem as duas matrizes abaixo. A primeira é chamada a *matriz* do sistema e, a segunda, a *matriz aumentada*:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

Os vetores $l_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $l_2 = (a_2, b_2, c_2)$, em $\mathbb{R}^3$, são as linhas da matriz do sistema.

Para falar dos vetores-linha

$$L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1) \text{ e } L_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$$

da matriz aumentada, diremos algumas palavras do espaço $\mathbb{R}^4$.

Os elementos do conjunto $\mathbb{R}^4$ são as listas ordenadas de quatro números reais, como $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $w = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Eles são chamados os vetores do espaço a quatro dimensões $\mathbb{R}^4$.

Para esses vetores, põem-se as seguintes definições:

$$v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4);$$
$$\alpha.v = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4),\ \alpha \in \mathbb{R};$$
$$\text{-v}=(\text{-x}_1, -x_2, -x_3, -x_4);$$
$$0=(0,0,0,0).$$

Ficam assim introduzidas em $\mathbb{R}^4$ operações análogas que conhecemos para vetores no plano e no espaço tridimencional. Em particular, uma expressõ do tipo $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, onde $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ são números reais e $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^4$ chama-se uma *combinação linear* dos vetores $v_1, \cdots, v_n$.

Assim, os planos π_1 e π_2 definidos pelas equações do sistema acima, coincidem se, e somente se, existe um número real $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$ e $d_2 = kd_1$. Isto equivale a dizer que

$$\begin{aligned} a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = \\ = a_1d_2 - a_2d_1 = \\ = b_1c_2 - b_2c_1 = \\ = b_1d_2 - b_2d_1 = \\ = c_1d_2 - c_2d_1 = 0 \end{aligned}$$

Também podemos exprimir esse fato dizendo que os vetores-linha L_1 e L_2 da matriz aumentada são múltiplos um do outro:

$$L_1 = kL_2.$$

Os planos π_1 e π_2 definidos pelas equações do sistema acima, são paralelos se, e somente se, existe $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$ mas $d_2 \neq kd_1$. Isto quer dizer que os vetores-linha da matriz do sistema são múltiplos um do outro ($l_2 = kl_1$) mas isto não se dá com os vetores-linha L_1, L_2 da matriz aumentada. Tem-se portanto $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ mas ao menos um dos $a_1d_2 - a_2d_1$, $b_1d_2 - b_2d_1$ ou $c_1d_2 - c_2d_1$ é diferente de zero.

Finalmente, os planos π_1 e π_2 se intersectam segundo uma reta quando não coincidem nem são paralelos. Para que isto aconteça é necessário e suficiente que pelo menos um dos números $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$ ou $b_1c_2 - b_2c_1$ seja diferente de zero. Esta condição equivale a dizer que os vetores-linha $l_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $l_2 = (a_2, b_2, c_2)$ da matriz do sistema não são colineares (múltiplos um do outro). Nesse caso, o sistema acima é indeterminado.

O sistema acima também é indeterminado quando suas equações definem o mesmo plano $\pi_1 = \pi_2$. Mas há uma diferença entre as duas situações: quando $\pi_1 = \pi_2$, as soluções do sistema dependem de dois parâmetros livres; quando $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta, essas soluções são expressas em função de um único parâmetro livre.

No caso da intersecção entre π_1 e π_2 ser uma reta r, para determinarmos uma equação da reta r de intersecção entre os dois planos, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Uma outra maneira de determinarmos uma equação da reta r é determinar um de seus pontos, digamos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e um vetor diretor. Como um vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$

de r é simultaneamente ortogonal a $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, normais aos planos π_1 e π_2, o vetor $\vec{v}$ pode ser dado por

$$\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Assim, uma equação vetorial de r é, pelo visto na Seção 4.1.1

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(a, b, c).$$

Atividade 4.8. *1. Obtenha a intersecção dos planos* $5x - y + z - 5 = 0$ *e* $\beta : x + y + 2z - 7 = 0$.

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $5x - y + z - 5 = 0$ *e* $\beta : x + y + 2z - 7 = 0$.
- *No Campo de Entrada, digite: Interseção*$[\alpha, \beta]$ *(Figura 4.15)*

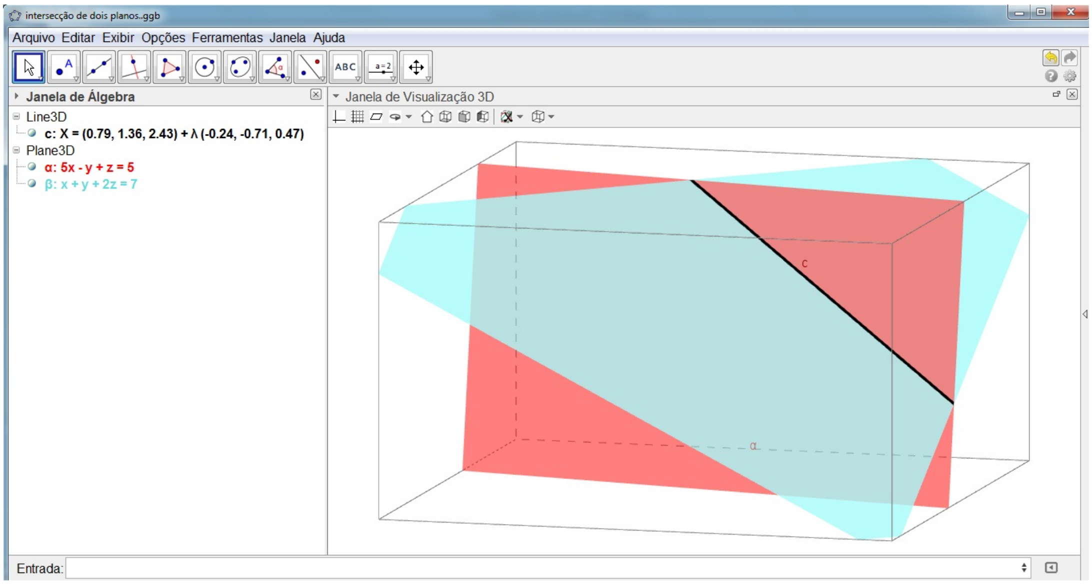

Figura 4.15: Intersecção dos planos α e β

4.2.7 Intersecção de Reta com Plano

Dado um plano π e uma reta r temos três possibilidades:

- a intersecção de r e π é vazia. Nesse caso a reta r é dita paralela a π.
- a intersecção de π e r é um único ponto. Nesse caso dizemos que a reta r é tranversal a π.
- a intersecção de π e r tem pelo menos dois pontos. Nesse caso temos que todos os pontos da reta r pertencem ao plano π e dizemos que a reta r está contida em π.

Uma reta r é transversal a π se, e somente se, o vetor diretor dessa reta não é paralelo ao plano π. Ou equivalentemente, se o vetor diretor dessa reta não é ortogonal ao vetor normal ao plano.

Colocando em coordenadas, obtemos que o plano $\pi : ax + by + cz = d$ e a reta r de equação

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$$

são transversais se, e somente se,

$$(a, b, c).(v_1, v_2, v_3) \neq 0,$$

ou seja,

$$av_1 + bv_2 + cv_3 \neq 0.$$

Reescrevendo esta condição utilizando o vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ e o vetor diretor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ obtemos o seguinte critério.

A reta $r : X = P + v\lambda$ é transversal ao plano π de vetor normal $\vec{n}$ se, e somente se,

$$v.n \neq 0.$$

Caso r nao seja transversal à π, nos restam duas opções: ou r é paralela ou está contida em π. Para decidirmos qual é o caso basta tomarmos um ponto qualquer da reta e verificarmos se este pertence ao plano. Se isso ocorrer a reta esta contida no plano, caso contrario a reta é paralela.

Atividade 4.9. *Encontre o ponto de intersecção da reta a que passa pelos pontos* $A = (-2, -1, 1)$ *e* $B = (1, -2, 2)$ *com o plano* α *de equação* $x + y - z - 2 = 0$.

2. Abra o Geogebra:

- *No menu exibir marque a opção: Janela de visualização 3D.*
- *No Campo de Entrada, digite:* $A = (-2, -1, 1)$ *e* $B = (1, -2, 2)$.
- *No Campo de Entrada, digite: Reta*$[A, B]$.
- *No Campo de Entrada, digite:* $\alpha : x + y - z - 2 = 0$.
- *No Campo de Entrada, digite: Interseção*$[a, \alpha]$

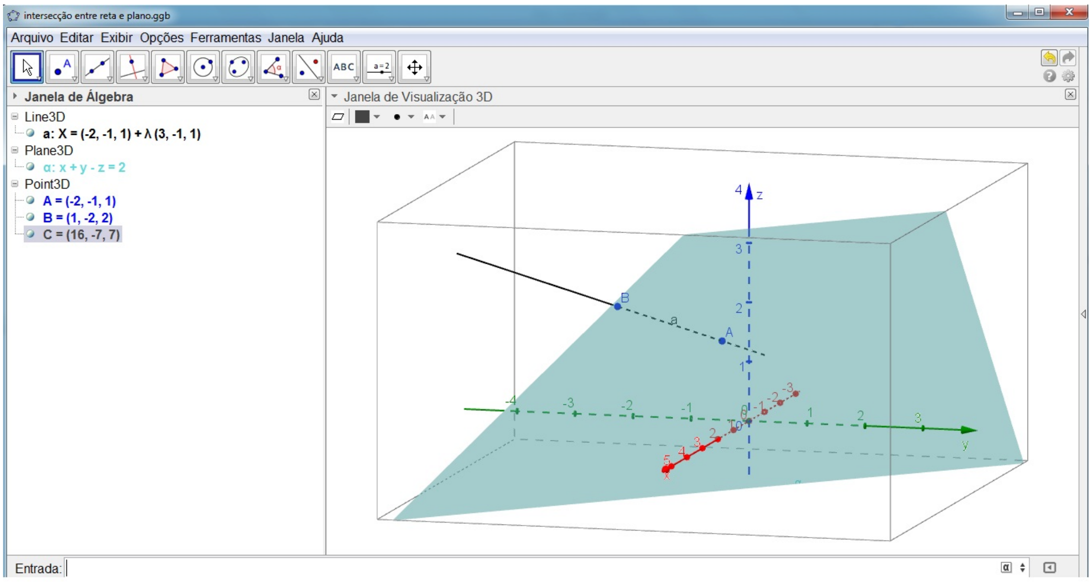

Figura 4.16: Intersecção da reta a com o plano α

Considerações Finais

Iniciamos o nosso trabalho apresentando um breve histórico do *Geogebra*, seguido de como utilizar alguns comandos, visto que entendemos ser isso necessário, pois assim, o leitor terá ferramentas para desenvolver o uso de tal software.

Além disso, ao longo do trabalho, optamos por desenvolver a parte teórica do conteúdo, seguida de atividades, em que são sugeridas a resolução das mesmas primeiramente sem o uso do *Geogebra* seguida da mesma atividade a ser resolvida com o software, pois entendemos que assim o aluno ficará, mas motivado, na sequência em usar o mesmo.

As atividades propostas têm como objetivo auxiliar os professores na preparação de suas aulas, com o intuito de estimular a pesquisa por parte dos alunos de técnicas para resolver as mais variadas situações problema no que diz respeito em particular aos que se referem a questões que envolvam o estudo de retas e planos.

Dessa forma, espera-se auxiliar os alunos nas resoluções de problemas e despertar um interesse maior pelos conteúdos que foram abordados, contribuindo no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem.

Ao término desse trabalho, espera-se que as atividades aqui propostas sirvam para que os professores constatem a importância da utilização de softwares matemáticos, em particular o *Geogebra*, já que nem sempre os alunos têm a oportunidade de assim desenvolvê-los.

Deve-se ter em mente o que se espera dos alunos: serem meros repetidores de conceitos ou cidadãos críticos, que usem o raciocínio e que vejam a Matemática como uma forma de ajudá-los a resolver seus problemas. Sabe-se que nem sempre os alunos conseguem aplicar os conhecimentos adquiridos tão logo estes sejam aprendidos, mas é bom que saibam que poderão utilizá-los, sempre que necessários e que softwares matemáticos devem facilitar esse uso e aprendizagem.

Referências Bibliográficas

[1] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel, *Fundamentos de Matemática Elementar.* 2 ed. Rio de Janeiro: Atual Editora, 1997.

[2] PAIVA, Manoel., *Matemática.* 2 ed. São Paulo: Editora Moderna, (2010).

[3] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto, *Matemática uma nova abordagem.* 4 ed. São Paulo: Editora FTD, 2001.

[4] SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez, *Matemática no Ensino Médio* 5 ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2005.

[5] ZULATO, Rúbia Barcelos Amaral: *Dissertação de Mestrado* Rio Claro - São Paulo: 2002.

[6] ALLEVATO, N. S. G. Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2005.

[7] MUNIZ NETO, Antonio Caminha; *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana* 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[8] http://www.alunosonline.com.br/matematica/equacoes-parametricas-reta.html

[9] http://wiki.geogebra.org/pt/Manual

[10] http://www.geogebra.org/help/docupt$_PT.pdf$

[11] http://www.ime.unicamp.br/ adonai/gaeadufal$_im.pdf$