

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**PREENCHIMENTOS APLICADOS NO CÁLCULO DE
ÁREAS DE REGIÕES PARABÓLICAS**

Anatália Silva Santos

Orientador: Prof. Me. Darlan Ferreira de Oliveira

Feira de Santana

Abril de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT-MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**PREENCHIMENTOS APLICADOS NO CÁLCULO DE
ÁREAS DE REGIÕES PARABÓLICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Feira de Santana

Abril de 2014

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

Santos, Anatália Silva
S233p Preenchimentos aplicados no cálculo de áreas de regiões parabólicas
/ Anatália Silva Santos. – Feira de Santana, 2014.
88 f. : il.

Orientador: Darlan Ferreira Oliveira.

Mestrado (dissertação) – Universidade Estadual de Feira de Santana,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Matemática (Ensino Médio) – Estudo e ensino. 2. Regiões
parabólicas – Cálculo. I. Oliveira, Darlan Ferreira, orient.
II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 517



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DA DISCENTE AMATÁLIA SILVA SANTOS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos vinte e dois dias do mês de abril de dois mil e quatorze às 14:00 horas na Sala MT67, Módulo 6, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título "Preenchimentos aplicados ao cálculo de áreas de regiões parabólicas", da discente Amátalia Silva Santos, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Lurlan Ferreira de Oliveira (Orientador, UEFS), Clecro Alfredo da Silva Filho (UESC) e Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS). A sessão de defesa consistiu da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: Aprovado.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT, Feira de Santana, 22 de abril de 2014.

Prof. Me. Lurlan Ferreira de Oliveira (UEFS)

Orientador

Prof. Dr. Clecro Alfredo da Silva Filho (UESC)

Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Marcelo de Araújo Pereira
Coordenador do PROFMAT/UEFS

Agradecimentos

A vida é um presente de Deus, a Ele devemos agradecer por tudo todos os dias. Penso nos momentos difíceis que passei. Enfrentei dificuldades, sim! Quantas leituras, pesquisas, escritas, preocupação, às vezes, a vontade de desistir atordoava os meus pensamentos noturnos. Mas, o meu desejo de conhecimento era bem maior.

Muitas pessoas participaram desse momento, com orações e palavras de incentivo a elas devo todos os agradecimentos.

Quero agradecer à minha mãe, por entender, sem reclamar a falta de atenção e com jeito simples de ser não me deixou desistir. E sempre dizia: "Repita sempre: Ilumina-me Senhor com teu Espírito de luz." Isso me deu forças pra seguir em frente. **Obrigada mainha!**

Ao meu pai(in memorian) que sempre me mostrou o caminho a seguir.

Ao meu marido Clóveis, exemplo de paciência e compreensão, pois desde que casamos, entendeu a importância desse curso e sempre me apoiou, participando de cada etapa junto comigo.

À minha família, tia, irmãos, cunhados, cunhadas e sobrinhos por todo carinho e incentivo.

Em especial as irmãs Miu e Céu pelo apoio , chás e orações. E os sobrinhos Illa pela organização dos materiais do PROFMAT, Anna Luiza que mesmo com pouca idade sempre esteve disposta a ajudar, Titinho por me socorrer quando tinha problemas com a informática e figuras nos trabalhos e a Igor que mesmo tão distante sofria junto comigo e vibrava com minhas vitórias.

Ao meu orientador Darlan Oliveira, pela atenção, exigência, compreensão e disponibilidade. Sua esposa Conceição Aragão pela preocupação e incentivo durante todo o curso.

Aos colegas do PROFMAT, pelo excelente relacionamento que proporcionou enriquecimento nos estudos em grupos e por conseguinte muitas conquistas. Em especial, ao trio que compõe o quarteto fantástico (Joilma, Rosipléia e Tenivâm) pelas dicas e longas horas de estudo pelo skype, UEFS, bibliotecas e em nossas casas que valeram a pena.

E nesse quarteto,o agradecimento é especial para Joilma que, de aluna da minha primeira turma de 3º no CIEAC, passou a ser colega, confidente; sofremos juntas, demos muitas risadas juntas e com certeza sem ela esse caminho seria muito mais difícil

Aos colegas e amigos do Colégio Visão, por sempre estarem disponíveis , nos momentos que precisei faltar e pelo incentivo. Em especial a Anady(sábias palavras) e Edinália, pela correção ortográfica desse trabalho, Ana Claudia Falcão, Luciana Marques, Janúsia Lima , Fernanda Santos e Josenete pelas orações e mensagens de carinho. Edvan Pedreira por sempre estar disponível na hora das dúvidas.

E em especial a pró Odília Lima, pelas orações, por ceder o espaço do Colégio para o quarteto estudar, pela torcida, pelas palavras de incentivo:“Eu quero 10 nessa prova”. Isso foi muito importante pra renovar as forças e seguir em frente.

Ao CIEAC. Aos gestores por me apoiarem e me oportunizarem tempo para estudo , e aos colegas pelo apoio , atenção e carinho

Às amigas Claudene Mendes pela amizade, pelo incentivo e pelas dicas e sugestões que sempre foram diferencial na construção desse trabalho e Glória pelas palavras de otimismo SEM-PRE, pelo carinho e amizade de mãe e irmã.

Ao amigo Félix que com suas colocações pertinentes me fizeram agir de forma sábia em algumas situações.

Aos professores do (PROFMAT)UEFS pela disponibilidade e atenção

À Nilzete(Dete) funcionária de Joilma, pelos lanchinhos nos momentos de estudo e principalmente pela preocupação e carinho.

Aos amigos Ramos, Tonho e Dinha, por sempre expressarem felicidade pelas minhas conquistas e o apoio nos momentos difíceis.

Finalmente aos meus alunos e ex-alunos, que são motivo da minha constante busca pelo conhecimento, pela compreensão e torcida. Em especial a turma do 2ºano de 2012, que se preocupava quando as coisas não iam bem e se orgulhava de mim por cada conquista.

Resumo

Esse trabalho tem por objetivo apresentar um método “elementar” para o cálculo de área de regiões parabólicas, utilizando-se apenas as ferramentas da Matemática Básica, ou seja não fazendo uso do Teorema Fundamental do Cálculo. Os conceitos de funções e seus gráficos, potências, combinações, somatórios e a ideia de limite dentre outros, são usados com frequência. Nesse contexto, também são introduzidos novos conceitos, como a ideia de limite e os preenchimentos que são apresentados em associação com os números binomiais. É mostrado como os preenchimentos expressam os coeficientes da representação binomial dos somatórios do tipo $\sum_{k=1}^n k^p$, somatórios estes que são de extrema importância nas fórmulas que aproximam as áreas sob os gráficos de funções parabólicas generalizadas. O trabalho é finalizado, com apresentação de propostas de atividades que abordam esses conceitos em paralelo à aplicação de conteúdos do Ensino Médio

Palavras-chave: preenchimento, somatórios, regiões parabólicas

Abstract

This paper aims to present a “basic” method for calculating the area of parabolic regions, using methods only the tools of basic mathematics, in other words, not using the Fundamental Theorem of Calculus. The concepts of functions and their graphs, potencies, combinations, summations utilized frequently. In this context, new concepts introduced, such as the idea of limit and fills presented in association with the binomial numbers. It is shown how the fills express the coefficients of the binomial representation of sums of type $\sum_{k=1}^n k^p$; these summations that are of relevant importance in formulas that approximate the areas under the graphs of generalized parabolic functions. In short, the work analyzing with proposals for activities that approach these concepts in parallel to the implementation to Content of High School.

Keywords: Fills, Summations, Parabolic Regions.

Sumário

Introdução	12
1 Preenchimentos	14
1.1 Somatórios de potências enésimas	14
1.2 Escrevendo os somatórios $\sum_{k=1}^n k^p$ como soma algébrica de combinações	19
1.3 Números binomiais	21
1.4 Determinando os Números do Preenchimento	24
1.5 Triângulo dos Preenchimentos e suas propriedades	33
2 Aproximando áreas de regiões parabólicas	38
2.1 Um pouco de história	38
2.2 A ideia de Fermat	41
2.3 Função parabólica generalizada	44
2.4 Partições, aproximações por falta e por excesso	47

3	Áreas de regiões parabólicas	57
3.1	A ideia de limite	57
3.2	Partições especiais do domínio de uma função parabólica generalizada	62
3.2.1	Funções parabólicas generalizadas com expoente natural	62
3.2.2	Funções parabólicas generalizadas com expoente racional	66
3.3	Fórmula geral para a área de regiões parabólicas	68
3.3.1	O caso com expoente natural	69
3.3.2	O caso com expoente racional	70
3.4	Área sob o gráfico de funções algébricas	72
4	Proposta de atividades para o Ensino Médio	75
4.1	Proposta de Atividade-Preenchimentos	75
4.2	Proposta de atividade-Cálculo de áreas	78
5	Conclusão	85
	Bibliografia	86

Introdução

A proposta deste trabalho é estudar, de maneira “elementar”, o cálculo de áreas de regiões sob o gráfico de uma classe específica de funções algébricas, aquelas definidas como combinações de funções parabólicas generalizadas. Nosso objetivo é apresentar aos alunos do ensino médio o problema de calcular a área de regiões limitadas por contornos curvos, em específico o problema de calcular a área de regiões parabólicas, tudo sendo feito sem mencionar o Teorema Fundamental do Cálculo. Por outro lado alguns conceitos do Cálculo diferencial e integral, mesmo que sem o rigor esperado pela Análise, são abordados e explicados sob pontos de vista que relacionam os conhecimentos matemáticos acumulados até a Educação Básica. Nesse sentido alguns questionamentos poderiam surgir sobre ser ou não interessante inserir as ideias intuitivas do Cálculo nessa fase de escolaridade. Particularmente, achamos que sim, desde que isso seja feito na dose certa. O aluno mais curioso logo perceberá que o método estudado nesse trabalho não resolve o problema de calcular a área sob o gráfico de outros tipos de funções pois o mesmo está atrelado ao estudo de somatórios de potências e nesse momento o professor deve enfatizar que para esses casos existe uma teoria mais abrangente, que não pode ser estudada com matemática básica, mas que resolve o problema.

No cálculo de áreas de regiões parabólicas são usados em abundância conceitos como os de, potências, combinações, somatórios, funções e seus gráficos, a ideia de limite, dentre outras ferramentas da Matemática Básica do Ensino Médio. Além disso, paralelamente ao conceito

de número binomial estudado em análise combinatória, ao nosso ver, poderia ser apresentado o conceito de preenchimento. O conceito de preenchimento é usado para expressar os coeficientes da representação binomial de um somatório do tipo $\sum_{k=1}^n k^p$, sem que seja necessário usar fórmulas de recorrência. Estes somatórios desempenham papel importante nas fórmulas que aproximam as áreas sob os gráficos de funções parabólicas generalizadas.

No primeiro capítulo, abordamos em paralelo a teoria binomial e os preenchimentos e mostramos como usá-las para expressar somatórios de potências.

O estudo de áreas de regiões planas limitadas por um contorno curvo já era objeto de estudo na antiguidade, no segundo capítulo fazemos um breve relato sobre o Método de Exaustão apresentado por Arquimedes e evidenciamos como a ideia de Fermat já se aproximava do Teorema Fundamental do Cálculo tendo em vista que já fazia uso de um conceito importante de integração: a partição de um intervalo. Também, nesse capítulo, apresentamos o conceito de função parabólica generalizada e como aproximar por falta e por excesso as áreas sob seus gráficos.

No terceiro capítulo, mostramos que se faz necessário o conceito de limite para melhorarmos nossas aproximações por excesso e por falta. Mostramos que a manipulação adequada da partição do domínio das funções parabólicas generalizadas nos permitem produzir somatórios que podem ser resolvidos com o método dos preenchimentos. E, por fim, decorrente dessas aplicações escrevemos as fórmulas que nos dão as áreas sob os gráficos de funções parabólicas generalizadas com expoentes natural e racional.

No quarto capítulo, como proposta de atividades para o Ensino Médio, destacamos problemas que envolvem o cálculo de áreas sob o gráfico de funções parabólicas generalizadas, enfatizando a aplicação dos preenchimento e somatórios de potências.

Capítulo 1

Preenchimentos

Nesse capítulo, mostraremos o desenvolvimento de somatórios em função de binomiais, seguindo as abordagens [15] e [16]

1.1 Somatórios de potências enésimas

Para calcularmos a área de regiões parabólicas será frequente o uso de somatórios do tipo $\sum_{k=1}^n k^p$. No desenvolvimento deste somatório é comum utilizar o método de recorrência. Vejamos nos exemplos abaixo:

Exemplo 1.1.1 (Método de recorrência) *Seja*

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2,$$

calcular S .

Temos que

$$n^3 = \sum_{k=1}^n [k^3 - (k-1)^3]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n [k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1)] \\
&= \sum_{k=1}^n [3k^2 - 3k + 1] \\
&= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{3} \left(n^3 - n + 3 \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

A dificuldade encontrada neste método é que para desenvolver o somatório de uma potência precisamos conhecer todos os somatórios anteriores. Por exemplo, para estabelecer o somatório $\sum_{k=1}^n k^4$, começamos com

$$\begin{aligned}
n^5 &= \sum_{k=1}^n [k^5 - (k-1)^5] \\
&= \sum_{k=1}^n [k^5 - (k^5 - 5k^4 + 10k^3 - 10k^2 + 5k - 1)] \\
&= \sum_{k=1}^n [5k^4 - 10k^3 + 10k^2 - 5k + 1] \\
&= 5 \sum_{k=1}^n k^4 - 10 \sum_{k=1}^n k^3 + 10 \sum_{k=1}^n k^2 - 5 \sum_{k=1}^n k + n
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{5} \left(n^5 + 10 \sum_{k=1}^n k^3 - 10 \sum_{k=1}^n k^2 + 5 \sum_{k=1}^n k - n \right).$$

na qual fica evidente a dependência do conhecimento dos somatórios anteriores. Utilizaremos um método que nos possibilitará calcular mais rapidamente estes somatórios.

Inicialmente, daremos enfoque ao ponto relevante no desenvolvimento das potências: a sequência dos coeficientes. Escreveremos a função aritmética potencial $a_n = n^p$ como somas algébricas de combinações do tipo $a_i \binom{n}{i}$ com $0 \leq i \leq p$, e para isso faremos uso da Teoria Binomial para expressar a potência k^p . Assim, podemos definir o desenvolvimento da potência como soma algébrica da seguinte forma:

Definição 1.1.2 *Seja a sequência de números binomiais $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots, \binom{n}{p}$. Chamaremos de combinação binomial a soma S dada por:*

$$S = a_1 \binom{n}{1} + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \dots + a_n \binom{n}{p}$$

onde $S = n^p$

No que segue, faremos uso do teorema abaixo para estabelecermos esta igualdade;

Teorema 1.1.3 *Sejam $n, p \in \mathbb{N}$, com $n \geq p$. Temos que*

$$n \binom{n}{p} = p \binom{n}{p} + (p+1) \binom{n}{p+1}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} p \binom{n}{p} + (p+1) \binom{n}{p+1} &= p \frac{n!}{p!(n-p)!} + (p+1) \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\ &= p \frac{n!}{p(p-1)(n-p)!} + (p+1) \frac{n!}{(p+1)p!(n-p-1)!} \\ &= \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \\ &= \frac{n!}{(p-1)!((n-p)(n-p-1)!)} + \frac{n!}{p(p-1)!(n-p-1)!} \\ &= \frac{pn! + (n-p)n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!(p+n-p)}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} (p+n-p) = n \binom{n}{p} \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.4 *Escrevendo a potência n^2 em função dos números binomiais*

Como $n^2 = n.n$ e $n = \binom{n}{1}$ então podemos escrever $n^2 = n.\binom{n}{1}$ logo:

$$\begin{aligned}n^2 &= 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} \\&= \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} \\&= n + 2 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \\&= n + 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)(n-2)!}{2} \\&= n + n \cdot (n-1) \\&= n + n^2 - n \\&= n^2\end{aligned}$$

Exemplo 1.1.5 *De forma recorrente à potência de base imediatamente anterior, podemos calcular n^3*

$n^3 = n.n^2$ e pelo exemplo anterior $n^2 = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}n^3 &= n \cdot \left[1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} \right] \\&= n \left[\binom{n}{1} + 2n\binom{n}{2} \right] \\&= \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 2 \left[2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} \right] \\&= \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} \\&= \binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.1.6 $n^4 = n \cdot n^3$ e pelo exemplo anterior $n^3 = 1\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}$. Assim,

$$\begin{aligned}
 n^4 &= n \cdot \left[1\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} \right] \\
 &= n\binom{n}{1} + 6n\binom{n}{2} + 6n\binom{n}{3} \\
 &= \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 6 \left[2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} \right] + 6 \left[3\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} \right] \\
 &= \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 12\binom{n}{2} + 18\binom{n}{3} + 18\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4} \\
 &= \binom{n}{1} + 14\binom{n}{2} + 36\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4}.
 \end{aligned}$$

Prosseguindo o desenvolvimento das potências, obtemos a soma S definida anteriormente:

$$n^2 = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}$$

$$n^3 = 1\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}$$

$$n^4 = 1\binom{n}{1} + 14\binom{n}{2} + 36\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4}$$

.

.

.

.

$$n^p = a_1\binom{n}{1} + a_2\binom{n}{2} + a_3\binom{n}{3} + \dots + a_p\binom{n}{p}.$$

Portanto, o conhecimento deste teorema facilitará a resolução dos somatórios de potências enésimas, como também de raízes enésimas de uma forma mais interessante, menos trabalhosa e conveniente para um aluno que está cursando o ensino médio.

1.2 Escrevendo os somatórios $\sum_{k=1}^n k^p$ como soma algébrica de combinações

Na seção anterior escrevemos as somas algébricas de combinações do tipo k^p , agora faremos o somatório dessa potência e para isso temos que observar algumas propriedades usadas no cálculo do somatório de alguns números binomiais:

Exemplo 1.2.1

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$$

no segundo membro temos a soma dos $(n-1)$ números naturais, logo:

$$\begin{aligned} &= \frac{(1+n-1) \cdot (n-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \\ \sum_{k=1}^{n-1} k &= \binom{n}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.2

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{1} &= \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} + \dots + \binom{n-1}{1} \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \\ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{1} &= \binom{n}{2} \end{aligned}$$

Comparando os exemplos 1 e 2, temos:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{1} = \binom{n}{2}$$

A nossa intenção é que a estrutura geral dos somatórios seja fixada, bem como suas representações e os resultados obtidos, pois o conhecimento desses resultados nos habilita a calcular mais rapidamente somatórios das potências enésimas . Vejamos como isso acontece:

Exemplo 1.2.3 Calculando $\sum_{k=1}^{n-1} k^2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \binom{k}{1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{k}{1} + 2 \binom{k}{2} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{2} \\ &= \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.4 Seja $\sum_{k=1}^{n-1} k^3$

Como $n^3 = 1 \binom{n}{1} + 6 \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3}$ então:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[1 \binom{k}{1} + 6 \binom{k}{2} + 6 \binom{k}{3} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 1 \binom{k}{1} + 6 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{2} + 6 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{3} \\ &= \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3} + 6 \binom{n}{4}. \end{aligned}$$

Observe que no resultado do somatório aparecem coeficientes multiplicando os binomiais. Faremos o somatório de n^4 para verificar quais os coeficientes vão aparecer.

Exemplo 1.2.5 Temos agora $\sum_{k=1}^{n-1} k^4$

Como $n^4 = 1\binom{n}{1} + 14\binom{n}{2} + 36\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4}$ então:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k^4 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[1\binom{k}{1} + 14\binom{k}{2} + 36\binom{k}{3} + 24\binom{k}{4} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 1\binom{k}{1} + 14 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{2} + 36 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{3} + 24 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{4} \\ &= \binom{n}{2} + 14\binom{n}{3} + 36\binom{n}{4} + 24\binom{n}{5}. \end{aligned}$$

Nota-se que o resultado dos somatórios de números binomiais é obtido aplicando o Teorema das Colunas do Triângulo de Pascal. O fato intrigante é: de onde vem esses coeficientes, por quê são exatamente esse valores? Existe alguma relação entre eles? Antes de determiná-los, apresentaremos alguns tópicos da Teoria Binomial, pois se faz necessário para estabelecermos as relações entre números Binomiais e os números de Preenchimento.

1.3 Números binomiais

Definição 1.3.1 Sejam $n, p \in \mathbb{N}$, com $n \geq p$, definimos o número binomial $\binom{n}{p}$, que se lê n combinado p a p , por

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Dispondo os números binomiais na forma triangular onde, na zero-ésima linha colocamos o número binomial $\binom{0}{0}$, na primeira linha, colocamos os números binomiais $\binom{1}{0}$ e $\binom{1}{1}$, na segunda linha, $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ e $\binom{2}{2}$, \dots , na n -ésima linha os números binomiais $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, \dots , $\binom{n}{n-1}$ e $\binom{n}{n}$, e assim

por diante, obtemos o chamado Triângulo de Pascal-Tartaglia.

Esse triângulo foi definido pelo matemático chinês Yang Hui e algumas de suas propriedades foram estabelecidas pelo matemático francês Blaise Pascal.

TRIÂNGULO DE PASCAL

$\binom{0}{0}$		1
$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$		1 1
$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$		1 2 1
$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$		1 3 3 1
$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$		1 4 6 4 1
$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$		1 5 10 10 5 1
$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$		1 6 15 20 15 6 1
\vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots		
$\binom{n}{0}$ $\binom{n}{1}$ $\binom{n}{2}$ $\binom{n}{3}$ $\binom{n}{4}$ $\binom{n}{5}$ $\binom{n}{6}$ \dots $\binom{n}{n}$	

Proposição 1.3.2 *Sejam $p, q \in \mathbb{N}$ com $p + q = n$, então,*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$$

Os números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são chamados de complementares.

A relação abaixo é conhecida como relação de Stiffel.

Proposição 1.3.3 *Sejam $n, p \in \mathbb{N}$ com $n \geq p$, então*

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Demonstração. Segue da definição que

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)!]} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!p!} \\ &= \frac{p(n-1)! + (n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p}. \end{aligned}$$

No que segue, consideraremos nulo qualquer número binomial $\binom{n}{p}$ onde $n < p$.

Proposição 1.3.4 (Teorema das colunas) *Sejam os números binomiais da p -ésima coluna, então*

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Demonstração. Provaremos por indução. Desde que $\binom{n}{p}$ é nulo para $n < p$ temos que o primeiro elemento não nulo da soma ocorre para $n = p$ e vale $\binom{p}{p} = 1$ e desde que $\binom{p+1}{p+1} = 1$, o teorema é válido para o primeiro elemento. Suponha que o teorema valha para $n > p$. Assim, para $n + 1$, temos

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \\
&= \binom{n+2}{p+1},
\end{aligned}$$

onde o teorema vale para $n + 1$.

1.4 Determinando os Números do Preenchimento

A partir de agora vamos mostrar que a expressão $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$ com $n \leq p$ fornece os coeficientes de qualquer representação algébrica de n^p , sem que seja necessário usar a recorrência, basta calcular os coeficientes.

Definição 1.4.1 *Sejam $n, p \in \mathbb{N}$ com $n \leq p$. Dado o conjunto $\{A_1, \dots, A_n\}$ e p posições, seja o conjunto \mathcal{P} de todas as seqüências distintas de p elementos que podem ser formadas usando-se, pelo menos uma vez, os n elementos. Segundo Tavano [16], o preenchimento indicado por $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$ é o número que representa a cardinalidade de \mathcal{P} .*

Indicaremos por $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$ o número de seqüências de n elementos, tomados p elementos

Exemplo 1.4.2 *Sejam $S = \{A, B\}$ e 3 espaços. Temos que $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6$. De fato, as seqüências de 3 elementos onde figuram A e B são,*

<u>A</u> <u>A</u> <u>B</u>	<u>B</u> <u>A</u> <u>A</u>
<u>A</u> <u>B</u> <u>B</u>	<u>A</u> <u>B</u> <u>A</u>
<u>B</u> <u>B</u> <u>A</u>	<u>B</u> <u>A</u> <u>B</u>

Observe que A A A e B B B, pela definição, não fazem parte da seqüência, pois aparece apenas um elemento. Logo, o número de seqüências com n elementos e p termos é 6, ou seja $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6$

Outros exemplos:

Exemplo 1.4.3 Sejam o conjunto $Q = \{A, B, C, D\}$, e 5 espaços. O número de sequências com $p=5$ termos é 150. De fato,

$$\underline{A} \underline{A} \underline{B} \underline{C} \underline{D} \text{ temos } \frac{5!}{2!} = 60$$

$$\underline{B} \underline{B} \underline{A} \underline{C} \underline{D} \text{ temos } \frac{5!}{2!} = 60$$

$$\underline{C} \underline{C} \underline{A} \underline{B} \underline{D} \text{ temos } \frac{5!}{2!} = 60$$

$$\underline{D} \underline{D} \underline{A} \underline{C} \underline{B} \text{ temos } \frac{5!}{2!} = 60$$

Exemplo 1.4.4 Sejam agora conjunto $R = \{A\}$ e 3 espaços, o número de sequências é 1. De fato,

$$\underline{A} \underline{A} \underline{A} \text{ temos } \frac{3!}{3!} = 1$$

Então, quando $n = 1$, $\begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} = 1$

Exemplo 1.4.5 Sejam o conjunto $R = \{A, B, C, D\}$ e 4 espaços. O número de sequências é $4!$. De fato,

$$\underline{A} \underline{B} \underline{C} \underline{D} \text{ temos } 4! = 24$$

Então, quando $n = p$, $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = n!$ ou $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = p!$

Observando que $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$ não corresponde ao número de anagramas formado por n elementos, pois o número de repetições de cada termo se altera em cada sequência, como também não é uma combinação de n elementos tomados p a p , principalmente porque na combinação $n \geq p$.

Agora, vamos expressar o preenchimento associado a Análise Combinatória e em seguida mostraremos que os resultados obtidos são exatamente os coeficientes combinativos:

i) No cálculo de $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix} \right]$, temos 2 elementos e a sequência deve conter 5 termos. Como todos os termos devem aparecer em cada sequência teremos:

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix} \right] &= 2^5 - \left[\binom{2}{1} \cdot 1^5 - \binom{2}{0} \cdot 0^5 \right] \\ &= 32 - [2 \cdot 1^5 - 1 \cdot 0^5] \\ &= 32 - [2 \cdot 1 - 0] \\ &= 32 - 2 \\ &= 30 \end{aligned}$$

ii) No cálculo de $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix} \right]$, temos 3 elementos e a sequência deve conter 5 termos, logo:

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix} \right] &= 3^5 - \left\{ \binom{3}{2} \cdot 2^5 - \binom{3}{2} \binom{2}{1} \cdot 1^5 \right\} - \binom{3}{1} \cdot 1^5 \\ &= 3^5 - \binom{3}{2} \cdot 2^5 + \binom{3}{2} \binom{2}{1} \cdot 1^5 - \binom{3}{1} \cdot 1^5 \\ &= 3^5 - \binom{3}{2} \cdot 2^5 + \binom{3}{1} \cdot 1^5 \\ &= 243 - 3 \cdot 32 + 3 \\ &= 150 \end{aligned}$$

iii) No cálculo de $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \right]$, temos 4 elementos e a sequência deve conter 5 termos, logo:

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \right] &= 4^5 - \left[\binom{4}{3} \cdot 3^5 - \left[\binom{4}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 2^5 - \binom{4}{3} \cdot \binom{3}{2} \binom{2}{1} \cdot 1^5 \right] - \binom{4}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot 1^5 \right] - \\ &\quad - \left[\binom{4}{2} \cdot 2^5 - \left[\binom{4}{2} \binom{2}{1} \cdot 1^5 \right] - \left[\binom{4}{1} \cdot 1^5 \right] \right] \\ &= 1024 - [4 \cdot 3^5 - [4 \cdot 3 \cdot 2^5 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1^5] - 4 \cdot 3 \cdot 1^5] - [6 \cdot 2^5 - [6 \cdot 2 \cdot 1^5]] - 4 \cdot 1^5 \\ &= 1024 - [4 \cdot 243 - [12 \cdot 32 - 24] - 12] - [6 \cdot 32 - [12]] - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1024 - [972 - [384 - 24] - 12] - [192 - 12] - 4 \\
&= 1024 - [972 - 360 - 12] - 180 - 4 \\
&= 1024 - 600 - 180 - 4 \\
&= 424 - 184 \\
&= 240
\end{aligned}$$

Vimos que foi possível utilizar a Análise Combinatória para calcular os preenchimentos tendo em vista a natureza dos conjuntos; esses tinham poucos elementos e seriam dispostos em poucas posições. No entanto, ao calcularmos o preenchimento $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ observamos que esses podem se tornar demasiadamente longos.

Usaremos o teorema a seguir para mostrar como podemos calcular o preenchimento em função de números binomiais e potências.

Teorema 1.4.6 *Sejam $n, p \in \mathbb{N}$, com $n \leq p$. Então,*

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \binom{n}{0} n^p - \binom{n}{1} (n-1)^p + \binom{n}{2} (n-2)^p - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1^p.$$

Demonstração. Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ e \mathcal{M} o conjunto das sequências de p elementos que podem ser formadas com um, alguns ou todos os elementos de \mathcal{A} . Como $n \leq p$ os elementos $A_i \in \mathcal{A}$ se repetirão, as vezes, para completarem uma sequência. Como para cada posição p da sequência temos n possibilidades, temos que $\#(\mathcal{M})$ é n^p . Sejam $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ um subconjunto com i elementos e $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}$ um subconjunto cujos elementos são sequências nas quais figuram todos os elementos de \mathcal{A}_i . Para cada $i = 1, \dots, n$, temos

$$\#(\mathcal{M}_i) = \begin{bmatrix} i \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{i}$$

e como

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \dots \cup \mathcal{M}_n \text{ e } \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \dots \cap \mathcal{M}_n = \emptyset$$

temos

$$\#(\mathcal{M}) = \#(\mathcal{M}_1) + \#(\mathcal{M}_2) + \dots + \#(\mathcal{M}_n)$$

onde

$$n^p = \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{1} + \begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{2} + \dots + \begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{n-1} + \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{n}$$

e concluímos que

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = n^p - \binom{n}{n-1} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix} - \dots - \binom{n}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix} - \binom{n}{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Segue da equação 1.1 que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} &= 1^p = \binom{1}{1} 1^p - \binom{1}{0} 0^p \\ \begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix} &= 2^p - \binom{2}{1} 1^p = \binom{2}{2} 2^p - \binom{2}{1} 1^p + \binom{2}{0} 0^p \\ \begin{bmatrix} 3 \\ p \end{bmatrix} &= 3^p - \binom{3}{2} 2^p + \binom{3}{1} 1^p = \binom{3}{3} 3^p - \binom{3}{2} 2^p + \binom{3}{1} 1^p - \binom{3}{0} 0^p, \end{aligned}$$

na qual observamos a propriedade da igualdade dos coeficientes:

$$\begin{aligned} \text{coef}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix}\right) &= \left\{ \binom{1}{1}, -\binom{1}{0} \right\} = \text{coef}((p-1)^1) \\ \text{coef}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix}\right) &= \left\{ \binom{2}{2}, -\binom{2}{1}, \binom{2}{0} \right\} = \text{coef}((p-1)^2) \\ \text{coef}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ p \end{bmatrix}\right) &= \left\{ \binom{3}{3}, -\binom{3}{2}, \binom{3}{1}, -\binom{3}{0} \right\} = \text{coef}((p-1)^3). \end{aligned}$$

Suponha, agora, que esta propriedade seja válida para todo $k < n$. Mostremos sua validade para n . Para isso, considere o polinômio

$$\phi(p) = p^n - \binom{n}{n-1} (p-1)^{n-1} - \binom{n}{n-2} (p-1)^{n-2} - \dots - \binom{n}{2} (p-1)^2 - \binom{n}{1} (p-1)^1 - \binom{n}{0} (p-1)^0$$

e a equação 1.1 acrescida do termo nulo $-\binom{n}{0} \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = n^p - \binom{n}{n-1} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix} - \dots - \binom{n}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix} - \binom{n}{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} - \binom{n}{0} \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix}$$

Temos que

$$\text{coef}\left(\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}\right) = \text{coef}(\phi(p))$$

e, por outro lado, subtraindo $p^n + (p-1)^n$ de ambos os membros do polinômio $\phi(p)$ temos

$$\begin{aligned} \phi(p) - p^n - (p-1)^n &= -(p-1)^n - \binom{n}{n-1}(p-1)^{n-1} - \binom{n}{n-2}(p-1)^{n-2} - \dots - \\ &\quad - \binom{n}{2}(p-1)^2 - \binom{n}{1}(p-1)^1 - \binom{n}{0}(p-1)^0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Note agora que

$$\begin{aligned} p^n &= ((p-1) + 1)^n = (p-1)^n + \binom{n}{n-1}(p-1)^{n-1} + \binom{n}{n-2}(p-1)^{n-2} + \dots + \\ &\quad + \binom{n}{2}(p-1)^2 + \binom{n}{1}(p-1)^1 + \binom{n}{0}(p-1)^0 \end{aligned}$$

e assim $\phi(p) - p^n - (p-1)^n = -p^n$ onde $\phi(p) = (p-1)^n$ e concluímos que

$$\text{coef} \left(\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} \right) = \text{coef}((p-1)^n).$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \binom{n}{n} n^p - \binom{n}{n-1} (n-1)^p + \binom{n}{n-2} (n-2)^p - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} 1^p + (-1)^n \binom{n}{0} 0^p$$

e, como $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ temos:

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \binom{n}{0} n^p - \binom{n}{1} (n-1)^p + \binom{n}{2} (n-2)^p - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1^p + (-1)^n \binom{n}{n} 0^p$$

o que demonstra o teorema.

Aplicando o Teorema 1.4.6, no preenchimento $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Exemplo 1.4.7

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} &= \binom{3}{0}(3-0)^5 - \binom{3}{1}(3-1)^5 + \binom{3}{2}(3-2)^5 - \binom{3}{3}(3-3)^5 \\ &= 1 \cdot 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1^5 - 1 \cdot 0^5 \\ &= 3^5 - 3 \cdot 32 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ &= 243 - 96 + 3 \\ &= 150 \end{aligned}$$

Como vimos, na definição 1.1.2, a potência n^p pode ser escrita como uma combinação binomial, ou seja

$$n^p = a_1 \binom{n}{1} + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \dots + a_p \binom{n}{p}.$$

Provaremos que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_p$ são únicos.

Teorema 1.4.8 *Sejam $n, p \in \mathbb{N}$. Dada a potência n^p existem únicos a_1, a_2, \dots, a_p tais que*

$$n^p = a_1 \binom{n}{1} + a_2 \binom{n}{2} + \dots + a_p \binom{n}{p}.$$

Demonstração. Suponha que

$$n^p = b_1 \binom{n}{1} + b_2 \binom{n}{2} + \dots + b_p \binom{n}{p}.$$

Assim

$$(a_1 - b_1) \binom{n}{1} + (a_2 - b_2) \binom{n}{2} + (a_3 - b_3) \binom{n}{3} + \dots + (a_p - b_p) \binom{n}{p} = 0.$$

Desenvolvendo os binomiais temos

$$\begin{aligned} & (a_1 - b_1)n + (a_2 - b_2) \frac{n^2 - n}{2!} + (a_3 - b_3) \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{3!} + \dots + \\ & + (a_{p-1} - b_{p-1}) \frac{n^{p-1} + q_{p-2}(n)}{(p-1)!} + (a_p - b_p) \frac{n^p + q_{p-1}(n)}{p!} = 0, \end{aligned}$$

onde $q_{p-1}(n), q_{p-2}(n)$ são polinômios de graus $p-1$ e $p-2$ respectivamente. Como o único termo que contribui para o coeficiente de n^p é $(a_p - b_p)$ segue-se que este é nulo onde $a_p = b_p$. Com o mesmo argumento encontramos que $(a_i - b_i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, p-1$, o que implica que $a_i = b_i$ para $i = 1, 2, \dots, p$.

Corolário 1.4.9 *Sejam $n, p \in \mathbb{N}$. A potência n^p se escreve de maneira única como*

$$n^p = \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{1} + \begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{2} + \dots + \begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{n-1} + \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{n}$$

Demonstração. Na demonstração do teorema 1.4.6 chegamos à representação

$$n^p = \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{1} + \begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{2} + \cdots + \begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{n-1} + \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{n}.$$

Segue-se do teorema 1.4.8 que essa representação é única.

Aplicando o Método do Preenchimento, segue que

Exemplo 1.4.10 (Método do preenchimento) *Seja S a soma dada por*

$$S = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4.$$

Segue-se do Colorário 1.4.9 que

$$n^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{1} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{2} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{3} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{4}$$

e, calculando os preenchimentos pelo Teorema 1.4.6, obtemos

$$n^4 = 1 \cdot \binom{n}{1} + 14 \cdot \binom{n}{2} + 36 \cdot \binom{n}{3} + 24 \cdot \binom{n}{4}$$

e assim

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} + 14 \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} + 36 \sum_{k=1}^n \binom{k}{3} + 24 \sum_{k=1}^n \binom{k}{4}$$

onde aplicamos a Proposição 1.3.4 e obtemos

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \binom{n+1}{2} + 14 \binom{n+1}{3} + 36 \binom{n+1}{4} + 24 \binom{n+1}{5}.$$

Assim, para calcular a soma $1^4 + 2^4 + \cdots + 50^4$ não precisamos exibir a fórmula de recorrência para esse somatório, bastando calcular

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} k^4 &= \binom{51}{2} + 14 \binom{51}{3} + 36 \binom{51}{4} + 24 \binom{51}{5} \\ &= 65.666.665 \end{aligned}$$

Apenas a título de conhecimento, ao desenvolvermos os binomiais no somatório $\sum_{k=1}^n k^4$, obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^4 &= \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} + 14 \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} + 36 \sum_{k=1}^n \binom{k}{3} + 24 \sum_{k=1}^n \binom{k}{4} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\end{aligned}$$

Exemplo 1.4.11 *É possível chegar à expressão*

$$n^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{1} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{2} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{3} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \binom{n}{4}$$

do exemplo anterior, aplicando o Teorema 1.1.3. Com efeito, como $n = \binom{n}{1}$ temos:

$$\begin{aligned}n^4 &= n^3 \binom{n}{1} \\ &= n^2 \left(n \binom{n}{1} \right) \\ &= n^2 \left(\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} \right) \\ &= n \left(n \binom{n}{1} + 2n \binom{n}{2} \right) \\ &= n \left(\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 2 \left(2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} \right) \right) \\ &= n \binom{n}{1} + 6n \binom{n}{2} + 6n \binom{n}{3} \\ &= \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 6 \left(2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} \right) + 6 \left(3 \binom{n}{3} + 4 \binom{n}{4} \right) \\ &= \binom{n}{1} + 14 \binom{n}{2} + 36 \binom{n}{3} + 24 \binom{n}{4}.\end{aligned}$$

no qual percebemos que os preenchimentos surgem naturalmente na combinação binomial de uma potência de n .

1.5 Triângulo dos Preenchimentos e suas propriedades

Os preenchimentos, assim como os números binomiais, podem ser dispostos numa tabela triangular que aqui chamaremos de triângulo dos preenchimentos.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	1					
$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	2				
$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	6	6			
$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$	1	14	36	24		
$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$	1	30	150	240	120	
$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$	1	62	540	1560	1800	720

Estabeleceremos agora algumas propriedades dos preenchimentos e que de posse do triângulo dos preenchimentos ficam de fácil visualização.

Proposição 1.5.1 *Sejam $n, p \in \mathbb{N}$. Então, vale a igualdade*

$$(n+1) \left(\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ p \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} n+1 \\ p+1 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Do teorema 1.4.6 segue-se que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} &= \binom{n}{0} n^p - \binom{n}{1} (n-1)^p + \binom{n}{2} (n-2)^p - \binom{n}{3} (n-3)^p + \dots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1^p \\ &= n^p - n(n-1)^p + \frac{n(n-1)}{2} (n-2)^p - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} (n-3)^p + \dots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} n 1^p \end{aligned} \tag{1.3}$$

e

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+1 \\ p \end{bmatrix} &= \binom{n+1}{0} (n+1-0)^p - \binom{n+1}{1} (n)^p + \binom{n+1}{2} (n+1-2)^p - \\ &\quad - \binom{n+1}{3} (n+1-3)^p + \dots + (-1)^{n+1-1} \binom{n+1}{n} 1^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1)^p - (n+1)n^p + \frac{(n+1)n}{2}(n-1)^p - \frac{(n+1)n(n-1)}{6}(n-2)^p + \dots + \\
&\quad + (-1)^n (n+1)1^p.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Somando-se as equações 1.3 e 1.4, obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ p \end{bmatrix} &= (n+1)^p - n^{p+1} + \frac{n(n-1)^{p+1}}{2} - \\
&\quad - \frac{n(n-1)(n-2)^{p+1}}{6} + \dots + (-1)^n.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Multiplicando a equação 1.5 por $(n+1)$, encontramos

$$\begin{aligned}
(n+1) \left(\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ p \end{bmatrix} \right) &= (n+1)^{p+1} - (n+1)n^{p+1} + \frac{(n+1)n(n-1)^{p+1}}{2} - \\
&\quad - \frac{n(n-1)(n-2)^{p+1}(n+1)}{6} + \dots + (-1)^n (n+1)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Vamos mostrar que o segundo membro da equação na proposição 1.5.1 é igual ao lado direito na equação 1.6. De fato,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+1 \\ p+1 \end{bmatrix} &= (n+1)^{p+1} - (n+1)n^{p+1} + \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!}(n-1)^{p+1} - \frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!}(n-2)^{p+1} + \dots + \\
&\quad + (-1)^n \frac{(n+1)!}{n!(n+1-n)!} 1^{p+1} \\
&= (n+1)^{p+1} - (n+1)n^{p+1} + \frac{(n+1)n}{2!}(n-1)^{p+1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{6}(n-2)^{p+1} + \dots + \\
&\quad + (-1)^n \frac{(n+1)}{1!} 1^{p+1} \\
&= (n+1)^{p+1} - (n+1)n^{p+1} + \frac{(n+1)n}{2}(n-1)^{p+1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{6}(n-2)^{p+1} + \dots + \\
&\quad + (-1)^n (n+1).
\end{aligned}$$

Assim como a relação de Stiffel em números binomiais, essa relação desempenhará papel importante nas manipulações com os preenchimentos.

Proposição 1.5.2

$$\sum_{n=1}^p (-1)^n \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = (-1)^p.$$

Demonstração. É de verificação imediata que esta propriedade é válida para as seis primeiras linhas do triângulo do preenchimento. Suponha que essa propriedade se verifique para os p primeiros naturais. Mostremos sua validade para $p + 1$. Com efeito,

$$\sum_{n=1}^{p+1} (-1)^n \begin{bmatrix} n \\ p+1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ p+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ p+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ p+1 \end{bmatrix} + \cdots + (-1)^p \begin{bmatrix} p \\ p+1 \end{bmatrix} + (-1)^{p+1} \begin{bmatrix} p+1 \\ p+1 \end{bmatrix}$$

e aplicando a relação 1.5.1 temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p+1} (-1)^n \begin{bmatrix} n \\ p+1 \end{bmatrix} &= - \left(\begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} \right) + 2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix} \right) - 3 \left(\begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ p \end{bmatrix} \right) + \cdots + \\ &\quad + (-1)^p p \left(\begin{bmatrix} p-1 \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix} \right) + (-1)^{p+1} (p+1) \left(\begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+1 \\ p \end{bmatrix} \right) \\ &= - \left(- \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ p \end{bmatrix} + \cdots + (-1)^p \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix} \right) \\ &= - \left(\sum_{n=1}^p (-1)^n \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} \right) \\ &= -(-1)^p \\ &= (-1)^{p+1} \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

Proposição 1.5.3

$$\begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix} = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

Demonstração. No triângulo dos preenchimentos podemos confirmar a validade da relação para os primeiros naturais. Suponha a relação válida para n . Mostremos que a mesma vale para $n + 1$.

De fato, usando a relação 1.5.1 temos

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} n+1 \\ n+2 \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} \right) (n+1) \\
 &= \left(\frac{n(n+1)!}{2} + (n+1)! \right) (n+1) \\
 &= (n+1)! \frac{(n+2)}{2} (n+1) \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)!}{2}
 \end{aligned}$$

Proposição 1.5.4

$$\sum_{n=1}^p \frac{(-1)^n}{n} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = 0.$$

Demonstração. Pela relação 1.5.1 temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^p \frac{(-1)^n}{n} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} &= \sum_{n=1}^p \frac{(-1)^n}{n} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ p-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ p-1 \end{bmatrix} \right) n \\
 &= \sum_{n=1}^p (-1)^n \begin{bmatrix} n-1 \\ p-1 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^p (-1)^n \begin{bmatrix} n \\ p-1 \end{bmatrix} \\
 &= - \begin{bmatrix} 0 \\ p-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ p-1 \end{bmatrix} + \dots + (-1)^p \begin{bmatrix} p-1 \\ p-1 \end{bmatrix} + \\
 &\quad - \begin{bmatrix} 1 \\ p-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ p-1 \end{bmatrix} + \dots + (-1)^p \begin{bmatrix} p \\ p-1 \end{bmatrix} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Proposição 1.5.5 *A soma dos p primeiros elementos da segunda coluna do triângulo dos preenchimentos é $2(2^p - p - 1)$.*

Demonstração. Segue-se do teorema 1.1 que, $\begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix} = 1.2^p - 2.1^p + 1.0^p$, onde

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^p [1.2^i - 2.1^i + 1.0^i] \\
 &= \sum_{i=1}^p 2^i - 2 \sum_{i=1}^p 1^i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(2^p - 1) - 2p \\
&= 2(2^p - p - 1).
\end{aligned}$$

Proposição 1.5.6 *A soma dos p primeiros elementos da terceira coluna do triângulo do preenchimento é $\frac{3}{2}(3^p - 1) - 6(2^p - 1) + 3p$.*

Demonstração. Segue-se do teorema 1.1 que, $\begin{bmatrix} 3 \\ p \end{bmatrix} = 1 \cdot 3^p - 3 \cdot 2^p + 3 \cdot 1^p - 1 \cdot 0^p$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^p [1 \cdot 3^i - 3 \cdot 2^i + 3 \cdot 1^i - 1 \cdot 0^i] \\
&= \sum_{i=1}^p 3^i - 3 \sum_{i=1}^p 2^i + 3 \sum_{i=1}^p 1^i \\
&= \frac{3}{2}(3^p - 1) - 3 \cdot \frac{2}{1}(2^p - 1) + 3 \cdot 1p \\
&= \frac{3}{2}(3^p - 1) - 6(2^p - 1) + 3p.
\end{aligned}$$

Já conhecendo como calcular os somatórios de potências enésimas fazendo uso de números binomiais e preenchimentos, no próximo capítulo faremos um breve relato sobre o estudo das áreas de regiões planas limitadas por contorno curvo e em seguida apresentaremos as regiões que serão estudadas nesse trabalho.

Capítulo 2

Aproximando áreas de regiões parabólicas

Nesse capítulo relataremos um pouco da história, seguindo as abordagens de [7]

2.1 Um pouco de história

O estudo das áreas de regiões planas limitadas em parte por um contorno curvo foi objeto de estudo de vários matemáticos desde a Antiguidade. Arquimedes¹ (287-212 a. C.), por exemplo, utilizava o Método de Exaustão, pensamento que hoje em dia é entendido como uma antecipação das ideias atuais do Cálculo, curiosamente contrastando com o fato de que o mesmo rejeitava a ideia infinitesimal de limite. Já Fermat (1601-1665), por volta de 1640, mostrou que a área entre qualquer uma das parábolas e o eixo horizontal, para $0 < x < a$, era igual à área do retângulo de largura a e altura $a^n/(n + 1)$. Hoje, podemos ver

¹O matemático grego Arquimedes viveu em Siracusa, século 3 a. C., e foi um dos precursores do Cálculo Diferencial e Integral

que Fermat estava bem próximo da ideia por trás do Teorema Fundamental do Cálculo. Mas aquilo não parecia ser de seu interesse.

Em particular, Arquimedes dedicou-se, profundamente, ao problema da quadratura do círculo; construir um quadrado de mesma área que um círculo dado. Um dos seus principais livros sobre Matemática intitulou-se “*Tratado da quadratura da parábola*”. O Método de Exaustão consistia em transformar o curvilíneo em retilíneo por aproximações por excesso e por falta.

Segundo Arquimedes, a área de um triângulo inscrito num círculo é menor que a área do círculo; enquanto a de um triângulo circunscrito é maior. Aumentando-se o número de lados dessas figuras, as áreas dos polígonos formados, inscritos e circunscritos, já se aproximam mais da área do círculo. E com o aumentar sucessivo dos lados, os polígonos, assim formados apresentam áreas que crescem (para os inscritos) e decrescem (para os circunscritos), aproximando-se da área do círculo, embora nunca coincidam com ela. A área do círculo era uma espécie de limite a ser atingido; uma justa medida que só permitiria abordagens aproximadas.

Ele também estava interessado na curva descrita por uma pedra ao ser lançada. Assim passou

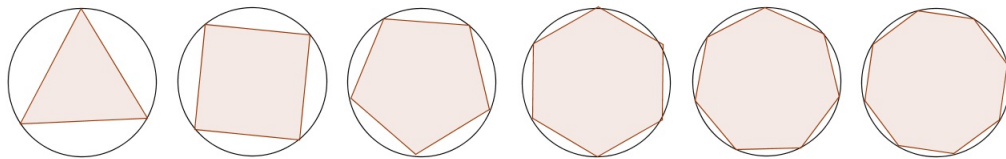


Figura 2.1: Polígonos inscritos e circunscritos

a pesquisar aspectos da parábola, em especial como encontrar a área de um setor parabólico. Ele resolveu esse problema dividindo o setor em uma série de triângulos cujas áreas diminuíam em progressão geométrica. Primeiramente, definiu o que significa base, altura e vértice de um segmento de parábola: a base era a reta que interrompe a parábola; a altura era a perpendicular máxima que pode ser traçada da curva até a base; e o vértice o ponto a partir do qual a altura era traçada. As outras alturas dos outros triângulos traçados eram obtidas por interseções da curva (parábola) com retas paralelas à altura máxima da parábola. Essas retas eram traçadas tendo como referência de partida os respectivos pontos médios, nos quais foi a base da parábola

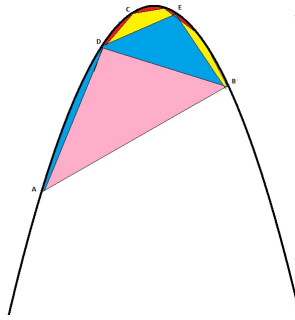


Figura 2.2: Segmento Parabólico

foi dividida. Esclarecido como formar o polígono inscrito na parábola, esse polígono se aproximava da parábola; isto é, podia ser inscrito nesta um polígono de tal forma que os segmentos restantes seriam menores do que qualquer grandeza determinada.

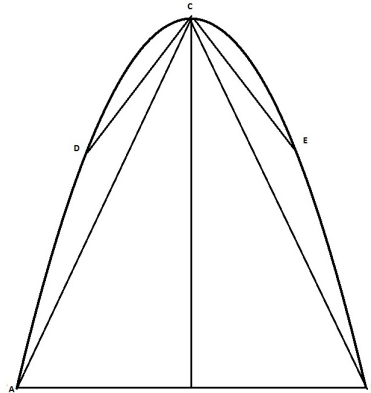


Figura 2.3: O método da exaustão de Arquimedes aplicado a uma parábola

Continuando com essa progressão, ele poderia fazer os triângulos se encaixarem na parábola de tal modo que poderiam ser tão ajustados quanto se quisesse, “exaurindo-a”, como ele dizia. Arquimedes, então, demonstrou que a área total era obtida usando cada vez mais triângulos. Porém, é importante frisar que Arquimedes não usa a noção de limite, mas, sim, o princípio da exaustão, o qual permite considerar que a área do segmento parabólico não poderia ser nem maior nem menor que o valor obtido, que é $(4/3)$ da área do triângulo ABC , ou seja: a soma das áreas dos triângulos se aproximava do limite $\frac{4}{3}$ (fazendo a área igual a 1), à medida que o número de

triângulos tendia ao infinito. Assim, ele chegava à conclusão desejada e, evitando a armadilha dos infinitésimos e das operações com limites, atingia um nível de rigor insuperado até o século XVIII.

Contudo, o Método da Exaustão foi aplicado por Arquimedes com sucesso à parábola, porém não conseguiu validar o método para duas outras curvas famosas: a *elipse* e a *hipérbole*, que juntamente com a parábola formam a família de secções cônicas. Vale ressaltar que este método se aproximou bastante do cálculo integral, porém essa aproximação não foi maior devido à recusa dos gregos de incorporarem o infinito em seu sistema matemático.

2.2 A ideia de Fermat

Fermat,² assim como Arquimedes, também estava interessado na quadratura da curva cuja equação geral é $y = x^n$, onde n é um número inteiro positivo. Essas curvas são, às vezes chamadas de parábolas generalizadas (a própria parábola é o caso $n = 2$). Fermat fez a aproximação da área sob a curva através de uma série de retângulos cujas bases formam uma progressão geométrica decrescente. Isso, sem dúvida, é muito semelhante ao método de Exaustão de Arquimedes. Mas, ao contrário do seu antecessor, Fermat não evitou recorrer a uma série infinita. A figura abaixo, mostra uma parte da curva $y = x^n$ entre os pontos onde $x = 0$ e $x = a$ no eixo das abscissas.

Nesse intervalo entre $x = 0$ e $x = a$ e dividindo-o em um número infinito de subintervalos pelos pontos $O, O_1, O_2, \dots, O_{n-1}, N$ onde $ON = a$, Fermat trabalhou com progressões geométricas decrescentes. Ele pôs $ON = a$, $OO_n = ar$, $OO_{n-1} = ar^2$ e assim por diante, onde r era um número positivo menor do que 1 e para as alturas (ordenadas da curva $y = x^n$) nesses pontos ele associou, respectivamente, os números $a^n, (ar)^n, (ar^2)^n, \dots$. Com esses dados podemos verificar

²Fundador da geometria analítica, classificou as curvas planas de acordo com o grau, estabeleceu o princípio fundamental de que uma equação de primeiro grau, no plano, representa uma reta e que uma de segundo grau representa uma cônica.

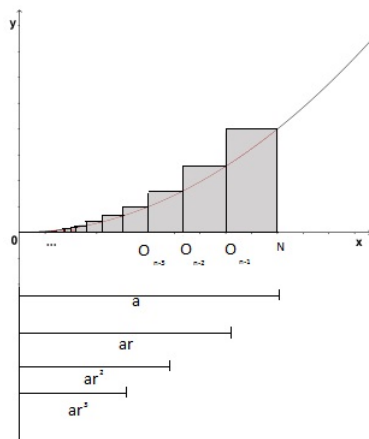


Figura 2.4: Método de Fermat

facilmente como encontrar a área de cada retângulo e então somar as áreas desses retângulos superiores, iniciando pela direita, utilizando o somatório da série geométrica infinita que depende de r . Assim, sendo A_r a soma das áreas temos:

$$\begin{aligned}
 A_r &= (a - ar) a^n + (ar - ar^2) (ar)^n + (ar^2 - ar^3) \cdot (ar^2)^n + \dots \\
 &= a(1 - r) a^n + ar(1 - r) a^n r^n + ar^2(1 - r) a^n r^{2n} + \dots \\
 &= a^{n+1}(1 - r) + a^{n+1}(1 - r) r^{n+1} + a^{n+1}(1 - r) (r^{n+1})^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nessa PG infinita temos

$$a_1 = a^{n+1}(1 - r) \text{ e } q = r^{n+1}$$

e aplicando a fórmula da soma de uma P.G. infinita encontramos

$$A_r = \frac{a^{n+1}(1 - r)}{1 - r^{n+1}}.$$

Fermat observou que para melhor se aproximar do valor exato da área a largura dos retângulos deviam se tornar cada vez menores e que para conseguir isso a proporção comum r deveria se aproximar de 1. Deste modo, quando r tendesse para 1, a área A_r tornar-se-ia uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Fermat conseguiu contornar essa dificuldade percebendo que o denominador

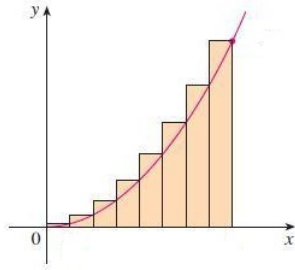


Figura 2.5: Aproximação por retângulos

$1 - r^{n+1}$ pode ser escrito na forma fatorada, ou seja,

$$1 - r^{n+1} = (1 - r)(1 + r + r^2 + \dots + r^n).$$

Substituindo na equação, temos

$$A_r = \frac{a^{n+1}(1 - r)}{(1 - r)(1 + r + r^2 + \dots + r^n)}$$

onde cancelando o fator $(1 - r)$ do numerador e denominador, obtemos

$$A_r = \frac{a^{n+1}}{1 + r + r^2 + \dots + r^n}.$$

Como para $r \rightarrow 1$, cada parcela do denominador tende a 1, a soma $S = r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$ é igual a $S = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$, o que resulta em

$$A_r = \frac{a^{n+1}}{1 + n}.$$

Diante dessa fórmula, qualquer estudante de cálculo, rapidamente reconhece essa equação como a integral $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Como o trabalho de Fermat foi realizado por volta de 1640, antes de Newton e Leibniz estabelecerem esta fórmula como parte do Cálculo Integral e Diferencial, esse foi considerado um grande avanço, porque conseguia a quadratura não apenas de uma curva, mas de toda família de curvas, fornecidas por $y = x^n$ para valores inteiros positivos de n .

Mesmo não conhecendo as ideias do Cálculo, Fermat faz uso de um conceito muito importante na integração que é o conceito de partição de um intervalo. A ideia de usar uma partição em que os subintervalos tenham seus extremos direitos em progressão geométrica torna possível a realização do somatório e, conseqüentemente, o cálculo da área. No que segue, estudaremos o problema de encontrar a área sob o gráfico de parábolas generalizadas, sob o ponto de vista de encontrar partições adequadas que nos remetam a somatórios que podemos calcular. Tais somatórios serão abordados segundo a teoria dos preenchimentos, já desenvolvida no capítulo anterior.

2.3 Função parabólica generalizada

Nesta seção definiremos as parábolas generalizadas e as áreas sob os gráficos de tais funções. Lembremos que uma função algébrica é uma função real obtida por combinações de somas e produtos de funções racionais; e em nosso estudo, consideraremos uma classe particular destas funções; aquelas que são combinações das funções e que chamaremos de parabólicas generalizadas.

Definição 2.3.1 *Uma função parabólica generalizada é uma função real de uma variável real x que a cada $x \in [0, +\infty)$ associa o valor $p(x) = x^n$, onde n é um número racional positivo.*

O exemplo a seguir mostra os gráficos de três funções parabólicas generalizadas:

Exemplo 2.3.2 *Função parabólica generalizada com expoente inteiro.*

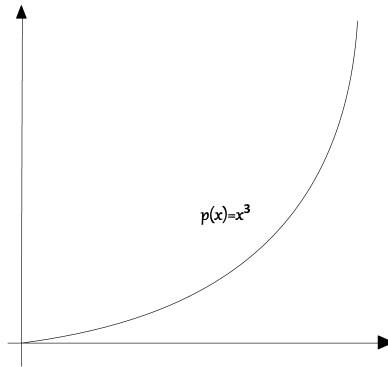


Figura 2.6: $p(x) = x^3$

Exemplo 2.3.3 *Função parabólica generalizada com expoente racional maior do que 1.*

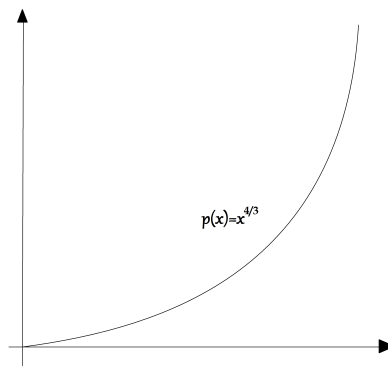


Figura 2.7: $p(x) = x^{4/3}$

Exemplo 2.3.4 *Função parabólica generalizada com expoente racional menor do que 1.*

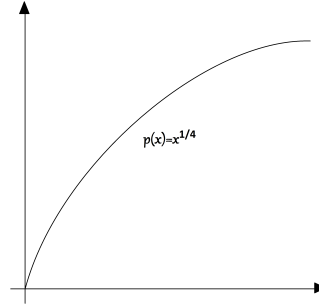


Figura 2.8: $p(x) = x^{1/4}$

Definição 2.3.5 *Uma combinação de funções parabólicas generalizadas é uma função algébrica do tipo,*

$$p(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x^{\beta_k},$$

onde $\alpha_k \in \mathbb{R}$ e β_k é um número racional para $k \in \{1, \dots, n\}$.

Definição 2.3.6 *Seja R a região do plano limitada pelas retas verticais $x = a > 0$, $x = b > 0$, o intervalo $[a, b]$ e o gráfico de p em $[a, b]$. Se p é uma função parabólica generalizada chamamos a região R de região parabólica.*

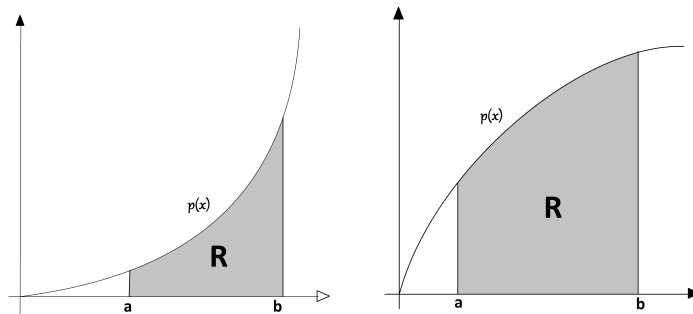


Figura 2.9: Região parabólica sob o gráfico de $p(x)$ em $[a, b]$

Após definir o que são regiões parabólicas, nosso próximo passo é construir as ideias de como aproximar a área dessas regiões. Para tanto, fá-lo-emos, utilizando-nos, sempre que possível, apenas de ferramentas da Matemática Básica. Em caso da necessidade da aplicação de algum conhecimento matemático em nível superior, não deixaremos de tratá-lo; entretanto realizaremos-lo de forma compreensível e sem muito rigor.

2.4 Partições, aproximações por falta e por excesso

Após entendermos a natureza de uma região parabólica vamos agora subdividir o domínio da função parabólica generalizada em partes iguais e fazer um estudo local das subregiões determinadas por cada uma dessas partes.

Definição 2.4.1 *Sejam $n - 1$ pontos, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in [a, b]$, com $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ e $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Dizemos que $\mathcal{P} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ determina uma partição de $[a, b]$. Quando os elementos de \mathcal{P} estão igualmente espaçados diremos que a partição é homogênea e, nesse caso, teremos $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$.*

A ideia, agora, é calcular aproximadamente, por excesso e por falta, a área de cada subregião parabólica determinada pela partição do intervalo $[a, b]$ e mostrar que, a partir desse conhecimento, podemos determinar uma estimativa para a área de qualquer região parabólica. Para tanto, escolheremos entre os n subintervalos determinados pela partição um subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, sobre o qual está determinada a subregião parabólica R_k , cuja área é $A(R_k)$.

Lema 2.4.2 *Funções parabólicas generalizadas são estritamente crescentes.*

Demonstração. Temos $f(x) = x^n$ com n racional positivo. Sejam x_1 e x_2 números reais positivos, temos que se $x_1 < x_2$ então $x_1^n < x_2^n$ onde $f(x_1) < f(x_2)$, o que prova que f é uma função estritamente crescente.

Proposição 2.4.3 *Sejam $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função parabólica generalizada e $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição homogênea de $[a, b]$. A área $A(R_k)$ da subregião R_k satisfaz as desigualdades,*

$$\frac{b-a}{n}p(x_{k-1}) \leq A(R_k) \leq \frac{b-a}{n}p(x_k),$$

para todo $1 \leq k \leq n$.

Demonstração. Sejam S_{k-1} a região retangular de base $[x_{k-1}, x_k]$ e altura $p(x_{k-1})$, S_k a região retangular de base $[x_{k-1}, x_k]$ e altura $p(x_k)$ e R_k a região abaixo do gráfico de p sobre $[x_{k-1}, x_k]$, veja figura abaixo

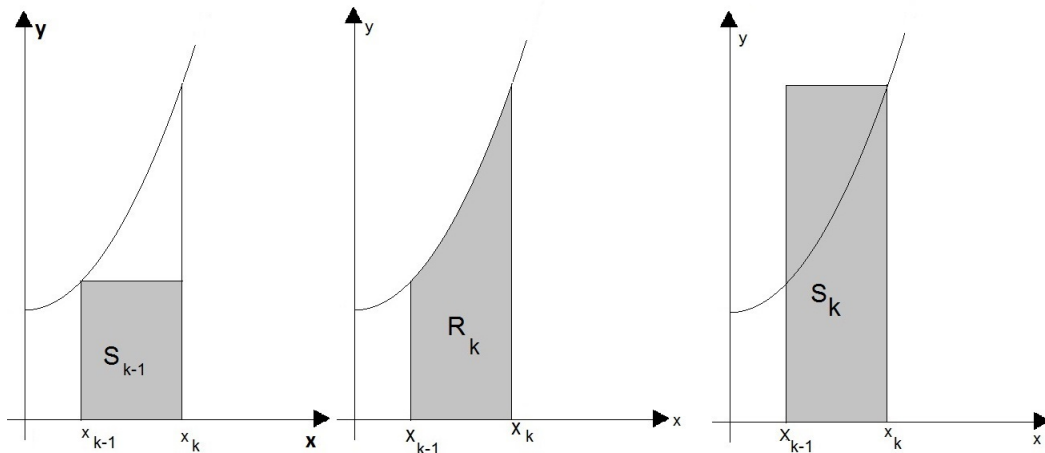


Figura 2.10: Aproximação por áreas

Geometricamente, observamos que

$$A(S_{k-1}) \leq A(R_k) \leq A(S_k)$$

Seja a função “área” dada por $a : [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{R}$ definida $a(x) = (x_{k-1}, x_k) p(x)$. Note que a função é estritamente crescente.

De fato, dados $x < y$ então $a(x) = (x_{k-1}, x_k) p(x) < (x_{k-1}, x_k) p(y) = a(y)$ pois p é estritamente crescente. Segue que, $a : [x_{k-1}, x_k] \rightarrow [A(S_{k-1}), A(S_k)]$ é bijetiva e como $A(R_k) \in [A(S_{k-1}), A(S_k)]$ existe $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que $a(c_k) = A(R_k)$.

Assim, desde que $a(x_{k-1}) \leq a(c_k) \leq a(x_k)$ temos

$$p(x_{k-1})\Delta x_k \leq A(R_k) \leq p(x_k)\Delta x_k$$

da definição 2.4.1 tem-se $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ segue que

$$p(x_{k-1})\frac{b-a}{n} \leq A(R_k) \leq p(x_k)\frac{b-a}{n}.$$

Dada uma região parabólica R associada a função parabólica generalizada $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e uma partição homogênea \mathcal{P} temos que a área de R é dada por

$$\sum_{k=1}^n A(R_k).$$

Isso motiva as definições a seguir.

Definição 2.4.4 *Seja $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função parabólica generalizada e $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição homogênea do intervalo $[a, b]$.*

Chamamos a soma

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} p(x_{k-1})$$

de aproximação por falta do valor da área de R .

A figura abaixo ilustra as subregiões cujo somatório das áreas é inferior ao da área da região R .

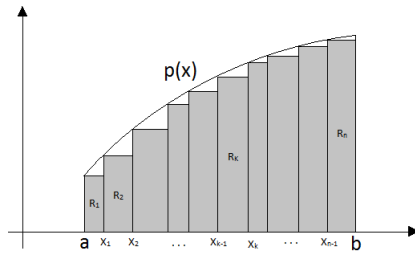


Figura 2.11: Aproximação por falta

Definição 2.4.5 *Seja $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função parabólica generalizada e $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição homogênea do intervalo $[a, b]$. Chamamos a soma*

$$S_+ = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} p(x_k)$$

de aproximação por excesso do valor da área de R .

A figura abaixo ilustra as subregiões cujo somatório das áreas é superior ao da área da região R .

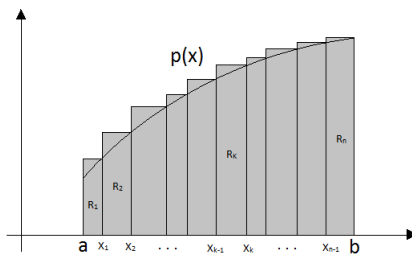


Figura 2.12: Aproximação por excesso

Exemplo 2.4.6 Para a função parabólica $p(x) = x^2$ definida em $[1, 2]$ com partição $\mathcal{P} = \{x_0 = 1 < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{2}{n} < \dots < 1 + \frac{n-1}{n} < x_n = 2\}$ temos

$$\begin{aligned}
 S_+ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2-k}{n}\right) p\left(1 + \frac{k}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+k}{n}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (n^2 + 2nk + k^2) \\
 &= \frac{1}{n^3} \left(n^2 \sum_{k=1}^n 1 + 2n \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n^3} (n^3 + 2n(1 + 2 + \dots + n) + (1 + 4 + \dots + n^2)) \\
 &= \frac{1}{n^3} \left(n^3 + 2n \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
 &= \frac{14n^3 + 9n^2 + n}{6n^3}
 \end{aligned}$$

Note que na penúltima igualdade foram usadas as conhecidas somas

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

e

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Procedendo da mesma forma encontramos

$$S_- = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2-k}{n}\right) p\left(1 + \frac{k-1}{n}\right) = \frac{14n^3 - 9n^2 + n}{6n^3}.$$

A tabela abaixo mostra o comportamento das somas S_+ e S_- à medida que n aumenta:

n	S_-	S_+
1	1	4
2	1,625	3,125
5	2,04	2,64
10	2,185	2,485
500	2,3303	2,3363
1000	2,3318	2,3348

Nesse momento, estamos mais interessados no procedimento usado para aproximar o número que representa a área do que no cálculo da área em si. Deve ficar claro que existe uma forte intuição de que este número exista e essa intuição deve ser usada para buscarmos os conteúdos necessários em nível da matemática básica para a solução do problema. Sem muito rigor e formalismo, um aluno do ensino médio é capaz de entender que à medida que n cresce S_- aumenta, mas não ultrapassa o valor exato da área; e S_+ diminui, mas também não atinge o valor exato da área; ou seja, o aluno estaria intuindo uma noção natural de convergência; de fato S_- e S_+ estariam de certo modo convergindo para o valor exato da área. Nesse sentido, algumas questões poderiam ser levantadas; as somas S_- e S_+ convergem para a área exata indiferentemente do modo com o qual se faça a partição? Vale para partições não homogêneas? E caso valha, sempre conseguiremos representar S_- e S_+ por somatórios finitos? No decorrer desse texto tentaremos resolver essas questões sem recorrer ao rigor matemático apresentado nos cursos de Cálculo; todavia faremos uma exposição das ideias buscando sempre uma justificativa precisa.

Exemplo 2.4.7 Vamos agora aplicar a mesma ideia para a região parabólica definida pela função $f(x) = \sqrt{x}$, no intervalo $[0, a]$, conforme figura abaixo:

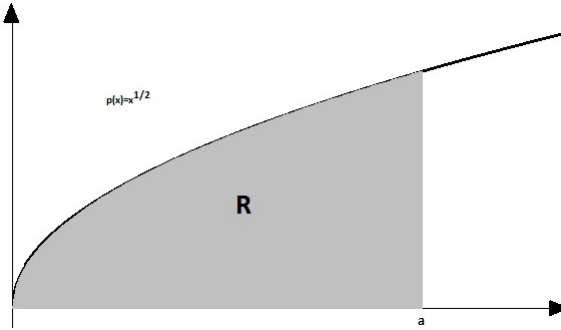


Figura 2.13: gráfico

Este exemplo mostra a primeira dificuldade que poderemos enfrentar. Se \mathcal{P} é uma partição homogênea do intervalo $[0, a]$, então as somas

$$S_- = \sum_{k=1}^n \binom{a}{n} \sqrt{\frac{k-1}{n}}$$

e

$$S_+ = \sum_{k=1}^n \binom{a}{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$$

podem se tornar muito complicadas. O ponto forte na definição de aproximação por falta e por excesso é o fato dos comprimentos dos intervalos Δx_k diminuírem na mesma proporção que n cresce; ou seja, o crescimento de n está atrelado à diminuição dos comprimentos dos intervalos. O problema de se considerar uma partição não homogênea é que poderíamos ter n crescendo e apenas alguns intervalos diminuindo de comprimento o que causaria problemas na aproximação. Uma estratégia, então, seria tomar partições não homogêneas nas quais pudéssemos manter essa propriedade de diminuição dos comprimentos dos Δx_k , à medida que n aumentasse.

Definição 2.4.8 Uma partição $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ goza da propriedade M se

$$\Delta x_1 \leq \Delta x_2 \leq \Delta x_3 \leq \dots \leq \Delta x_n,$$

onde Δx_n diminui a medida que n cresce.

Podemos, agora, dar uma definição um pouco mais abrangente para as aproximações por falta e por excesso.

Definição 2.4.9 Seja $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função parabólica generalizada e $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ que goza da propriedade M . Chamamos a soma

$$S_- = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} p(x_{k-1})$$

de aproximação por falta do valor da área de R .

Definição 2.4.10 Seja $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função parabólica generalizada e $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2, \dots, < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ que goza da propriedade M . Chamamos a soma

$$S_+ = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} p(x_k)$$

de aproximação por excesso do valor da área de R .

Voltando ao exemplo anterior, considere a partição não homogênea

$$\mathcal{P} = \left\{ 0 < \frac{a}{n^2} < \frac{4a}{n^2} < \dots < \frac{k^2 a}{n^2} < \dots < \frac{(n-1)^2 a}{n^2} < a \right\}.$$

Como se tornará claro, essa escolha foi feita de maneira a facilitar os cálculos com as raízes quadradas. Não é difícil ver que \mathcal{P} goza da propriedade M . Observe que, se $1 \leq i \leq n$, então Δx_k toma os seguintes valores:

$$\Delta x_1 = \frac{a-0}{n^2} = \frac{a}{n^2}, \Delta x_2 = \frac{4a-a}{n^2} = \frac{3a}{n^2},$$

$$\Delta x_3 = \frac{9a-4a}{n^2} = \frac{5a}{n^2}, \dots, \Delta x_n = \frac{n^2 a - (n-1)^2 a}{n^2} = \frac{(2n-1)a}{n^2}.$$

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}
S_- &= \sum_{k=1}^n \frac{ak^2 - a(k-1)^2}{n^2} \sqrt{\frac{(k-1)^2 a}{n^2}} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2ka - a}{n^2} \right) \left(\frac{k-1}{n} \right) \sqrt{a} \\
&= \frac{a\sqrt{a}}{n^3} \sum_{k=1}^n (2k^2 - 3k + 1) \\
&= \frac{a\sqrt{a}}{n^3} \left(2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\
&= \frac{a\sqrt{a}}{6n^3} (4n^3 - 3n^2 - n).
\end{aligned}$$

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned}
S_+ &= \sum_{k=1}^n \frac{ak^2 - a(k-1)^2}{n^2} \frac{k}{n} \sqrt{a} \\
&= \frac{a\sqrt{a}}{n^3} \sum_{k=1}^n (2k^2 - k) \\
&= \frac{a\sqrt{a}}{6n^3} (4n^3 + 3n^2 - n).
\end{aligned}$$

A tabela abaixo mostra o comportamento das somas S_+ e S_- à medida que n aumenta:

n	S_-	S_+
1	0	$a\sqrt{a}$
2	$0,375a\sqrt{a}$	$0,875a\sqrt{a}$
5	$0,56a\sqrt{a}$	$0,76a\sqrt{a}$
10	$0,615a\sqrt{a}$	$0,715a\sqrt{a}$
500	$0,6656a\sqrt{a}$	$0,06676a\sqrt{a}$
1000	$0,6661a\sqrt{a}$	$0,6672a\sqrt{a}$

Para estudarmos com mais precisão os valores de S_- e S_+ à medida que n aumenta, faz-se necessário o conceito de limite. No próximo capítulo estudaremos a ideia de limite sob um ponto de vista bem particular, e utilizando-nos das ideias de somatórios e partições desenvolvidas até aqui, calcularemos as áreas de nossas regiões parabólicas.

Capítulo 3

Áreas de regiões parabólicas

3.1 A ideia de limite

Um objeto muito interessante e curioso que aparece no cursos iniciais de Cálculo Diferencial é a expressão

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

que para valores de n muito grandes, ao contrário do que a intuição nos leva a pensar, aproxima-se do número irracional e , número de Euler, que vale aproximadamente 2,718281. Consideremos a expressão que está dentro dos parênteses, $1 + \frac{1}{n}$. Observe que à medida que n aumenta, $\frac{1}{n}$ fica cada vez menor e assim $1 + \frac{1}{n}$ fica cada vez mais próximo de 1, embora seja sempre maior que 1. Isso nos leva a pensar que para n muito grande $1 + \frac{1}{n}$ para todos os propósitos e funções podem ser substituídos por 1. Ora, se $1 + \frac{1}{n}$ for tão próximo de 1 quanto quisermos, ao ponto de considerarmos este valor como sendo 1, então $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para valores muito grandes de n , deve se aproximar de 1, pois 1^n é 1 não importando quão grande seja n . Por outro lado, se pensarmos de outra forma, saberemos que um número maior que 1 elevado n para n cada vez maior torna-se tão grande quanto quisermos. Como $1 + \frac{1}{n}$ é sempre maior que 1, podemos

concluir que na expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ quando n assumir valores muito grandes, a expressão vai crescer sem limites; isto é, atingirá o infinito. Observe que nas duas ideias usadas na solução do problema chegamos a dois resultados diferentes: na primeira, chegamos ao valor 1 e na segunda o resultado foi o ∞ (infinito). Bem, em Matemática, uma operação é dita válida se o resultado final, independente do processo de resolução é sempre o mesmo. Sendo assim, o que aconteceu de errado na estimativa da expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$? Na verdade, utilizamos de uma forma errônea um dos principais conceitos matemáticos: *o conceito de limite*.

O conceito de limite está presente ao longo da história da Matemática e foi fundamental para resolver problemas, que envolvem cálculo de área de uma região, a tangente de uma curva ou a soma de uma série infinita. Assim, quando dizemos que uma sequência de números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ tende para um limite L à medida que n tende para o infinito, estamos querendo dizer que os termos da sequência, a partir de um certo n_0 , ficam tão próximos do número L quanto quisermos. Em outras palavras, podemos fazer a diferença (em valor absoluto) entre a_n e L para $n > n_0$ tão pequena quanto quisermos.

Exemplo 3.1.1 *Dada a sequência $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ cujo termo geral é $a_n = 1/n$ podemos observar que à medida que n aumenta a_n fica cada vez mais próximo de 0. Isto significa que a diferença entre $1/n$ e o limite 0 pode tornar-se tão pequena quanto quisermos. A notação usada para exprimir a ideia de que o limite de uma sequência a_n tende para L quando n tende para o infinito é*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Porém, precisamos ter cuidado com esta expressão, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ nos diz que o limite de $\frac{1}{n}$ a medida que n cresce é igual a 0, mas deve ficar claro que a expressão não diz que $\frac{1}{n}$ é igual a zero para valor algum de n . Esta é a própria essência do limite: uma sequência de números pode se aproximar de um limite o quanto quisermos, mas nunca vai chegar até ele.

Definição 3.1.2 *Seja a sequência de números reais a_n , $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

se para $\epsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \epsilon$ sempre que $n > n_0$.

Não faremos um estudo aprofundado do conceito de limite nesse trabalho, a definição anterior combinada com as proposições a seguir serão suficientes para os nossos propósitos.

Proposição 3.1.3 *Seja a sequência $a_n = \frac{1}{n^p}$, $n, p \in \mathbb{N}$. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Demonstração. Com efeito, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, podemos obter um número natural n_0 com a propriedade que $\frac{1}{\sqrt[p]{\epsilon}} < n_0$, pois \mathbb{N} é ilimitado, e assim

$$\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| < \frac{1}{n_0^p} < \epsilon, \forall n > n_0.$$

Proposição 3.1.4 *Sejam a_n, b_n sequências de números reais e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

$$(a) \text{ Se } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \text{ então, } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existem n_1 e n_2 em \mathbb{N} , tais que $n > n_1 \Rightarrow |a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Logo, $n > n_0$ implica:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Isso prova que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$

(b) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ então, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n) = \alpha A$.

Demonstração. Se $\alpha = 0$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = 0 = \alpha A$. Suponhamos então $\alpha \neq 0$ e seja dado $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - A| < \frac{\epsilon}{|\alpha|}$. Segue que $n > n_0 \Rightarrow |\alpha a_n - \alpha A| = |\alpha| |a_n - A| < \frac{\epsilon \cdot |\alpha|}{|\alpha|} = \epsilon$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha) = \alpha$.

Demonstração. Se $\alpha = 0$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha = 0 = \alpha$. Supondo agora que $\alpha \neq 0$ e dado um $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |\alpha - \alpha| < \epsilon$. Segue que $n > n_0 \Rightarrow |\alpha - \alpha| = 0 < \epsilon$ o que demonstra $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha = \alpha$

Proposição 3.1.5 Seja $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n e $q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ um polinômio de grau m então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{p(x)}$$

é nulo se grau de q é menor do que o grau de p e vale $\frac{b_m}{a_n}$ se grau de q é igual ao grau de p .

Demonstração. Se $m < n$ teremos:

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$$

Colocando x^n em evidência, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{q(x)}{p(x)} &= \frac{x^n \left(\frac{b_m}{x^{n-m}} + \frac{b_{m-1}}{x^{n-(m-1)}} + \dots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n} \right)}{x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)} \\ &= \frac{\frac{b_m}{x^{m-n}} + \frac{b_{m-1}}{x^{m-(n-1)}} + \dots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}}{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}} \end{aligned}$$

então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{0 + 0 + \dots + 0 + 0}{a_n + 0 + \dots + 0 + 0} = \frac{0}{a_n} = 0$$

Se $m = n$, de modo análogo teremos:

$$\begin{aligned}\frac{q(x)}{p(x)} &= \frac{x^n \left(\frac{b_m}{x^{n-n}} + \frac{b_{m-1}}{x^{n-(n-1)}} + \dots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n} \right)}{x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)} \\ &= \frac{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}}{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}\end{aligned}$$

Segue que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{b_m + 0 + \dots + 0 + 0}{a_n + 0 + \dots + 0 + 0} = \frac{b_m}{a_n}.$$

Proposição 3.1.6 *Seja a função binomial $f(n) = \binom{n}{p}$. Então, o grau de f é p e o coeficiente do termo n^p é $\frac{1}{p!}$.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}f(n) &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-(p-1))(n-p)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-(p-1))}{p!}.\end{aligned}$$

Observe que o conjunto de p elementos distintos $\{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$ anula $f(n)$. Então concluímos que f tem grau p e coeficiente líder $\frac{1}{p!}$

Voltemos ao exemplo 2.4.6 no qual mostramos que as aproximações por excesso e por falta eram

$$S_- = \frac{14n^3 - 9n^2 + n}{6n^3} = \frac{7}{3} \left(1 - \frac{9}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

e

$$S_+ = \frac{14n^3 + 9n^2 + n}{6n^3} = \frac{7}{3} \left(1 + \frac{9}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

Pelas proposições 3.1.3 e 3.1.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_- = \frac{7}{3} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \right) = \frac{7}{3}$$

e, da mesma forma,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_+ = \frac{7}{3}.$$

Concluimos aplicando a proposição 2.4.3 na qual temos que a área da região parabólica em questão é $\frac{7}{3}$. Do mesmo modo, concluimos que a área da região parabólica do exemplo 2.4.7 é $\frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

3.2 Partições especiais do domínio de uma função parabólica generalizada

Nesta seção, generalizaremos a ideia usada nos exemplos 2.4.6 e 2.4.7 mostrando como encontrar partições adequadas onde os somatórios possam ser resolvidos e posteriormente aplicamos o método dos preenchimentos para determinar suas somas.

3.2.1 Funções parabólicas generalizadas com expoente natural

A estratégia a ser usada para o cálculo da área sob o gráfico de uma função parabólica generalizada $p(x) = x^n$ com expoente natural n definida no intervalo $[a, b]$ passa por fazer uma partição homogênea do intervalo $[a, b]$, compor as somas por falta e por excesso e aplicar o limite com $n \rightarrow \infty$. Nos problemas abaixo descreveremos os passos para encontrar as áreas desses tipos de regiões parabólicas.

Problema 1 Encontrar a área da região parabólica R limitada pelo gráfico de $p(x) = x^3$ em $[0, a]$, conforme figura abaixo.

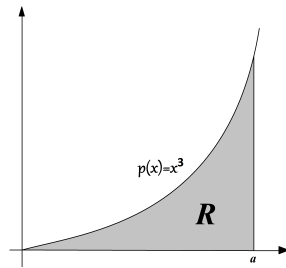


Figura 3.1: Região parabólica

Solução *Passo 1.* Em primeiro lugar determinamos uma partição de $[0, a]$ que nesse caso é a partição homogênea

$$\mathcal{P} = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1a}{n}, x_2 = \frac{2a}{n}, x_3 = \frac{3a}{n}, \dots, x_k = \frac{ka}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)a}{n}, x_n = a \right\}.$$

Passo 2. Determinamos as aproximações por excesso e por falta para a subregião parabólica R_k definida no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, conforme figura abaixo.

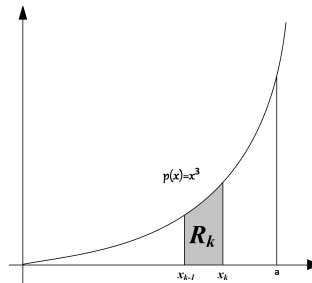


Figura 3.2: Subregião parabólica

Como ficará claro não fará diferença entre escolher uma aproximação por excesso ou por falta pois ambas convergirão para o valor exato da área. Seja, então, a aproximação por excesso da área da subregião R_k dada por $\frac{ka - (k-1)a}{n} \left(\frac{ka}{n} \right)^3 = \left(\frac{a}{n} \right)^4 k^3$.

Passo 3. Escrevemos a soma por excesso S_+ que nesse caso é

$$\begin{aligned} S_+ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{a}{n}\right)^4 k^3 \\ &= \left(\frac{a}{n}\right)^4 \sum_{k=1}^n k^3 \end{aligned}$$

Passo 4. Escrevemos a potência k^3 de maneira única em função dos preenchimentos.

$$\begin{aligned} k^3 &= k^2 \binom{k}{1} \\ &= k \binom{k}{1} \binom{k}{1} \\ &= k \left(\binom{k}{1} + 2 \binom{k}{2} \right) \\ &= k \binom{k}{1} + 2k \binom{k}{2} \\ &= \binom{k}{1} + 2 \binom{k}{2} + 2 \left(2 \binom{k}{2} + 3 \binom{k}{3} \right) \\ &= \binom{k}{1} + 2 \binom{k}{2} + 4 \binom{k}{2} + 6 \binom{k}{3} \\ &= \binom{k}{1} + 6 \binom{k}{2} + 6 \binom{k}{3}. \end{aligned}$$

Passo 5. Determinamos a soma iniciada no passo 3.

$$\begin{aligned} S_+ &= \left(\frac{a}{n}\right)^4 \sum_{k=1}^n \left(\binom{k}{1} + 6 \binom{k}{2} + 6 \binom{k}{3} \right) \\ &= \left(\frac{a}{n}\right)^4 \left(\binom{n+1}{2} + 6 \binom{n+1}{3} + 6 \binom{n+1}{4} \right) \end{aligned}$$

Passo 6. Aplicando as proposições 3.1.5 e 3.1.6, podemos encontrar o limite de S_+ quando $n \rightarrow \infty$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} S_+ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{a}{n} \right)^4 \binom{n+1}{2} + 6 \left(\frac{a}{n} \right)^4 \binom{n+1}{3} + 6 \left(\frac{a}{n} \right)^4 \binom{n+1}{4} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 6a^4 \text{coef} \binom{n+1}{4} \frac{n^{\text{grau} \binom{n+1}{4}}}{n^4} \\
 &= \frac{6a^4}{4!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^4} \\
 &= \frac{a^4}{4}
 \end{aligned}$$

Problema 2 Apenas mostraremos geometricamente como encontrar a área da região parabólica R limitada pelo gráfico de $p(x) = x^4$ em $[a, b]$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ conforme figura abaixo.

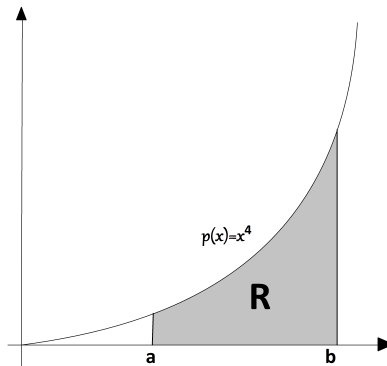


Figura 3.3: Região parabólica

A estratégia aqui é calcular a área da região parabólica sob o gráfico de $p(x) = x^4$ em $[0, b]$ e subtrair a área da região parabólica sob o gráfico de $p(x) = x^4$ em $[0, a]$, conforme o que foi feito no problema 1. Veja figura a seguir

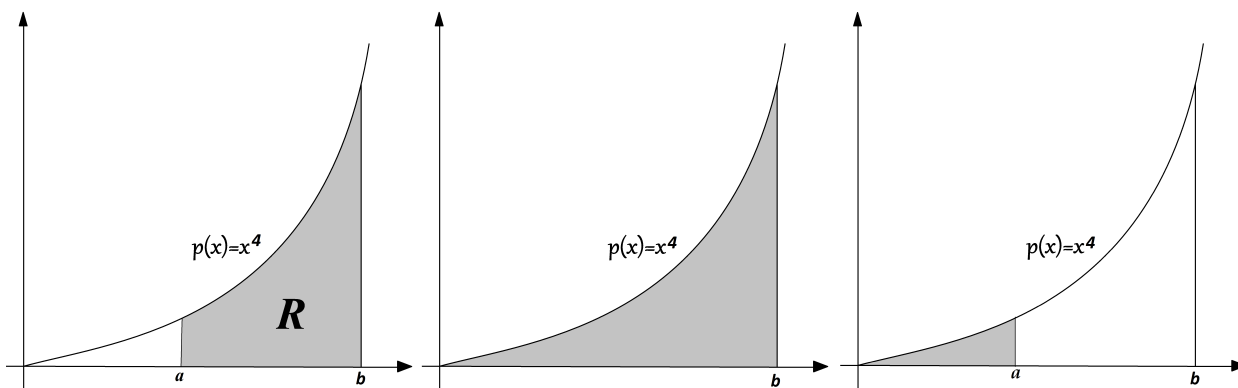
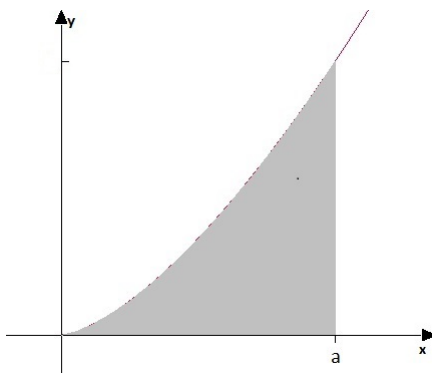


Figura 3.4: Área como diferença entre áreas

3.2.2 Funções parabólicas generalizadas com expoente racional

Para regiões parabólicas definidas por funções parabólicas generalizadas com expoente racional não mais usaremos partições homogêneas, pois essas produzem somatórios com radicais. A estratégia aqui é encontrar uma partição que elimine os radicais. Seja, então, a função parabólica generalizada $p(x) = x^{\frac{p}{q}}$ com p e q naturais, definida no intervalo $[a, b]$. O problema 3, que passaremos a descrever, mostra como tratarmos a dificuldade do expoente racional.

Problema 3 Encontrar a área da região parabólica R limitada pelo gráfico de $p(x) = x^{\frac{3}{2}}$ em $[0, a]$.



Solução *Passo 1.* Em primeiro lugar, determinamos uma partição adequada de $[0, a]$. Como já foi dito uma partição homogênea

$$\mathcal{P} = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1a}{n}, x_2 = \frac{2a}{n}, x_3 = \frac{3a}{n}, \dots, x_k = \frac{ka}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)a}{n}, x_n = a \right\},$$

produziria uma aproximação por excesso da área da subregião R_k dada por

$$\frac{ka - (k-1)a}{n} \left(\frac{ka}{n} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{a}{n} \right)^{\frac{5}{2}} k^{\frac{3}{2}}.$$

Fica claro que o somatório $\sum_{k=1}^n \left(\frac{a}{n} \right)^{\frac{5}{2}} k^{\frac{3}{2}}$ não pode ser calculado com a teoria aqui desenvolvida.

Para encontrar uma partição adequada observe que o denominador do expoente é dois, logo podemos contornar o problema das parcelas com raiz quadrada no somatório simplesmente procurando por uma partição cujos termos sejam quadráticos. Uma partição com essa característica é

$$\mathcal{P} = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1a}{n^2}, x_2 = \frac{4a}{n^2}, x_3 = \frac{9a}{n^2}, \dots, x_k = \frac{k^2a}{n^2}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)^2a}{n^2}, x_n = a \right\}.$$

Passo 2. Com essa partição a aproximação por excesso da área da subregião R_k é dada por

$$\frac{k^2a - (k-1)^2a}{n^2} \left(\frac{k^2a}{n^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^{\frac{5}{2}}}{n^5} (2k^4 - k^3).$$

Passo 3. A aproximação da área por excesso é

$$\begin{aligned} S_+ &= \sum_{k=1}^n \frac{a^{\frac{5}{2}}}{n^5} (2k^4 - k^3) \\ &= \frac{a^{\frac{5}{2}}}{n^5} \sum_{k=1}^n (2k^4 - k^3) \end{aligned}$$

Passo 4. Usando as representações

$$k^3 = \binom{k}{1} + 6\binom{k}{2} + 6\binom{k}{3} \text{ e } k^4 = \binom{k}{1} + 14\binom{k}{2} + 36\binom{k}{3} + 24\binom{k}{4} \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} S_+ &= \frac{a^{\frac{5}{2}}}{n^5} \sum_{k=1}^n (2k^4 - k^3) \\ &= \frac{a^{\frac{5}{2}}}{n^5} \left(2\binom{n+1}{2} + 28\binom{n+1}{3} + 72\binom{n+1}{4} + 48\binom{n+1}{5} - \binom{n+1}{2} - 6\binom{n+1}{3} - 6\binom{n+1}{4} \right) \\ &= \frac{a^{\frac{5}{2}}}{n^5} \left(\binom{n+1}{2} + 22\binom{n+1}{3} + 66\binom{n+1}{4} + 48\binom{n+1}{5} \right). \end{aligned}$$

Passo 5. Aplicando as proposições 3.1.5 e 3.1.6 podemos encontrar o limite de S_+ quando $n \rightarrow \infty$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_+ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{5}{2}}}{n^5} \left(\binom{n+1}{2} + 22\binom{n+1}{3} + 66\binom{n+1}{4} + 48\binom{n+1}{5} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{48a^{\frac{5}{2}}}{5!} \text{coef} \binom{n+1}{5} \frac{n^{\text{grau}(\frac{n+1}{5})}}{n^5} \\ &= \frac{2a^{\frac{5}{2}}}{5}. \end{aligned}$$

3.3 Fórmula geral para a área de regiões parabólicas

Já possuímos todo o conhecimento necessário para descrever as fórmulas que nos dão as áreas sob os graficos de funções parabólicas generalizadas com expoentes inteiro e racional. Finalizaremos este trabalho enunciando e demonstrando tais resultados.

3.3.1 O caso com expoente natural

Teorema 3.3.1 *Seja $p(x) = x^m$ uma função parabólica generalizada com expoente natural m . A área A sob o gráfico de p definida no intervalo $[a, b]$ é dada por*

$$A = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m + 1}.$$

Demonstração. Inicialmente, note que a área sobre $[a, b]$ é dada por uma diferença de áreas, a área sob $[0, b]$ menos a área sob $[0, a]$. Seja, então, a partição homogênea $\mathcal{P} = \{x_0 = 0, x_1 = \frac{b}{n}, x_2 = \frac{2b}{n}, \dots, x_k = \frac{kb}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)b}{n}, x_n = b\}$ de $[0, b]$. As aproximações por excesso das áreas das subregiões R_k são dadas por

$$\frac{b}{n} \left(\frac{kb}{n} \right)^m.$$

A aproximação por excesso da área A é dada por

$$S_+ = \left(\frac{b}{n} \right)^{m+1} \sum_{k=1}^n k^m.$$

A representação binomial de k^m é dada por

$$k^m = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{1} + \begin{bmatrix} 2 \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{2} + \dots + \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{k}$$

que, como foi mostrada, vale para $k \leq m$. Para $k > m$ os preenchimentos $\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$ são nulos onde a representação binomial expandida de k^m é dada por

$$k^m = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{1} + \begin{bmatrix} 2 \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{2} + \dots + \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{m} \quad (3.1)$$

e vale para todo $k, m \in \mathbb{N}$. De 3.1 segue que

$$\begin{aligned} S_+ &= \left(\frac{b}{n} \right)^{m+1} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{1} + \begin{bmatrix} 2 \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{2} + \dots + \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{m} \right) \\ &= \left(\frac{b}{n} \right)^{m+1} \left(\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{1} + \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} 2 \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{2} + \dots + \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{m} \right) \\ &= \left(\frac{b}{n} \right)^{m+1} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} + \begin{bmatrix} 2 \\ m \end{bmatrix} \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} + \dots + \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{m} \right). \end{aligned}$$

Aplicando a proposição 1.3.4 nos binomiais, segue que:

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^{m+1} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{n+1}{2} + \begin{bmatrix} 2 \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{n+1}{3} + \cdots + \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{n+1}{m+1} \right)$$

onde

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_+ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{n}\right)^{m+1} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{n+1}{2} + \begin{bmatrix} 2 \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{n+1}{3} + \cdots + \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \cdot \binom{n+1}{m+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} b^{m+1} \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \frac{\text{coef.}_{(m+1)} n^{\text{grau}_{(m+1)}}}{n^{m+1}} \\ &= b^{m+1} \frac{m!}{(m+1)!} \\ &= \frac{b^{m+1}}{m+1}. \end{aligned}$$

Com o mesmo argumento chegamos à conclusão de que a área da região parabólica sob o gráfico da função parabólica generalizada definida sob o intervalo $[0, a]$ é dada por $\frac{a^{m+1}}{m+1}$ onde concluímos que a área sob o intervalo $[a, b]$ é dada por $\frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$.

3.3.2 O caso com expoente racional

Teorema 3.3.2 *Seja $p(x) = x^{\frac{p}{q}}$ uma função parabólica generalizada com expoente racional $\frac{p}{q}$. A área A sob o gráfico de p definida no intervalo $[a, b]$ é dada por*

$$A = \frac{q(b^{\frac{p}{q}+1} - a^{\frac{p}{q}+1})}{p+q}.$$

Demonstração. Da mesma forma que na demonstração do teorema anterior, a área sob $[a, b]$ é dada por uma diferença de áreas, a área sob $[0, b]$ menos a área sob $[0, a]$. Seja, então, a partição não homogênea

$\mathcal{P} = \{x_0 = 0, x_1 = \frac{b}{n^q}, x_2 = \frac{2^q b}{n^q}, \dots, x_k = \frac{k^q b}{n^q}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)^q b}{n^q}, x_n = b\}$ de $[0, b]$. As aproximações por excesso das áreas das subregiões R_k são dadas por

$$\begin{aligned}
Área(R_k) &= \frac{b(k^q - (k-1)^q)}{n^q} \left(\frac{k^q b}{n^q}\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= \frac{b^{1+\frac{p}{q}}}{n^{p+q}} \left(\binom{q}{1} k^{q+p-1} - \binom{q}{2} k^{q+p-2} + \dots + (-1)^{q-1} \binom{q}{q-1} k^{p+1} + (-1)^q \binom{q}{q} k^p \right) \\
&= \frac{b^{1+\frac{p}{q}}}{n^{p+q}} \left\{ \binom{q}{1} \sum_{i=1}^{q+p-1} \begin{bmatrix} i \\ q+p-1 \end{bmatrix} \binom{k}{i} - \binom{q}{2} \sum_{i=1}^{q+p-2} \begin{bmatrix} i \\ q+p-2 \end{bmatrix} \binom{k}{i} + \right. \\
&\quad \left. + \dots + (-1)^{q-1} \binom{q}{q-1} \sum_{i=1}^{p+1} \begin{bmatrix} i \\ p+1 \end{bmatrix} \binom{k}{i} + (-1)^q \binom{q}{q} \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} i \\ p \end{bmatrix} \binom{k}{i} \right\}.
\end{aligned}$$

(3.3)

Assim a aproximação da área por excesso é dada por

$$\begin{aligned}
S_+ &= \sum_{k=1}^n \frac{b^{1+\frac{p}{q}}}{n^{p+q}} \left\{ \binom{q}{1} \sum_{i=1}^{q+p-1} \begin{bmatrix} i \\ q+p-1 \end{bmatrix} \binom{k}{i} - \binom{q}{2} \sum_{i=1}^{q+p-2} \begin{bmatrix} i \\ q+p-2 \end{bmatrix} \binom{k}{i} + \right. \\
&\quad \left. + \dots + (-1)^{q-1} \binom{q}{q-1} \sum_{i=1}^{p+1} \begin{bmatrix} i \\ p+1 \end{bmatrix} \binom{k}{i} + (-1)^q \binom{q}{q} \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} i \\ p \end{bmatrix} \binom{k}{i} \right\} \\
&= \frac{b^{1+\frac{p}{q}}}{n^{p+q}} \left\{ \binom{q}{1} \sum_{i=1}^{q+p-1} \begin{bmatrix} i \\ q+p-1 \end{bmatrix} \binom{n+1}{i+1} - \binom{q}{2} \sum_{i=1}^{q+p-2} \begin{bmatrix} i \\ q+p-2 \end{bmatrix} \binom{n+1}{i+1} + \right. \\
&\quad \left. + \dots + (-1)^{q-1} \binom{q}{q-1} \sum_{i=1}^{p+1} \begin{bmatrix} i \\ p+1 \end{bmatrix} \binom{n+1}{i+1} + (-1)^q \binom{q}{q} \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} i \\ p \end{bmatrix} \binom{n+1}{i+1} \right\}.
\end{aligned}$$

Basta agora observar que a parcela de maior grau ocorre em $\binom{q}{1} \sum_{i=1}^{q+p-1} \begin{bmatrix} i \\ q+p-1 \end{bmatrix} \binom{n+1}{i+1}$ para $i = q+p-1$, ou seja, é no termo $\binom{q}{1} \begin{bmatrix} q+p-1 \\ q+p-1 \end{bmatrix} \binom{n+1}{q+p}$. Calculando o limite de S_+ quando $n \rightarrow \infty$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{1+\frac{p}{q}}}{n^{p+q}} \left\{ \binom{q}{1} \begin{bmatrix} q+p-1 \\ q+p-1 \end{bmatrix} \binom{n+1}{q+p} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{qb^{1+\frac{p}{q}}(q+p-1)!}{(p+q)!} \binom{q}{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\text{grau}_{q+p}^{(n+1)}}}{n^{p+q}} \\
&= \frac{qb^{\frac{p}{q}+1}}{p+q}.
\end{aligned}$$

Com o mesmo raciocínio encontramos que a área sob o gráfico de $p(x) = x^{p/q}$ em $[0, a]$ é $\frac{qa^{\frac{p}{q}+1}}{p+q}$; concluímos então, que a área sob o intervalo $[a, b]$ é

$$A = \frac{q(b^{\frac{p}{q}+1} - a^{\frac{p}{q}+1})}{p+q}.$$

Na fórmula obtida acima, fazendo $\frac{p}{q} = n$ podemos obter o Teorema 3.3.1. De fato, ao substituirmos $\frac{p}{q} = n$ na fórmula $A = \frac{q(b^{\frac{p}{q}+1} - a^{\frac{p}{q}+1})}{p+q}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\frac{p}{n}(b^{n+1} - a^{n+1})}{p + \frac{p}{n}} \\
&= \frac{\frac{p}{n}(b^{n+1} - a^{n+1})}{\frac{np+p}{n}} \\
&= \frac{\frac{p}{n}(b^{n+1} - a^{n+1})}{\frac{p(n+1)}{n}} \\
&= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

3.4 Área sob o gráfico de funções algébricas

Finalizamos este trabalho mostrando como encontrar a área sob o gráfico de uma função algébrica do tipo dado na definição a seguir.

Definição 3.4.1 Uma combinação de funções parabólicas generalizadas é uma função algébrica do tipo,

$$p(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k x^{\beta_k},$$

onde $\alpha_k \in \mathbb{R}$ e β_k é um número racional para $k \in \{1, \dots, m\}$.

Teorema 3.4.2 Seja a função algébrica $p(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k x^{\beta_k}$ definida em $[a, b]$, onde $\alpha_k \in \mathbb{R}$ e β_k é um número racional para $k \in \{1, \dots, m\}$. Se $p(x)$ é positiva em $[a, b]$ e A_k é o valor da área da região sob o gráfico de $p_k(x) = x^{\beta_k}$ em $[a, b]$, então o valor

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k A_k$$

representa a área da região sob o gráfico de $p(x)$ em $[a, b]$.

Demonstração. Seja a partição \mathcal{P} do intervalo $[0, a]$ dada por

$$\mathcal{P} = \left\{0, \frac{b}{n^q}, \frac{2^q b}{n^q}, \frac{3^q b}{n^q}, \dots, \frac{k^q b}{n^q}, \dots, \frac{(n-1)^q b}{n^q}, b\right\}$$

onde $q = mmc\{q_1, \dots, q_m\}$ para $\beta_k = \frac{p_k}{q_k}$, $k = 1, \dots, m$. Do Teorema 3.3.2 segue que as aproximações por excesso das áreas das subregiões R_k são dadas por

$$\frac{b(k^q - (k-1)^q)}{n^q} \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(\frac{k^q b}{n^q}\right)^{\frac{p_j}{q_j}} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j b^{1+\frac{p_j}{q_j}}}{n^{s_j+q}} (k^q - (k-1)^q) k^{s_j}$$

onde $s_j = \frac{qp_j}{q_j}$ e a aproximação por excesso da área é dada por

$$\begin{aligned} S_+ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j b^{1+\frac{p_j}{q_j}}}{n^{s_j+q}} (k^q - (k-1)^q) k^{s_j} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j b^{1+\frac{p_j}{q_j}}}{n^{s_j+q}} \left\{ \binom{q}{1} \sum_{i=1}^{q+s_j-1} \begin{bmatrix} i \\ q+s_j-1 \end{bmatrix} \binom{n+1}{i+1} - \binom{q}{2} \sum_{i=1}^{q+s_j-2} \begin{bmatrix} i \\ q+s_j-2 \end{bmatrix} \binom{n+1}{i+1} \right. \\ &\quad \left. + \dots + (-1)^{q-1} \binom{q}{q-1} \sum_{i=1}^{s_j+1} \begin{bmatrix} i \\ s_j+1 \end{bmatrix} \binom{n+1}{i+1} + (-1)^q \binom{q}{q} \sum_{i=1}^{s_j} \begin{bmatrix} i \\ s_j \end{bmatrix} \binom{n+1}{i+1} \right\}. \end{aligned}$$

Basta agora observar que a parcela de maior grau ocorre em $\binom{q}{1} \sum_{i=1}^{q+s_j-1} \binom{i}{q+s_j-1} \binom{n+1}{i+1}$ para $i = q + s_j - 1$, ou seja, no termo $\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j b^{1+\frac{p_j}{q_j}}}{n^{s_j+q}} \binom{q}{1} \binom{q+s_j-1}{q+s_j-1} \binom{n+1}{q+s_j}$. Calculando o limite de S_+ quando $n \rightarrow \infty$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_+ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j b^{1+\frac{p_j}{q_j}}}{n^{s_j+q}} \binom{q}{1} \binom{q+s_j-1}{q+s_j-1} \binom{n+1}{q+s_j} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{q \alpha_j b^{1+\frac{p_j}{q_j}} (q+s_j-1)!}{(s_j+q)!} \binom{q}{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\text{grau}(n+1)}}{n^{q+s_j}} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{q \alpha_j b^{\frac{p_j}{q_j}+1}}{q+s_j} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j q_j b^{\frac{p_j}{q_j}+1}}{q_j+p_j}. \end{aligned}$$

Da mesma forma obtemos que a área sob o gráfico de $p(x)$ em $[0, a]$ é $\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j q_j a^{\frac{p_j}{q_j}+1}}{q_j+p_j}$ onde concluimos que a área sob o gráfico de $p(x)$ em $[a, b]$ é $\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j q_j (b^{\frac{p_j}{q_j}+1} - a^{\frac{p_j}{q_j}+1})}{q_j+p_j}$. Segue do teorema ?? que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j q_j (b^{\frac{p_j}{q_j}+1} - a^{\frac{p_j}{q_j}+1})}{q_j+p_j} &= \frac{\alpha_1 q_1 (b^{\frac{p_1}{q_1}+1} - a^{\frac{p_1}{q_1}+1})}{q_1+p_1} + \dots + \frac{\alpha_m q_m (b^{\frac{p_m}{q_m}+1} - a^{\frac{p_m}{q_m}+1})}{q_m+p_m} \\ &= \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j A_j. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Proposta de atividades para o Ensino Médio

O estudo desenvolvido até o momento pode ser trabalhado com os alunos do Ensino Médio através de atividades que relacionam conteúdos de Matemática Básica. Nas seções que seguem, listaremos algumas atividades e propostas de abordagem das mesmas para que alguns conteúdos de matemática a nível do ensino médio sejam estudados, pois o mais importante é o aluno compreender mesmo que de maneira intuitiva, a ideia de calcular área curvas limitadas sob gráficos de funções, como por exemplo a **parábola**

4.1 Proposta de Atividade-Preenchimentos

Atividade 1 Começamos com um exemplo simples, apenas para que os alunos se familiarizem com a simbologia, nomenclatura e o cálculo do preenchimento. O professor pode iniciar a resolução propondo aos alunos a resolução utilizando a Análise Combinatória e em seguida utilizar a fórmula do preenchimento, chamando atenção para o fato de que o preenchimento não

corresponde a anagramas ou combinações.

Na atividade que segue, estudaremos as possibilidades de formação da sequência, da mesma forma que estudamos em Análise Combinatória

Dado o conjunto $P = \{A, B, C\}$, determinar o número de sequências com 4 termos em que apareçam todos os elementos do conjunto P

Temos $n = 3$ elementos com $p = 4$ termos, ou seja calculando $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$

$$\underline{A} \underline{A} \underline{B} \underline{C} \text{ temos } \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

$$\underline{B} \underline{B} \underline{A} \underline{C} \text{ temos } \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

$$\underline{C} \underline{C} \underline{A} \underline{B} \text{ temos } \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

Logo, o número de sequências de 4 termos e 3 elementos é igual a 36

Após a resolução utilizando Análise Combinatória, o professor pode inserir a resolução através da fórmula do preenchimento. No exemplo temos $n = 3$ elementos com $p = 4$ termos, então

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \right] &= \binom{3}{0}(3-0)^4 - \binom{3}{1}(3-1)^4 + \binom{3}{2}(3-2)^4 + \binom{3}{3}(3-3)^4 \\ &= 1 \cdot 3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 1^4 - 1 \cdot 0^4 \\ &= 81 - 3 \cdot 16 + 3 \\ &= 81 - 48 + 3 \\ &= 36 \end{aligned}$$

E como exercícios o professor pode sugerir o cálculo de $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix} \right]$.

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix} \right] &= \binom{2}{0}(2-0)^6 - \binom{2}{1}(2-1)^6 + \binom{2}{2}(2-2)^6 \\ &= 1 \cdot 2^6 - 2 \cdot 1^6 + 1 \cdot 0^6 \\ &= 64 - 2 + 0 = 6 \end{aligned}$$

Após comparar os resultados, o professor pode fazer a seguinte observação: Nesse exemplo foi utilizada a Análise Combinatória para calcular preenchimento porque o conjunto tem poucos elementos, no entanto, com o número maior de elementos os cálculos ficariam muito longos, sendo mais viável a aplicação dessa fórmula.

Atividade 2 Nessa atividade o professor usará a teoria dos preenchimentos para obter uma fórmula de recorrência para somatórios de potências, assim como as já conhecidas.

Calcular a soma dos cubos n primeiros termos dos números naturais.

1º passo-Tomando S como a soma desses números, temos

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3$$

onde podemos escrever,

$$\sum_{k=1}^n k^3$$

2º passo- Aqui o professor pode mostrar que será utilizado o teorema

$$n \binom{n}{p} = p \binom{n}{p} + (p+1) \binom{n}{p+1}$$

De fato,

$k^2 = k.k$ e $k = \binom{k}{1}$ onde podemos escrever $k^2 = k \cdot \binom{k}{1}$. Assim $k^2 = 1 \binom{k}{1} + 2 \binom{k}{2}$ e como $k^3 = k.k^2$ e obtemos $k^3 = k \cdot \left(1 \binom{k}{1} + 2 \binom{k}{2} \right)$ e novamente aplicando o Teorema,

$$k^3 = \binom{k}{1} + 6 \binom{k}{2} + 6 \binom{k}{3}$$

3º passo- Voltando ao somatório:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{k}{1} + 6\binom{k}{2} + 6\binom{k}{3} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} + \sum_{k=1}^n 6\binom{k}{2} + \sum_{k=1}^n 6\binom{k}{3}\end{aligned}$$

4º passo -Nesse momento o professor deve mostrar aos alunos a aplicação do Teorema das Colunas da Teoria Binomial

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^3 &= \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4} \\ &= \mathbf{1} \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + \mathbf{6} \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} + \mathbf{6} \frac{(n+1)!}{4!(n-3)!} \\ &= \mathbf{1} \frac{(n+1)n}{2} + \mathbf{6} \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \mathbf{6} \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}\end{aligned}$$

5º passo- Aplicando o m.m.c e efetuando as operações chegamos ao seguinte resultado,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Agora , o professor fazer o mesmo exercício enfatizando que os coeficientes da representação binomial de calcular a potência k^3 , nada mais são que os elementos da terceira linha do triângulo do preenchimento.

4.2 Proposta de atividade-Cálculo de áreas

Nessa atividade o professor poderá introduzir a ideia de partição de um intervalo, destacar como podemos aproximar a área ,por áreas de faixas retangulares definidas na partição e despertar

a intuição dos alunos para o fato de que as somas dessas áreas retangulares de certo modo convergem para a área da região.

Atividade 3 Calcule a área da região sob o gráfico de $p(x) = x^2$ definida em $[0, 1]$.

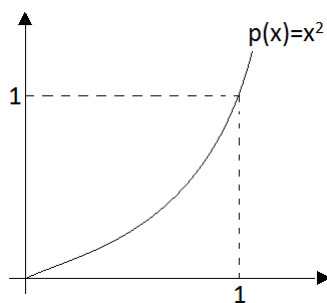


Figura 4.1: função generalizada

1º passo—Após determinar uma partição no intervalo $[0, 1]$ e construir as faixas retangulares com base nos subintervalos da partição, o professor pode mostrar que essa construção pode ser feita por excesso e por falta e que o valor da área procurada fica compreendido entre as somas dos valores das áreas dos retângulos inferiores e superiores.

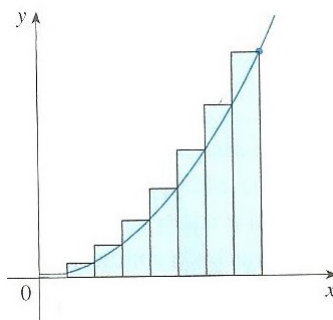


Figura 4.2: gráfico

2º passo-O professor pode utilizar-se dos exemplos anteriores para calcular as somas das áreas.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 < A < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k^2$$

3º passo-Tomando S_i como a soma das áreas dos retângulos inferiores e S_e a soma das áreas dos retângulos superiores, aplicamos o preenchimento no desenvolvimento do somatório, temos

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{k}{1} + 2 \binom{k}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{1} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n^3} \left(\binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} \right) \end{aligned}$$

4º passo- Nesse momento a ideia de limite é introduzida, para calcular o limite de S_i

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left(\binom{k}{2} + 2 \binom{k}{3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left(\binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \binom{n}{2} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \binom{n}{3} \end{aligned}$$

5º passo- O professor pode tratar de funções parabólicas generalizadas, bem como mostrar que o grau do polinômio que expressa a função binomial $\binom{n}{p}$ é igual a p e seu coeficiente líder é $\frac{1}{p!}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n^3} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{coef} \binom{n}{2} n^{\text{grau}(2)} + \frac{1}{n^3} \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \text{coef} \binom{n}{3} n^{\text{grau}(3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{2!} \cdot n^2 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{3!} n^3 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ao calcularmos S_e , vamos obter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left(\binom{n+1}{2} + 2 \binom{n+1}{3} \right)$$

Analogamente, concluímos que $S_e = \frac{1}{3}$

Segue que a área da região é $A = \frac{1}{3}$

Atividade 4 Calcule a área da região sob o gráfico de $p(x) = 3x^3 + 2\sqrt{x} + 1$ em $[0, 1]$.

Nessa atividade, abordaremos as ideias já conhecidas: partição, limites, preenchimento, somatórios. No cálculo de área de funções algébricas, o objetivo é fazer com que o aluno perceba que é interessante resolver problemas mais simples, pois isto facilitará a resolução de outros problemas aparentemente mais complicados.

A função algébrica apresentada no exemplo é do tipo $p(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x^{\beta_k}$, onde a fórmula geral foi obtida no capítulo anterior

Seja $A(R)$ a área sob o gráfico da função $p(x) = 3x^3 + 2\sqrt{x} + 1$

Fazendo $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{x}$, e $h(x) = 1$ e $A(R_1)$, $A(R_2)$ e $A(R_3)$ sendo respectivamente as áreas das regiões sob os gráficos das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ temos pelo Teorema 3.4.2 que

$$A(R) = 3A(R_1) + 2A(R_2) + A(R_3)$$

O professor pode sugerir o cálculo da área de cada região separadamente, então obterá $A(R)$
 Como já foi visto, a área sob o gráfico da função $f(x) = x^3$ é dada por

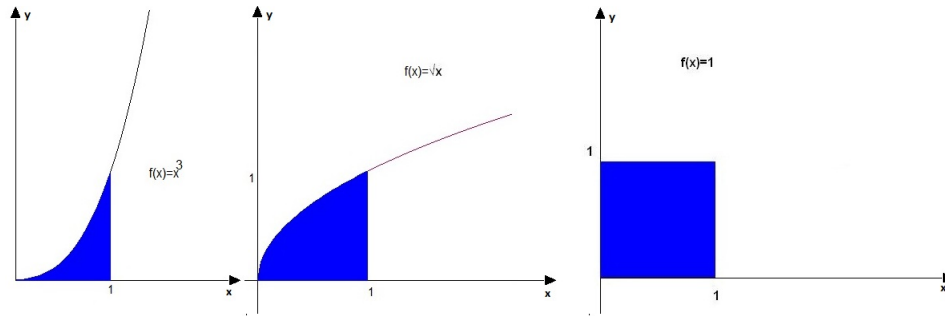


Figura 4.3: Regiões Algébricas

$$\begin{aligned}
 A(R_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^4 k^3 \\
 &= \left(\frac{1}{n}\right)^4 \sum_{k=1}^n k^3 \\
 &= \left(\frac{1}{n}\right)^4 \sum_{k=1}^n \left(\binom{k}{1} + 6 \binom{k}{2} + 6 \binom{k}{3} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{n}\right)^4 \left(\binom{n+1}{2} + 6 \binom{n+1}{3} + 6 \binom{n+1}{4} \right)
 \end{aligned}$$

Aplicando o limite de $A(R_1)$ quando $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^4 \binom{n+1}{2} + 6 \left(\frac{1}{n}\right)^4 \binom{n+1}{3} + 6 \left(\frac{1}{n}\right)^4 \binom{n+1}{4} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \cdot 1^4 \text{coef} \binom{n+1}{4} \frac{n^{\text{grau} \binom{n+1}{4}}}{n^4} \\
 &= \frac{6 \cdot 1^4}{4!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^4} \\
 &= \frac{1^4}{4} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Nesse momento, para calcular a área sob o gráfico da função $g(x) = \sqrt{x}$, o professor pode se referir as partições não homogêneas sem perda da propriedade de maneira a facilitar os cálculos com raízes, chegando ao seguinte somatório

$$\begin{aligned}
 A(R_2) &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (2k^2 - k) \\
 &= \frac{2}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{2}{n^3} \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3} \binom{n}{1} \\
 &= \frac{2}{n^3} \left(\binom{n+1}{2} + 2 \binom{n+1}{3} \right) - \frac{1}{n^3} \binom{n+1}{2}
 \end{aligned}$$

Podemos encontrar o limite de $A(R_2)$ quando $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} \left(\binom{n+1}{2} + 2 \binom{n+1}{3} \right) - \frac{1}{n^3} \binom{n+1}{2} \\
 &= \frac{2}{n^3} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n+1}{2} + 2 \frac{2}{n^3} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n+1}{3} - \frac{1}{n^3} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n+1}{2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{2 \cdot 1^3}{3!} \text{coef} \binom{n+1}{3} \frac{n^{\text{grau}(\binom{n+1}{3})}}{n^3} \\
 &= 2 \frac{2 \cdot 1^3}{3!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3} \\
 &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Para a função $h(x) = 1$ tem-se que $A(R_3) = 1$, pois trata-se da área de um quadrado de lado 1. Concluimos que,

$$\begin{aligned}
 A(R) &= 3A(R_1) + 2A(R_2) + A(R_3) \\
 &= 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \frac{2}{3} + 1 \\
 &= \frac{37}{12}
 \end{aligned}$$

O professor pode também ressaltar a aplicação direta da fórmula para funções parabólicas com expoente racional positivo.

$$A = \frac{q(b^{\frac{p}{q}+1} - a^{\frac{p}{q}+1})}{p+q}.$$

Na atividade, o intervalo é $[0, 1]$, segue que $a = 0$ e $b = 1$

Em $f(x) = x^3$, temos que $p = 3$ e $q = 1$

$$A(R_1) = \frac{1(1^{\frac{3}{1}+1} - 0^{\frac{3}{1}+1})}{3+1} = \frac{1}{4}$$

De modo análogo, em $A_2 = \sqrt{x}$, temos que $p = 1$ e $q = 2$

$$g(x) = \frac{2(1^{\frac{1}{2}+1} - 0^{\frac{1}{2}+1})}{2+1} = \frac{2}{3}$$

e é imediato que para $h(x) = 1$, temos $A(R_3) = 1$

Segue que,

$$A(R) = 3\frac{1}{4} + 2\frac{2}{3} + 1 = \frac{37}{12}$$

Capítulo 5

Conclusão

O objetivo desse trabalho foi apresentar uma proposta para o cálculo de área sob gráfico de funções algébricas, inserindo no Ensino Médio a resolução desse problema que frequentemente só é visto no curso de Cálculo. De fato, foi possível aplicar operações com somatórios, propriedades dos números binomiais, abordagem simples de funções e seus gráficos para calcular essas áreas. Foi de grande, a pesquisa sobre o preenchimento e ao estabelecer algumas de suas propriedades começamos a perceber a associação aos números binomiais.

Do ponto de vista educacional, percebemos que se faz necessário no Ensino Médio que a abordagem desses conteúdos seja bem fundamentada, para que haja melhor compreensão no desenvolvimento das atividades. Mesmo considerando o uso quase que totalidade das ferramentas da Matemática Básica, fez-se necessário a abordagem simples de limite, utilizando apenas as ideias iniciais. Vimos que os cálculos as vezes podem se tornar demasiadamente longos, mas essa dificuldade não é relevante em face a oportunidade de aprendizado que pode surgir com as manipulações dos problemas propostos.

Com um estudo mais detalhado sobre preenchimento, acreditamos que é possível estabelecer outras propriedades que façam conexão com números binomiais e ou até mesmo que possam ser aplicadas em outros conteúdos.

Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, Geraldo. *O Ensino de Cálculo no 2º Grau*. Revista do Professor de Matemática(RPM), São Paulo,1991.
- [2] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Traduzido por Elza F. Gomide. São Paulo:Blucher,1996.
- [3] FILHO, D.C. Morais. *Convite à Matemática*.1 ed.Rio de Janeiro:SBM,2012
- [4] HEFEZ, Abramo e VILLELA, Maria Lúcia Torres.*Polinômios e equações algébricas*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção Profmat; 4)
- [5] LIMA, Elon Lages.*Curso de Análise*.Rio de Janeiro:IMPA,2011(Projeto Euclides;v.1).
- [6] LOVÁSZ, Lászlo; PELIKÁN,József e VESZTERGOMBI Katalin.*Matemática Discreta*.Traduzido por Ruy J.G.B. de Queiroz.Rio de Janeiro:SBM,2013(Coleção Textos Universitários).
- [7] MAOR, Eli.*e:A História do Número*. Traduzido por Jorge Calife.Rio de Janeiro:Record,2003.
- [8] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Polinômios*.Rio de Janeiro:SBM,2012(Tópicos de Matemática Elementar,v.6)
- [9] NETO, Aref Antar et al. *Introdução ao Cálculo Integral e Diferencial*. Fortaleza: Ed Vest-seller, 2011 (Noções de Matemática; v.8)

- [10] OLIVEIRA, José Roberto Oliveira. *A música dos números*. São Paulo: Ed. Scortecci, 2006
- [11] PATERLINI, Roberto Ribeiro. *Os “teoremas” de Cavalieri*. Revista do Professor de Matemática. (RPM, 72) São Paulo.
- [12] RIBEMBOIM, Paulo. *Funções, Limites e Continuidade*. 1ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012 (Coleção Textos Universitários; 12).
- [13] SANTOS, José Plínio de Oliveira. *Introdução à Análise Combinatória*, 4 ed. Editora Ciência Moderna. 2007
- [14] STEWART, James. *Cálculo*. Traduzido por Antonio Carlos Moretti. São Paulo: Cengage Learning, 2009.
- [15] TEIXEIRA, Aloisio. *Representação de potências por combinações*. Disponível em <http://www.elementosdeteixeira.blogspot.com/representacao-de-potencias-por>. Acesso em maio 2013.
- [16] TEIXEIRA, Aloisio. *Fórmula Geral para Somatórios de Potências*. Disponível em <http://www.elementosdeteixeira.blogspot.com/2012/04/funcao-pnp.html>. Acesso em abril 2013