Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Curso de Pós-graduação em Matemática

Fábio Pinheiro Luz

O uso de Equações Diofantinas Lineares na resolução de problemas de preparação Olímpica

Teresina

2014

Fábio Pinheiro Luz

O uso de Equações Diofantinas Lineares na resolução de problemas de preparação Olímpica

Dissertação apresentada ao Curso de Matemática da UFPI, como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Jurandir de Oliveira Lopes

Doutor em Matemática - UFPI

Teresina

2014

Luz, Fábio Pinheiro

O uso de Equações Diofantinas Lineares na resolução de problemas de preparação Olímpica / Fábio Pinheiro Luz - 2014

51.p

1.Matemática 2. Equações Diofantinas Lineares.. I.Título.

CDU 536.21

Fábio Pinheiro Luz

O uso de Equações Diofantinas Lineares na resolução de problemas de preparação Olímpica

Dissertação apresentada ao Curso de Matemática da UFPI, como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 29 de abril de 2014

BANCA EXAMINADORA

Jurandir de Oliveira Lopes

Doutor em Matemática - UFPI

Afonso Norberto da Silva

Doutor em Matemática - UESPI

Paulo Alexandre Araújo Sousa

Doutor em Matemática - UFPI

Aos meus pais e as minhas irmãs.

A todos os meu amigos e a todos os meus professores.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por me dar saúde e sabedoria para vencer todas as barreiras impostas.

Agradeço à meus pais Arão Pinheiro da Luz e Ivanete Ana da Luz, por terem acreditado na minha educação e por todos os conselhos e incentivos que a mim dirigiram, e também por superar todas as dificuldades que hoje me proporcianaram chegar até aqui.

Agradeço às minhas irmãs Gislaine Luz e Márcia Luz pelo companheirismo e por estarem sempre me apoiando.

Agradeço a todos os meus tios, em especial Dilma Luz e Luzivaldo Luz, aos meus parentes, amigos e aos meus avós pelos seus sempre sábios conselhos.

Agradeço muito também a Edivan Luz, pois foi fundamental para que eu conseguisse chegar até aqui.

Agradeço à minha namorada Myrcia Lima pelo companheirismo e pelo incentivo que me deu ao longo do curso.

Agradeço a todos os meus professores.

Agradeço ao professor Jurandir pela orientação, pela paciência, e pela atenção que deu durante todo este trabalho e ao longo do curso, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Agradeço também à Capes e ao IMPA por acreditarem neste programa e na melhoria da educação nacional.

"Lembra que o sono é sagrado e alimenta de horizontes o tempo acordado de viver".

Beto Guedes (Amor de Índio)

Resumo

É inegável que várias situações do dia a dia recaem em problemas que podem ser modelados através das equações diofantinas lineares. Diante disso, o trabalho em questão visou investigar a importância do uso de equações difantinas lineares na resolução de problemas utilizados em preparação olímpica para alunos recém ingressos no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Piauí, Campus Floriano. Para isso, foi identificado o perfil destes alunos ingressos, sendo feito um pré-teste, que avaliou os seus conhecimentos a respeito do tema, depois uma abordagem do conteúdo através de uma oficina e ao final, aplicados dois testes para avaliar o desempenho final dos alunos, utilizando para isso a Engenharia Didática.

Palavras-chaves: Olimpíadas de Matemática, Equações Diofantinas Lineares, Engenharia Didática.

Abstract

It is undeniable that many situations of everyday life fall into problems that can be modeled by the linear diophantine equations. Therefore, the work in question aimed to investigate the importance of the use of linear diophantine equations in problem solving used in Olympic preparation for students newly ticket in the Bachelor's Degree in Mathematics from the Federal University of Piauí, Campus of Floriano. For this, the profile of these students registered was identified, being made a pre-test that assessed their knowledge on the subject, then an approach to content through a workshop and at the end, applied two tests to evaluate the final performance of students, using for this the Didactic Engineering.

Keywords: Olympiads of Mathematics, Linear Diophantine equations, Engineering Curriculum

Sumário

1 Introdução

É inegável que várias situações do nosso dia a dia recaem na resolução de problemas matemáticos, cuja solução pode ser dada através de uma Equação Diofantina Linear. Encontrar pares de números que são soluções de determinadas equações são feitas costumeiramente pelos alunos, sendo que na maioria das vezes estas soluções são encontradas basicamente pelo método da tentativa, que embora seja importante, pois induz a imaginação, aos contraexemplos, os erros e os acertos como afirmam os PCNs(1997), pode se tornar difícil de ser aplicado quando forem tomados valores muito grandes para as soluções.

O objetivo principal deste trabalho é investigar a importância do uso de equações difantinas lineares na resolução de problemas utilizados em preparação olímpica para alunos recém ingressos no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Piauí, Campus Floriano, no período de 2014.1. A escolha deste grupo de alunos para a aplicação deste trabalho se deu pelo fato de os mesmos já terem participado de provas de olimpíadas de matemática, porém ainda estão com o embasamento de alunos de Ensino Médio, visto que a maioria terminou o Ensino Médio recentemente. Assim, buscou-se fazer uma sondagem em relação ao desempenho tanto dos alunos que haviam passado por preparação olímpica quanto dos que não passaram por esse processo.

A abordagem do tema proposto é pertinente visto que a preparação olímpica é para alunos do Ensino Médio e os pré requisitos para a resolução de uma equação diofantina linear utiliza apenas conhecimentos teoricamente já adquiridos pelos mesmos, tais como divisão euclidiana e Máximo Divisor Comum, como afirma [4]. Também como cita [3] não se pode subestimar a capacidade dos alunos, visto que eles também conseguem resolver problemas considerados complexos, e também porque o tema Equações Diofantinas Lineares só é visto na maioria das vezes por alunos do Ensino médio que participam dos Treinamentos de Pólos Olímpicos.

Diante disso, o trabalho justifica-se por investigar a importância das Equações Diofantinas Lineares, fazendo assim uma sondagem com o grupo de alunos escolhidos, sendo que para isto, analisou-se o conhecimento prévio dos mesmos sobre o tema em questão para em seguida ser feito o enfoque mais matemático, e por fim, a verificação dos novos conhecimentos adquiridos pelos mesmos.

Esta dissertação está dividida da seguinte forma: no Capítulo I tem-se uma breve introdução; no Capítulo II fala-se do Histórico das Equações Diofantinas Lineares; no Capítulo III é feita uma abordadgem sobre alguns conceitos importantes da Teoria dos Números; no Capítulo IV expõe-se sobre Equações Diofantinas Lineares; no Capítulo V tem-se a metodologia; no VI os Resultados e Discussões e por último, no Capítulo VII, tem-se as considerações finais.

2 Histórico das Equações Diofantinas

Diofante de Alexandria foi um matemático grego que viveu no Egito, em Alexandria, por volta de 250 d.c. Não se sabe ao certo, mas imagina-se que é contemporâneo de Herão, por volta do século III da era cristã.

Figura 2.1: Diofante de Alexandria

Segundo Boyer, veja[2], a matemática grega não era toda de alto nível, pois ela teve um certo declínio até o século da "Idade da Prata", de 250 a 350 d.c. aproximadamente. Ele ainda afirma que, no início deste período, chamado de Segunda Idade de Alexandria, surgiu o maior algebrista grego, Diofante de Alexandria e nenhuma cidade foi o centro da atividade matemática por tanto tempo quanto Alexandria.

Pouco se sabe da vida de Diofante, além de uma tradição referida na chamada "Antologia Grega", datando do quinto ou sexto século, descrita abaixo:

> Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto, cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida.(BOYER, 1996, p.121)

Desta forma, se o enigma é historicamente exato, Diofante viveu oitenta e quatro anos, pois se trata da solução da equação:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

Apesar de pouco se conhecer sobre a sua vida, Diofante foi considerado o maior algebrista grego de Alexandria, além de ser o precursor da Teoria dos Números, ganhando por alguns, o título de Pai da Álgebra. Tornou-se conhecido por suas obras, sendo a principal, o tratado intitulado "Arithmetica"(250-275), que era uma obra que continha 13 livros que consistiam basicamente em 130 problemas de soluções numéricas para equações determinadas (aquelas que possuem uma única solução) e equações indeterminadas (Diofantinas), onde apenas 6 dos 13 livros originais permanecem disponíveis com o acervo bibliográfico. Sobre isso, Boyer afirma que:

> A principal obra de Diofante que é a Arithmetica, tratado que era originalmente em treze livros, dos quais só os seis primeiros se preservaram. Deve-se lembrar que na Grécia antiga a palavra Aritmética significava teoria dos números. (BOYER , 1996, p.121)

Ele afirma ainda que esta obra não é uma exposição sistemática sobre as operações algébricas ou as funções algébricas ou a resolução de equações algébricas.

Segundo Hefez, veja[6], a maior parte dos problemas que Diofanto estudava no livro *Arithmetica* buscava encontrar soluções em números racionais de equações algébricas com uma ou mais variáveis, muitas vezes encontrando apenas uma solução.

Um dos problemas tratados por ele era a resolução em números inteiros ou racionais da equação pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$, sendo que ele conseguiu descrever todas as suas soluções. Este problema inspirou, mais de 1330 anos depois, o francês Pierre Fermat, de tal forma que ele estabeleceu o conhecido "Último Teorema de Fermat", segundo o qual, afirmou que a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução em números inteiros para n maior do que 2.

Boyer, veja[2], afirma que nos seis livros de "Arithmetica", ele utilizava abreviações para incógnitas, potências de números e operações. Ele utilizava um símbolo parecido com a letra grega ξ para representar um número desconhecido (talvez como a última letra da palavra *arithmos*.

Hefez, veja[6], cita ainda mais algumas abreviações de que ele se utilizava:
$\cdot\Delta^\gamma \longrightarrow$ O quadrado do símbolo anterior.

$\cdot K^{\gamma} \longrightarrow$ O cubo.

$\cdot \Delta^{\gamma}\Delta \longrightarrow$ A quarta potência, dita quadrado-quadrado.

$\cdot \Delta K^{\gamma} \longrightarrow$ A quinta potência ou quadrado-cubo.

$\cdot K^{\gamma}K \longrightarrow$ A sexta potência, ou cubo cubo.

Sobre isso, Boyer(1996) cita:

> Diofante naturalmente conhecia as regras de combinação equivalentes às nossas leis sobre expoentes, e tinha nomes especiais para os recíprocos das seis primeiras potências das incógnitas, quantidades equivalentes às nossas potências negativas. Coeficientes numéricos eram escritos depois de símbolos para as potências a que estavam associados: a adição de termos era indicada por justaposição adequada dos símbolos para os termos, e a subtração representada por uma abreviação de uma só letra colocada antes dos termos a serem subtraídos.(p.123)

O interessante é que ele resolvia vários problemas com estes números desconhecidos e conseguia expressar todas as quantidades desconhecidas, quando possivel, em torno de uma só.

A obra *Arithmetica* é uma coleção de cerca de 130 problemas, mas como já foi dito, ele não fazia esforço para encontrar todas as soluções possíveis das equações por ele propostas.

Não é a toa que Diofante teve uma grande influência na teoria moderna dos números, se sobrepondo aos algebristas gregos não geométricos.

É importante salientar que a aritmética teve como marco inicial a obra *Os elementos* de Euclides, pois esta obra continha várias propriedades interessantes, podendo ser vistas em [5], como por exemplo: Todo número natural se escreve de modo essencialmente único como produto de números primos, que hoje conhecemos como Teorema Fundamental da Aritmética. Foi Euclides quem enunciou a divisão com resto de um número natural por outro, denominada divisão euclidiana, e também estabeleceu o algoritmo muito eficiente para o cálculo do máximo divisor comum de dois números inteiros, denominado Algoritmo de Euclides, que é muito útil para a resolução de uma Equação Diofantina Linear.

3 Alguns conceitos importantes da Teoria dos Números

Para a dedução da fórmula geral que fornece o número total de soluções inteiras de uma Equação Diofantina Linear, são necessários alguns conceitos básicos de teoria dos números aos quais faremos uma breve apresentação das definições, proposições e teoremas, exemplificando-os quando necessário.

3.1 Divisão nos Naturais

Quando se divide um número natural por outro, esta divisão nem sempre é exata. Porém, existe um mecanismo para expressar esta possibilidade, denominado relação de divisibilidade.

E mesmo quando não existir uma relação de divisibilidade, ainda sim é possível efetuar uma divisão com resto, denominada *divisão euclidiana*.

3.1.1 Propriedades da Divisibilidade

Ao se ensinar, no Ensino Fundamental, os critérios de divisibilidade, esta é apenas expressada de modo verbal ou escrita por extenso. A abordagem e notações apresentadas a seguir é de uso comum em um curso de Aritmetica, no nível superior, que pode ser vista em [6].

Definição 3.1.1. *Dados dois números naturais a e b, com $a \neq 0$, dizemos que a divide b, denotado por $a \mid b$, se existe um número $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot c$. Também é dito a é um divisor de b ou que b é um múltiplo de a.*

A notação $a \mid b$ não representa nenhuma operação em $\mathbb{N}$, nem representa uma fração. Também se define a não divide b, com $a, b \in \mathbb{N}$, e é representado por $a \nmid b$, quando não existe um tal natural c de forma que $b = a \cdot c$.

Exemplo 3.1.1.

1) $2 \mid 0$, pois $0 = 2 \cdot 0$;

2) $3 \mid 6$, pois $6 = 3 \cdot 2$;

3) $3 \nmid 7$, pois não existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $7 = 3 \cdot c$;

4) $2 \nmid 11$, pois não existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $11 = 2 \cdot c$.

Define-se ainda o quociente da divisão dos números naturais b por a ao número natural c, quando $a \mid b$, ficando expresso como $c = \dfrac{b}{a}$.

A seguir, serão estabelecidas algumas propriedades da divisibilidade.

Proposição 3.1.1. *Sejam a, b e c naturais, com a e b não nulos, temos que:*

(a) $1 \mid c$, $a \mid a$ *e* $a \mid 0$,

(b) se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

Demonstração. (a) Decorre simplesmente das igualdades $c = 1 \cdot c$, $a = a \cdot 1$ e $a \cdot 0 = 0$. (b) Sabendo que $a \mid b$ e $b \mid c$, então existem $f \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathbb{N}$, tais que satisfazem as igualdades $b = a \cdot f$ e $c = b \cdot g$, substituindo a primeira igualdade na segunda igualdade, temos: $c = b \cdot g = (a \cdot f) \cdot g = a \cdot (f \cdot g)$, chegando-se que $a \mid c$. $\square$

Sendo assim, do item (a) tem-se que todo número natural é divisível por 1, e se não nulo, por ele mesmo.

Proposição 3.1.2. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, então:*

$$a \mid b \text{ e } c \mid d \Longrightarrow a \cdot c \mid b \cdot d.$$

Demonstração. Se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $\exists\ f, g \in \mathbb{N}$, $b = a \cdot f$ e $d = c \cdot g$. Concluindo então, $b \cdot d = (a \cdot c)(f \cdot g)$. Portanto $a \cdot c \mid b \cdot b$. $\square$

Observação 3.1.1. *Se $a \mid b$, então $a \cdot c \mid b \cdot c$ para todo c não nulo.*

Proposição 3.1.3. *Sejam a, b, $c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, tal que $a \mid (b + c)$. Então:*

$$a \mid b \Longleftrightarrow a \mid c.$$

Demonstração. Da hipótese de que $a \mid (b+c)$, existe $f \in \mathbb{N}$ tal que $b+c = f \cdot a$. Suponha que $a \mid b$, então existe $g \in \mathbb{N}$, tal que $b = a \cdot g$. Unindo estas duas igualdades, resulta:

$$a \cdot g + c = f \cdot a.$$

Daí, $a \cdot f > a \cdot g$ então, $f > g$. Portanto da igualdade acima,

$$c = a \cdot f - a \cdot g = a \cdot (f - g),$$

o que resulta que $a \mid c$ pois $f - g$ é natural.

Suponha agora que $a \mid c$, então $c = a \cdot h$ com h natural, e como $b + c = f \cdot a$. Assim, $b + ah = f \cdot a \Rightarrow b = a(f - h)$, o que resulta que $a \mid b$ pois $f - h$ é natural, como verificado acima.

□

Proposição 3.1.4. *Sejam a, b, $c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, e $b \geq c$, tal que $a \mid (b - c)$. Então:*

$$a \mid b \Longleftrightarrow a \mid c.$$

A demonstração segue de forma similar à proposição anterior.

Proposição 3.1.5. *Sejam a, $b \in \mathbb{N}^*$, temos que*

$$a \mid b \Longrightarrow a \leq b.$$

Demonstração. Se $a \mid b$ e b é não nulo, então existe c $\in \mathbb{N}^*$ tal que $b = a \cdot c$. Assim, $c \geq 1$. Portanto $a \leq ac = b$. □

Observação 3.1.2. *se $a \mid 1$, então, $a \leq 1$ e, portanto, $a = 1$.*

A recíproca da proposição acima não é verdadeira, pois $7 \geq 3$. Porém, 3 não divide 7.

Proposição 3.1.6. *Se a, b, c, x e y são naturais com $a \neq 0$, tais que $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid (bx + cy)$.*

Demonstração. Tomando m e n naturais, tais que $a \mid b$ então $b = a \cdot m$ e $a \mid c$ então, $c = a \cdot n$. Assim, para quaisquer inteiros x e y podemos escrever: $bx + cy = (am)x + (an)y = a(mx) + a(ny) = a(mx + ny)$. Portanto, $a \mid (bx + cy)$. □

Das proposições vistas acima, percebe-se que a relação de divisibilidade em $\mathbb{N}^*$ é uma relação de ordem, pois para todo a, b e c, vale:

(a) é reflexiva, pois $a \mid a$.(Proposição 3.1.1(a)).

(b) é transitiva, pois se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$;(Proposição 3.1.1(b)).

(c) é anti-simétrica, pois se $a \mid b$ e $b \mid a$, então, $a = b$. (Segue da Proposição 3.1.4).

3.1.2 Divisão Euclidiana

Outro tópico importante para a resolução das Equações Diofantinas Lineares é a Divisão Euclidiana. Vejamos o seguinte teorema da divisão euclidiana, com exemplos, baseados em Hefez, veja [6]:

Teorema 3.1.1. *(Divisão Euclidiana) Dados dois números a e b, ambos naturais, com $0 < a \leq b$, existem dois números naturais q(quociente) e r(resto), únicos, tais que:*

$$b = a \cdot q + r, \ \ com \ \ r < a.$$

Demonstração. Vamos tomar um conjunto P, dado pelos elementos $b - na$, com $n \in \mathbb{N}$ até quando esta diferença for um número natural.

$$P = \{b, b - a, b - 2 \cdot a, \ldots, b - n \cdot a\}.$$

Segundo o Princípio da Boa Ordem (PBO), todo conjunto $C \subset \mathbb{N}$ com $C \neq \emptyset$, existe $c \in C$, tal que $c \leq x$, para todo x pertencente a C. Assim, como $b \in P$, existe um menor elemento $r = b - q \cdot a \Rightarrow b = aq + r$. Ou seja, basta verificar apenas que $r < a$. Se $a \mid b$, o menor valor de P será $r = 0$, mostrando que $r < a$. Se $a \nmid b$, temos $r \geq 0$. Suponha por absurdo $r \geq a$. Assim, existe um número $c < r$, com a condição de que $r = c + a$. Como $r = b - q \cdot a$, temos que:

$$c = b - (q + 1) \cdot a \in P, \ \text{com } c < r,$$

que é uma contradição, já que r é o menor elemento de P.

Provamos, portanto, a existência. Falta provar agora a unicidade. Para tanto, tome dois elementos distintos de P. A saber, $r = b - a \cdot q$ e $r' = b - a \cdot q'$, com $r < r' < a$.

Sendo $r' - r = a \cdot (q - q')$. Daí $r' - r \geq a$, o que resulta que $r' \geq r + a \geq a$, o que é um absurdo. Portanto, $r = r'$.

Assim, $b - a \cdot q = b - a \cdot q' \Longrightarrow a \cdot q = a \cdot q'$, e portanto $q = q'$. □

Exemplo 3.1.2. Tomando $a = 47$ e $b = 6$, temos que $47 = 6 \cdot 7 + 5$, e podemos escrever $6 \cdot 7 < 47 < 6 \cdot 8$, pela prova de existência mostrada acima.

Exemplo 3.1.3. Encontre o quociente e o resto da divisão de 35 por 8.

Resolução:

Subtraindo 35 pelos múltiplos de 8, temos:

$$\begin{aligned} r_1 &= 35 - 1.8 = 27 \\ r_2 &= 35 - 2.8 = 19 \\ r_3 &= 35 - 3.8 = 11 \\ r_4 &= 35 - 4.8 = 3 \\ r_5 &= 35 - 5.8 = -5 < 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $q = 4$ e $r = 3$, podendo ser escrito assim: $35 = 8 \cdot 4 + 3$.

3.2 Máximo Divisor Comum

Considere dois números naturais a e b, com $a, b \neq 0$. Diz-se que um número d também natural é um divisor comum de a e b se $d \mid a$ e $d \mid b$. Por exemplo, considere os divisores de 10 e de 15, denotados por:
$D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$,
$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$.

Então a intersecção $D_{10} \cap D_{15} = \{1, 5\}$ e portanto 1 e 5 são os divisores comuns de 10 e 15.

A seguinte definição de Máximo Divisor Comum pode ser vista [6]:

Definição 3.2.1. O número d será chamado de *máximo divisor comum (mdc)* de a e b, se for munido das seguintes propriedades:

(i) d é um divisor comum de a e b, ou seja, $d \mid a$ e $d \mid b$,

(ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b, ou seja, para todo c natural, com $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid d$.

Usaremos a seguinte notação:

$$mdc(a, b) = (a, b).$$

Das propriedaes acima e das propriedades de divisibilidade, sendo d o (mdc) de a e b, então $c \leq d$, o que mostra que d é o maior dentre todos os divisores comuns destes números.

No exemplo anterior, como os divisores comuns de 10 e 15 são 1 e 5, o máximo divisor comum entre os dois é portanto 5, que é o maior dos divisores.

Para mostrar que o mdc, quando existe, é único, basta observar que se tomarmos d e d' como o mdc de dois números, podemos concluir que $d \leq d'$ e $d' \leq d$, concluindo então que $d = d'$.

Proposição 3.2.1. *Considere os números a e b, ambos naturais:*

(i) $(0,a) = a$.

(ii) $(1,a) = 1$.

(iii) $(a,a) = a$.

(iv) $a \mid b \Longleftrightarrow (a, b) = a$.

Demonstração.

(i) Todo número é um divisor de 0, pois se considerarmos um número qualquer $c \in \mathbb{N}$, temos que $c \mid 0$, pois esta expressão é o mesmo que dizer que $0 = f \cdot c$, para algum f natural, que neste caso vale para $f = 0$. Portanto, o conjunto dos divisores de 0 é o próprio conjunto dos naturais não nulos. Mas, como visto acima, o maior dos divisores de a é o próprio a, já que $a \mid a$, pois $a = 1 \cdot a$, concluindo então que $(0, a) = a$.

(ii) Sabe-se que o único divisor de 1 é o próprio 1, pois tomando-se um c natural, tal que $c \mid 1$, temos que $1 = f \cdot c$, para algum $f \in \mathbb{N}$ e neste caso $f = 1$ e $c = 1$. Mas, 1 também é divisor de a, pois $a = 1 \cdot a$, resultando então que $(1, a) = 1$.

(iii) Como visto em (i), o maior divisor do número a é o próprio a, o que mostra que $(a, a) = a$.

(iv) Da hipótese temos que $a \mid a$ e $a \mid b$. Assim, tomando um divisor comum c, ou seja, $c \mid a$ e $c \mid b$, resulta então que $a \geq c$, logo $(a, b) = a$. Se $(a, b) = a$, então $a \mid b$.

□

Falta ainda provar a existência do máximo divisor comum. Hefez, veja[6], utiliza o chamado Lema de Euclides:

Lema 3.2.1. *(Lema de Euclides) Considere os números $a, b, n \in \mathbb{N}$, com $a < na < b$. Então vale a seguinte igualdade:*

$$(a, b) = (a, b - na).$$

Demonstração. Chamando de $d = (a, b - na)$, temos que $d \mid a$ e $d \mid (b - na)$. Então d divide b, pois $b = b - na + na$. Conclui-se então que d é um divisor comum de a e b. Tomando $c \in \mathbb{N}$ um divisor comum de a e b, ou seja, $c \mid a$ e $c \mid b$, nesse caso $c \mid b - na$. Portanto $c \mid d$. Portanto $(a, b) = d$. □

3.3 Algoritmo de Euclides

Sejam a e b dois números naturais com $a \leq b$. Se $a \mid b$, então $(a, b) = a$, neste caso termina o algoritmo. Se a não divide b, pela divisão de euclides, o b é da seguinte forma,

$$b = aq_1 + r_1, r_1 < a.$$

Se $r_1 \mid a$, então:

$$r_1 = (a, r_1) = (a, b - q_1 a) = (a, b),$$

terminando o algoritmo. Caso contrário, Se $r_1 \nmid a$, efetua-se a divisão de a por r_1, o que resulta em:

$$a = r_1 q_2 + r_2, r_2 < r_1.$$

Podemos proceder então novamente como feito anteriormente, de tal forma que:

Se $r_2 \mid r_1$, temos:

$$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, a - q_2 r_1) = (r_1, a) = (b - q_1 a, a) = (b, a) = (a, b),$$

terminando o algoritmo. Caso contrário,

Se $r_2 \nmid r_1$, efetua-se a divisão de r_1 por r_2, o que resulta em:

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, r_3 < r_2.$$

Perceba que, como estamos trabalhando com números naturais e a cada passo o resto é sempre menor que o anterior, então em algum momento teremos um resto nulo. Logo, para algum n, temos que $r_n \mid r_{n-1}$, o que resulta que $(a, b) = r_n$.

De uma forma mais usual, podemos utilizar o seguinte dispositivo no emprego do algoritmo de Euclides para encontrar o (a, b).

Geralmente, para dividir b por a, com $b = aq + r$ utilizamos o seguinte esquema:

$$\begin{array}{c|c} & q \\ \hline b & a \\ \hline r & \end{array} .$$

Se continuarmos o processo, teremos agora a divisão: $a = rq_1 + r_1$, que colocando novamente no esquema, temos:

$$\begin{array}{c|c|c} & q & q_1 \\ \hline b & a & r \\ \hline r & r_1 & \end{array} .$$

Continuando o processo até quando possível, podemos encontrar o (a, b), aplicando o dipositivo prático:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} & q & q_1 & \cdots & \cdots & q_{n-1} & q_n & q_{n+1} \\ \hline b & a & r & r_1 & \cdots & r_{n-2} & r_{n-1} & r_n = (a, b) \\ \hline & r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n & 0 & \end{array} .$$

Exemplo 3.3.1. Calcular o mdc entre 139 e 24.

Resolução:

Aplicando o dispositivo prático, temos:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & 5 & 1 & 3 & 1 & 4 \\
\hline
139 & 24 & 19 & 5 & 4 & 1 \\
\hline
19 & 5 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}.$$

O algoritmo de Euclides acima nos fornece:

$1 = 5 - 4 \cdot 1$

$4 = 19 - 5 \cdot 3$

$5 = 24 - 19 \cdot 1$

$19 = 139 - 24 \cdot 5.$

Donde, segue que o $(139, 24) = 1$, ou assim, utilizando as equações anteriores, temos que:

$$\begin{aligned}
1 &= 5 - 4 \cdot 1 \\
&= 5 - (19 - 5 \cdot 3) \cdot 1 \\
&= 5 \cdot 4 - 19 \\
&= (24 - 19 \cdot 1) \cdot 4 - 19 \\
&= 24 \cdot 4 - 19 \cdot 5 \\
&= 24 \cdot 4 - (139 - 24 \cdot 5) \cdot 5 \\
&= 24 \cdot 29 - 139 \cdot 5.
\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever que:

$$1 = (139, 24) = 24 \cdot (29) + 139 \cdot (-5).$$

A equação acima pode ser garantida através do seguinte teorema:

Teorema 3.3.1. *(Relação de Bézout) Seja $d = (a, b)$, então existem x_0 e $y_0 \in \mathbb{Z}$, de modo que $ax_0 + by_0 = d$.*

Demonstração. Seja $d = (a, b)$, então, $d \mid a$ e $d \mid b$. Vamos tomar um c inteiro, de tal forma que $c \mid a$ e $c \mid b$. Então, da Proposição (3.1.6), segue que $c \mid (ax_0 + by_0)$ com x_0 e $y_0 \in \mathbb{Z}$. Sendo assim, temos que $ax_0 + by_0 = qc$, com q inteiro. Mas, como $d = (a, b)$ e $c \mid d$, então $d = qc$. Portanto, $ax_0 + by_0 = qc = d$, mostrando assim a relação de Bézout. $\square$

Sendo assim, sempre podemos escrever o (a, b) como uma combinação linear de a e b, ou seja, $(a, b) = ax_0 + by_0$, com $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$.

No Exemplo (3.3.1), temos que

$$1 = (139, 24) = 24 \cdot (29) + 139 \cdot (-5),$$

Assim, podemos escrever a equação acima em forma de uma combinação linear, da seguinte maneira:

$$139x + 24y = 1.$$

onde, $x_0 = -5, y_0 = 29$.

4 Equações Diofantinas Lineares

Muitos dos problemas de aritmética depende da resolução de equações do tipo $ax + by = c$, onde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dados, e x e y são inteiros a ser determinados. Em Hefez, veja [7], podemos encontrar o seguinte exemplo que modelado resulta em uma expressão semelhante à citada anteriormente:

Exemplo 4.0.2. De quantos modos podemos comprar selos de cinco e de três reais, de modo a gastar cinquenta reais?

Ao nos depararmos com situações deste tipo, devemos saber resporder ás seguintes perguntas:

1) Quais são as condições para que a equação possua solução?

2) Quantas são as soluções?

3) Como calcular as soluções, caso existam?

Encontrar uma solução para este tipo de equação não é uma tarefa das mais difíceis. No exemplo anterior, a situação descrita resume-se à resolução da seguinte equação:

$$5x + 3y = 50.$$

Uma solução para esta equação nada mais é do que encontrar par de números x e y que satisfaçam tal equação. Por exemplo:

$$5 \cdot (7) + 3 \cdot (5) = 50,$$

$$5 \cdot (4) + 3 \cdot (10) = 50,$$

$$5 \cdot (1) + 3 \cdot (15) = 50.$$

satisfazem assim a equação. Então: (7,5); (4,10); (1,15) são pares de números inteiros x e y que são solução desta equação.

Este método também conhecido como método da tentativa é útil em várias situações, inclusive serve para percebermos que nem toda equação da forma $ax + by = c$

possui solução. Por exemplo, encontrar inteiros x e y, tais que sejam solução da equação: $2x+4y=9$. Por este método percebe-se que esta equação não possui solução no conjunto dos números inteiros, visto que a soma $2x+4y$ sempre resultará em números pares, enquanto que nove é um número ímpar. Logo, não existe um par de números x e y que sejam solução da equação.

Como saber então quais são as condições para que uma equação diofantina possua solução? Esta pergunta admite a seguinte resposta:

Teorema 4.0.2. *A equação diofantina $ax+by=c$ admite solução se, e somente se, (a,b) divide c.*

Demonstração. Suponha a existência de solução na equação, ou seja, que existam x_0 e y_0 inteiros tais que $ax_0+by_0=c$. Tem-se que $(a,b) \mid a$ e $(a,b) \mid b$, então (a,b) divide qualquer combinação linear formada por a e por b. Portanto: $(a,b) \mid (ax_0+by_0)$, logo $(a,b) \mid c$.

Reciprocamente, sabemos por hipótese que $d=(a,b) \mid c$. Sendo assim, existe um q inteiro, de forma que $qd=c$. Pelo Teorema de Bézout, sejam x_0 e $y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0+by_0=d$. Fazendo o produto por q em ambos os lados da igualdade, obtemos: $(ax_0)q+(by_0)q=dq$. Então, $a(x_0q)+b(y_0q)=c$, ou seja, a equação diofantina $ax+by=c$ admite pelo menos a solução: $x=x_0q$ e $y=y_0q$. □

Sendo assim, agora fica fácil saber se uma equação diofantina possui uma solução. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 4.0.3. Diga quais são as equações diofantinas a seguir que possuem pelo menos uma solução:

a) $3x+12y=312$

b) $5x+15y=33$

Resolução:

a) Para saber então se esta equação tem pelo menos uma solução, pela teorema acima, basta calcular o (3,12). Para isso, será aplicado o Algoritmo de Euclides:

$$\begin{array}{c|c|c} & 4 & \\ \hline 12 & 3 & \\ \hline 0 & & \end{array}\quad.$$

Como $(12, 3) = 3$ e $3 \mid 312$, logo existe pelo menos uma solução para a equação diofantina $12x + 3y = 312$.

b) Aplicando novamente o algorítmo de euclides, encontramos:

$$\begin{array}{c|c|c} & 3 & \\ \hline 15 & 5 & \\ \hline 0 & & \end{array}\quad.$$

Como $(15, 5) = 5$ e $5 \nmid 33$, logo a equação $5x + 15y = 33$ não possui solução inteira.

Teorema 4.0.3. *Se $(a, b) = d \mid c$, e sendo o par de inteiros x_0 e y_0 uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, então todas as outras soluções são da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{b}{d}t, \\ y &= y_0 - \frac{a}{d}t. \end{aligned}$$

Demonstração. Sejam x_0, y_0 soluções particulares e x, y soluções quaisquer da equação $ax + by = c$. Sendo assim, podemos escrever:

$$ax_0 + by_0 = c = ax + by.$$

Dessa igualdade encontramos:

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y).$$

Sendo $d = (a, b)$, então existem f e g inteiros tais que $a = f \cdot d$ e $b = g \cdot d$, com $(f, g) = 1$. Substituindo a e b na equação acima, obtemos:

$$fd(x - x_0) = gd(y_0 - y).$$

Eliminando o fator d, podemos concluir que $g \mid f(x - x_0)$, como $(f, g) = 1$ e $y_0 - y \in \mathbb{Z}$ segue que $g \nmid f$. Temos então que: $g \mid (x - x_0)$,ou seja, pela definição de divisibilidade, existe um t inteiro tal que:

$$x - x_0 = gt.$$

Assim, substituindo esta equação na anterior, resulta que:

$$fgt = g(y_0 - y).$$

Concluindo que:

$$y_0 - y = ft.$$

Chegando então às seguintes fórmulas:

$$x - x_0 = gt,$$
$$y_0 - y = ft.$$

mas sabemos ainda que: $g = \dfrac{b}{d}$ e $f = \dfrac{a}{d}$. Substituindo nas fórmulas acima encontramos:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t,$$

$$y = y_0 - \frac{a}{d}t,$$

□

Substituindo agora os valores de x e y, encontrados acima, na equação $ax+by = c$, obteremos:

$$\begin{aligned} ax + by &= a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right) \\ &= ax_0 + by_0 + \left(\frac{ab}{d} - \frac{ab}{d}\right)t \\ &= c + 0 \cdot t = c. \end{aligned}$$

Portanto, os valores de x e y realmente satisfazem equação $ax + by = c$.

Desta maneira, o Exemplo (4.0.2), cuja equação é $3x + 5y = 50$ tem solução, pois $(3,5) = 1$ e $1 \mid 50$ e tem como solução particular $x_0 = 0$ e $y_0 = 10$. Assim, a solução geral desta equação é da forma: $x = 0 + 5t$ e $y = 10 - 3t$. Como são selos, faz sentindo pensar apenas em soluções não negativas, ou seja, devemos ter: $0 + 5t \geq 0$ e $10 - 3t \geq 0$, o que resulta que: $0 \leq t \leq 3$, visto que o t só assume valores inteiros. Substituindo então os possíveis valores de t, encontraremos todas as soluções possíveis:

t	0	1	2	3
x	0	5	10	15
y	10	7	4	1

Portanto, obtemos:

(a) 10 selos de 5 reais.

(b) 5 selos de 3 reais e 7 selos de 5 reais.

(c) 10 selos de 3 reais e 4 selos de 5 reais.

(d) 15 selos de 3 reais e 1 selo de 5 reais.

Resumindo, para se resolver uma equação diofantina linear $ax + by = c$, a primeira coisa é verificar se (a, b) divide ou não c para então descobrir uma solução particular x_0, y_0, para isso fazendo-se do uso do Algoritmo de Euclides. Quando não se perceber logo de cara uma solução particular, usa-se então o Algoritmo de Euclides de trás para frente para determinar inteiros m e n, tais que:

$$am + bn = (a, b) = 1.$$

Feito isso, basta multiplicar os dois membros da equação por c, para assim encontrar que:

$$a(mc) + b(nc) = c.$$

Encontra-se assim a solução particular $x_0 = mc$ e $y_0 = nc$.

Exemplo 4.0.4. De quantas maneiras podemos comprar selos de cinco e de sete reais, de modo a gastar 100 reais?

Resolução:

O problema acima é modelado pela expressão: $5x + 7y = 100$. Então, pelo Algoritmo de Euclides temos:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & 1 & 2 & 2 \\
\hline
7 & 5 & 2 & 1 \\
\hline
2 & 1 & 0 &
\end{array}.$$

Então, como $(7, 5) = 1 \mid 100$, a equação possui solução. Logo o Algoritmo de Euclides acima nos fornece:

$1 = 5 - 2 \cdot 2$

$2 = 7 - 5 \cdot 1.$

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}
1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\
&= 5 - (7 - 5 \cdot 1) \cdot 2 \\
&= 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 \\
&= 5 \cdot (3) + 7 \cdot (-2).
\end{aligned}$$

Multiplicando esta última equação por 100, obtemos:

$$100 = 5 \cdot (300) + 7 \cdot (-200).$$

Assim, temos que $x_0 = 300$ e $y_0 = -200$ é uma solução particular da equação. Logo, a solução geral da mesma é da forma:

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + bt = 300 + 7t \\
y &= y_0 - at = -200 - 5t.
\end{aligned}$$

com t inteiro. Como são cédulas, não faz sentido falar em valores negativos. Portanto, devemos ter:

$$\begin{aligned}
300 + 7t &\geq 0 \Rightarrow t \geq -42,8 \\
-200 - 5t &\geq 0 \Rightarrow t \leq -40.
\end{aligned}$$

Sendo assim, os possíveis valores de t nesse intervalo são: $t = -40, -41$ e -42. Os possíveis valores de x e y se encontram na tabela abaixo:

t	-40	-41	-42
x	20	13	6
y	0	5	0

.

Portanto, podemos comprar:

(a) 20 selos de 5 reais.

(b) 5 selos de 7 reais e 13 selos de 5 reais.

(c) 10 selos de 7 reais e 6 selos de 5 reais.

Exemplo 4.0.5. Para quais valores de c, com c inteiro, a equação $30x + 42y = c$ admite soluções inteiras?

Resolução:

Calculando $(30, 42)$ pelo Algoritmo de Euclides temos:

	1	2	2
42	30	12	6
12	6	0	

.

Então, como $(30, 42) = 6$ então a equação possui solução se $6 \mid c$, ou seja, $c = 6 \cdot q$, com $q \in \mathbb{Z}$. Portanto, c é qualquer múltiplo de 6.

Exemplo 4.0.6. Se um macaco sobe uma escada de dois em dois degraus, sobra um degrau; se ele sobe de três em três degraus, sobram dois degraus. Quantos degraus a escada possui, sabendo que o número de degraus é multiplo de sete e está compreendido entre 40 e 100?

Resolução:

Seja N a quantidade de degraus da escada. Se ele sobe a escada de 2 em 2 degraus e sobra 1, tem-se que:

$$N = 2x + 1.$$

Se ele sobe a escada de 3 em 3 degraus, sobram 2, tem-se que:

$$N = 3y + 2.$$

Unindo as duas equações:

$$2x + 1 = N = 3y + 2.$$

Logo:

$$2x + 3(-y) = 1.$$

e como o $(2, 3) = 1$ e $1 \mid 1$, a equação possui solução. Sendo assim, por tentativa, percebe-se de $x_0 = 2$ e $y_0 = 1$ é uma solução particular desta equação, visto que: $2\cdot(2)-3\cdot(1) = 1$. Portanto, todas as suas soluções são da forma:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + bt = 2 - 3t \\ y &= y_0 - at = 1 - 2t. \end{aligned}$$

Por outro lado, $40 \leq N \leq 100$, sendo N um múltiplo de 7. Sendo assim, como $N = 2x + 1$ e substituirmos o valor de $x = 2 - 3t$, teremos que:

$$N = 2 \cdot (2 - 3t) + 1 = N = 5 - 6t.$$

Então:

$$\begin{aligned} 40 &\leq N \leq 100 \\ 40 &\leq 5 - 6t \leq 100 \\ 35 &\leq -6t \leq 95 \\ -15,8 &\leq t \leq -5,8. \end{aligned}$$

Portanto, para que N seja múltiplo de 7, devemos ter $t = -12$, concluindo então que $N = 77$ degraus.

Exemplo 4.0.7. (Proposto por Euler) Um grupo de homens e mulheres gastaram numa taberna 1000 *patacas*. Cada homem pagou 19 *patacas* e cada mulher 13. Quantos eram os homens e quantas eram as mulheres?

Resolução:

Chamando de x o número de homens e y o números de mulheres, teremos, pelo enunciado, que os homens gastaram $19x$ e as mulheres gastaram $13y$. Assim, o problema fica descrito pela equação abaixo:

$$19x + 13y = 1000$$

Utilizando o dispositivo prático, temos:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & 1 & 2 & 6 \\
\hline
19 & 13 & 6 & 1 \\
\hline
6 & 1 & 0 &
\end{array}.$$

Então, como $(19, 13) = 1 \mid 1000$, a equação possui solução. Logo o Algoritmo de Euclides acima nos fornece:

$1 = 13 - 6 \cdot 2$

$6 = 19 - 13 \cdot 1.$

Assim:

$$\begin{aligned}
1 &= 13 - 6 \cdot 2 \\
1 &= 13 - (19 - 13 \cdot 1) \cdot 2 \\
1 &= 13 \cdot 3 - 19 \cdot 2 \\
1 &= 13 \cdot (3) + 19 \cdot (-2).
\end{aligned}$$

Multiplicando esta última equação por 1000, obtemos:

$$1000 = 19 \cdot (-2000) + 13 \cdot (3000).$$

Assim, temos que $x_0 = -2000$ e $y_0 = 3000$ são uma solução particular da equação. Logo, a solução geral da mesma é da forma:

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + bt = -2000 + 13t \\
y &= y_0 - at = 3000 - 19t.
\end{aligned}$$

Como são patacas, não faz sentido falar em valores negativos. Portanto, devemos ter:

$$\begin{aligned} x &= -2000 + 13t \geq 0 \Rightarrow t \geq 153,84 \\ y &= 3000 - 19t \geq 0 \Rightarrow t \leq 157,89. \end{aligned}$$

Sendo assim, como $t \in \mathbb{Z}$ os possíveis valores de t nesse intervalo são: $t = 154, 155, 156$ e 157. Substituindo os possíveis valores de t em $x = -2000 + 13t$ e $y = 3000 - 19t$, teremos:

t	154	155	156	157
x	2	15	28	41
y	74	55	36	17

Portanto, encontramos os seguintes números de homens e de mulheres:

(a) 2 homens e 74 mulheres.

(b) 15 homens e 55 mulheres.

(c) 28 homens e 36 mulheres.

(d) 41 homens e 17 mulheres.

5 Metodologia

Com o objetivo de estudar o uso de equações diofantinas lineares na resolução de questões em preparação de olimpíadas de matemática, foi realizada uma pesquisa com a seguinte metodologia:

5.1 Campo de Pesquisa

O campo de pesquisa do trabalho foram os alunos ingressos da turma do módulo I do curso de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal do Piauí, Campus Floriano, sendo realizado um estudo de caso com os mesmos. Para isso, foi feito uma pesquisa de campo, de caráter experimental, sendo do tipo quali-quantitativa.

5.2 Instrumento de pesquisa

Nesta pesquisa, foi feito o uso da Engenharia Didática como instrumento de pesquisa, pois ela segue um cronograma pré-determinado para realizar um estudo de caso com um determinado grupo.

Como afirma Sousa, veja [10], a Engenharia Didática, é uma metodologia de pesquisa caracterizada por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, dividida basicamente em: concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Outra característica, é que é uma pesquisa experimental de registros se situando sobre o tema e o modo de validação que é associado, ocorrendo basicamente a comparação entre análise a priori e análise a posteriori.

No caso, neste trabalho foram feitas as análises preliminares sobre o tema e também sobre o perfil dos alunos. Depois foi realizada a fase da concepção e da análise prévia, através da aplicação do questionário 1. Na terceira fase, a da experimentação, os alunos foram submetidos à oficina sobre equações diofantinas lineares. Por fim, na última fase, que é a fase da análise a posteriori e da validação, foi aplicado o questionário 2 e um teste para os alunos fazerem a avaliação sobre a oficina.

Segundo Almouloud e Coutinho, veja[1], este confronto entre as análises a priori, onde é elaborada a descrição e as informações dos alunos, e a análise a posteriori, realizada em cima dos dados recolhidos durante a pesquisa de campo, é que será feita a validação das hipóteses da pesquisa.

Num primeiro momento, identificou-se o perfil dos alunos ingressos, tais como idade, sexo, se oriundos de escola pública ou não, etc.

Após isso, foi aplicado aos mesmos um questionário com questões envolvendo o tema proposto, para assim poder identificar o grau de conhecimento que eles tem acerca do tema proposto, questões estas que visavam encontrar pares de números que são soluções das equações propostas, perceber se eles sabem quando a mesma tem ou não solução, e, se tem, quantas são, e por fim algumas situações problemas de preparação para Olimpíadas de Matemática, baseadas em Hefez, veja[7] e do material do Pólo Olímpico de Treinamento(POTI)[9].

No terceiro momento foi realizado junto aos alunos uma Oficina sobre Equações Diofantinas Lineares. Claro que a princípio, foram abordados os tópicos que são necessários para a resolução destas equações, tais como: Algumas propriedades da divisibilidae, Divisão Euclidiana, Máximo Divisor Comum entre dois números, o Algoritmo de Euclides e por fim a abordagem sobre Equações Diofantinas Lineares. Durante a oficina, os alunos participaram de forma intensa, tanto perguntando, como também expondo às suas idéias junto ao quadro.

Por fim, foi aplicado novamente o questionário, para agora ser resolvido utilizando dos conhecimentos que foram adquiridos durante a oficina. Também foi aplicado um teste com o intuito básico de eles darem a sua opinião a respeito do tema em questão.

5.3 Análise dos dados

Os dados foram organizados em tabelas de frequência e percentuais, vericando a quantidade de acertos e de erros em cada questão, sendo analisados qualitativamente e quantitativamente. Foi feita também uma análise qualitativa acerca do teste sobre a importância das Equações Diofantinas Lineares.

6 Resultados e Discussões

Nesse momento serão apresentados e discutidos os resultados de nossa pesquisa, analisaremos cada uma das questões do questionário além do perfil socioeconômico dos alunos. Por fim, será feita uma análise de forma qualitativa das questões referentes a importância de se estudar Equações Diofantinas Lineares.

6.1 Perfil dos alunos

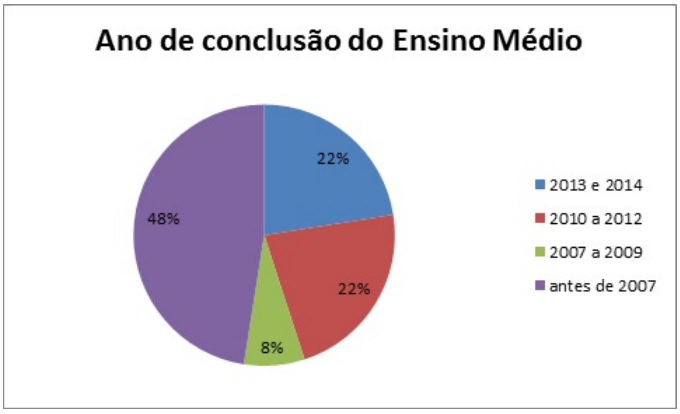
Com relação ao sexo dos alunos, 67% são do sexo masculino.

Em relação à cidade da qual é oriundo, 45% são da cidade de Floriano e a maioria vem de municípios vizinhos. No que diz respeito às suas idades, foi obtido os seguintes resultados expressos no gráfico abaixo:

Assim, percebe-se que a maior parte dos alunos são jovens com idades entre 15 e 20 anos. Também cabe destacar os 15% de alunos com idades acima de 35 anos. A pesquisa revelou ainda que 72% dos ingressos ainda são solteiros, 20% casados, e 8% divorciados.

Um outro dado interessante também é que 87% dos alunos são oriundos de escolas públicas, sendo 52% dos mesmos, cotistas.

Buscou-se investigar também o ano em que os alunos terminaram o Ensino Médio. Os resultados se encontram no gráfico abaixo:



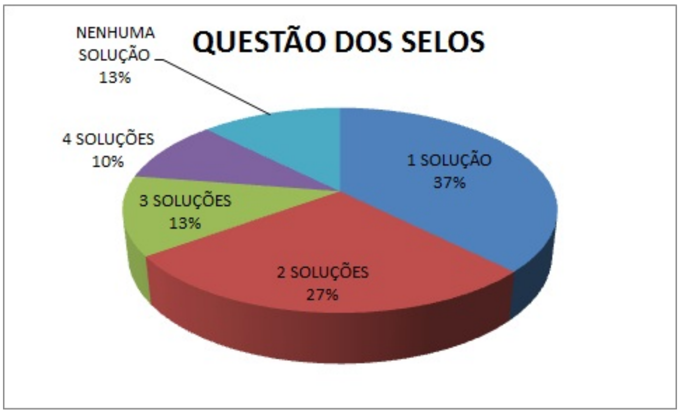
A maioria dos alunos terminou antes de 2007, com 48% do total de alunos, o que mostra muitas pessoas fora da idade daquela considerada ideal que ainda buscam por uma formação superior.

6.2 Análise do questionário prévio

Neste momento serão apresentados os resultados obtidos durante a aplicação do questionáro prévio. (Veja APÊNDICES: Questionário 1)

A primeira questão, que falava sobre a quantidade de pontos em uma partida de basquete em Gugulândia, todos os alunos falaram que não era possível marcar os 39 pontos com cestas de 5 e de 11 pontos, pois foram tentando encontrar par de números x e y que fossem solução deste problema, porém não encontraram nenhuma solução, o que mostra que o método da tentativa é muito útil neste problema visto que os valores são pequenos.

Na segunda questão, os alunos foram indagados sobre a quantidade de formas de se comprar selos de 3 e de 5 reais de forma a gastar 50 reais. Os resultados obtidos não foram nada satisfatórios, pois somente 10% dos alunos conseguiram encontrar todas as quatro soluções possíveis da equação, e a grande maioria, 37% só conseguiu encontrar uma solução. Também, uma parcela bem pequena de discentes não conseguiu encontrar nenhuma solução para tal problema. Todos os alunos, sem exceção, tentaram responder a questão pelo método da tentativa. O número de acertos dos mesmos se encontram no gráfico logo abaixo:

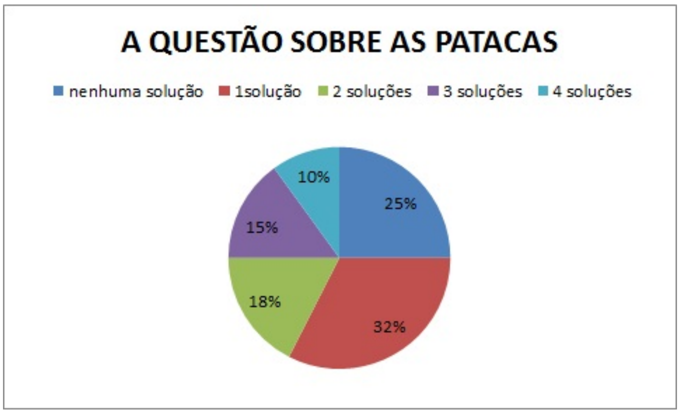


Na questão seguinte, os alunos foram submetidos a dizer se as duas equações propostas possuíam alguma solução. No item a, 75% dos alunos conseguiram encontrar solução para a equação. Já no item b, nenhum aluno encontrou solução para a equação, portanto, todos eles obtiveram sucesso neste item.

Já na quarta questão, que buscava encontrar os possíveis valores de c, 87,5% conseguiram encontrar pelo menos um valor para c, tomando basicamente $x = 1$ e $y = 1$. Porém, o que chama atenção é que somente 10% dos alunos conseguiram observar que c poderia ser qualquer múltiplo de 6. Isso é um pouco preocupante, visto que é um problema relativamente pouco complicado.

A quinta questão, que retratava sobre o macaco que subia as escadas, 62% dos alunos erraram a questão. O detalhe é que todos os que acertaram foi pelo método da tentativa, ou seja, nenhum deles conseguiu responder a questão de forma mais matemática.

Quando indagados sobre a questão das patacas, 25% dos alunos não conseguiram encontrar nenhuma solução, sendo que somente 10% conseguiram encontrar todas as quatro soluções, como mostra o gráfico a seguir:



Na questão da OBM(97), 60% dos alunos obtiveram sucesso ao responder a questão, também pelo método da tentativa.

E por fim, os alunos foram submetidos a uma questão sobre o número de galinhas e de coelhos. Os resultados mostraram que 38% dos alunos conseguiram encontrar solções para a situação, mas que não era a menor solução que o problema pedia. Somente 7% responderam a questão toda, como mostra o gráfico:

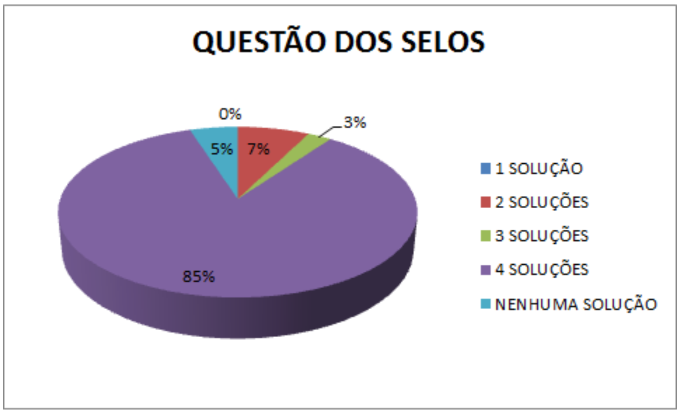
Agora, serão mostrados os resultados obtidos após a oficina sobre Equações Diofantinas Lineares.

6.3 Análise dos dois últimos questionários

Nesta análise a posteriori, foram aplicadas também oito questões, semelhantes ou iguais as que foram aplicadas no teste inicial e também um questionário para averiguar a opinião dos alunos sobre o tema em questão. (Veja APÊNDICES: Questionário 2 e Teste)

Neste segundo questionário, a primeira questão, que falava sobre a quantidade de pontos em uma partida de basquete em Gugulândia, todos os alunos acertaram a questão, assim como na análise a priori, só que agora, 93% dos alunos resolveram a questão utilizando-se das ferramentas vistas durante a oficina.

Quando foram resolver a segunda questão, relacionada com a quantidade de selos de 5 e de 7 reais. Os resultados obtidos confirmaram uma melhoria dos alunos, pois se no primeiro teste somente 10% dos alunos conseguiram encontrar todas as quatro soluções, agora foram 85%. Cabe ressaltar que 10% se utilizaram ainda do método da tentativa, como mostra o gráfico abaixo:

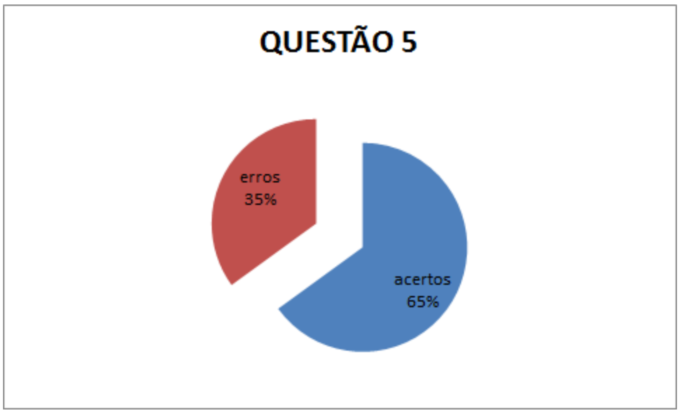


Na próxima questão, para dizer quais das duas equações propostas possuíam solução, tanto no item *a*, quanto no item *b*, todos os alunos acertaram a questão, confirmando então a grande eficiência do cálculo do *mdc* pelo Algoritmo de Euclides, e assim saber se a equação tem solução ou não. Todos os alunos se utilizaram desta ferramenta.

Novamente, foi aplicado a questão para se encontrar os possíveis valores de c. Agora, 93% dos alunos conseguiram encontrar os possiveis para para c. Outro dado relevante é que 85% dos alunos conseguiram observar que c poderia ser qualquer múltiplo de 6.

A quinta questão, de resolução semelhante a questão do macaco, 65% dos alunos acertaram a questão. Agora, dos que acertaram, 60% foi fazendo o cálculo de forma mais aritmética.

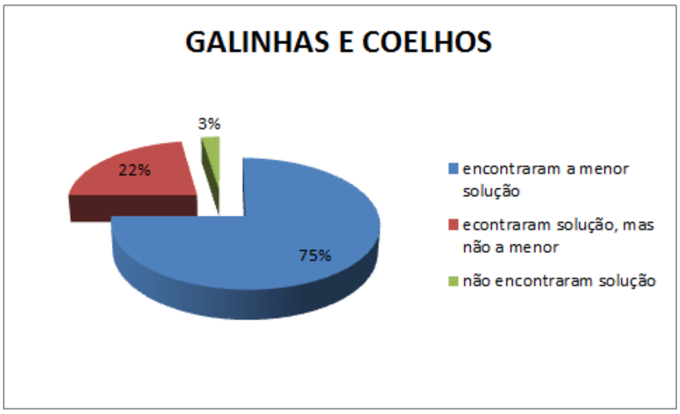
A melhoria aqui se deu por que os alunos conseguiram compreender o enunciado da questão e não apenas tentaram "chutar" números como foi feito no primeiro teste. Veja o gráfico:



Os alunos também foram submetidos a questão dos *escudos*, de resolução semelhante a das *patacas*. Os resultados mostraram que 62% dos alunos acertaram totalmente a questão e 18% acertaram de forma parcial. É interessante ver que 90% dos alunos resolveram aritmeticamente a questão, sem tentar atribuir valores. Os dados encontrados são mostrados no gráfico a seguir:

Na questão da OBM(99), houve também um bom resultado dos alunos, visto que 85% dos mesmos obtiveram sucesso ao responder a questão. O método da tentativa aqui também foi eficiente, pois dos 9% dos discentes que o fizeram, todos obtiveram sucesso.

Por último, a questão sobre o número de galinhas e de coêlhos foi novamente aplicada. Os resultados confirmaram um resultado excelente, pois 97% dos alunos encontraram solução para o problema, dos quais 75% encontraram a menor solução. O detalhe é que somente 6% se utilizaram do método da tentativa. Os resultados obtidos duante a aplicação da questão se encontram no seguinte gráfico:



Ao fim da oficina, os alunos puderam dar a sua opinião sobre o tema em questão. Eles ficaram muito entusiasmados com a oficina e com os novos conhecimentos adquiridos. Muitos relatos que só vem a confirmar a melhoria no desempenho em relação as questões abordadas durante a sondagem feita com a turma. Um aluno relatou o seguinte:

Aluno A. *Eu gostei muito de ter aprendido sobre equações diofantinas, por que através delas e da oficina, consegui relembrar várias propriedades da matemática que estavam esquecidas e também algumas que eu nem me lembro de ter visto.*

Quando perguntados se eles achavam que o seu desempenho em olimpíadas teria melhorado se tivessem visto o tema proposto antes, os alunos afirmaram que teriam melhorado, com certeza. Eles disseram que se trabalhado num tempo um pouco maior, seus resultados seriam melhores ainda. Outro aluno relatou:

Aluno B. *Eu melhoraria meu desempenho com certeza por que além de conseguir resolver as questões sobre equações diofantinas, muitas outras questões poderiam ter sido resolvidas com as propriedades aqui adquiridas, principalmente o cálculo do mdc pelo Algoritmo de Euclides, que é muito massa.*

Por fim, foi perguntado também sobre quais as dificuldades de se aprender Equações Diofantinas Lineares. Foi unanimidade dos alunos que não se tem maiores dificuldades, visto que os requisitos necessários para a resolução das mesmas são conteúdos por eles já vistos. Muitos relatos também acerca do por que de não ter visto este assunto antes, pois é bastante interessante.

Para finalizar, o relato de um aluno que ressalta a utilidade do tema proposto:

Aluno C. *Eu não sei por que não tinha visto esse assunto ainda, por que aprendi tantas coisas novas com ele, e é porque eu achava que sabia muita coisa de matemática. Se tivesse visto antes, melhoraria de mais o meu desempenho em olimpíadas de matemática.*

7 Considerações Finais

Como se esperava no início da pesquisa, os resultados do estudo sobre Equações Diofantinas Lineares mostraram que a maioria dos alunos conseguiu compreender e assimilar as propriedades e os novos conhecimentos adquiridos ao longo da oficina, pois tais conhecimentos melhoraram os seus desempenhos em relação às questões propostas.

Os depoimentos dos alunos, depois da sondagem feita, alguns citados acima, enriquecem a nossa pesquisa, e mostram que o tema proposto pode ser utilizado para uma melhoria dos alunos em questões de olimpíadas de matemática, desde que pensadas e realizadas em tempo hábil e com metodologias de ensino adequadas.

Um ponto positivo a ser destacado e que foi unanimidade entre os alunos é que o conteúdo estudado tem várias aplicações pois é capaz de resolver não só questões relacionadas com Equações Diofantinas Lineares, e também, com as ferramentas que foram adquiridas ao longo da oficina, principalmente o uso do Algoritmo de Euclides, resolver diversos problemas relacionados com as olimpíadas de matemática.

As dificuldades para a resolução de algumas questões percebidas no teste inicial, já não puderam mais ser notadas de forma tão grande, pois os resultados confirmaram um avanço em todas as questões propostas, umas menos, outras mais, mais todas sendo assimilado o conteúdo estudado.

E mais, o método da tentativa, que foi praticamente a ferramenta utilizada no teste inicial, deixou de ser o único mecanismo para a resolução das questões, havendo uma maior compreensão por parte dos alunos no enunciado das questões e também na assimilação das propriedades e das ferramentas que a oficina pode proporcioná-los.

Diante disso, este trabalho reafirma a importância de se utilizar as Equações Diofantinas Lineares para os alunos melhorarem seu desempenho em problemas utilizados em preparações olímpicas. É claro que nem todos os alunos conseguiram escrever corretamente as notações matemáticas, durante a resolução das questões, mas é inevitável perceber as melhorias que eles obtiveram.

Consideramos assim, a importância do nosso trabalho, de forma que forneceu informações interessantes a respeito do uso das Equações Diofantinas Lineares para a resolução de questões de preparações olímpicas de matemática.

Referências Bibliográficas

[1] ALMOULOUD, S. A., COUTINHO, C. de Q. e S. *Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19* / ANPEd.REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.6, p.62-77, UFSC, 2008.

[2] BOYER, Carl Benjamin, *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide, 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, *Parâmetros curriculares nacionais : matemática* /Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília : MEC/SEF, 1997.

[4] CAPILHEIRA, Bianca Herreira; DOERING, Luisa Rodriguez. *Equações Diofantinas Lineares: uma proposta para o ensino médio*. 2012. Disponível em: <http://matematica.ulbra.br/ocs/index.php/ebrapem2012/xviebrapem/paper/view/609/319>

[5] EUCLIDES. *Os Elementos. Tradução e introdução de Ireneu Bicudo*. São Paulo, SP: Editora UNESP, 2009.

[6] HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética*, 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Coleção textos Universitários.

[7] HEFEZ, Abramo. *Iniciação à aritmética*, Rio de Janeiro, IMPA, 2013. Programa de iniciação científica OBMEP.

[8] OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática. <www.obm.org.br>.

[9] POTI: Programa Olímpico de Treinamento Intensivo, 2013.

[10] SOUSA, R. N. S. de, CORDEIRO, M. H. *A contribuição da Engenharia Didática para a prática docente de Matemática na Educação Básica*, UNIVALI,2007.

8 Apêndices

8.1 Questionário 1

1) (POTI 2013) Em Gugulândia, o jogo de basquete é jogado com regras diferentes. Existem apenas dois tipos de pontuações para as cestas: 5 e 11 pontos. É possível um time fazer 39 pontos em uma partida?

2) De quantos modos podemos comprar selos de cinco e de três reais, de modo a gastar cinquenta reais?[7]

3) Diga quais são as equações diofantinas a seguir que possuem pelo menos uma solução:[7]

   a) $3x + 12y = 312$

   b) $5x + 15y = 33$

4) Para quais valores de c, com c inteiro, a equação $30x + 42y = c$ admite soluções inteiras? [7]

5) Se um macaco sobe uma escada de dois em dois degraus, sobra um degrau; se ele sobe de três em três degraus, sobram dois degraus. Quantos degraus a escada possui, sabendo que o número de degraus é multiplo de sete e está compreendido entre 40 e 100?[7]

6) Um grupo de homens e mulheres gastaram numa taberna 1000 *patacas*. Cada homem pagou 19 *patacas* e cada mulher 13. Quantos eram os homens e quantas eram as mulheres?[7]

7 (OBM 97) Uma das soluções inteiras e positivas da equação $19x + 97y = 1997$ é, evidentemente, $(x_0, y_0) = (1000, 1)$. Além desse, há apenas mais um par de números inteiros e positivos (x_1, y_1) satisfazendo a equação. O valor de $x_1 + y_1$ é:

   (a) 23

   (b) 52

(c) 54

(d) 101

(e) 1997

8 Em um quintal onde são criados coelhos e galinhas contaram-se 400 pés. Quantas são as galinhas e e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível?[7]

8.2 Questionário 2

1) (POTI 2013) Em Gugulândia, o jogo de basquete é jogado com regras diferentes. Existem apenas dois tipo de pontuações para as cestas: 5 e 11 pontos. É possível um time fazer 39 pontos em uma partida?

2) De quantas maneiras podemos comprar selos de cinco e de sete reais, de modo a gastar cem reais?[7]

3) Diga quais são as equações diofantinas a seguir que possuem pelo menos uma solução:[7]

   a) $3x + 5y = 223$

   b) $7x + 14y = 77$

4) Para quais valores de c, com c inteiro, a equação $30x + 42y = c$ admite soluções inteiras? [7]

5) Mostre que nenhum número pode deixar resto 5 quando dividio por 12 e resto 4 quando dividido por 15.[7]

6) (Proposto por Euler) Uma pessoa comprou cavalos e bois. Foram pagos 31*escudos* por cavalo e 20 por boi e sabe-se que todos os bois custaram 7 *escudos* a mais do que todos os cavalos. Quantos cavalos e quantos bois foram comprados?[7]

7 (OBM 99) Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação $2x + 3y = 101$?

(a) 13

(b) 14

(c) 15

(d) 16

(e) 17

8 Ache todos os números naturais que quando divididos por 18 deixam resto 4 equando divididos por 14 deixam resto 6?[7]

8.3 Teste

1) Você gostou da oficina realizada sobre equações diofantinas lineares? Por quê?

2) Se você tivesse visto este conteúdo no Ensino Médio, você acha que o seu desempenho nas olimpíadas de matemática teria sido melhor? Por quê?

3) Depois da oficina, sua visão sobre matemática mudou? cite alguns aspectos?

4) O que você acha da implantação deste conteúdo no Ensino Médio?

5) Qual o grau de dificuldade de se aprender Equações Diofantinas Lineares?