UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL–PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Coordenadas Polares: Um Ensaio sobre a Aplicabilidade no Ensino Médio

Anderson Henrique Costa Barros
Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão (Orientador)

São Luís, Abril de 2014.

ANDERSON HENRIQUE COSTA BARROS

COORDENADAS POLARES
Um Ensaio sobre a Aplicabilidade no Ensino Médio

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional–PROFMAT da Universidade Federal do Maranhão para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: José Antônio Pires Ferreira Marão

São Luís – MA
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação(CIP)

Barros, Anderson Henrique Costa

Coordenadas Polares: Um Ensaio sobre a Aplicabilidade no
Ensino Médio. /
Anderson Henrique Costa Barros. { São Luís, 2014.

67f.
Orientador: José Antonio Pires Ferreira Marão

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) {
Universidade Federal do Maranhão, 2014.

1. Coordenadas Polares--Coordenadas Cartesianas. I. Título.
CDU XXX.XX { XXX

ANDERSON HENRIQUE COSTA BARROS

COORDENADAS POLARES
Um Ensaio sobre a Aplicabilidade no Ensino Médio

Dissertação apresentada à Coordenação do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional–PROFMAT da Universidade Federal do Maranhão para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em de de .

BANCA EXAMINADORA

Professor Doutor José Antônio Pires Ferreira Marão-UFMA

Professor Doutor Félix Silva Costa-UEMA

Professor Doutor Manoel Ferreira Borges Neto-UNESP

Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu pai José Henrique Barros, à minha mãe Valdecy Costa, ao meu irmão José Ricardo, à Aluísio Viana(*in memorian*) e à Francisca de Assis Fróz(*in memorian*)

Agradecimentos

Ao meu orientador Marão por tudo que fez por mim durante o mestrado;
Aos professores do PROFMAT: Saraiva, Arlane, Coelho, Félix, João de Deus, Josenildo;
Ao IMPA por propiciar o mestrado a nível nacional;
Aos meus colegas de mestrado;
À Capes pelo apoio financeiro;

`Os números governam o mundo`
Platão

BARROS, Anderson Henrique Costa, **Coordenadas Polares: Um Ensaio sobre a Aplicabilidade no Ensino Médio**, 2014, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 67p.

RESUMO

O estudo das Coordenadas Polares será abordada neste trabalho na perspetiva de abordagem possível no Ensino Médio, tendo o enfoque do ponto de vista da Geometria Analítica estudada na Educação Básica. Será apresentado a importância do tema, destacando a sua simplicidade na resolução de problemas, utilizando ferramentas básicas estudadas no Ensino Fundamental e Médio, tais como: relações métricas e trigonométricas no triângulo, fundamentos de Geometria Analítica. No trabalho serão utilizados ferramentas computacionais como o *Geogebra* e o *WxMaxima* sendo um facilitador e motivador para professores e alunos. Por fim, será lançado, de maneira estrutural, o assunto proposto.

Palavras-chave : Coordenadas Polares, Sistema Cartesiano

ABSTRACT

The study of polar coordinates is shown in this work in the proper formulation of a possible approach possible in High School, taking the focus from the point of view of Geometry studied in Basic Education. Presented will the importance of the topic, highlighting its simplicity in the formulation and solution of problems using basic tools studied in Elementary Education for sample metric relations in triangles.The computational tools used on the job will be WxMaxima and GeoGebra seeking to enhance visualization of the proposed problems
Keywords: Polar Coordinates, Cartesian System.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Geometria analítica teve origem nos trabalhos de grandes matemáticos franceses de renome, cabe citar Pierre de Fermat(1601–1665) e René Descartes(1596–1650), que curiosamente não eram matemáticos profissionais; ambos eram graduados em direito,tendo como base o trabalho de outros matemáticos como Apolônio, Oresme, Viète, dentre outros[1]. O trabalho desenvolvido por ambos foi motivado, pelo primeiro devido a sua paixão, a matemática, e o segundo por questões filosóficas e diga-se de passagem que não trabalharam juntos na criação da Geometria Analítica, fato que ocorre em muitos casos em matemática, cabe citar o cálculo por exemplo.
Fermat fez contribuições nas mais diversas áreas da matemática, sendo as principais: o Cálculo Geométrico e Infinitesimal, a Teoria dos Números e Teoria das Probabilidades, e com as suas descobertas calculava a área de parábolas e hipérboles, e determinava o centro de massa de vários corpos. Em 1934, *Louis Trenchard Moore* descobriu uma nota de Isaac Newton dizendo que o seu cálculo, antes considerado como invenção própria, fora baseado no "método de monsieur Fermat para estabelecer tangentes", o que mostra que Fermat teve papel fundamental na criação do Cálculo Diferencial.

A contribuição de Fermat à Geometria Analítica encontra-se em um manuscrito intitulado *"Ad locos Planos et Solidos Isagoge"*(Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos) que só foi publicada em 1637 após sua morte, fato que caracteriza Fermat como um matemático que não gostava de publicar as suas descobertas, o que fica evidente o fato de Descartes ser mais lembrado como o criador da Geometria Analítica. Ao restaurar o livro *Plane Loci* (Lugares Planos) de Apolônio, baseando-se na Coleção Matemática de Papus[2], Fermat descobriu o princípio fundamental da Geometria Analítica,em seguida introduziu os eixos perpendiculares e descobriu as equações gerais de retas e circunferências e as equações mais simples de parábolas, elipses e hipérboles, e mostrou de um modo bastante completo e sistemático que toda equação de 1^o e 2^o graus pode ser reduzida a um desses tipos, fatos que não constam na obra de Descartes.

René Descartes nasceu na França, em La Haye, no dia 31 de março de 1596. Estudou durante oito anos na escola jesuítica de La Flèche, ingressando mais tarde, com dezesseis anos, na Universidade de Pointiers, onde estudou Medicina e Direito chegando a estudar Astronomia, Física e Matemática. Publicou, em

[1] o leitor interessado em mais detalhes pode consultar[18], [28]

[2] Geometra grego autor da coleção de Pappus, em oito volumes.

1637, uma obra intitulada *"Discours de la Méthode"*(O discurso do Método), tendo como apêndice *La Geometrie*(A Geometria), *La Dióptrique*(A Dióptrica[3]), *Lés Météores*(Os Meteoros). *Considerado, erroneamente, por muitos historiadores, como o criador da geometria analítica, e contudo não fez nada disso. De fato, analisando o tratado de Descartes sobre a geometria, qualquer pessoa se convencerá de que essa obra nada contém sobre eixos perpendiculares, ou as coordenadas "cartesianas" de um ponto, ou equações de linhas ou círculos, ou qualquer material que tenha alguma relação reconhecível com a Geometria Analítica, nos moldes em que esse assunto tem sido entendido nos últimos 300 anos.*(SIMMONS,pag 692, 1987)

Descartes propõem em sua obra quatro regras, que em conjunto, pode ser considerado "o coração de sua filosofia"

> *O primeiro consistia em nunca aceitar como verdadeira nenhuma coisa que eu não conhecesse evidentemente como tal; isto é, em evitar, com todo o cuidado, a precipitação e a prevenção, só incluindo nos meus juízos o que não se apresentasse de modo tão claro e distinto a meu espírito, que eu não tivesse ocasião alguma para dele duvidar. O segundo, em dividir cada uma das dificuldades que devesse examinar em tantas partes quanto possível e necessário para resolvê-las. O terceiro, em conduzir por ordem meus pensamentos, iniciando pelos objetos mais fáceis de conhecer, para subir, aos poucos, gradativamente, ao conhecimento dos mais compostos, e supondo também, naturalmente, uma ordem de precedência de uns em relação aos outros. E o quarto, em fazer, para cada caso, enumerações tão completas e revisões tão gerais, que eu tivesse a certeza de não ter omitido nada.*(DESCARTES, 2002, p.31-32)

Descartes foi mais feliz do que Fermat no que se refere a notação matemática, pois, em sua obra, pela primeira vez,encontra-se o uso de expoentes e o costume de denotar constantes e variáveis pelas letras *a, b, c e x, y, z*, respectivamente; utilizado na Geometria e Álgebra, e Álgebra usada como linguagem para discutir Geometria; mas não se encontra Geometria Analítica, ou em relação a isto qualquer conteúdo que justifique a reputação matemática de Descartes e em nenhuma figura de sua obra aparece os dois eixos perpendiculares. Percebe-se em seu trabalho que ele procurava estabelecer regras universais para resolver problemas de toda natureza, como verificamos no apêndice- A Geometria, no qual descreve um método que resolve todos os tipos de problemas em geometria.

O método pode ser dividido em três partes: Nomear, Equacionar e Construir.

1. **Nomear** consiste em assumir que o problema já está resolvido e, a partir daí, nomear todos os segmentos conhecidos e desconhecidos necessários para a resolução do problema.

2. **Equacionar** consiste em estabelecer uma equação envolvendo essas variáveis.

3. **Construir** consiste em construir as soluções geometricamente, fazendo uso de régua e compasso.

[3]Parte da Física que estuda a refração da luz

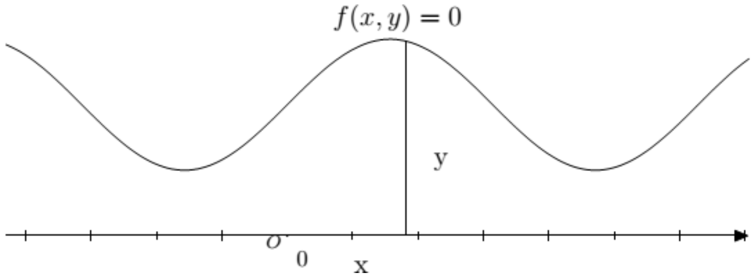


Figura 1.1: Curva

A ideia central da geometria analítica é a correspondência entre uma equação $f(x,y) = 0$ e o local (geralmente uma curva), constituído por todos os pontos cujas coordenadas (x, y), fixada nos dois eixos perpendiculares satisfazem a equação, quando são encontrados duas quantidades conhecidas na equação, tem-se um lugar geométrico e a extremidade de um destes descreve um linha reta ou curva(figura 1). Como dito anteriormente, nem Descartes e Fermat usaram sistematicamente duas coordenadas na forma padrão de hoje.

O presente trabalho, apresenta os conceitos fundamentais de coordenadas polares, com o intuito de inseri-lo no currículo do Ensino Médio, tendo como fundamentação os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's). Tendo em vista que, como em [10], página 125, os conteúdos e habilidades propostas para o Ensino de Geometria Analítica devem ser desenvolvidas de acordo com o seguinte: *"Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características"*. Desta forma, será proposto no trabalho uma correspondência entre o ensino da Geometria Analítica tradicional e a proposta de ensino de Coordenadas Polares.
Issac Newton foi o primeiro a pensar em utilizar coordenadas polares. No tratado *Method of Fluxions*(escrito por volta de 1671), que tratava de curvas definidas analiticamente, Newton apresentou dez tipos de sistemas de coordenadas que podiam ser utilizados: um deles era o sistema de coordenadas polares. Contudo, este trabalho de Newton só foi publicado em 1736. Em 1691 Jákob Bernoulli obteve o conceito de coordenadas polares e publicou-o na *Acta eroditorum*. O sistema polar usava como referência um ponto sobre uma reta, ao invés de duas retas concorrentes. A reta era chamada "eixo polar", e o ponto sobre a reta recebeu a designação de "pólo". A posição de qualquer ponto do plano era descrita primeiro pelo comprimento do vetor do pólo ao ponto, e segundo pelo ângulo que o vetor formava com o eixo polar.
Depois de Bernoulli, Jacob Hermann, num artigo de 1729, afirmou que as coordenadas polares eram tão úteis quanto as coordenadas cartesianas para o estudo de lugares geométricos. O trabalho de Hermann, porém, não se tornou muito conhecido, e coube a Euler, cerca de vinte anos mais tarde, fazer com que o sistema de coordenadas polares fosse realmente divulgado. Serão introduzidas as ferramentas fundamentais da Trigonometria Plana, como a relação trigonométria fundamental, e as relações trigonométricas no triângulo retângulo, conceitos da Geometria Analítica, como distancia entre dois pontos, equaç ão da reta e cônicas, mostrando assim a *transdisciplinaridade* do assunto proposto, visto que, aborda temas de outros assuntos da Matemática Elementar. De maneira análoga, será

mostrada *interdisciplinaridade*, tendo em vista que, as Coordenadas Polares são aplicadas em outras áreas do conhecimento humano, como por exemplo:

- Uso para o desenho e cálculo de estruturas que são dadas por arcos simétricos em Contrução Civil;
- Cálculo de distâncias quando os pontos são dados em forma (ρ, θ), onde ρ é a chamada distância polar e θ o ângulo formado entre o raio vetor e o eixo polar.
- Acompanhamento do movimento de planetas e de satélites.
- Identificação e Localização de objetos em telas de Radar e projetos de antenas.

Convém destacar que, o trabalho será realizado baseado na metodologia como em [8], mediante três ferramentas:

- **Conceituação**
  A *conceituação* consiste na formulação correta e objetivas das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos.
- **Manipulação**
  A *manipulação*, de caráter pricipalmente(mas não exclusivamente) algébrico. A habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permite ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-lhe da perda de tempo e energia com detalhes secundários.
- **Aplicação**
  As *aplicações* são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia-a-dia a questõesmais sutis que surgem em outras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais.[4]

De maneira equivalente, deve-se seguir a risca todas as recomendações propostas em [3], onde é destacado que:

> *O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. A simples apresentação de equações sem explicações fundadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor. Memorizações excessivas devem ser evitadas; não vale a pena o aluno*

[4]O leitor deverá consultar [1],[8],[12] para mais detalhes

> *memorizar a fórmula da distância de um ponto a uma reta, já que esse cálculo, quando necessário, pode ser feito com conhecimento básico de geometria analítica (retas perpendiculares e distância entre dois pontos).*
> *É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico.*
> *A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física.*

Em outras palavras, todo o trabalho a ser desenvolvido, será com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais,Diretrizes Curriculares e na Lei de Diretrizes e Bases da Educação.

Capítulo 2

Geometria Analítica Plana

A Geometria, como ciência dedutiva, foi criada pelos gregos. Mas, apesar do seu brilhantismo, faltava operacionalidade à geometria grega. E isto só iria ser conseguido mediante a Álgebra como princípio unificador. Os gregos, porém, não eram muito bons em álgebra. Mais do que isso, somente no século XVII a álgebra estaria razoavelmente aparelhada para uma fusão criativa com a geometria. A Geometria Analítica é um ramo da matemática que estuda o lugar geométrico dos pontos do plano ou do espaço utilizando os princípios de Álgebra. Comumente o sistema de coordenadas cartesianas é utilizado para estabelecer a relação entre equações e os gráficos de uma reta, de um plano, ou de lugares geométricos notáveis como a parábola ou a circunferência. Entretanto, será utilizado outro sistema de coordenada que venha a simplificar o estudo desta relação. Desta forma, foi necessário as ferramentas da Geometria para realizar este estudo, o que será feito a seguir.

2.1 O Plano Cartesiano

Traçando um plano duas retas perpendiculares x e y, que se intersectam no ponto O. Considere, em seguida, x e y como cópias de $\mathbb{R}$, escolhendo uma mesma unidade de medida para ambas e fazendo O corresponder a 0. Fica assim determinado, sobre cada uma de tais retas, duas semirretas, uma positiva e outra negativa, sendo que convencionamos indicar a semireta positiva por meio de uma pequena seta. As retas x e y dividem o plano em quatro regiões, cada uma das quais determinada pelos semieixos de x e y que a delimitam. Denomina-se tais regiões de **quadrantes**, os quais são numerados de 1 a 4, conforme a convenção dos eixos da figura 2.0.1; em particular o ponto A marcado na mesma se encontra no terceiro quadrate.

Dado um ponto qualquer no plano A, traçando por A uma reta perpendicular à reta x e outra perpendicular à reta y, as quais intersectam tais retas respectivamente nos pontos A_x e A_y. As perpendiculares traçadas a x por A_x e a y por A_y intersectam-se em um único ponto A do plano. Portanto, dar um ponto A no plano é o mesmo que dar suas projeções ortogonais A_x e A_y sobre as retas x e y, respectivamente. O plano esta munido de um **sistema de coordenadas Cartesianas** $x\mathrm{O}y$, onde x_A e y_A são as **coordenadas cartesianas** do ponto. Neste contexto, o número real x_A é a **abscissa** de A, ao passo que o real y_A é a **ordenada** do ponto A. Doravante, o eixo x será denominado de **eixo das**

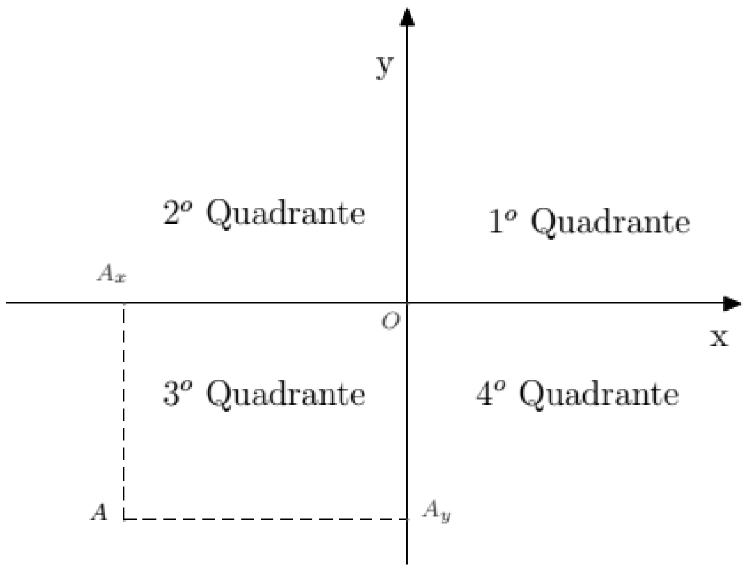


Figura 2.1: Plano Cartesiano

abscissas e o eixo y **eixo das ordenadas**

2.2 Distância entre dois Pontos

Proposição
Para pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ no plano cartesiano, temos

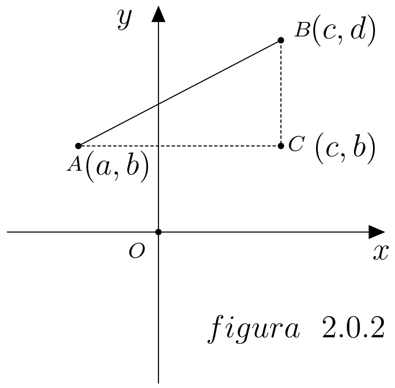
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Prova.
Considerar quatro casos: $x_A \leq x_B$ e $y_A \leq y_B$; $x_A \leq x_B$ e $y_A > y_B$; $x_A > x_B$ e $y_A \leq y_B$; $x_A > x_B$ e $y_A > y_B$. Desde que a análise de cada um deles é essencialmente equivalente à dos demais, concentremo-nos no caso $x_A \leq x_B$ e $y_A \leq y_B$ (figura 2.0.2). Por simplicidade de notação, seja $A(a, b)$ e $B(c, d)$, de maneira que $a \leq c$ e $b \leq d$. Se $a = c$(possibilidade à esquerda na figura 2.0.2), então temos claramente $\overline{AB} = d - b = |b - d| = \sqrt{(0)^2 + (b-d)^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$. Desde que o caso $b = d$ é análogo, suporemos, então, que $a < b$ e $c < d$ (possibilidade à direita na figura 2.0.2). Trace por A uma paralela ao eixo das abscissas e por B uma paralela ao eixo das ordenadas, e marque o ponto C de interseção das mesmas. Como C tem a mesma ordenada que A e a mesma abscissa que B, temos $C(c, b)$. Ademais, como os eixos cartesianos são perpendiculares, segue que o triângulo ABC é retângulo em C. Portanto, pelo teorema de Pitágoras e pelos dois casos acima, temos

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-c)^2 + (d-b)^2,$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2},$$

como queríamos provar.



$figura$ 2.0.2

2.3 Retas no plano Cartesiano

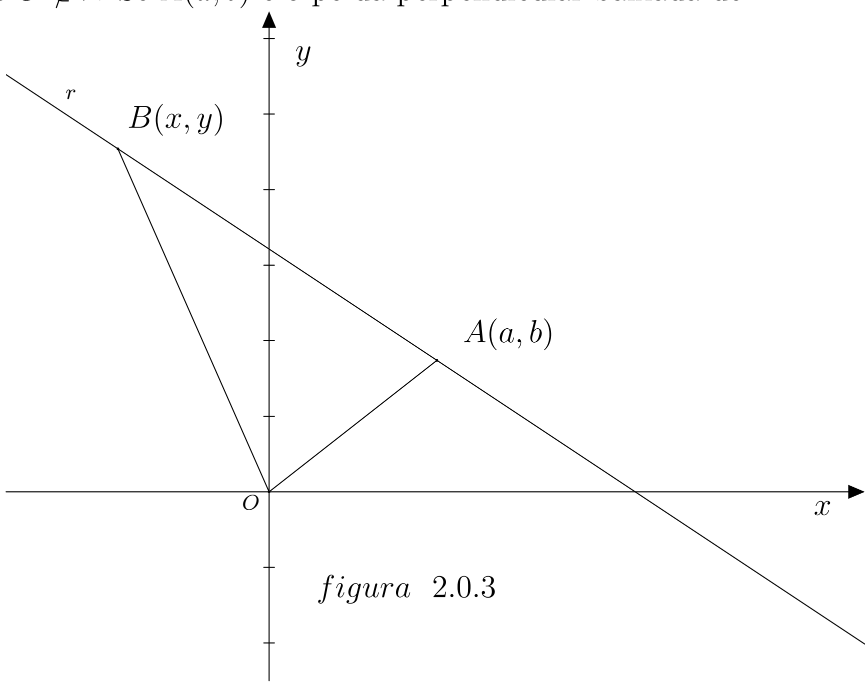
Em tudo o que segue,está fixado um plano, que será sempre pensado como o plano em que contrui-se, e um sistema Cartesiano de coordenadas no mesmo. Apartir de agora, o problema é de como representar retas do plano em um tal sistema.

Teorema *Toda reta do plano Cartesiano pode ser vista como o conjunto de pontos* (x, y) *do mesmo que satisfazem uma equação da forma*

$$ax + by + c = 0,$$

onde a, b *e* c *são números reais tais que* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$.

Prova. Seja O a origem e r uma reta do plano Cartesiano. Supondo, inicialmente, que $O \notin r$. Se $A(a, b)$ é o pé da perpendicular baixada de



$figura$ 2.0.3

O a r(figura 2.0.3), é imediato que um ponto $B(x,y)$ do plano está sobre r se e só se $O\hat{A}B = 90^o$. Portanto, segue da recíproca do teorema de pitágoras que

$$(x,y) \in r \iff \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2$$

$$\iff (a^2+b^2) + [(x-a)^2 + (y-b)^2] = x^2 + y^2$$

$$\iff ax + by - (a^2+b^2) = 0,$$

com(graças a $O \notin r$) $a \neq 0$ ou$b \neq 0$. Segue que r é o conjunto das soluções (x,y) da equação $ax+by+c=0$. Nas notações do teorema acima, $ax+by+c=0$ é a **equação da reta** r, o que indicamos escrevendo

$$r : ax + by + c = 0.$$

2.4 Vetores

Um dos princípios da utilização de vetores na geometria é o fato de que vários resultados não-triviais, obtidos por ferramentas puramente analíticas, se obtidos de forma mais fácil, por meio do uso de vetores. Por comodidade, serão aqui tratados fatos básicos da teoria dos vetores.
Um **vetor** no plano é um *segmento orientado*, i.e, um segmento tal que, dentre suas extremidades, uma é a **inicial** e a outra é a **final**(figura 2.0.4). Diz-se, ainda, que vetores são segmentos munidos de um *sentido*(de percurso).

Se um vetor **v**(figura 2.0.4) tem extremidades inicial A e final B, escreve-se também $v = \overrightarrow{AB}$. Observa-se que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ são distintos: apesar de terem as mesmas extremidades, $\overrightarrow{BA}$ tem sentido contrário ao de $\overrightarrow{AB}$. Dize-se que dois vetores **v**= $\overrightarrow{AB}$ e **w**= $\overrightarrow{CD}$ são **iguais** se o quadrilátero $ACDB$ (com vértices percorridos nessa ordem) for um paralelogramo. Neste caso, dizemos ainda que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são **representantes** do mesmo vetor e pode-se escrever **v**=**w** ou, ainda, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

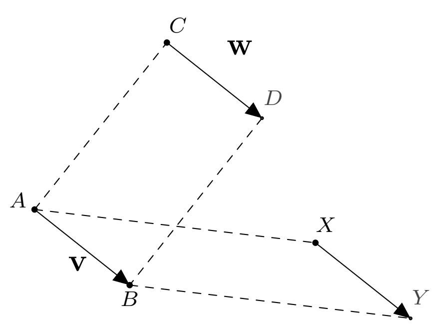


figura 2.0.4

O **módulo** do vetor **v**, denotado por $||\mathbf{v}||$ é o comprimento de um qualquer de seus representantes. Para o que segue, um ponto qualquer do plano é dito **vetor nulo** e denotado por **0**. Assim, $||\mathbf{0}|| = 0$.
Dado um vetor não nulo **v**, defini-se a **direção** de **v** como sendo o conjunto das retas (paralelas) que contêm seus representantes. Em particular, dois vetores **v** e **w** têm a mesma direção(figura 2.0.4) se, escolhidos representantes $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ respectivamente para **v** e **w**, tem-se $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}$.
Uma das grandes vantagens de trabalhar com vetores é a possibilidade de realizar com eles *operações* semelhantes à adição e à subtração de números reais. Especificamente, dados vetores não nulos **v** e **w**(figura 2.0.4), escolha representantes **v**= $\overrightarrow{AB}$ e **w**= $\overrightarrow{BC}$ e definindo a **soma** de **v** e **w** como o vetor **v** + **w**= $\overrightarrow{AC}$.
Serão a seguir enunciados algumas proposições referentes as operações entre vetores:

1. Dados vetores a, b e c, temos $a + (b + c) = (a + b) + c$

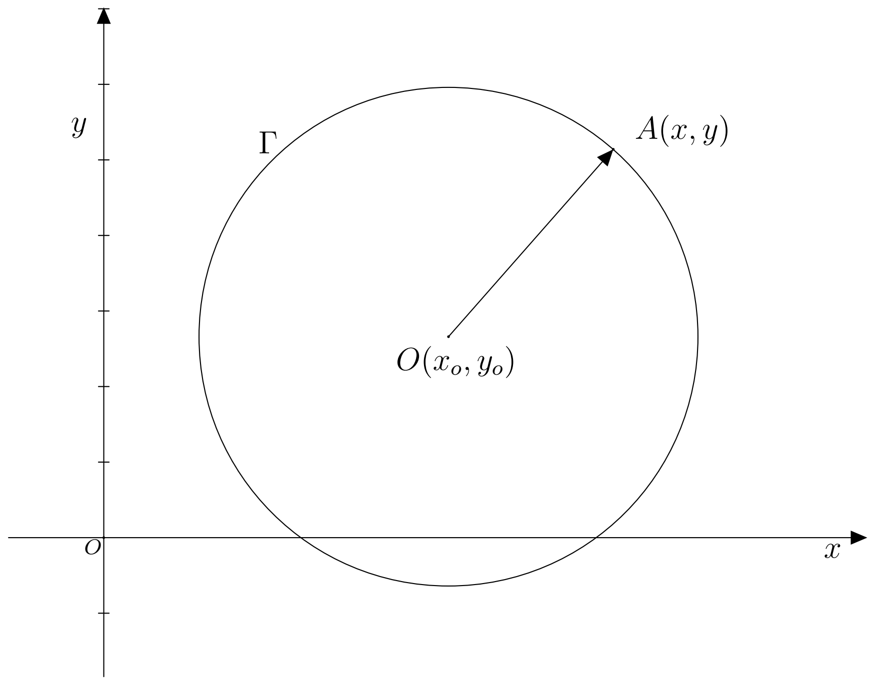
2. Dados escalares $k_1, \quad k_2$ e os vetores **v** temos:
   $(k_1k_2)\mathbf{v} = k_1(k_2\mathbf{v})$
   De posse da operação de multiplicação de um vetor por um escalar, pode-se definir a **diferença** $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ dos vetores**v** e **w** como a soma de **v** com o opsto de **w**:
   $$v - w = v + (-w)$$

3. Se $A(x_A, \quad y_A), B(x_B, y_B), \quad C(x_C, y_C) \quad e \quad D(x_D, y_D)$ em um dado sistema cartesiano, então
   $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}$$

4. Se, em um certo sistema cartesiano, temos $v = (x_1, \quad y_1) \quad e \quad w = (x_2, \quad y_2)$, então
   $(a) \quad v + w = (x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2)$
   $(b) \quad v - w = (x_1 - x_2, \quad y_1 - y_2)$
   $(c) \quad kv = (kx_1, \quad ky_1)$

2.5 Círculos no plano Cartesiano

Seja agora examinar círculos do ponto de vista analítico. Para tanto, lembrando que o círculo $\Gamma(O; R)$ ao plano α é definido como o conjunto dos pontos A de α cuja distância ao centro O é igual a R.



Escolhido em α um sistema de coordenadas Cartesianas como na figura acima, seja$O(x_o, y_o)$ e $A(x, y)$ um ponto qualquer de α. Segue de 2.0.2 que

$$A \in \Gamma \iff \overline{AO} = R \iff \overline{AO}^2 = R^2$$
$$\iff (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$
$$\iff x^2 + y^2 - 2x_o x - 2y_o y + (x_o^2 + y_o^2 - R^2) = 0.$$

Diz-se, então, que

$$x^2 + y^2 - 2x_o x - 2y_o y + (x_o^2 + y_o^2 - R^2) = 0,$$

é a **equação do círculo** de centro O e raio R.
Uma pergunta interessante é que será que toda equação da forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

tem como solução, no plano cartesiano, o conjunto dos pontos de um círculo? Há três possibilidades:

1. $\frac{A^2+B^2}{4} - C < 0$: nesse caso é imediato que não há ponto A tal que $\overline{AO}^2 = \frac{A^2+B^2}{4} - C < 0$, neste caso o conjunto dos pontos é vazio.

2. $\frac{A^2+B^2}{4} - C = 0$: Uma possível solução é $x = -\frac{A}{2}, y = -\frac{B}{2}$, isto é $A = O$. Portanto, o conjunto de pontos procurado é unitário.

3. $\frac{A^2+B^2}{4} - C > 0$: os pontos A procurados são aqueles tais que

$$\overline{AO} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{4} - C},$$

i.e, o conjunto-solução é o círculo de centro $O(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ e raio $R = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{4} - C}$. Para mais detalhes consultar [20]

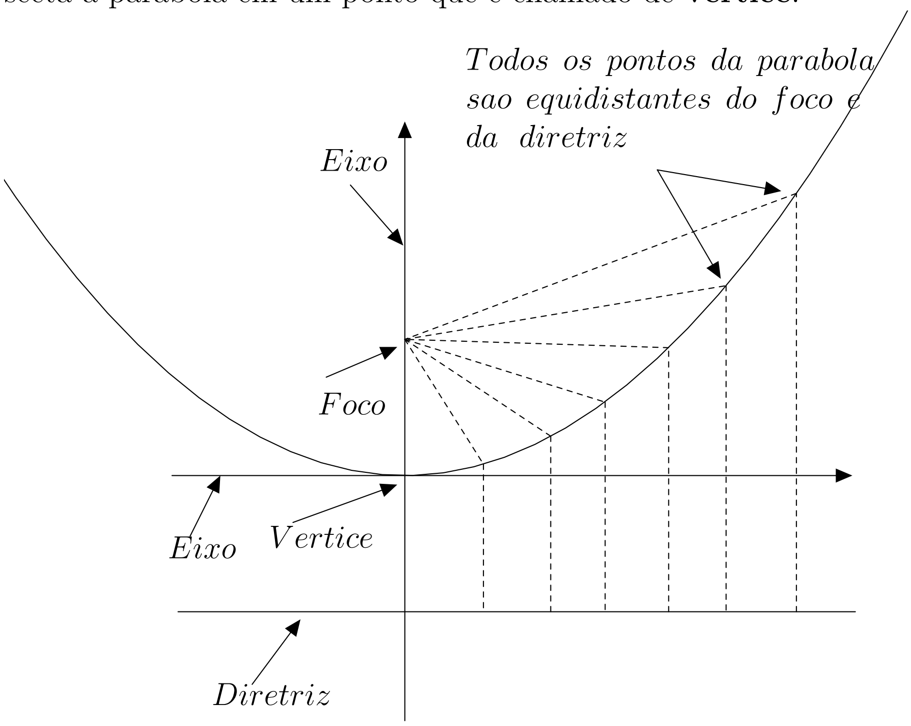
2.6 Seções Cônicas

Neste tópico serão tratadas as principais **seções cônicas ou cônicas** estudadas no Ensino Médio, a saber: Elipse, Parábola e Hipérbole. Essas curvas são obtidas pela interseção de um plano com um cone circular. Se o plano passa no vértice do cone, então a interseçãoé um ponto, um par de retas coincidentes ou uma só reta. Essas são chamadas de **seções cônicas degeneradas**, entretanto, será mais adequado se começar com definições equivalentes que são baseadas em suas propriedades geométricas.

PARÁBOLA

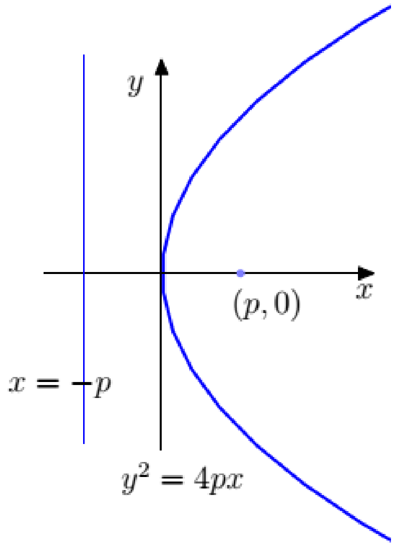
Definição *Uma Parábola é o conjunto de todos os pontos no plano que são equidistantes de uma reta fixada e de um ponto fixado que não está na reta.*

A reta é chamada de **diretriz** da parábola e o ponto é chamado **foco**. Uma parábola é simétrica em relação à reta que passa pelo foco em ângulo reto com a diretriz. Esta reta, chamada de **eixo** ou **eixo de simetria** da parábola, intersecta a parábola em um ponto que é chamado de **vértice**.



EQUAÇÕES DE PARÁBOLAS EM POSIÇÃO PADRÃO

O estudo de parábolas é tradicional denotar a distância entre o foco e o vértice por p. Assim, o vértice é equidistante do foco e da diretriz, logo a distância entre o vértice e a diretriz também é p, consequentemente, a distância entre o foco e a diretriz é $2p$. A equação de uma parábola é a mais simples se o vértice for a origem e se o eixo de simetria estiver ao longo do eixo x ou do eixo y. Uma possível orientação está monstradas na figura abaixo. Essa é chamada de **posição padrão** de uma parábola, e as equações resultantes são chamadas de **equações padrão** de uma parábola.



Para ilustrar como foram obtidas as equações na figura acima, será deduzida a equação para a parábola com foco $(p, 0)$ e diretriz $x = -p$. Seja $P(x, y)$ qualquer ponto sobre a parábola. Como P é equidistante do foco e da diretriz, as distâncias PF e PD na figura abaixo são iguais, isto é,

$$PF = PD$$

onde $D(-p, y)$ é o pé da perpendicular de P à diretriz. Pela fórmula da distância entre dois pontos, as distâncias PF e PD são

$$PF = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \quad e \quad PD = \sqrt{(x+p)^2},$$

substituindo na primeira equação e elevando ao quadrado obtem-se

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2,$$

simplificando, obtemos,

$$y^2 = 4px$$

As deduções das outras equações são análogas.

ELIPSE

Definição *Uma* **elipse** *é o conjunto de todos os pontos no plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva dada, maior do que a distância entre os pontos fixados.*

Os dois pontos fixados são chamados de **focos** da elipse e o ponto médio do segmento que une os focos é chamado de **centro**, conforme figura 2.0.6 . Nota-se que se os focos coincidirem, a elipse se reduz a um círculo. Para elipses que não sejam círculos, o segmento de reta através dos focos com extremidades na elipse é chamado de **eixo maior** e o segmento de reta através do centro com extremidades na elipse, e perpendicular ao eixo maior, é chamado de **eixo menor**. os extremos do eixo maior são chamados de **vértices**

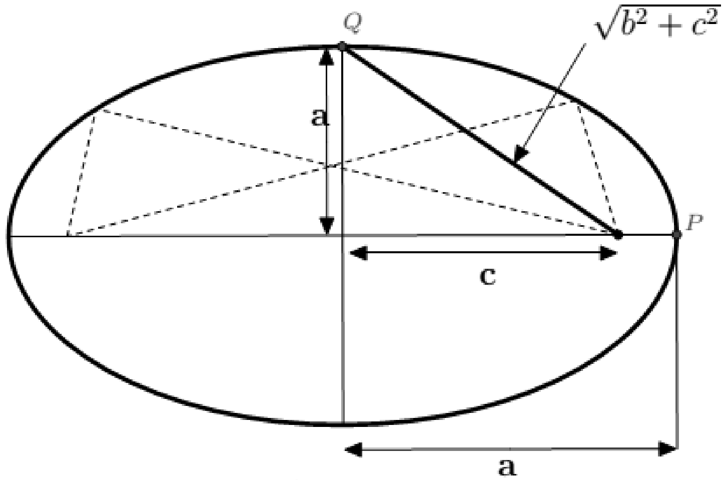


figura 2.0.6

EQUAÇÃO DE ELIPSES EM POSIÇÃO PADRÃO

No estudo de elipses é tradicional denotar o comprimento do eixo maior por $2a$, o comprimento do eixo menor por $2b$ e a distância entre os focos por $2c$(figura 2.0.6). O número a é chamado **semi-eixo maior** e o número b, o **semi-eixo menor**. Há uma relação básica entre os números$a$, b e c que pode ser obtida examinando a soma das distâncias aos focos a partir de um ponto P na extremidade do eixo maior, e de um ponto Q na extremidade do eixo menor(figura 2.0.6). A partir da definição, essas somas devem ser iguais, logo obtemos

$$2\sqrt{b^2+c^2} = (a-c)+(a+c)$$

do que segue

$$a = \sqrt{b^2+c^2} \quad (6) \quad ou \quad c = \sqrt{a^2-b^2} \quad (7)$$

A partir de (6), a distância de um foco até uma extremidade do eixo menor é a(figura 2.0.6), o que implica que para todos os pontos sobre a elipse a soma das distâncias aos focos é $2a$. Segue também de (6) que $a \leq b$, com a igualdade valendo apenas quando $c = 0$. Geometricamente, isso significa que o eixo maior de uma elipse é pelo menos tão grande quanto o eixo menor e que os dois eixos têm o mesmo comprimento quando os focos coincidirem, caso em que a elipse é um círculo. A equação de uma elipse é a mais simples se o seu centro estiver na origem e os focos estiverem sobre o eixo x ou do eixo y. As duas possíveis orientações mostradas na Figura 2.0.7. Essas são chamadas de **posições padrão** de uma elipse, e as equações resultantes são chamadas de **equações padrão** de uma elipse.

Elipses em posicao padrao

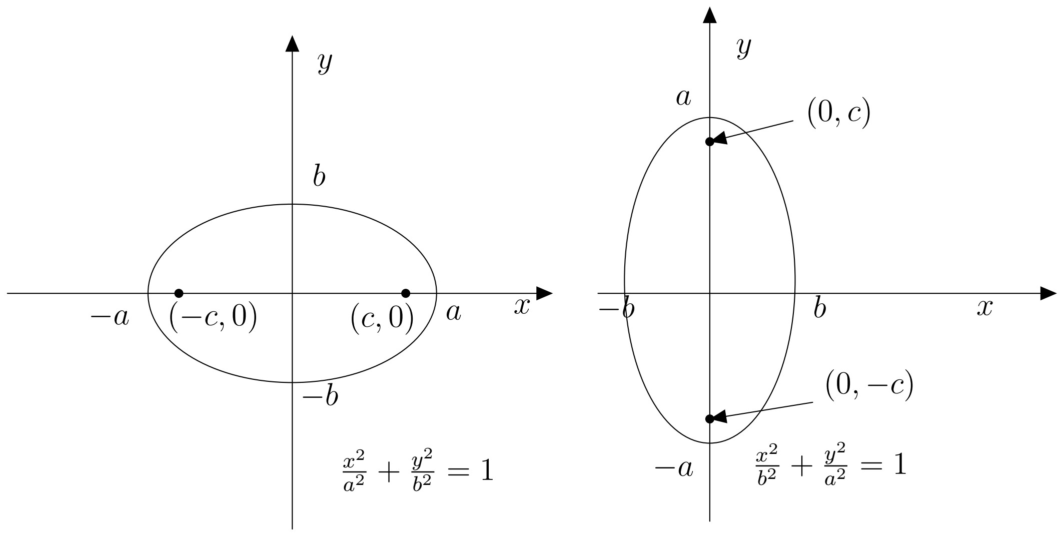
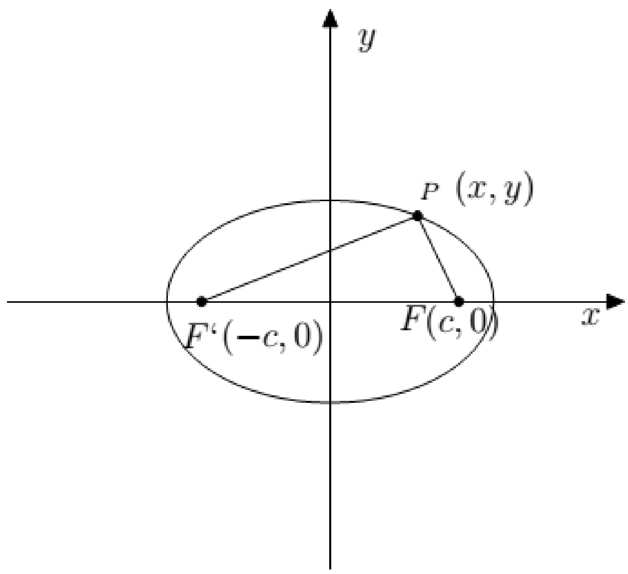


Figura 2.0.7

Será deduzida a equação para a elipse com os focos no eixo x. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre a elipse(figura abaixo). Uma vez que a soma das distâncias de P até os focos é $2a$, tem-se que

$$PF' + PF = 2a,$$



Logo

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Transpondo o segundo radical para o lado direito da equação e elevando ao quadrado, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

e, simplificando,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x \quad (8)$$

Elevando ao quadrado outra vez e simplificando, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

que, devido a (6), podemos escrever como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

Reciprocamente, pode ser mostrado que qualquer ponto cujas coordenadas satisfizerem (9) tem $2a$ como a soma de suas distâncias aos focos, de modo que tal ponto estará a elipse.

HIPÉRBOLE

Definição *Uma* **hipérbole** *é o conjunto de todos os pontos no plano tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos distintos fixados é uma constante positiva dada, menor que a distância entre os dois pontos fixados.*
Os dois pontos fixados são chamados de **focos** da hipérbole e o termo "diferença" usado na definição deve ser entendido como a distância ao foco mais distante menos a distância ao foco mais próximo. Como resultado, os pontos da hipérbole formam dois **ramos**, cada um dos quais "está rodeando" o foco mais próximo(figura 2.0.8).

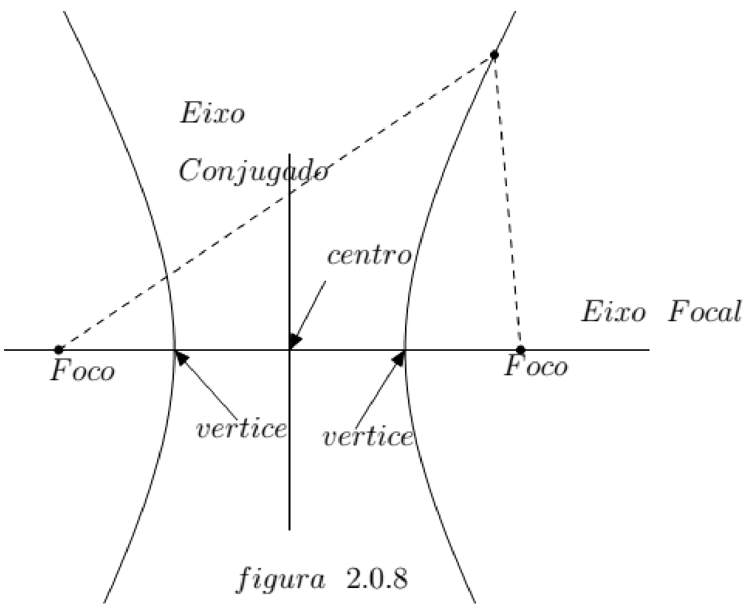


figura 2.0.8

O ponto médio do segmento de reta que une os focos é chamado de **centro** da hipérbole, a reta que passa pelos focos é chamada **eixo focal** e a reta que passa

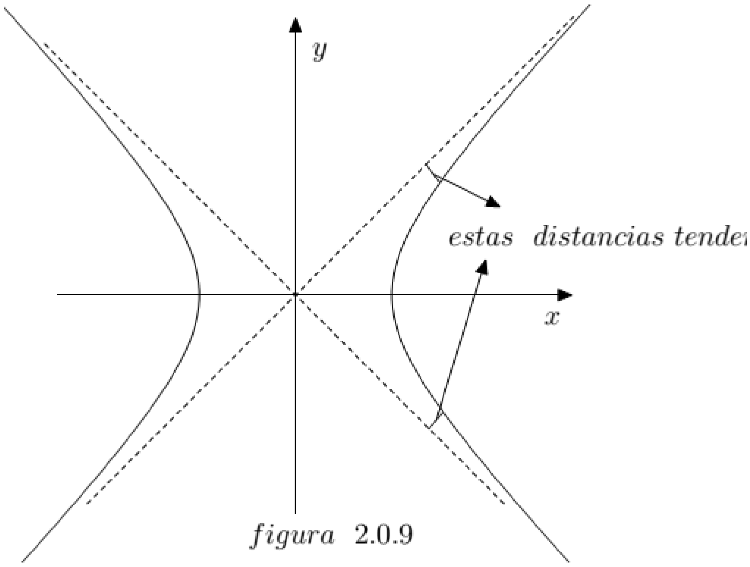


figura 2.0.9

pelo centro e é perpendicular ao eixo focal é chamada de **eixo conjugado**. A hipérbole intersecta o eixo focal em dois pontos, chamados **vértices**. Associado com toda hipérbole existe um par de retas, chamadas **assíntotas** da hipérbole. Essas retas cortam o centro da hipérbole e têm a propriedade que à medida que um ponto P move-se ao longo da hipérbole afastando-se do centro, a distância vertical entre P e uma das assíntotas tende a zero(figura 2.0.9)

EQUAÇÕES DE HIPÉRBOLES EM POSIÇÃO PADRÃO

Agora, nos estudos de hipérboles é tradicional denotar a distância entre os vértices por $2a$, a distância entre os focos por $2c$(figura 2.0.10) e definir a quantidade b como

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (10)$$

Essa relação, que pode também ser expressa como

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (11)$$

é facilmente encontrada pela figura(figura 2.0.10). Conforme ilustrado naquela figura, as assíntotas passam pelos cantos de uma caixa que se estende b unidades para cada lado do centro ao longo do eixo conjugado e por a unidades para cada lado do centro ao longo do eixo focal. O número a é chamado de **semi-eixo focal** da hipérbole e o número b o **semi-eixo conjugado**.(Assim como o semi-eixo maior e o semi-eixo menor de uma elipse, são números, não eixos geométricos.)

Se V for um vértice de uma hipérbole, então, como ilustrado na figura 2.0.10, a distância de V até o foco mais distante menos a distância de V até o foco mais próximo é

$$[(c-a)+2a]-(c-a)=2a$$

Desta forma, para todos os pontos da hipérbole, a distância ao foco mais distante menos a distância ao foco mais próximo é $2a$.
A equação de uma hipérbole é a mais simples se o seu centro estiver na origem e os focos estiverem sobre o eixo x ou do eixo y. Deduziremos a equação para

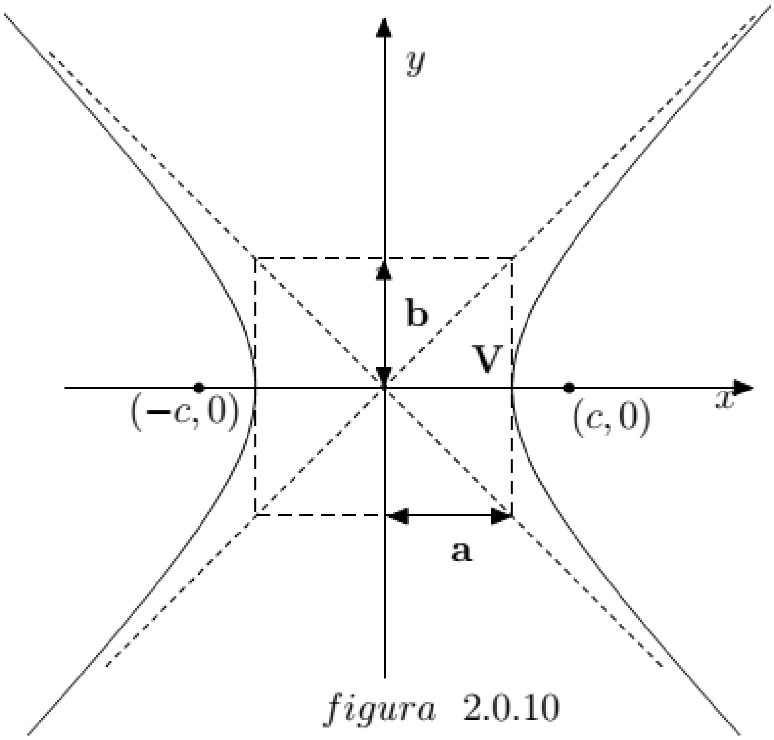


figura 2.0.10

a hipérbole com os focos no eixo x. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre a hipérbole. Uma vez que a diferença de suas distâncias a dois pontos distintos fixados é uma constante positiva dada, temos

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a$$

$$(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2$$

$$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(cx-a^2)^2=a^2(x-c)^2+a^2y^2$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

As deduções das outras equações são análogas, para mais detalhes consultar [1].

CÔNICAS TRANSLADADAS

As equações das cônicas que estão transladadas de suas posições padrão podem ser obtidas substituindo x por $x-h$ e y por $y-h$ nas equações padrão. Para uma parábola, isso translada o vértice da origem para o ponto (h, k); para elipses e hipérboles, isso translada o centro da origem para o ponto (h, k)

Parábolas com vértice (h, k) e eixo paralelo ao eixo x

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \quad [\ aberta\ \ para\ \ a\ \ direita\ \ ]$$
$$(y-k)^2 = -4p(x-h) \quad [\ aberta\ \ para\ \ a\ \ esquerda\ \ ]$$

Parábolas com vértice (h, k) e eixo paralelo ao eixo y

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \quad [\ aberta\ \ para\ \ cima\ \ ]$$
$$(x-h)^2 = -4p(y-k) \quad [\ aberta\ \ para\ \ baixo]$$

Elipses com centro (h, k) e eixo maior paralelo ao eixo x

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad [b \leq a]$$

Elipses com centro (h, k) e eixo maior paralelo ao eixo y

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad [b \leq a]$$

Hipérbole com centro (h, k) e eixo focal paralelo ao eixo x

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Hipérbole com centro (h, k) e eixo focal paralelo ao eixo y

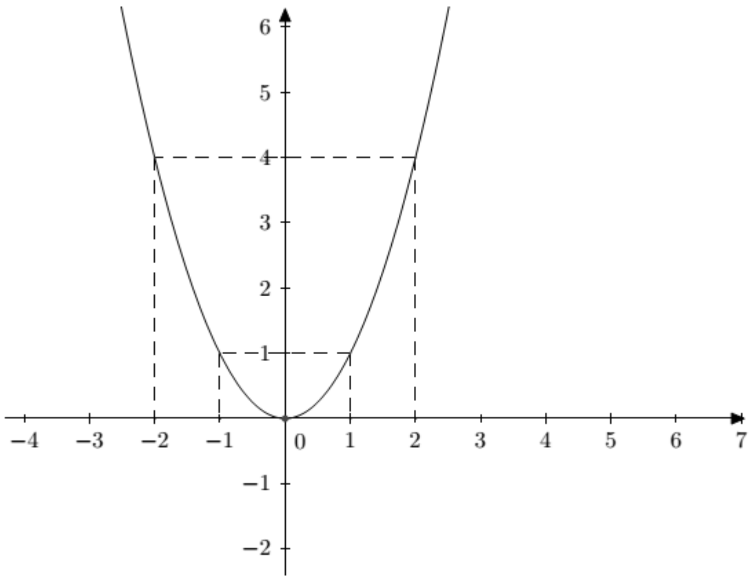
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

2.7 Traçado de Curvas no Plano Cartesiano

Neste tópico, será feito o traçado das curvas mais conhecidas no ensino médio, tais como elipses, parábolas e hipérboles, bem como outras desconhecidas a nível de educação básica como Lemniscatas, Cardióides, Limaçons, Rosáceas com suas equações em coordenadas cartesianas, utilizando, tabelas e quando necessário dois *softwares* de geometria dinâmica **Geogebra** e **WxMaxima**.
É comum nos livros didáticos, para traçar o gráfico de algumas funções, construir uma tabela, com alguns valores, relacionando as variáveis x e y do seguinte modo(por exemplo):
construir o gráfico de $f(x) = x^2$

x	$f(x) = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Tabela 2.1: Tabela da Parábola



Percebe-se que, a dificuldade das operações envolvidas neste exemplo é muito baixa, tendo em vista que a função escolhida é muito simples e que evidentemente a quantidade de pontos utilizados apenas dá uma ideia de como é o traçado do gráfico da função.Entretanto, para funções mais complicadas a operacionalidade se torna difícil e a quantidade de pontos utilizados tende a ser maior.
A seguir será contruído o gráfico da função $(x^2+y^2-2x)^2 = 4(x^2+y^2)$, da mesma forma que foi feito no ítem anterior. Entretanto, percebe-se que rapidamente nos deparamos com a dificuldade de isolar y na função para a construção da tabela, mas após algumas manipulações algébricas temos a expressão

$$y = \sqrt{\frac{-2x^2+4x+4 \pm \sqrt{(2x^2-4x-4)^2-4(x^4-4x^3)}}{2}}$$

, que de uma certa forma dificulta a construção da tabela de pontos do plano para o traçado do gráfico.
A tabela mostra alguns pontos do gráfico da referida função(ao lado um esboço do gráfico):

Percebe-se o esforço aritmético para construir a tabela e o gráfico da função. Todo esse esforço é minimizado utilizando as coordenadas polares.

x	y
0	0
0	-2
0	+2
1	2,54
1	-2,54
2	2,54
2	-2,54
3	2,07
3	-2,07
3,81	1
3,81	-1
4	0
-0,49	1
-0,49	-1

Tabela 2.2: Tabela da Cardióide

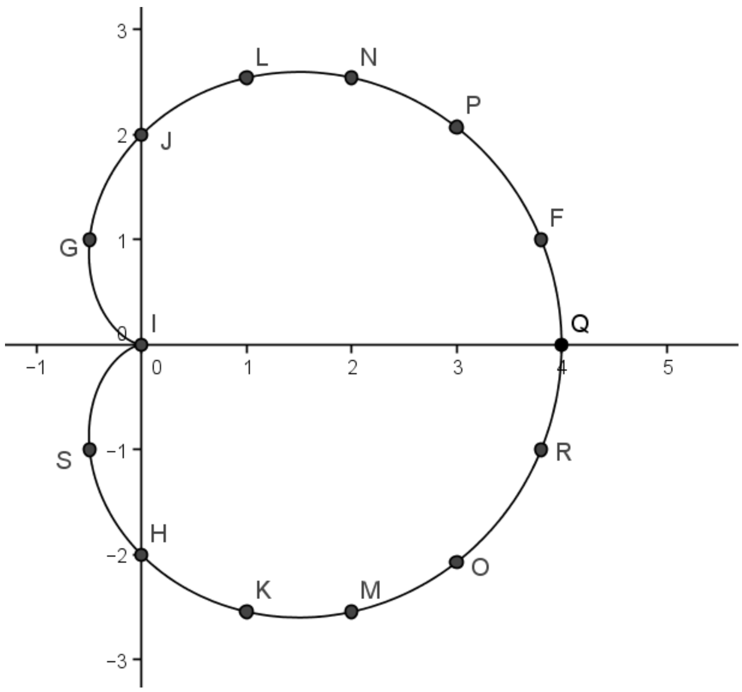


Figura 2.2: Gráfico da função

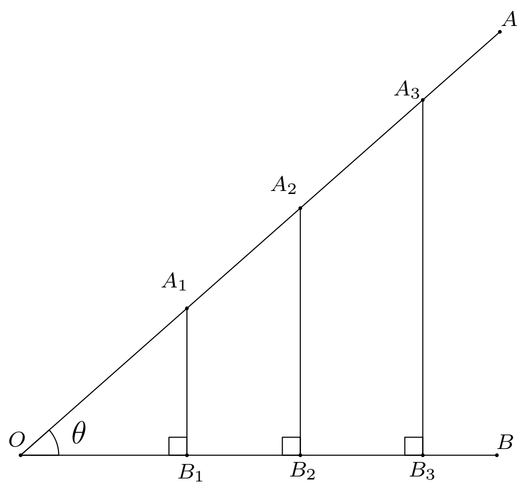
Capítulo 3

Trigonometria Plana

3.1 A Trigonometria do Triângulo Retângulo

As funções trigonométricas do ângulo agudo[1]
Consideremos um ângulo $A\hat{O}B = \theta, 0^o < \theta < 90^o$, e traç-se, a partir dos pontos A_1, A_2, A_3 etc. da semi-reta OA, perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 etc. à semi-reta OB. Os triângulos $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3$ etc. são semelhantes por terem os mesmos ângulos(figura 3.0.1). Podemos, portanto, escrever

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots$$



$figura$ 3.0.1

Esta relação depende apenas do ângulo θ e não dos comprimentos envolvidos. Convém dar um nome para esta função θ assim construída e *definir*, para $0^o < \theta < 90^o$,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = sen\theta,$$

que se lê *seno de θ*

[1]existem uma infinidade de relações que podem surgir apartir destas, entretanto, para mais detalhes, o leitor interessado pode consultar [5], [20] ou [24]

Pode-se, também escrever as relações(que dependem apenas do ângulo θ)

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \cdots$$

.
Defini-se então as funções, para $0^o < \theta < 90^o$,

$$cos\theta = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}, \quad tg\theta = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}},$$

que se chamam *cosseno* de θ e *tangente* de θ, respectivamente. Estas funções são chamadas *funções trigonométricas* e não são independentes. Duas relações aparecem naturalmente:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1^2$$

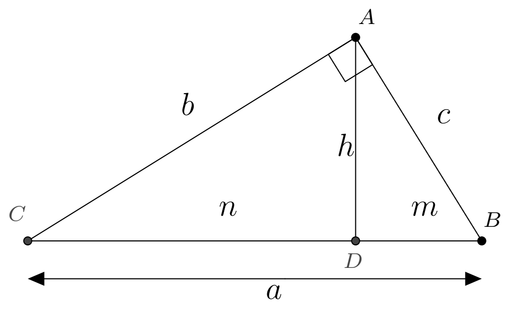
e

$$tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}.$$

Fica a cargo do leitor demonstrá-las.

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Considerando um triângulo ABC, retângulo em A, e conduzindo $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{BC}$, com D em $\overline{BC}$, vamos caracterizar os elementos seguintes:



$\overline{BC} = a$:hipotenusa,
$\overline{AC} = b$:cateto,
$\overline{AB} = c$:cateto,
$\overline{BD} = m$: projeção do cateto c sobre a hipotenusa,
$\overline{CD} = n$:projeção do cateto b sobre a hipotenusa,
$\overline{AD} = h$:altura relativa à hipotenusa.
Note que, para simplificar, confundimos um segmento com a sua medida. Assim, dizemos que a é a hipotenusa, podendo ser entendido que a é a *medida* da hipotenusa.

---
[2] $sen^2\theta$ $significa$ $(sen\theta)^2$, a fórmula será chamada de relação fundamental

Com base nos triângulos(semelhantes) indicados abaixo e com os elementos já caracterizados, temos as seguintes relações:

(1) $b^2 = a.n$ (2) $c^2 = a.m$ (3) $h^2 = m.n$ (4) $b.c = a.h$ (5) $b.h = c.n$ (6) $c.h = b.m$

Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos

Para verificar o teorema, basta somar as equações (1) + (2), do seguinte modo:

$$b^2 + c^2 = a.n + a.m$$
$$b^2 + c^2 = a(m + n),$$

como $m + n = a$, segue que

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Assim foi finalizado a fundamentação teórica básica para o bom entendimento das teorias que serão inseridas na temática do trabalho, vale resaltar que o conhecimento matemático é cumulativo, desta forma, pode-se precisar de outras ferramentas matemáticas, não disponíveis neste ensaio, tendo em vista que a inserção de muito conteúdo fundamental foge da proposta do trabalho.

Capítulo 4

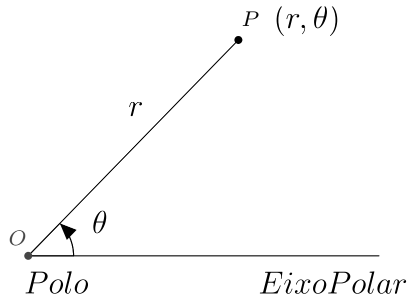
Sistema de Coordenadas Polares

Até aqui, especifica-se a localização de um ponto no plano através de suas coordenadas relativas a dois eixos perpendiculares, as coordenadas cartesianas. Porém, em algumas situações a trajetória de uma partícula fica melhor descrita por sua direção angular e sua distância de um ponto fixo. Há outros sistemas de coordenadas que dão a posição de um ponto em um plano. Neste capítulo será descrito um sistema de coordenadas introduzido por Newton, o **sistema de coordenadas polares**, que é mais conveniente para muitos propósitos.

Do exposto no capítulo 1, seção 1.1, hoje em dia os pontos são geralmente descritos por meio de pares ordenados (x, y) num sistema cartesiano, onde x indica a distância ao eixo vertical e y a distância ao eixo horizontal. Entretanto, o sistema de coordenadas polares é um outro dispositivo que será utilizado para localizar pontos no plano e, consequentemente, representar lugares geométricos através de equações. Para certos tipos de curvas, todavia, uma forma mais conveniente e útil de representar é a das coordenadas polares, um dos principais fatores que justificam a introdução desse sistema de coordenadas se deve ao fato de que alguns lugares geométricos neste sistema possuem equações mais simples do que em coordenadas cartesianas. Deve-se deixar claro ao leitor que o estudo que será feito nesse capítulo não tem a pretenção de mostrar toda a Geometria Analítica do Ensino Médio em coordenadas polares, tais abordagens poderão ser feitas facilmente pelo leitor após a leitura deste ensaio.

4.1 Coordenadas Polares

Um **sistema de coordenadas polares** num plano consiste de um ponto fixo O, chamado de **pólo**(ou **origem**) e de um raio que parte do pólo, chamado **eixo polar**. Num tal sistema de coordenadas, pode-se associar a cada ponto P no plano um par de **coordeandas polares** (r, θ), onde θ é o ângulo entre o eixo polar e o raio OP(normalmente medido em radianos) e r é a distância de P ao pólo(figura 4.0.1).



$figura$ 4.0.1

O número r é chamado de **coordenada radial** de P enquanto que θ é a **coordenada angular**(ou **ângulo polar**) de P. Na figura abaixo, os pontos $(6, 45°), (5, 120°)$, $(3, 225°)$ e $(4, 330°)$ estão plotados num sistema de coordenadas polares. Se P for o pólo, então $r = 0$, mas nesse caso não há uma definição clara do ângulo polar. Cabe convencionar que qualquer ângulo possa ser usado nesse caso, isto é, $(0, \theta)$ são as coordenadas polares do pólo para qualquer escolha de θ . As coordenadas polares de um ponto não são únicas. Por exemplo, as coordenadas polares $(1, 315°), (1, -45°)$ e $(1, 675°)$ representam todas o mesmo ponto(figura abaixo). Em geral, se um ponto P tiver coordenadas polares (r, θ), então

$$(r, \theta + n.360°) \;\; e \;\; (r, \theta - n.360°)$$

também são coordenadas polares de P, para todo n inteiro não-negativo. Assim, todo ponto tem uma infinidade de coordenadas polares[1].

[1]Note que a recíproca não é verdadeira. Um ponto P(r, θ) em coordenadas polares determina um único ponto no plano cartesiano

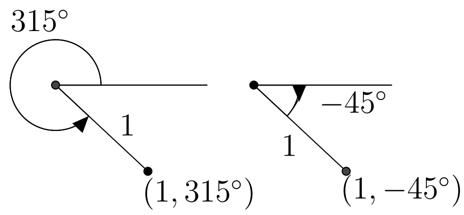


figura 4.0.2

Conforme definido acima,a coordenada radial r de um ponto P é não-negativa, pois representa a distância de P ao pólo. No entanto, seria conveniente que r pudesse ser negativo. Para motivar a definição apropriada, seja P o ponto com coordenadas polares $(3, 225°)$. De acordo a figura 4.0.3, podemos atingir esse ponto rodando o eixo polar por um ângulo de 225° e movendo-se 3 unidades a partir do pólo ao longo da extensão do lado final. Isso sugere que o ponto $(3, 225°)$ também possa ser denotado por $(-3, 45°)$, onde o sinal menos indica está sobre a extensão do lado final do ângulo em vez de estar no próprio lado final do ângulo. Em geral, o lado final de um ângulo de $\theta + 180°$ é a extensão do lado final de θ, portanto definimos as coordenadas radiais negativas convencionando que

$$(-r, \theta) \;\; e \;\; (r, \theta + 180°)$$

são coordenadas polares do mesmo ponto.

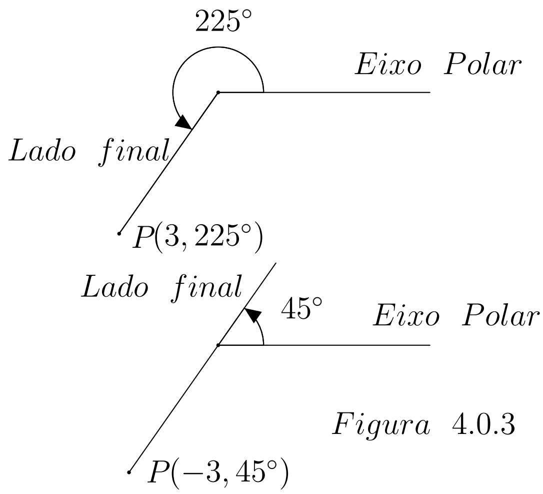
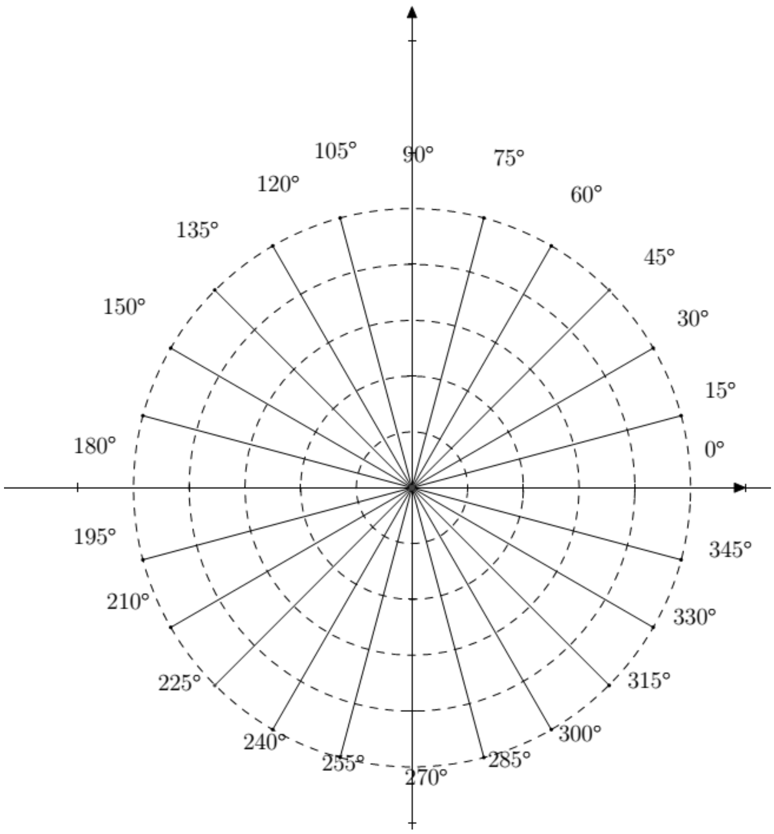


Figura 4.0.3

Exercício Proposto

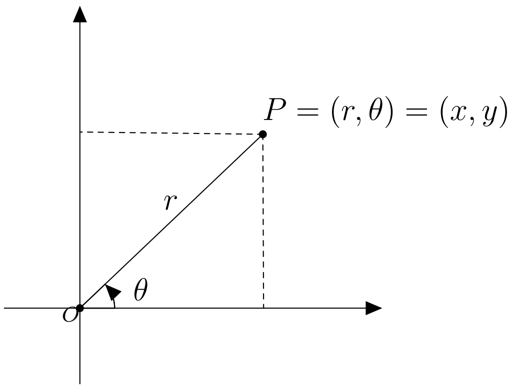
1.1 Utilizando o sistema de coordenadas polares abaixo, posicione os seguintes pontos no plano dadas as suas coordenadas:

a) $A(2, \frac{\pi}{3})$,
b) $B(-3, \frac{\pi}{2})$,
c) $C(-5, \frac{3\pi}{4}$,
d) $D(4, -\frac{\pi}{3})$
e) $E(-2, 315°)$



4.2 Relação Entre Coordenadas Polares e Retangulares

Agora fazendo coincidir as origens e os Ox e polar dos sistemas de coordenadas cartesiano e polar, respectivamente. Com essa sobreposição dos sistemas, cada ponto P terá coordenadas retangulares(x, y) bem como coordenadas polares (r, θ). De acordo com a figura abaixo tem-se:



Logo, das relações trigonométricas:

$$\begin{cases} x = r.cos(\theta) \\ y = r.sen(\theta) \end{cases}$$

Como $x^2 + y^2 = r^2$, tem-se que:

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}, \quad cos(\theta) = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

,

$$tg(\theta) = \frac{y}{x} \quad ou \quad \theta = arctg\frac{y}{x}, \quad sen(\theta) = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Exercício Proposto
1.1 Determinar as coordenadas cartesianas do ponto P cujas coordenadas polares são:
(a) $(2, arctg(\frac{1}{2}))$ (b) $(4, \frac{2\pi}{3})$

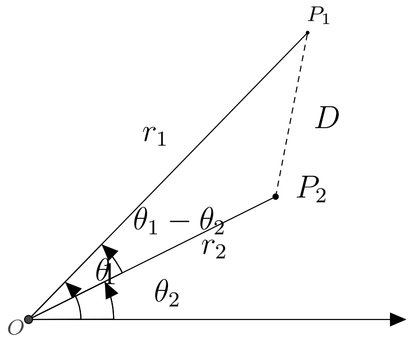
4.3 Distância entre Dois Pontos em Coordenadas Polares

Sejam $P_1(r_1, \theta_1)$ e $P_2(r_2, \theta_2)$ dois pontos do plano expresso em coordenadas polares. Observe, na figura abaixo, que a distância(D) entre eles é consequência imediata da lei dos cossenos. De fato, no triângulo $\triangle OP_1P_2$, obtem-se:

$$D^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2cos(\theta_1 - \theta_2),$$

Logo

$$D = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2cos(\theta_1 - \theta_2)}$$



Exercícios Propostos

1.1 Classifique, quanto ao lados, o triangulo de vértices $P_1(3, \frac{\pi}{6}),\ \ P_2(7, \frac{\pi}{3})\ \ e\ \ P_3(3, \frac{\pi}{2})$

4.4 Equação Polar da Reta

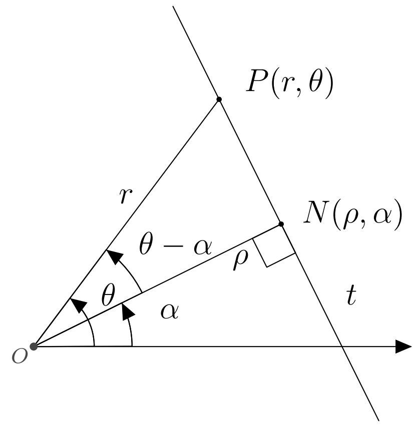
A necessidade de trabalharmos com equações polares de retas, apesar da simplicidade das equações destas na forma cartesiana, é evidente quando a reta está associada a problemas com outras curvas, por exemplo, a interseção de curvas. Destacamos sempre que o objetivo de utilizar coordenadas polares é o fato de que as equações envolvidas serem mais simples na resolução de problemas como destacaremos nos exercícios. A obtenção das equações polares das retas será feita de duas formas distintas, obtendo a equação da reta que passa não passa pelo pólo e, em seguida, a que passa pelo pólo.

4.5 Equação Polar da Reta que não Passa pelo Pólo

Consideremos inicialmente uma reta t que não passa pelo pólo e tomemos os pontos $P(r, \theta)$ qualquer e $N(\rho, \alpha)$ de modo que o triângulo ONP seja retângulo em N. Portanto,

$$cos(\theta - \alpha) = \frac{\rho}{r}$$

$$\rho = r.cos(\theta - \alpha)$$



4.6 Equação Polar da Reta que Passa pelo Pólo

A reta que passa pelo pólo é o lugar geométrico dos pontos $P(r,\theta)$ cujo ângulo θ será constante, ou seja, $\theta = \alpha$, ou ainda, $\theta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4.7 Caso Particulares de Retas

Reta Paralela ao Eixo Polar Uma reta paralela ao eixo polar possui o ângulo VETORIAL côngruo a $\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\rho = r.cos(\rho - \frac{\pi}{2} - k\pi) = r.cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = r.sen(\theta).$$

Reta Perpendicular ao Eixo Polar Uma reta perpendicular ao eixo polar possui o ângulo VETORIAL côngruo a $k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. Portanto,

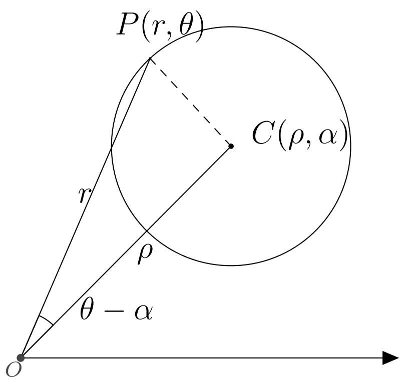
$$\rho = r.cos(\theta - k\pi) = r.cos(\theta).$$

Exercício Proposto
1.1 Transforme as equações das retas, dadas em sua forma polar, em sua forma cartesiana.
$(a)\frac{1}{r} = \frac{1}{4}cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{4}sen(\theta); \quad (b) \quad 2 = r.sen(\theta)$

4.8 Equação Polar da Circunferência

Circunferência de centro $C(\rho, \quad \alpha)$ e raio R é o conjunto dos pontos do plano $P(r,\theta)$ que distam R de C, logo temos: $d(C,P) = R$. Desenvolvendo esta igualdade obtemos:

$$r^2 - 2\rho.r.cos(\theta - \alpha) + \rho^2 - R^2 = 0(EquaCAo \;\; Polar \;\; da \;\; circunferEncia)$$



Exercício Proposto
1.1 Qual a medida do raio e as coordenadas do centro da circunferência $r^2 - 4.r.cos(\theta - \frac{5\pi}{6}) = 5$?

4.9 Simetrias

Dois pontos P e P' são *simétricos* em relação a um conjunto K se a diatância entre K e os pontos P e P' são iguais. Dentre as simetrias existentes, destacamos as simetrias central e axial, onde os conjuntos K são um ponto e uma reta, respectivamente.

4.9.1 Simetria em Relação ao Eixo Polar

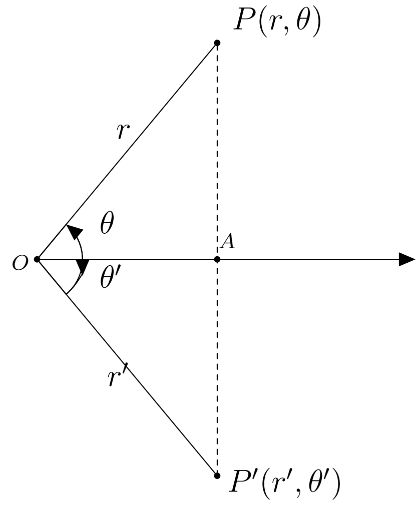
Dado um ponto $P(r, \theta)$, o seu simétrico em relação ao eixo polar é o ponto $P'(r', \theta')$ se, e somente se,

$$r'.r > 0 \ \ e \ \ \theta' + \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$r'.r < 0 \ \ e \ \ \theta' + \theta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Geralmente, pode-se limitar a trabalhar com:



(r,θ) é simétrico a $(r,-\theta)$ *ou a* $(-r,\pi-\theta)$

4.9.2 Simetria em Relação ao Eixo a $\frac{\pi}{2}$rad

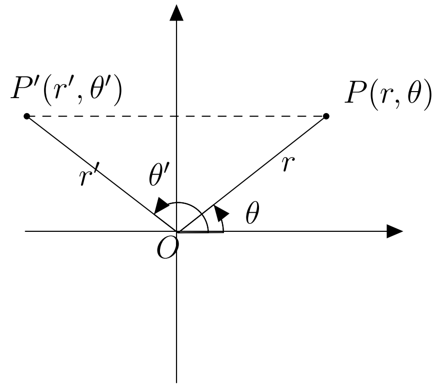
Dado um ponto $P(r,\theta)$, o seu simétrico em relação ao eixo $\frac{\pi}{2}$rad é o ponto $P'(r',\theta')$se, e somente se,

$$r'.r > 0 \;\; e \;\; \theta' + \theta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$r'.r < 0 \;\; e \;\; \theta' + \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Geralmente, podemos nos limitar a trabalhar com:



(r,θ) é simétrico a $(-r,-\theta)$ *ou a*$(r,\pi-\theta)$

4.9.3 Simetria em Relação ao Pólo

Dado um ponto $P(r,\theta)$, o seu simétrico em relação ao polo é o ponto $P'(r',\theta')$ se, e somente se,

$$r'.r > 0 \ \ e \ \ \theta' - \theta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$r'.r < 0 \ \ e \ \ \theta' - \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Geralmente, pode-se limitar a trabalhar com:
(r,θ) é simétrico a $(r, \pi+\theta)$ *ou a* $(-r,\theta)$
Exercício Proposto
Determine as coordenadas polares dos pontos P' simétricos de $P(2, \frac{\pi}{3})$ em relação ao eixo polar, ao eixo a 90° e ao polo, respectivamente.

4.10 Traçado de Curvas em Coordenadas Polares

O objetivo deste tópico será o traçado de curvas simples, estudadas no Ensino Médio(tais como elipses, parábolas, hipérboles e circunferências) e curvas novas,que não são aplicadas no Ensino Médio(tais como limaços, cardióides, rosáceas). O processo de construção de curvas em coordenadas polares consiste das seguintes etapas:

1. Determinar as interseções com o eixo polar e o eixo a 90°
   -Eixo Polar: fazemos $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$;
   -Eixo a 90°: fazemos $\theta = n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ e ímpar;
   -Pólo: fazemos $r = 0$ na equação da curva para obter θ.

2. Determinar a simetria do lugar geométrico
   -Uma curva é simétrica em relação ao eixo polar se obtemos uma equação equivalente à curva dada, por pelo menos uma das seguintes substituições:

   $$\theta \ \ por \ \ -\theta \ \ ou \ \ ainda, \ \ -\theta \ \ por \ \ \pi - \theta \ \ e \ \ r \ \ por \ \ -r$$

   - Uma curva é simétrica em relação ao 90° se obtemos uma equação equivalente à curva dada, por pelo menos uma das seguintes substituições:

   $$\theta \ \ por \ \ \pi - \theta \ \ ou, \ \ ainda, \ \ \theta \ \ por - \theta \ \ e \ \ r \ \ por \ \ -r$$

   -Uma curva é simétrica em relação ao pólo se obtemos uma equação equivalente à curva dada, por pelo menos uma das seguintes substituições:

   $$\theta \ \ por \ \ \pi + \theta \ \ ou, \ \ ainda, \ \ r \ \ por - r$$

3. A extensão do lugar geométrico: estudamos aqui o intervalo de variação de r na equação dada.

4. O cálculo das coordenadas de um número suficiente de pontos a fim de se obter um gráfico adequado.

5. O desenho do lugar geométrico.

6. Transformar a equação dada em sua forma polar em sua forma retangular. **Exemplo** Traçar o gráfico da curva $C : r = 1 + 2cos(\theta)$

Solução:
1. Interseções com o eixo polar e o eixo a 90°
-Eixo Polar: fazemos $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z} : r = 1 + 2cos(n\pi)$

n	$\theta = n\pi$	r	(r, θ)
0	0	$1 + 2cos(0) = 3$	$(3, 0)$
1	π	$1 + 2cos(\pi) = -1$	$(-1, \pi)$
2	2π	$1 + 2cos(2\pi) = 3$	$(3, 2\pi)$

-Eixo a 90°: fazemos $\theta = n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ e ímpar

n	$\theta = n\frac{\pi}{2}$	r	(r, θ)
1	$\frac{\pi}{2}$	$1 = 1$	$(1, \frac{\pi}{2})$
3	$3\frac{\pi}{2}$	$1 = 1$	$(1, 3\frac{\pi}{2})$
5	$5\frac{\pi}{2}$	$1 = 1$	$(1, 5\frac{\pi}{2})$

Perceba que o processo de substituição é finito, uma vez que os pares $(3, 0)$ e $(3, 2\pi)$(no primeiro caso) representam, no sistema de coordenadas polares, o mesmo ponto, e os pares $(1, \frac{\pi}{2})$ e $(1, 5\frac{\pi}{2})$(no segundo) representam o mesmo ponto.
-Pólo: fazemos $r - 0$ na equação da curva para obter θ.

$$0 = 1 + 2cos(\theta) \Leftrightarrow cos(\theta) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

2.Determinar a simetria do lugar geométrico:
-Simetria em relação ao eixo polar: substituimos θ por $-\theta$:

$$r = 1 + 2cos(-\theta) \Leftrightarrow r = 1 + 2cos(\theta).$$

Com a equação obtida é equivalente à da curva C, a curva é simétrica em relação ao eixo polar.
-Simetria em relação ao eixo a 90° :
substituimos θ por $-\theta$ e r por $-r$;

$$-r = 1 + 2cos(-\theta) \Leftrightarrow r = -1 - 2cos(\theta).$$

Como a equação obtida não é equivalente à da curva C, não existe simetria em relação ao eixo a 90°. -Simetria em relação ao pólo: substituímos r por $-r$;

$$-r = 1 + 2cos(\theta) \Leftrightarrow r = -1 - 2cos(\theta).$$

Novamente, a equação obtida não é equivalente à da curva C. Portanto, não existe simetria em relação ao pólo.
3. A extensão do lugar geométrico:

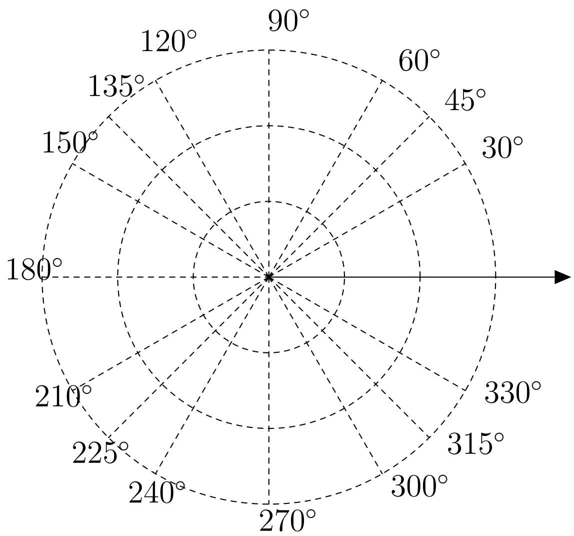
$$-1 \leq cos(\theta) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2cos(\theta) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 1 + 2cos(\theta) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq r \leq 3$$

Logo, a curva C possui extensão limitada.
4. O cálculo das coordenadas de um número suficiente de pontos a fim de se

obter um gráfico adequado:

θ	r
$\frac{\pi}{6}$	$1+\frac{2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$1+\frac{2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$1+2\frac{1}{2}=2$
$\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$	$1-\frac{2\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}$
$\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$	$1-\frac{2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$
$\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$	$1-2\frac{1}{2}=0$

5. Marcação dos pontos no sistema de coordenadas polares:



6. Transformar a equação dada em sua forma polar em sua forma retangular:

$$r=1+2cos(\theta)\Leftrightarrow r^2=r+2rcos(\theta)\Leftrightarrow r^2-2rcos(\theta)=r$$

$$\Leftrightarrow (r^2-2rcos(\theta))^2=r^2\Leftrightarrow (x^2+y^2-2x)^2=x^2+y^2$$

Exercicio Proposto
Traçar o gráfico da curva $C: r=2(1-cos(\theta))$

4.11 Curvas Notáveis em Coordenadas Polares

O presente tópico mostrará algumas curvas, tais como, limaços, rosáceas, lemniscatas. O objetivo aqui é apenas mostrar uma breve introdução do tema(visualização gráfica), deixando ao professor uma possível abordagem lúdica, utilizando para isso o espirógrafo. [2]
Dentre as curvas notáveis destacamos as *Limaçons*, que podem ser do tipo: cardióides, limaços sem laço e com laço. Suas equações polares, com $a\in\mathbb{R}^*$ e $b\in\mathbb{R}^*_+$, restringem-se a:

$$r=a\pm b.cos(\theta)\ \ e\ \ r=a\pm b.sen(\theta)$$

[2]Espirógrafo é um produto registrado da Hasbro, um brinquedo para desenho geométrico. O espirógrafo produz curvas matemáticas conhecidas como hipotroclóides e epitroclóides.

Observa-se que na primeira equação existe simetria em relação ao eixo polar, enquanto que na segunda a simetria se dá em relação ao eixo a 90° Segue os exemplos gráficos:
Cardióide ($\mid a \mid = b$)

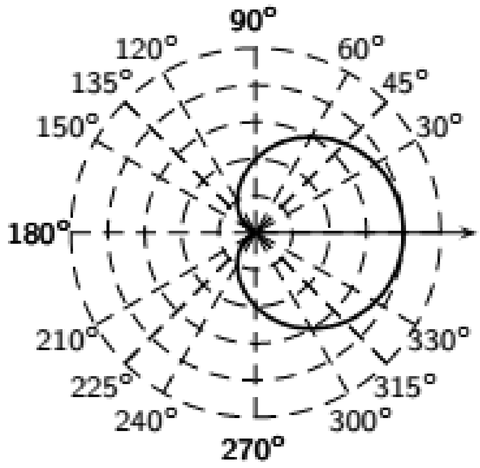


Figura 4.1: Cardióide

Limaçon sem Laço ($\mid a \mid > b$)

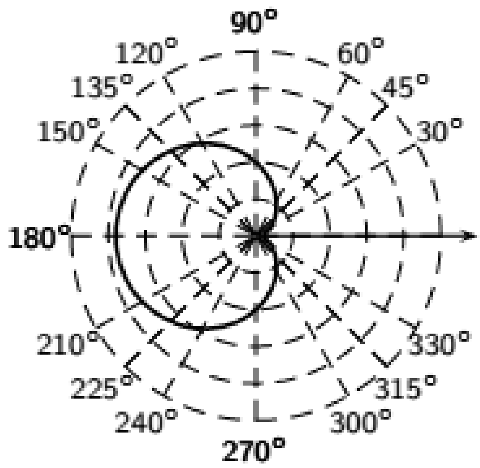


Figura 4.2: Limaçon sem Laço

Limaçon com Laço ($| a |< b$)

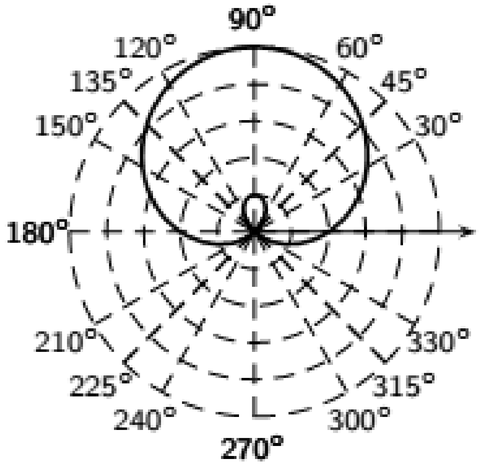


Figura 4.3: Limaçon com Laço

Rosáceas
A equação polar das rosáceas é:

$$r = a.cos(n\theta) \;\; e \;\; r = a.sen(n\theta)$$

com a$\in \mathbb{R}-\{0\}$,$n \in \mathbb{Z}-\{0,\pm\ 1\}$
A quantidade de pétalas é obtida do seguinte fato:
– Se n é par, o número de pétalas da rosácea é dado por: $2.n$; – Se n é ímpar, o número de pétalas da rosácea é dado por:n.

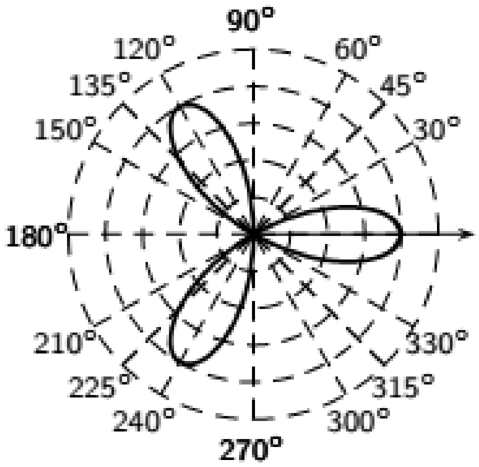


Figura 4.4: Rosácea

Lemniscatas
São curvas cuja equação é do tipo $r^2 = acos(2\theta) \;\; ou \;\; r^2 = asen(2\theta)$, com $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Deve-se observar que se a é positivo, tanto $cos(2\theta)$ quanto $sen(2\theta)$ são

positivos, e se a é negativo, tanto $cos(2\theta)$ quanto $sen(2\theta)$ são negativos, visto que $r^2 > 0$.

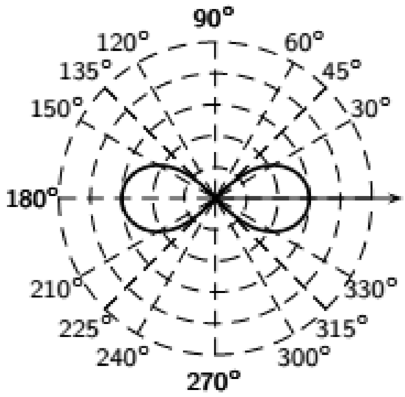


Figura 4.5: Leminicasta

4.12 Seções Cônicas em Coordenadas Polares

Convém analisar agora as curvas fundamentais estudadas no Ensino Médio: Elipses, Parábolas e Hipérboles. Deste modo, faremos uma análise nos baseando no Capítulo 1 deste trabalho.

Proposição 1 Seja s uma reta fixa(**diretriz**) e F um ponto fixo(**foco**) não pertencente a s. O conjunto dos pontos do plano $P = (x, y)$ tais que

$$dist(P, F) = e.dist(P, s),$$

em que $e > 0$ é uma constante fixa, é uma cônica.
(a) Se $e = 1$, então a cônica é uma parábola.
(b) Se $0 < e < 1$, então a cônica é uma elipse.
(c) Se $e > 1$, então a cônica é uma hipérbole.
A equação polar de uma cônica, que não é uma circunferência, assume uma forma simples quando um foco F está no polo e a reta diretriz sé paralela ou perpendicular ao eixo polar. Seja $d = dist(F, s)$. Para deduzir a equação polar das cônicas vamos usar a caracterização dada na Proposição acima.
Como o foco F está no polo, temos que $dist(P, F) = r$, em que (r, θ) são as coordenadas polares de P.
(a)Se a reta diretriz, s, é perpendicular ao eixo polar.

(a.1) Se a reta s está à direita do polo, obtemos que $dist(P, r) = d - rcos(\theta)$.Assim a equação da cônica fica sendo $r = e(d - rcos(\theta))$. Isolando r, temos:

$$r = \frac{d.e}{1 + e.cos(\theta)}.$$

(a.2) Se a reta s está à esquerda do polo, obtemos que $dist(P, s) = d + rcos(\theta)$.Assim a equação da cônica fica sendo, isolando r:

$$r = \frac{d.e}{1 - e.cos(\theta)}.$$

(b)Se a reta diretriz, s, é paralela ao eixo polar.

(b.1) Se a reta s está acima do polo, obtemos que $dist(P, r) = d - r.sen(\theta)$. Assim a equação da cônica fica sendo, isolando r:

$$r = \frac{d.e}{1 + e.sen(\theta)}.$$

(b.2) Se a reta está abaixo do polo, obtemos que $dist(P, r) = d + r.sen(\theta)$. Assim a equação da cônica fica:

$$\frac{d.e}{1 - e.sen(\theta)}$$

Proposição 2 Seja uma cônica com excentricidade $e > 0$(que não é uma circunferência), que tem um foco F no polo e a reta diretriz s é paralela ou perpendicular ou eixo polar, com $d = dist(s, F)$.
(a) Se a reta diretriz correspondente a F é perpendicular ao eixo polar e está **à direita** do polo então a equação polar da cônica é:

$$r = \frac{d.e}{1 + ecos(\theta)}$$

e se está **à esquerda** do polo, então a equação polar da cônica é

$$\frac{d.e}{1 - e.cos(\theta)}$$

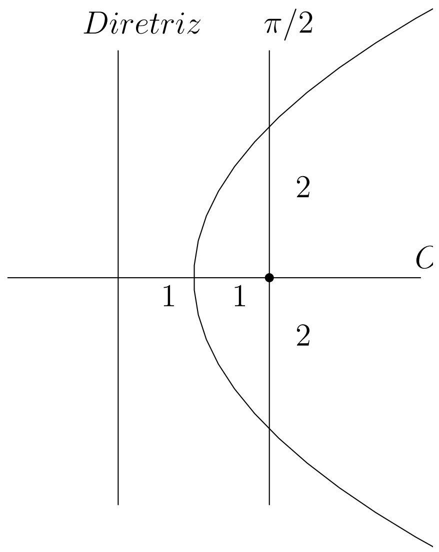
(b)Se a reta diretriz correspondente a F é paralela ao eixo polar e está **acima** do polo, então a equação polar da cônica é

$$r = \frac{d.e}{1 + e.sen(\theta)}$$

e se está **abaixo** do polo, então a equação polar da cônica é

$$r = \frac{d.e}{1 - e.sen(\theta)}$$

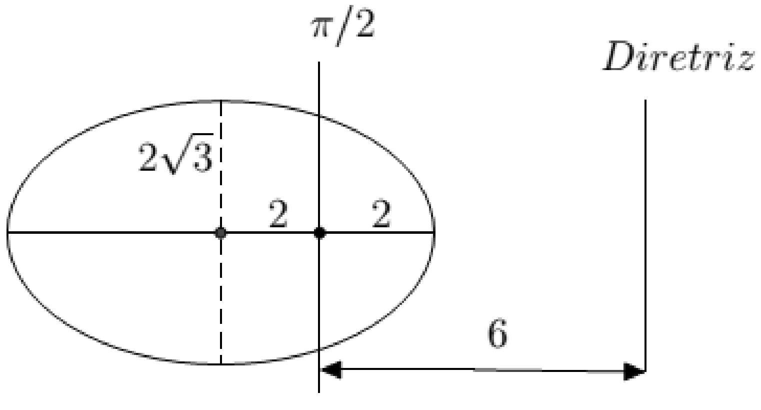
Exemplo
1. Esboce o gráfico de $r = \frac{2}{1 - cos(\theta)}$ em coordenadas polares.
A equação é semelhante a (a.2) com $d = 2$ e $e = 1$. Desse modo, o gráfico é uma parábola com o foco no pólo e a diretriz 2 unidades à esquerda do pólo. Isso nos diz que a parábola abre para a direita ao longo do eixo polar e $p = 1$. Assim, ela é parecida com a parábola esboçada abaixo.



2. Esboce o gráfico de $r = \frac{6}{1+\frac{1}{2}cos(\theta)}$ em coordenadas polares.
Essa equação não representa qualquer uma dos itens das proposições acima, pois, todas requerem um termo constante 1 no denominador. Entretanto, pode-se colocar a equação em uma dessas formas dividindo o numerador e o denominador por 2 para obter:

$$r = \frac{3}{1 + \frac{1}{2}cos(\theta)}$$

Essa equação é idêntica a (a.1) com $d = 6$ e $e = \frac{1}{2}$, portanto o gráfico é uma elipse com a diretriz 6 unidades à direita do pólo(figura abaixo).



Esboco Rudimentar

Por fim, é deixado **ao leitor** a construção do seguinte gráfico em coordenadas polares:

$$r = \frac{2}{1 + 2sen(\theta)}$$

4.13 Interseção de Curvas em Coordenadas Polares

É comum ao resolver problemas matemáticos recair em um sistema de n equações com n incógnitas. Geometricamente, essa solução representa o ponto de interseção das n curvas que cada equação do sistema representa. Utilizando coordenadas cartesianas, a solução de um sistema é encontrado utilizando-se ferramentas estudadas na educação básica. Em coordenadas polares, deve-se ter um pouco mais de cuidado! Um ponto do plano, como foi dito no capítulo 4, seção 4.0.9, possui um número infinito de pares que o localiza. Sendo assim, pode acontecer que um ponto de interseção entre duas curvas, satisfaça uma equação com um par de coordenadas e a uma outra com um outro par de coordenadas. Conseqüentemente, nenhum desses pares será uma solução para o sistema formado pelas equações das curvas envolvidas, ou seja, as coordenadas do ponto de interseção das curvas devem satisfazer a todas as equações do sistema, podendo ocorrer também o fato de que esse procedimento nem sempre produzirá todas as interseções como, pode-se constatar pelas equações:

$$r = 1 - cos(\theta) \;\; e \;\; r = 1 + cos(\theta) \;\; (1)$$

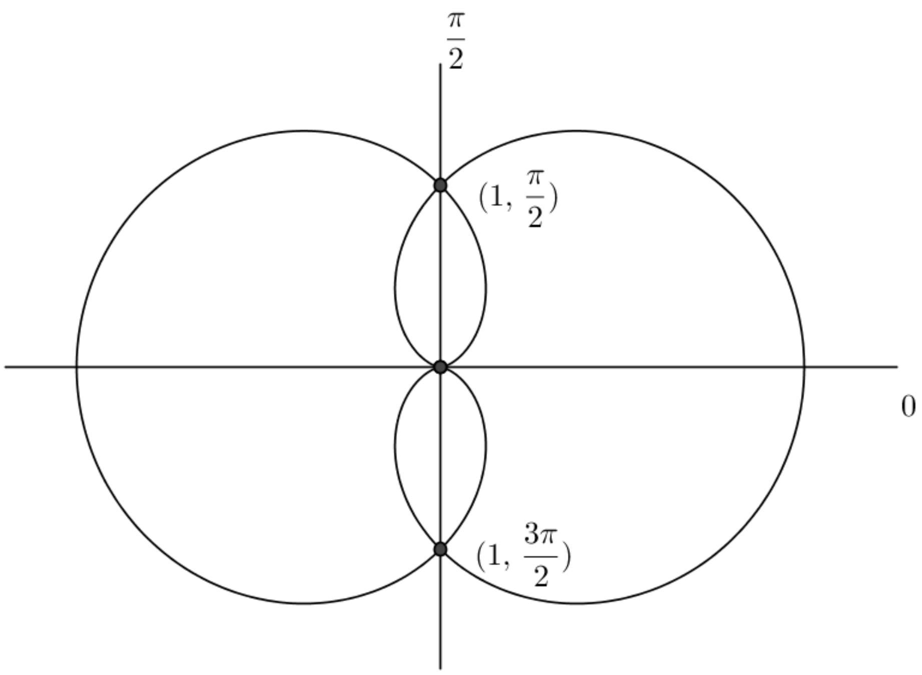


Figura 4.6: Interseção de curvas polares

Essas cardióides se intersectam em três pontos: o pólo, o ponto $(1, \frac{\pi}{2})$ e o ponto $(1, 3\frac{\pi}{2})$ (figura acima). Igualando os lados direitos das equações em (1), obtém-se $1 - cos(\theta) = 1 + cos(\theta)$ ou $cos(\theta) = 0$,de modo que

$$\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Substituindo esses valores em (1) obtém-se $r = 1$, portanto encontramos apenas dois pontos distintos da interseção,$(1, \frac{\pi}{2})$ e $(1, \frac{3\pi}{2})$; o pólo não foi encontrado. Esse problema ocorre porque as duas cardióides passam pelo pólo em diferentes valores de θ: a cardióide $r = 1 - cos(\theta)$ passa no pólo em $\theta = 0$ e a cardióide $r = 1 + cos(\theta)$ passa no pólo em $\theta = \pi$.

Este problema é facilmente contornado se utilizarmos as equações dos conjuntos abrangentes das curvas para formar todos os outros possíveis sistemas através de uma combinação destas equações. As soluções encontradas constituem as coordenadas polares de todos os pontos de interseção das curvas, exceto, possivelmente, o pólo. Deve-se ainda verificar se cada uma dessas curvas passa pelo pólo, determinando-se, por fim, o conjunto de pontos de interseção. O fato de conhecer as curvas e suas propriedades poderá nos fornecer dados que, na maioria das vezes, reduzem a necessidade da resolução de todos os sistemas que podem ser formados com as equações dos conjuntos abrangentes das curvas envolvidas. Primeiro é necessário definir *conjunto abrangente*.

Conjunto Abrangente

Abrangente é o conjunto de todas as equações equivalentes a de uma curva $C : f(r, \theta) = 0$.

Teorema Seja C uma curva definida pela equação $f(r, \theta) = 0$. Então as equações polares da forma $f[(-1)^k.r, \theta + k\pi] = 0, k \in \mathbb{Z}$, são equivalentes à equação $f(r, \theta) = 0$.

Desta forma, seja C uma curva definida pela equação $f(r, \theta) = 0$, o conjunto abrangente associada à equação $f(r, \theta) = 0$ ou o conjunto abrangente da curva $C : f(r, \theta) = 0$, é dado por

$$E(C) = \{f[(-1)^k.r, \theta + k\pi] = 0; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Desta forma, dada duas curvas $C_1 : f(r, \theta)$, $C_2 : g(r, \theta)$ podemos obter os pontos de intersecção se:

1. Determinar o conjunto abrangente de uma das curvas.
2. Resolver todos os sistemas formados por uma das equações fixadas e cada uma das equações do conjunto abrangente.
3. Verificar se o pólo está na interseção.

Exemplo

Determinar o conjunto dos pontos de interseção das curvas $C_1 : r = 4cos(2\theta)$ e $C_2 : r = 2$

Consideremos os conjuntos $E(C_1) = \{r = 4cos(2\theta), r = -4cos(2\theta)\}$ e $E(C_2) = \{r = 2, r = -2\}$, abrangentes de C_1 e de C_2, respectivamente. Os possíveis sistemas de equações e suas soluções são:

$$S_1 = \begin{cases} r = 4cos(2\theta) \\ r = 2 \end{cases}$$

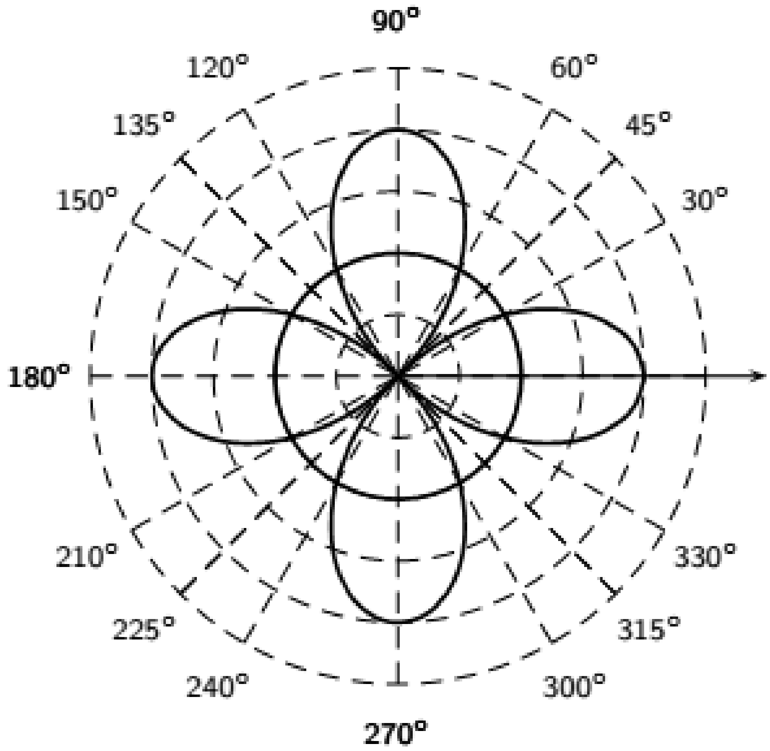
Por substituição, $4cos(2\theta) = 2$, ou seja, $cos(2\theta) = \frac{1}{2}$. Segue que, $2\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $2\theta = -\frac{\pi}{3}$, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{6}$. Logo, temos os pontos $P_1(2, \frac{\pi}{6})$ e $P_2(2, -\frac{\pi}{6})$.

$$S_2 = \begin{cases} r = 4cos(2\theta) \\ r = -2 \end{cases} \quad S_3 = \begin{cases} r = -4cos(2\theta) \\ r = 2 \end{cases} \quad S_4 = \begin{cases} r = -4cos(2\theta) \\ r = -2 \end{cases}$$

De modo análogo, obtemos as soluções $P_3(-2, \frac{\pi}{3})$ e $P_4(-2, \frac{2\pi}{3})$, $P_5(2, \frac{\pi}{3})e$ $P_6(2, \frac{2\pi}{3})$, $P_7(-2, \frac{\pi}{6})$ e $P_8(-2, \frac{\pi}{6})$ dos sistemas S_2, S_3 e S_4, respectivamente.
O pólo não pertence ao conjunto solução do sistema S, visto que a curva $C : r = 2$, não passa pelo pólo. Assim, o conjunto solução do sistema I é:

$$I = \{P_1(2, \frac{\pi}{6}),\ P_2(2, -\frac{\pi}{6}),\ P_3(-2, \frac{\pi}{3}),\ P_4(-2, \frac{2\pi}{3}),\ P_5(2, \frac{\pi}{3}),\ P_6(2, \frac{2\pi}{3}),\ P_7(-2, \frac{\pi}{6}),$$

$P_8(-2, \frac{\pi}{6})\}$
A figura abaixo mostra as duas curvas com as respectivas interseções



Exercício Proposto
Encontrar os pontos de interseção das curvas $C_3 : 4 - 6sen(2\theta)$ e $C_4 : \theta = -\frac{\pi}{6}$

Capítulo 5

Da Proposta

5.1 Referencial Curricular do Ensino Médio

Embora a proposta aqui apresentada seja a nível nacional, coube-se analizar tanto as diretrizes curriculares nacionais como o referencial curricular do ensino médio do Estado do Maranhão, produzido pela Secretaria de Estado da Educação(SEDUC).Tal documento tem por objetivo orientar o processo de ensino-aprendizagem das escolas públicas estaduais, formando integralmente o educando para o exercício da cidadania.

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais,(BRASIL,2006), o ensino das Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, de maneira geral, deve possibilitar ao aluno, no Ensino Médio:

-Reconhecer que a construção do conhecimento científico envolve valores humanos e relaciona-se com a tecnologia e com toda a vida em sociedade, propiciando o convívio harmônico entre as pessoas.

- Enfatizar a organicidade das teorias científicas e compreender a função essencial do diálogo e da interação social na produção coletiva.

- Estimular a efetiva participação e responsabilidade social do educando, promovendo ações críticas na realidade em que vive, desde a difusão de conhecimento a ações e intervenções significativas, capacitando-o a aplicar o conhecimento adquirido em qualquer ramo da vida cotidiana.

5.2 Princípios Educacionais em relação à Matemática

Os mais diversos conhecimentos humanos sofrem influência da matemática, pois cada um tem uma ferramenta a construir, medições a serem feitas e análise gráfica a realizar.

A matemática, atravéz dos elementos abstratos que desenvolve, deve orientar o educando para a criatividade, curiosidade e crítica, sempre fazendo questionamentos permanentes assim como outro ramo do conhecimento. Apesar da abstração da matemática ela é capaz de fornecer técnicas que visam explicar, conhecer e representar fatos da natureza, portanto, o aluno deve criar hipóteses, fazer conjecturar, investigar e compreender o mundo real.

O ensino da Matemática no Ensino Médio deve ser significativo, real e produtivo de modo a atender as necessidades do aluno, bem como as finalidades definidas nas Diretrizes Curriculares Nacionais e nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio a seguir relacionados(BRASIL, 2006).
- Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam ao aluno desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral.
- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas.
- Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade.
- Desenvolver a capacidade de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo.
- Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos.
- Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática.
- Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo.
- Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações.
- Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes, de autonomia e cooperação.

Desta forma, a aprendizagem da matemática deve atender às necessidades reais do estudante de maneira a prepará-lo para o exercício da cidadania e para o mundo do trabalho.

5.3 A Matriz Curricular do Ensino Médio

Antes de lançarmos formalmente a proposta de inserção das coordenadas polares no ensino médio, será feita uma pequena análise da matriz curricular do ensino médio da disciplina matemática, com o intuito de verificar em qual momento o referido assunto pode ser tratado dentro da estrutura curricular. No entanto, vamos nos ater a uma tabela em específico, a tabela seguinte mostra as Diretrizes Curriculares de Matemática do Ensino Médio(Maranhão), feito pela equipe técnica da SEDUC−MA:

23. ÁREA DO CONHECIMENTO: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS -DISCIPLINA: MATEMÁTICA

O QUE SE ESPERA AO FINAL DA ETAPA	O QUE DEVERÁ SER APRENDIDO	O QUE DEVERÁ SER ENSINADO	COMO DEVERÁ SER ENSINADO	O QUE DEVERÁ SER AVALIADO
Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. **Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela;**	Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais e os padrões numéricos ou princípios de contagem. Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos. Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.	Conhecimentos numéricos – operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.	Na exploração de cada centro de interesse, uma estratégia muito fecunda é a via da problematizarão, da formulação e do equacionamento de problemas, da tradução de perguntas formuladas em diferentes contextos em equações a serem resolvidas;	Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas Avaliar conhecimentos significativos nas operações em conjuntos numéricos em diferentes contextos do cotidiano do aluno.
Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano;	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma. Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano. Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.	Conhecimentos geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais;grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.	Muito além dos problemas estereotipados em que a solução consiste em construir procedimentos para usar os dados e com eles chegar aos pedidos, os problemas constituem, em cada situação concreta, um poderoso exercício da capacidade de inserir e de argumentar	Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente. Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.
Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade , média de tendência central para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.	Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos. Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade. Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.	Conhecimentos de estatística e probabilidade – representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.	Aplicar problemas que envolvem situações de otimização de recursos em diferentes contextos, de medida central	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade. Média de tendência central com vista numa nova leitura de mundo.
Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação;	Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas. Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos. Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação. e informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.	Conhecimentos algébricos – gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus,polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.	Aplicar problemas considerando situações práticas do dia a dia; centro de interesse e análise dos resultados.	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.
Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística. Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. **Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou**	Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos. Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos. Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade. Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação. Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas. Resolver situação-	Conhecimentos algébricos/geométricos – plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.	Problematizar situações práticas do cotidiano nas resoluções algébra no contexto da vivencia do aluno Procurar, em cada problema, não apenas uma solução, mas sim a melhor solução, para minimizar os custos ou maximizar os retomos, por exemplo, pode constituir um atrativo a mais na busca de contextualização dos conteúdos estudados.	Avaliar a aquisição do conhecimento adquirido visando sua aplicabilidade no dia a dia de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas e outros assuntos de matemática.

5.4 A Proposta

Diante do ensaio realizado, faz-se necessário indicar a metodologia e o momento de inserção do tema proposto na estrutura curricular da educação básica, destacando que, como se trata de um tema novo, e como foi observado, utiliza-se bastantes ferramentas trigonométricas, desta forma, após a análise da matriz curricular do ensino médio e toda a construção feita neste trabalho, e levando-se em consideração também a experiência docente considera-se a seguinte proposta de inserção do tema coordenadas polares no ensino médio:
1. Inserir o tema Coordenadas Polares no Terceiro Ano do Ensino Médio.
Tendo em vista da necessidade de várias ferramentas matemáticas, principalmente trigonometria, o tema proposto deve ser estudado apenas no terceiro ano do ensino médio, pois o aluno está mais maduro e pode utilizar diversas identidades matemáticas.
2. Deve-se dar a noção introdutória das coordenadas polares após o estudo completo da geometria analítica.
O aluno deve estar familiarizado já com todo o ferramental matemático disponível nos livros didáticos. 3. Destacar a forma polar de retas e cônicas.
Após o estudo sistematizado desses conteúdos, é possível fazer a tranformação de coordenadas cartesianas para coordenadas polares de retas e cônicas.
4. Destacar novas curvas planas. Se necessário, e houver tempo disponível, o professor pode levar ao conhecimento dos alunos curvas planas como, cardióides, rosáceas, limaçon, lemniscatas, podendo utilizar, de maneira lúdica, o uso do espirógrafo.

5.5 O Plano de Aula

Será mostrado a seguir um modelo de plano de aula que o professor pode aplicar em sala de aula, de acordo com a metodologia proposta neste ensaio:

PLANO DE AULA

Área de conhecimento: Matemática **Data**:

Professor: Anderson Henrique Costa Barros **Horário**:

Nível: Ensino Médio **Duração**: 50 minutos

INSTITUIÇÃO: Universidade Federal do Maranhão(UFMA)

PROGRAMA: Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT

Tema:

1. INTRODUÇÃO ÀS COORDENADAS POLARES

Conteúdo Programático da Aula:

1.1 Localização de um Ponto;

1.2 Transformação entre coordenadas cartesianas e polares;

Objetivos específicos (o que o aluno, ao término da aula, deverá ter aprendido)

- Identificar um ponto no sistema de coordenada polar
- Aplicar o conceito de coordenada polar na resolução de problemas.
- Transformar qualquer equação na sua forma cartesiana para a polar.

Procedimentos metodológicos

Será dada a definição de coordenadas polares, caracterizando o eixo polar e o pólo e toda sua estruturação no plano, em seguida será mostrado como se localiza um ponto neste plano. Após a introdução será mostrado a transformação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares. Todos esses conceitos serão fixados mediante a resolução de exemplos.

Recursos didáticos

- Quadro branco ou verde;
- Pincéis ou giz;
- Folha de atividade.

Procedimentos avaliativos

A avaliação dar-se-á através dos questionamentos levantados pelos alunos no decorrer da atividade realizada em sala de aula e por meio das resoluções das atividades propostas.

Pelo exposto acima, a avaliação proposta é, evidentemente, a formativa, mais preocupada, portanto, com os processos da aprendizagem do que exclusivamente com o produto.

REFERÊNCIAS:

[1] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. *Cálculo*. tradução: Claus Ivo Doering,vol.2, 8.ed., Porto Alegre: Bookman, 2007.

Atividade de verificação de aprendizagem:

a) Encontre as coordenadas retangulares do ponto P cujas coordenadas polares são $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$
b) Determinar a equação polar do lugar geométrico cuja equação retangular é 6,$y = 1 - 2x$

São Luís, Abril de 2014.

Anderson Henrique Costa Barros

Capítulo 6

Considerações Finais

No presente trabalho foi possível mostrar a importância das Coordenadas Polares no ensino médio, tendo em vista que o assunto é *transdisciplinar*, se utilizando de diversas ferramentas matemáticas. Embora o assunto seja estudado apenas em nível superior, o tema proposto é perfeitamente ajustável ao ensino médio, surgindo como um facilitador na construção de gráficos e na resolução de problemas geométricos.
A inserção de um assunto inovador no currículo do ensino médio deve ser encarado com cautela, tudo que é novo causa estranhesa e não é muito agradável aos olhos da maioria dos discentes. Cabe ressaltar que o ensino tradicionalista da geometria analítica não deve ser abandonado pelo professor, deixando claro ao aluno a maneira formal de escrever conceitos e definições.
Este trabalho também destaca a importância da utilização do *software Geogebra* em sala de aula, não apenas com o tema proposto, mas com praticamente qualquer conteúdo matemático. Com o desenvolvimento tecnológico é cada vez mais necessário utilizar essas ferramentas em sala de aula, como um instrumento motivador para os alunos e professores.
Pode-se observar nos PCN's a importância do tema proposto, tendo em vista o estudo mais completo da referida ciência, em que se destaca:

> *A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, freqüências e quantas outras variáveis houver*

Desta forma, como foi referenciado no início deste trabalho a *transdisciplinaridade*, e *interdisciplinaridade* são "ferramentas"fundamentais no contexto em questão. Desta forma o tema proposto é de fundamental importância para o currículo do Ensino Médio.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. *Cálculo.* tradução: Claus Ivo Doering,vol.2, 8.ed., Porto Alegre: Bookman, 2007.

[2] ANDRADE, Lenimar Nunes de. *Um brinquedo chamado espirógrafo.*Revista do Professor de Matemática n.60, 2006.

[3] BRASIL, Orientações Curriculares Para o Ensino Médio, "Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias".Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf, acesso em 03 de outubro de 2013.

[4] BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf, acesso em 03 de outubro de 2013.

[5] CARMO, Manfredo Perdigão do, MORGADO, Augusto César, WAGNER, Eduardo : *Trigonometria, números complexos.* 3.ed. Rio de janeiro: SBM, 2005.

[6] FONTES, Carla Antunes; MUNIZ, Rafaela dos Santos Muniz.*Coordenadas Polares no Ensino Médio:Contribuições para o ensino e aprendizagem de trigonometria e números complexos.* Anais, XI Encontro Nacional de educação Matemática, 2013.

[7] FREITAS, Ricardo Luiz Queiroz; NASCIMENTO, Paulo Henrique Ribeiro do. *Geometria Analítica.* 1.ed. Faculdade de Tecnologia e ciências-Ensino à distância.

[8] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz: *Um curso de cálculo*, vol. 1, 5.ed.[reimpr]. Rio de janeiro: LTC, 2012.

[9] LIMA, elon lajes: *Matemática e ensino.* 3.ed., Rio de janeiro: SBM, 2007.

[10] LEITHOLD, Louis. *O cálculo com geometria analítica.* Vol 1, 3.ed. Editora HARBRA ltda. 1994.

[11] PCN+, ENSINO MÉDIO, *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, "Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias"*. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf, acesso em 03 de outubro de 2013.

[12] STEWART, James. *Cálculo.* vol.2, 5.ed. Editora: Thomson Learning, 2007.

[13] SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica.* vol.1, Ed. Makron Books, 1987.

[14] DESCARTES, R. *A Geometria.* Trad. Emídio César de Queiroz Lopes. Lisboa: Editorial Prometeu, 2001.

[15] DESCARTES, R. *Discurso do método.* tradução: Maria Ermantina, 2.ed., São Paulo: Martins Fontes, 1996.

[16] VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. *A Matemática e a filosofia de René Descartes*

[17] HERNÁNDEZ, V. M.*La Geometría Analítica de Descartes y Fermat: ¿y Apolonio?.* vol.1, janeiro 2002.

[18] EVES, Howard.*Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria.*tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1992.

[19] Wikipédia. *Espirógrafo.* Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Espirógrafo. Acesso em 06 de outubro de 2013.

[20] NETO, Antônio C.M.*Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana.*1 ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[21] LIMA, E.L. ; CARVALHO, P.C.P. ; WAGNER,E.; MORGADO,A.C.*A Matemática do Ensino Médio - Volume 3.*6 ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[22] EISENHART, L.P.*Coordinate Geometry.*1 ed., New York: DOVER PUBLICATIONS,INC, 1960.

[23] VAINSENCHER,I.*Introdução às Curvas Algébricas Planas.* Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[24] NEWTON,I.*The Method of fluxions and Infinite Series.* London: Henry Woodfall, 1736. disponível em https://archive.org/details/methodoffluxions00newt

[25] IEZZI,G.*Fundamentos de Matemática Elementar:Geometria Analítica.* vol.7, São Paulo, Editora:Atual, 1977.

[26] DOLCE,O; POMPEO, J.N.*Fundamentos de Matemática Elementar:Geometria Plana.* 7 ed. vol.9, São Paulo, Editora:Atual, 1997.

[27] BARBOSA, J.L.M.*Geometria Euclidiana Plana.* 10 ed., São Paulo, Editora:SBM, 2006.

[28] BOYER, C.B., *História da Matemática.* Editora:Edgard Blucher Ltda., 1974.

[29] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

[30] MARANHÃO. *Referenciais Curriculares: Ensino Médio.* Estado do Maranhão/Secretaria de Estado da Educação, São Luís, 2006.