UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Luciana de Souza de Moraes

A GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO SOBRE O USO DO MATERIAL CONCRETO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

RIO DE JANEIRO

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO SOBRE O USO DO MATERIAL CONCRETO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

POR

Luciana de Souza de Moraes

Orientador: Ronaldo da Silva Busse

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Rio de Janeiro – RJ

2014

Moraes, Luciana de Souza de

A Geometria Espacial no Ensino Médio: Um estudo sobre o uso do material concreto na resolução de problemas/ Luciana de Souza de Moraes - 2014

55.p

1.Matemática 2. Geometria. I.Título.

CDU 536.21

Luciana de Souza de Moraes

A GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO SOBRE O USO DO MATERIAL CONCRETO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 26 de Fevereiro de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Ronaldo da Silva Busse
Doutor em Matemática – UFRJ

Aline Caetano da Silva Bernardes
Mestre em Matemática – UFRJ

Vânia Cristina Machado
Mestre em Matemática - UFRJ

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, que através da fé, permitiu que eu conseguisse prosseguir com meus estudos, apesar de tantas dificuldades.

À minha família que é o alicerce da minha vida. Aos meus pais, em especial, eu agradeço pelos ensinamentos e por ensinar-me o valor da educação. Aos meus irmãos pela amizade e pelo apoio durante esta trajetória.

Ao meu marido Márcio que sempre acreditou em mim e me deu força para vencer as adversidades, lutar e seguir em frente.

À amiga de curso, Fabiana, agradeço pela parceria, paciência, compreensão e apoio nos momentos em que acreditei não ser possível a realização deste trabalho

Aos colegas de turma que contribuíram para este momento de felicidade com amizade e grande união incentivando nos momentos de dificuldade e colaborando não só com palavra amiga como também com os grupos de estudo.

Ao meu orientador, Ronaldo Busse, que com paciência, dedicação e carinho me orientou para que eu pudesse realizar um bom trabalho.

Muito obrigada!

RESUMO

Esta pesquisa apresenta propostas para o uso de materiais didáticos no ensino de Geometria Espacial, com foco na resolução de problemas trazendo para cada um destes um material para auxiliar na sua resolução. As sugestões aqui apresentadas têm como base as teorias de Van Hiele e Gutierrez, tendo como finalidade desenvolver as habilidades de visualização e de resolução de problemas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas - Material concreto - Visualização

ABSTRACT

This research presents some proposals on using didatic materials to teach Spatial Geometry, focusing in problem solving and bringing for each one of these problems one material to help solving them. Suggestions made here are based on Van Hiele and Gutierrez theories, aiming to develop visualization and problem resolutions abilities.

Keywords: Problem solving – Concrete Materials - Viewing

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

Há uma forte relação entre a Geometria e o mundo em que vivemos. Podemos identificar, em nosso cotidiano, diversas das formas espaciais que estudamos em Geometria. No entanto, isto não é aproveitado em sala de aula. Em geral, tal disciplina é ensinada de forma mecânica e abstrata, dissociada do conhecimento de que o aluno já dispõe.

Além disso, no campo da Geometria Plana não nos deparamos com tantos obstáculos quanto na Geometria Espacial. É notável a dificuldade do aluno de “ver” no espaço. Conseguir visualizar um sólido através de sua planificação, ou até mesmo, compreender as figuras geométricas espaciais que são expostas no quadro não é tarefa fácil.

De acordo com Kaleff (2003, p.16):

> Especificamente no contexto geométrico, a habilidade da visualização assume importância fundamental. Ao visualizar objetos geométricos, o indivíduo tem possibilitado o controle sobre o conjunto das operações mentais básicas exigidas no trato da Geometria.

Diante dessas considerações, apresentamos neste trabalho propostas para o uso do material concreto na resolução de problemas de Geometria Espacial, com o objetivo de levar o aluno a resolver exercícios, através da manipulação desses materiais, além da estimulação da visualização mental. Para isso, sugerimos três problemas de Geometria Espacial, direcionadas para turmas do 2º ano do Ensino Médio, com a finalidade de analisar que elementos entram em questão no contato do aluno com esses objetos e que tipo de associação os mesmos estabelecem.

Para iniciar o nosso estudo, no capítulo 2 faremos uma apresentação sobre a visão da neurociência acerca do aprendizado em Geometria Espacial. Em seguida, abordaremos as teorias de Van Hiele e Gutierrez. No capítulo 3, faremos um breve histórico sobre o ensino da Geometria no Brasil e apresentaremos ainda, alguns métodos lúdicos existentes bem como a visão dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio sobre o Ensino de Geometria. Logo após, no capítulo 4, falaremos sobre a importância da resolução de problemas como método de ensino e exibiremos algumas propostas de problemas de Geometria Espacial, assim como o tipo de material que pode ser utilizado para tais exercícios.

Este trabalho conta também com a colaboração da pesquisa feita pela aluna Fabiana Chagas de Andrade com o tema: Jujubas: Uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio. O material apresentado pela aluna pode ser utilizado para resolver problemas que envolvam a utilização de arestas ou mesmo para a simples visualização.

Acreditamos que, dessa forma, a Geometria Espacial pode ser abordada de uma maneira diferente da tradicional, despertando um interesse maior do aluno em aprender conteúdos matemáticos que, até então, eram difíceis de serem compreendidos.

E por fim, esperamos que o material aqui trazido possa contribuir para o aprendizado de Geometria Espacial.

1 ENSINO E APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA

Neste capítulo buscamos fundamentar nosso estudo nas mais novas teorias de aprendizagem, baseadas na Neurociência e na Teoria das Inteligências Múltiplas (TIM). Utilizamos como base de nosso trabalho os níveis de Van Hiele e de Jaime Gutiérrez no aprendizado em Geometria Espacial.

1.1 Neurociência e aprendizagem Matemática

Com o objetivo de potencializar o aprendizado, cada vez mais os educadores buscam, nas bases da Neurociência, um meio de reafirmar suas teorias de aprendizagem.

Segundo Marta Relvas (2012, p.27)

> “Neurociência é um conjunto de disciplinas que permeiam os estudos do sistema nervoso e originou-se das bases cerebrais da mente humana.”

Recentes estudos mostram que existe uma inter-relação entre o sistema nervoso, as funções cerebrais, mentais e o meio ambiente. Isto mostra que a aprendizagem e o comportamento começam no cérebro e são mediados por processos neuroquímicos, o que motivou a criação do termo Neuropedagogia que, segundo Marta Relvas, tem como objetos de estudo a Educação e o cérebro, entendido como um órgão social que pode ser modificado pela prática pedagógica.

O objetivo da Neuropedagogia é reestruturar a prática docente e discente em função de novas descobertas sobre o funcionamento do aparelho cognitivo humano.

1.1.1 A estrutura do aparelho cognitivo:

O encéfalo é o complexo que forma o aparelho cognitivo. Podemos dividi-lo em três partes (Fig. 1):

1. Cerebelo: É a parte responsável por estruturar comandos mecânicos do corpo. É este sistema que recebe instruções como andar de bicicleta, que programam a rede de neurônios e que depois de implantadas não são posteriormente esquecidas.

2. Sistema límbico: Se compõe de hipotálamo, tálamo, amígdalas e hipocampo. É responsável pelos instintos básicos como medo e decisão de lutar ou correr diante de uma ameaça (amígdalas e hipotálamo). Já o hipocampo perfaz a memória que faz um registro dos dados colhidos durante o dia e os copia para o córtex. Depois, este registro é apagado para que novas informações sejam armazenadas no dia seguinte.

3. Córtex: É onde se registra definitivamente o que foi aprendido durante o dia. À noite, durante os sonhos, o córtex grava as informações colhidas pelo hipocampo durante o dia e armazena para o resto da vida. Ao contrário do cerebelo, que escolhe as informações a serem gravadas, no córtex essa escolha é inconsciente. Na verdade, a escolha do que se copia é feita pela "profundidade" das marcas deixadas no hipocampo. Esta profundidade é dada pela emoção associada à informação ou pelo estudo, pois o esforço empregado na aprendizagem atribui um status de importante à informação e o copia para o córtex.

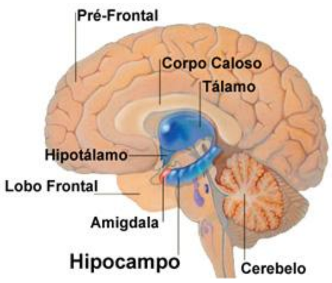


Figura 1: Estrutura do encéfalo[1]

[1] Disponível em:< http://www.psiqweb.med.br/site/?area=NO/LerNoticia&idNoticia=292. Acesso em Dezembro de 2013. >

Com base nessa informação, para um melhor aprendizado o ideal é que o aluno estude o conteúdo no mesmo dia em que assistiu à aula, para que a informação adquirida tenha status de importante e seja transferida para o córtex e gravada para o resto da vida.

A Neuropedagogia relata que o ensinar implica em maximizar o funcionamento do cérebro através de práticas pedagógicas que estimulem áreas especificas do mesmo. Para promover este estímulo, John Locke sustentou que o conhecimento e a aprendizagem são obtidos por meio de experiências sensoriais, pois ao nascer o ser humano é uma folha de papel vazia, que vai sendo preenchida através das experiências, as quais chegam ao sistema nervoso central sob a forma de estímulos sensoriais.

1.1.2 A Teoria das Inteligências Múltiplas (TIM)

Segundo Marta Relvas, para garantir que as informações sejam processadas e aprendidas, as aulas devem estar baseadas na preparação, expectativa, emoção e atenção, pois a memória humana é seletiva e armazena experiências atreladas às emoções positivas e negativas. Cabe ao educador inserir em suas práticas pedagógicas atividades que estimulem a emoção pelo lado positivo e consequentemente, a armazenagem do conteúdo pretendido na memória, construindo as inteligências.

Mas o que seriam, de fato, inteligências? O cérebro é um órgão extremamente complexo, e o conceito de inteligência não se baseia mais na hipótese de que possuímos apenas uma inteligência, a dos testes de Q.I., que avaliam, principalmente, a linguística e o raciocínio lógico matemático. Desde a década de 80, Howard Gardner vem desenvolvendo a Teoria das Inteligências Múltiplas (TIM), que se apoia nas mais recentes descobertas da Neurociência, que explicam memória, aprendizagem, consciência e inteligências em geral.

A prova de que a mente humana abriga diferentes inteligências pode ser compreendida ao observar pacientes com lesão cerebral, na qual se perdem elementos específicos de uma ou mais inteligências, conservando intactos os demais.

A TIM defende o estímulo cerebral nas escolas, que devem ser “centros estimuladores das inteligências”, e que o ser humano deve ser compreendido em sua amplitude através de cada uma das inteligências: Linguística, Lógico Matemática, Espacial Criativa, Sonora, Cinestésico-corporal, Naturalista e E-mocional. Através delas, pode-se perceber o aluno de forma integral, por sua inteligência em determinada área e dificuldade em outra.

Segundo Celso Antunes (2001, p.19), especificamente, a inteligência Lógico Matemática compreende a capacidade para discernir padrões lógicos ou numéricos e a percepção de grandeza, peso, distância e outros elementos. As áreas cerebrais de sua ação são o lobo parietal esquerdo e pontos no hemisfério direito. Já a Inteligência Espacial está ligada aos sólidos geométricos. Associa-se à compreensão do espaço e à orientação aos seus limites. As á-reas de ação são regiões posteriores do hemisfério direito. Observa-se que a Geometria Espacial envolve as duas inteligências, e os lados direito e esquerdo do cérebro, o que pode explicar a natural dificuldade na aprendizagem por parte dos alunos.

De fato, a TIM apenas confirmou as experiências dos educadores quando relatavam que alguns alunos tinham facilidade ou dificuldade com Geometria. É por compreender o aluno como um ser humano integral, que pode ou não possuir a inteligência lógico-matemática e espacial, que nos motivamos a utilizar a Neuropedagogia, que é baseada na aprendizagem sensorial e na emoção, para desenvolver um método para a aprendizagem em Geometria Espacial.

Para estimular a aprendizagem em Geometria Espacial através da TIM, devemos propor atividades que:

- reconheçam objetos diferentes, permitindo associação, comparação, padrões e relacionamentos entre eles;
- utilizem símbolos abstratos para representar objetos concretos;

- usem peças para resolver desafios que envolvam a construção de objetos, estimulem a formação do pensamento matemático e formulação de modelos.

O novo caminho do professor será de reconhecer e despertar as inteligências, através de conexões afetivas e emocionais do sistema límbico. É através das conexões, que serão liberadas substâncias naturais como serotonina e dopamina, pois estão relacionadas à satisfação, ao prazer e ao humor. Já o estresse da sala de aula provoca a liberação de adrenalina e cortisol, substâncias que agem como bloqueadores da aprendizagem e que alteram a fisiologia do neurônio, interrompendo as transmissões das informações das sinapses nervosas.

Este trabalho foi concebido com base nas propostas acima, ao se estudar as mais recentes teorias de aprendizagem baseadas nos avanços da Neuropedagogia e os estímulos a diferentes áreas do cérebro, através do uso de materiais manipulativos no ensino de Geometria Espacial, que estimulam os sentidos e inserem a emoção no ambiente escolar.

1.2 O modelo de Van Hiele e Gutièrrez

Estudos sobre visualização espacial e aprendizagem levaram alguns estudiosos à formulação de teorias que identificam fases do aprendizado em Geometria. Dentre esses estudos, podemos destacar o modelo de Van Hiele na Geometria Plana e a teoria de Gutièrrez na Geometria Espacial.

A teoria de Van Hiele concebe diversos níveis concebe diversos níveis de aprendizagem geométrica (ou pensamento geométrico) (KALEFF, 1994, p. 25 e 26) (Fig. 2):

0. Nível Reconhecimento (Visualização): Avaliação das figuras apenas pela sua aparência. Reconhecimento, comparação e nomenclatura.

1. Nível Análise: Avaliação das figuras em relação à seus componentes, reconhecimento de propriedades e uso das propriedades na resolução de problemas.

2. Nível Percepção: Ordenação das propriedades e construção de definições.

3. Nível Dedução: Domínio do processo dedutivo e das demonstrações, reconhecimento de condições necessárias e suficientes e demonstração de algumas propriedades.

4. Nível Rigor: Capacidade de compreender demonstrações formais, comparação e estabelecimento de teoremas em diversos sistemas.

Figura 2: Modelo de Van Hiele

Ao analisar o modelo de Van Hiele, observa-se que as aulas de Geometria Espacial no 2º ano do Ensino Médio contemplam apenas os três primeiros níveis, e muitas vezes não há a construção da aprendizagem através de cada nível. O que ocorre é a apresentação do conteúdo de forma expositiva, o que resulta numa memorização dos sólidos geométricos que é posteriormente esquecida pelos alunos.

O uso de materiais manipulativos permite a construção do conhecimento através dos três níveis iniciais e permite que o aluno alcance o quarto nível (dedução).

CROWLEY(1994) destacou o papel do professor em cada nível de Van Hiele, e observa-se que este papel difere em muito do modelo de aulas expositivas no quadro bidimensional que a maioria dos professores utilizam.

1. Informação: O professor e aluno dialogam sobre o material de estudo, e o professor deve perceber quais são os conhecimentos prévios do aluno sobre o assunto a ser estudado.

2. Orientação Dirigida: Os alunos exploram o assunto de estudo através do material selecionado pelo professor (no caso deste trabalho o manipulativo), e as atividades deverão proporcionar respostas especificas e objetivas.

3. Explicação: O papel do professor é o de observador do aluno, que está construindo um conhecimento inicial sobre o assunto.

4. Orientação Livre: O professor propõe tarefas constituídas de várias etapas, possibilitando diversas respostas, a fim de que o aluno ganhe experiências e autonomia.

5. Integração: O professor auxilia no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem apresentar novas e discordantes idéias.

O mais importante na teoria de Van Hiele é a descoberta de que o aluno não alcança um nível a frente sem passar pelos anteriores, ou seja, há uma hierarquia de conhecimento. Cabe ao professor adequar sua linguagem à medida que o aluno avança nesses níveis.

Alguns estudos têm procurado adaptar os níveis de Van Hiele para além das figuras no plano, estendo-os às figuras 3D e transformações geométricas. Dentre estes, destacamos o de Angel Gutiérrez, 1990, para quem a visualização em Geometria é “um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais e espaciais, tanto mentais quanto físicos, desenvolvidos para resolver problemas ou provar propriedades”. A visualização integra-se a quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização. De acordo com esse autor:

> [...] uma imagem mental é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade, por meio de elementos visuais ou espaciais; [...] uma representação externa pertinente à visualização é qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos ou propriedades incluindo figuras, desenhos, diagramas, etc, que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e produzir raciocínio visual; [...] um processo de visualização é uma ação física ou mental, onde imagens mentais estão envolvidas. Existem dois processos realizados na visualização: a "interpretação visual de informações" para criar imagens mentais. (Gutièrrez, 1996, p. 9-10)

Em relação às habilidades de visualização espacial, Gutièrrez (1996, p.10) define os diferentes segmentos:

- Percepção de figura base: habilidade de identificar uma figura específica isolando-a de um fundo complexo.
- Constância perceptual: habilidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) são independentes do tamanho, cor, textura ou posição, e permanecer não confuso quando um objeto ou figura é percebido em diferentes orientações.
- Rotação mental: habilidade de produzir imagens mentais dinâmicas para visualizar uma configuração em movimento.
- Percepção de posições no espaço: habilidade de relacionar um objeto, figura ou imagem mental em relação a si mesmo.
- Percepção de relações espaciais: habilidade de relacionar vários objetos, figuras e/ou imagens mentais uns com os outros ou simultaneamente consigo mesmo.
- Discriminação visual: habilidade de comparar vários objetos, figuras e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles.

Dentre as habilidades de visualização, observa-se que os alunos tem maior dificuldade em constância perceptual e rotação mental, o que observa-se quando ao resolver exercícios envolvendo prismas, o aluno confunde as faces laterais com a base pelo fato de a figura ter sofrido uma rotação (Fig. 3).

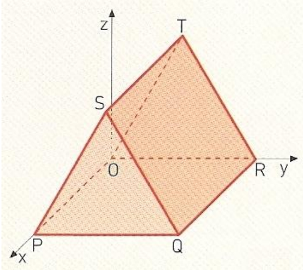


Figura 3: Prisma Rotacionado

Encontrar alternativas de ensino que atuem na construção da aprendizagem através dos níveis de Van Hiele e das habilidades de visualização espacial de Gutiérrez é uma discussão necessária para melhorar o rendimento dos alunos do Ensino Médio em Geometria Espacial.

1.3 A visualização na Geometria Espacial

A importância da visualização tem sido apontada em muitas pesquisas nos últimos anos na área de Educação Matemática.

De acordo com Marcelo Becker (2009,p.27):

> Gutiérrez (1992) afirma que quando se trabalha Geometria Espacial, é fundamental que se tenha em mente a visualização. A capacidade de visualização é uma habilidade básica nesse campo de conhecimento. Uma pessoa que tem dificuldades em visualização terá problemas em entender contextos gráficos apresentados nos livros e apresentará dificuldades em expressar suas próprias ideias.

Sabemos que os alunos encontram bastante dificuldade na habilidade de visualização e podemos perceber essa dificuldade durante nossa atuação em sala de aula. Se decidirmos pesquisar um pouco mais, perceberemos que esse problema já persiste há algum tempo, e não precisamos ir tão longe para constatar este fato. Analisando os Relatórios Pedagógicos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)[2] nos anos de 2005 à 2008, notamos que no que se

[2] Relatórios com informações sobre as provas do Enem. Esses relatórios podem ser encontrados no site do INEP.

refere ao campo de Geometria, questões que tratavam do campo de visualização obtiveram um índice muito baixo de acertos.

O material manipulável vem contribuir para o desenvolvimento da capacidade de visualização. É importante o professor ter em mãos modelos que representem os sólidos que estão sendo estudados, para que os alunos se familiarizem e formem uma imagem dos mesmos. Uma outra alternativa para desenvolver essas imagens mentalmente, é utilizar embalagens que se assemelhem a essas figuras espaciais, até mesmo para que os estudantes busquem uma relação com o mundo em que vivemos.

Um outro ponto essencial para se trabalhar a visualização são as planificações dos sólidos. Este material é crucial para fazer a conexão entre os elementos do plano e do espaço. Além de trabalhar a ideia de superfície do sólido e a representação do próprio sólido.

Marcelo Becker (2009,p.20) afirma:

> Segundo Gutiérrez (1991), é fundamental que o aluno adquira e desenvolva habilidades que o permitam entender e interpretar diferentes tipos de representações bidimensionais de objetos tridimensionais, ou seja, habilidades que permitam ao aluno criar, mover, transformar e analisar imagens mentais de objetos tridimensionais geradas por uma informação dada através de um desenho plano. Os tipos de atividades propostas nos livros não permitem o desenvolvimento dessas habilidades por não oportunizarem aos alunos a experiência e a possibilidade da criação de suas próprias hipóteses.

Ainda neste campo, podemos identificar dificuldade em diferenciar modelos do plano e do espaço. É muito comum ouvir um aluno identificar um tetraedro como um triângulo ou até mesmo um octaedro como um losango. Além disso, outro problema é a representação gráfica em vistas diferentes, pois outro fato que ocorre bastante é a confusão da base de um prisma se visto de uma perspectiva diferente.

A utilização de modelos concretos permite que a figura geométrica possa ser observada em várias posições e angulações, tornando o registro da imagem mental mais dinâmico e com isso o aluno poderá explorar melhor as propriedades do objeto, fazer conjecturas e tirar conclusões sobre o mesmo.

Segundo Kaleff, deve-se ressaltar que não podemos confundir tal habilidade com a percepção visual. A segunda refere-se à representação concreta do que está se vendo, isto é, a apreciação do objeto através da visão, enquanto que a outra trata da imagem mental, que é construída a partir do contato e da manipulação do mesmo. A autora afirma (2003, p.16):

> Crianças pequenas percebem o espaço à sua volta por meio do conjunto de seus sentidos, isto é, o conhecimento dos objetos resulta de um contato direto com os mesmos. É a partir deste contato com as formas do objeto, a textura e as cores do material de que ele é composto, bem como da possibilidade de sua manipulação, que tem origem a construção de uma imagem mental, a qual permitirá evocar o objeto na sua ausência. Assim é que a criança vai formando um conjunto de imagens mentais que representam o objeto, as quais são envolvidas no raciocínio. A partir deste ponto, ela poderá vir a representar com sucesso o objeto observado, através da elaboração de um esboço gráfico ou de um modelo concreto.

Deste modo, a fim de desenvolver a visualização mental é necessário dar o estímulo visual para que ocorra a construção das imagens mentais e o uso do material concreto irão nos auxiliar positivamente nesta tarefa.

2 O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

Neste capítulo faremos um histórico sobre o ensino de Geometria no Brasil, em específico a Geometria Espacial e versaremos sobre as diretrizes norteadoras do ensino de Geometria no Ensino Médio, destacando sua importância. Ademais, mostraremos os principais materiais concretos utilizados no ensino deste conteúdo.

2.1 História da Geometria no Brasil

Segundo Valente (2008), os primeiros registros históricos sobre o ensino da Matemática no Brasil remontam o ano de 1669, quando a Coroa Portuguesa viu a necessidade de treinar melhor seus militares e, para isto, criou a Aula de Artilharia e Fortificações. No início houve dificuldades em sua implementação, pela falta de livros adequados, e em 1710 o curso ainda não havia iniciado. Apenas em 1738, depois que o militar português José Fernandes Pinto Alpoim chegou ao Brasil, as aulas tiveram início e foram consideradas obrigatórias a todo oficial. Alpoim foi o autor dos dois primeiros livros didáticos de Matemática escritos no Brasil, que ensinavam conceitos de Geometria e Aritmética: Exame de Artilheiros (1744) e Exame de Bombeiros (1748). Com isto podemos concluir que o ensino de Matemática no Brasil iniciou-se com a necessidade de defesa da colônia por parte dos militares, incentivada pela Coroa Portuguesa.

Com a independência do Brasil, houve a necessidade de se criar a primeira Universidade Brasileira. Então, em 1827 são criados os Cursos Jurídicos, cujo acesso era dado por um exame que continha, dentre outras disciplinas, a Geometria. Por conta deste exame, surgem os cursos preparatórios com a disciplina Geometria, que perduram por cerca de 100 anos, e a partir desta época, os conhecimentos matemáticos deixam de ser um conteúdo que servia apenas ao comércio e aos militares, e são promovidos à categoria de cultura geral. (VALENTE, 2008, p. 15)

Com a criação do Colégio Pedro II, em 1837, iniciam-se as tentativas de exigência do diploma do secundário seriado para ingresso nas faculdades. Depois de várias reformas, segundo Ferreira (2005, p. 95),foi elaborado um plano gradual de estudos, com Geometria, Álgebra e Aritmética, no qual o aluno era promovido por série e não mais por disciplinas.

Segundo Valente (2008), nos anos 30 surgem as faculdades de filosofia que formavam professores, e com isso alguns livros didáticos começam a ser publicados. A partir da reforma Francisco Campos, no primeiro governo de Getúlio Vargas, há a primeira reestruturação de ensino, que extingue os cursos preparatórios e faz surgir a disciplina Matemática, unindo Geometria, Álgebra e Aritmética.

Em 1929, Euclides Roxo lança o livro Curso de Mathematica Elementar, numa tentativa de unir as 3 grandes áreas da Matemática. Seu livro ensinava, através da Geometria, conceitos de Álgebra e Aritmética, sendo adotado pelo Colégio Pedro II em 1930. Este autor propõe o uso do material concreto, pois ao ensinar o conceito de reta, por exemplo, solicitava que os alunos verificassem arames, bordas de papel, etc. Nessa mesma época surgem ginásios e liceus públicos, e a educação, antes exclusiva da elite, passa a ter adesão da classe média.

Já na década de 60, surge o movimento da Matemática Moderna, onde a mesma é ensinada com rigor e formalidade. Segundo Pavanello (1993), a partir desse movimento a geometria assume posição secundária no ensino, pois perde seu caráter intuitivo e pauta-se na demonstração e no formalismo. Assim, o ensino dos conhecimentos geométricos inicia-se “pela noção de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjunto de pontos do plano, adotando-se, para sua representação a linguagem da teoria dos conjuntos.”

A Lei de Diretrizes e Bases do ensino do 1º e 2º graus (5692/ 71) contribui para o abandono do ensino da Geometria ao permitir que cada professor monte seu programa de ensino. Assim, muitos alunos do 1º grau deixam de aprender Geometria, pois os professores das quatro séries iniciais limitavam-se ao ensino de Aritmética e noções de conjunto. Logo, os alunos tinham aulas de Geometria no 2º grau, onde chegavam sem ter os conhecimentos prévios necessários, já que o Desenho Geométrico havia sido substituído pela Educação Artística. (PAVANELLO, 1993, p. 13).

Com isso observa-se que a Geometria perdeu espaço com o movimento da Matemática Moderna, e a relutância por parte dos professores em ensinar este conteúdo contribuiu para que os alunos apresentassem baixo rendimento neste assunto. Porém, a partir da década de 80, surgem as teorias da Neurociência e aTeoria das Inteligências Múltiplas, que promovem o ensino de Geometria com base na experimentação sensorial dos alunos. Acreditamos que há uma tendência ao resgate da Geometria como posição de destaque, pela diversidade de materiais concretos que vêm sido utilizados pelos professores.

2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio são propostas que norteiam e organizam o conhecimento no Ensino Médio.

Esses conjuntos de parâmetros afirmam que no Ensino Médio, a Matemática deverá apresentar novas informações e além disso deverá oferecer instrumentos necessários para que o aluno continue aprendendo. E ainda ressalta a importância de que a Educação esteja voltada para o desenvolvimento da capacidade de comunicação. Com relação aos objetivos gerais da Matemática, não podemos deixar de destacar o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e a resolução de problemas para aprimorar o entendimento de conceitos matemáticos. Deste modo, a fim de que se cumpram essas metas, trazemos a proposta do uso do material manipulável.

Sabemos que a Matemática se faz presente no mundo e tem relação em diversas áreas do conhecimento contribuindo diretamente para a evolução da humanidade. Sendo esta uma disciplina muito importante para o desenvolvimento do raciocínio, os PCNEM destacam nesta direção as habilidades de argumentação lógica e no que se refere ao campo geométrico, citam o desenvolvimento das habilidades de visualização e desenho. Os PCN’s afirmam que:

> Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física. (BRASIL, 2006, p.44)

Por outro lado, se buscarmos um olhar mais crítico para o Ensino da Matemática, perceberemos que este vem sendo feito ainda com muita formalidade dentro da sala de aula. E ainda tem se observado um baixo rendimento nesta disciplina em avaliações como ENEM, por exemplo.

Visando a melhoria do ensino de Matemática e da atuação do professor em sala de aula, o deputado Stepan Nercessian elaborou o Projeto de Lei Nº 5.218, de 2013 que estabelece a obrigatoriedade da existência do Laboratório de Matemática nas escolas. Tal processo ainda está em tramitação, em fase de análise para aprovação.

De acordo com Sérgio Lorenzato (2006,p.7)

> O Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) pode ser um espaço especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras e para auxiliar no equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento mas imprevistas na prática, devido aos questionamentos dos alunos durante as aulas. Nesse caso, o professor pode precisar de diferentes materiais com fácil acesso. Enfim, o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender.

Acreditamos que com o LEM poderemos trabalhar melhor essas habilidades citadas anteriormente nos PCNEM. Porém, é preciso que o professor conheça seu laboratório.

Sérgio Lorenzato (2006,p.23, 24) afirma que:

> A atuação do professor é determinante para o sucesso ou fracasso escolar. Para que os alunos aprendam significativamente, não basta que o professor disponha de um LEM. Tão importante

> quanto a escola possuir um LEM é o professor saber utilizar corretamente os materiais didáticos, pois estes, como outros instrumentos, tais como o pincel, o revólver, a enxada, a bola, o automóvel, o bisturi, o quadro-negro, o batom, o sino, exigem conhecimento especifico de quem os utiliza.

Para que Laboratório de Matemática funcione, existe uma série de fatores determinantes, porém o docente é a chave fundamental para utilizar essa ferramenta de maneira correta e ampliar os conhecimentos dos alunos.

2.3 Alguns materiais concretos existentes para o Ensino de Geometria Espacial

Nas últimas duas décadas, observa-se uma preocupação por parte dos educadores em inserir materiais concretos no ensino de Geometria Espacial. Na internet, principalmente, há diversos exemplos de materiais que podem ser utilizados em sala de aula. Nessa linha de pesquisa, destaca-se o trabalho de Ana Maria Kaleff, da Universidade Federal Fluminense – UFF. Em seu livro, "Vendo e Entendendo Poliedros", há diversas sugestões de materiais, não apenas para Geometria Espacial, como para Geometria Plana. Kaleff é coordenadora científica do LEG (Laboratório de Ensino de Geometria), laboratório itinerante criado pelo Departamento de Geometria da UFF. Desde 2009, o LEG tem adaptado seus materiais didáticos para deficientes visuais, aplicando-os no Instituto Benjamin Constant (IBC). Abaixo relacionamos alguns métodos baseados em esqueletos de poliedros:

Garrote e varetas:

O método consiste em construir esqueletos de poliedros com garrotes (material hospitalar) como vértices e varetas como arestas (Fig. 4).

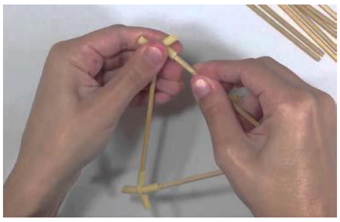


Figura 4: Poliedros com garrotes e varetas[3]

[3] Disponível em:< http://www.youtube.com/watch?v=YVn0xcUbfM4 > Acesso em Dezembro de 2013.

Massa de modelar e palitos

Massa de modelar e palitos O método consiste em utilizar massa de modelar como vértices e palitos como arestas (Fig 5).

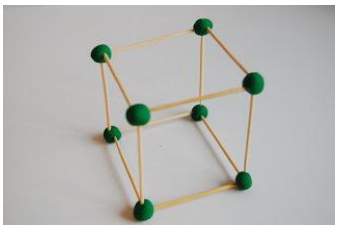


Figura 5: Hexaedro de palitos e massa de modelar[4]

Criat-ímã

É um kit composto por ímãs e hastes plásticas, vendido por empresas de materiais didáticos manipuláveis (Fig. 6).

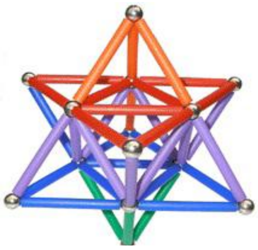


Figura 6: Poliedro estrelado construído com criat-imã[5]

Canudos e linha

Neste método de montagem de esqueletos de poliedros, a linha passa pelo interior dos canudos com auxílio de uma agulha, unindo-os para formar os poliedros (Fig. 7

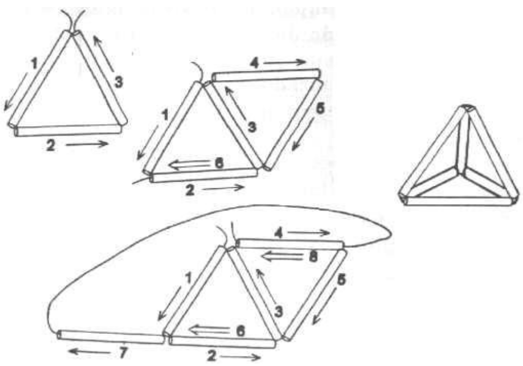


Figura 7: Tutorial de construção do tetraedro regular com canudos e linha.[6]

---

[4] Disponível em:< http://mathiassantanna.blogspot.com.br/2008_06_01_archive.html>. Acesso em Dezembro de 2013.

[5] Disponível em:< http://produto.mercadolivre.com.br/MLB-523718653-brinquedo-magnetico-criat-im-kit-56-pecas-colorido-_JM>. Acesso em dezembro de 2013.

Dobradura, quebra-cabeças e outros

É importante ressaltar que existem outros materiais concretos que levam em consideração apenas o formato dos poliedros, e não o seu interior, como dobraduras, maquetes, sólidos em madeira, quebra-cabeças etc. É importante destacar que cada material tem a sua utilidade e devemos levar em consideração o tipo de trabalho que iremos realizar e qual material se adéqua melhor à atividade que está sendo realizada.(Fig. 8, 9, 10)

Figura 8: Icosaedro construído com dobraduras[7]

Figura 9: Kit de sólidos geométricos em madeira[8]

Figura 10: Quebra-cabeça de papel cartão

---

[6] Disponível em:< http://www.oocities.org/br/jaymeprof/tg/Platao/varetas.htm>. Acesso em dezembro de 2013.
[7] Disponível em:< http://origamimat.blogspot.com.br/2009/02/poliedros-de-platao-1-curiosidades.html>. Acesso em Dezembro de 2013.
[8] Disponível em:<http://www.pititi.com/shop/product-info.php?15poliedros-pid1339.html>. Acesso em Dezembro de 2013.

Figura 11: Peças do quebra-cabeça

3 USO DO MATERIAL CONCRETO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo encontra-se o centro do nosso estudo. Aqui, apresentaremos três propostas para o uso de diferentes materiais na resolução de exercícios. Abordaremos também a importância da resolução de problemas no ensino de Matemática, com foco na Geometria Espacial.

3.1 A importância da resolução de problemas como método de ensino

Sem dúvidas, a tarefa de ensinar não é nada fácil. Segundo George Polya (1985):

> Ensinar é uma ação complexa que depende em grande parte das personalidades envolvidas e das condições locais. Não existe, hoje, uma ciência do ensino propriamente dita e não haverá nenhuma em um futuro previsível. Em particular, não existe método de ensino que seja indiscutivelmente o melhor, como não existe a melhor interpretação de uma sonata de Beethoven. Há tantos bons ensinos quanto bons professores: o ensino é mais uma arte do que uma ciência.

Consequentemente, ensinar matemática, torna-se ainda mais difícil por ser uma disciplina em que poucos têm afinidade. Segundo Ariana Bezerra de Sousa (2005, p.1)

> O ensino e a aprendizagem da Matemática sem a resolução de problemas é um dos fatores do insucesso escolar. Com frequência encontramos pessoas que manifestam aversão à disciplina e os motivos referem-se à dificuldade para realizar desde as atividades mais simples do cotidiano e até associadas a atividades profissionais.

Se analisarmos a Matemática historicamente, não teremos dificuldade em perceber que o seu surgimento se deve principalmente à resolução de problemas. George Polya afirma em seu artigo, O Ensino por Meio de Problemas, que a resolução de problemas é a espinha dorsal do ensino de Matemática desde a época do *papirus Rhind*. Estudos afirmam ainda que a origem da Matemática vem da civilização egípcia. A necessidade de buscar soluções de problemas do cotidiano, como, por exemplo, a perda de parte de um terreno devido às cheias do rio Nilo, contribuiu fortemente para o desenvolvimento da Matemática. Deste modo, podemos observar a importância que tem a resolução de problemas em tal ciência.

Nota-se hoje uma deficiência muito grande por parte dos alunos em Matemática. E percebe-se ainda que os mesmos não querem mais pensar. Uma pergunta que quase sempre ocorre em sala de aula quando estamos introduzindo um determinado conteúdo, através de algum exemplo, é: *"É sempre assim?"*. Acreditamos que isto tem acontecido devido ao fato do ensino ter se tornado um pouco mecânico, o hábito de fazer o aluno pensar nos parece que ficou em algum lugar no passado.

Desta forma, a proposta para se ensinar Matemática é ensinar o aluno a pensar, raciocinar, investigar. E este objetivo poderá ser atingido através da resolução de problemas. George Polya (1985) diz:

> A Matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem participação ativa, de modo que o princípio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, matemáticos professores, tanto mais se tivermos como objetivo principal, ou como um dos objetivos mais importantes, ensinar as crianças a pensar.

Para isto, o professor deve ter em mente que existem problemas que servem para assimilar o conteúdo e outros em que o aluno, antes de aplicar o que foi aprendido, deverá fazer uma série de descobertas até chegar ao objetivo.

Para ficar mais claro, como estamos tratando de Geometria Espacial, apresentaremos dois problemas dentro deste assunto:

- *Num prisma triangular regular, a aresta da base mede 4cm e a aresta lateral mede 9 cm. Calcule a área lateral e a área total do prisma.*

Área Lateral**:** $\mathrm{Al} = 3 \times (4 \times 9) \Rightarrow \mathrm{Al} = 108\ \mathrm{cm}^2$

Área da base**:** $\mathrm{Ab} = \frac{4^2 \times \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

Área total: $\mathrm{At} = 2 \times 4\sqrt{3}\ + 108 \Rightarrow \mathrm{At} = 4\left(2\sqrt{3} + 27\right)\mathrm{cm}^2$

Como podemos observar, este exercício trata-se apenas da aplicação de fórmulas do conteúdo dado. O aluno já sabe o que é um prisma e para resolver ele precisa apenas aplicar o conteúdo sem necessariamente pensar muito. Trata-se de problema mecânico.

- *Petróleo matou 270 mil aves no Alasca em 1989. O primeiro e mais grave acidente ecológico ocorrido no Alasca foi provocado pelo vazamento de 42 milhões de litros de petróleo do navio tanque Exxon Valdez, no dia 24 de março de 1989. O petroleiro começou a vazar após chocar-se com recifes na baia Príncipe Willian. Uma semana depois 1300km² da superfície do mar já estavam cobertos de petróleo. Supondo que o petróleo derramado se espalhasse uniformemente nos 1300km² da superfície do mar, a espessura da camada de óleo teria aproximadamente:*

Primeiro, vamos transformar o volume para m^3 e a área da superfície para m^2

$$V = 42 \times 10^6 litros = 42 \times 10^3 m^3$$

$$Ab = 1300 km^2 = 13 \times 10^8 m^2$$

Considerando a forma da mancha de petróleo próxima de um prisma reto,podemos estimar a espessura da mancha:

$$V = Ab \times h$$

$$42 \times 10^3 = 13 \times 10^8 \times h$$

$$h = \frac{42 \times 10^3}{13 \times 10^8}$$

$$h = 3{,}2 \times 10^{-5}$$

Podemos notar que para resolver este problema, deveremos imaginar a situação antes para perceber que estamos buscando a altura de um prisma. Este exemplo não se trata de simples aplicação de conteúdo, para resolvê-lo deveremos buscar algum conhecimento em nossa memória, assim como conteúdos anteriores. Sabemos que no mundo onde estamos inseridos existem muitos exemplos de prismas, pirâmides, cilindros entre outras formas geométricas. Enfim, o nosso cotidiano é rico em formas, que nem sempre são perfeitas e em muitos casos, temos que trabalhar através de estimativas. Através deste problema, podemos discutir a atuação da matemática na nossa realidade.

Devemos ressaltar que não estamos tratando de um ou outro tipo de problema, os dois aqui apresentados são ferramentas importantes para o ensino de Matemática. Porém, nosso objeto de estudo está vinculado ao uso do material didático para solucionar problemas.

3.2 Uma proposta de aula para o uso do material concreto na Resolução de Problemas

As propostas aqui apresentadas têm por objetivo utilizar os diversos tipos de materiais concretos existentes para resolver problemas. E esta ideia surgiu pelo fato de muitos alunos apresentarem dificuldade na visualização espacial. Ana Kallef (2003, p.15) afirma que:

> Nas últimas décadas, diversas pesquisas em Educação Matemática apontaram para a importância de se incentivar nos meios educacionais o desenvolvimento pelo educando da habilidade de visualizar tanto objetos do mundo real, quanto, em nível mais avançado, conceitos, processos e fenômenos matemáticos. Para alguns pesquisadores, esta habilidade é tão ou mais importante do que a de calcular numericamente e a de simbolizar algebricamente. Além disso, os educadores matemáticos, começaram a tomar consciência da importância assumida pelo entendimento das informações visuais em geral, tanto para a formação matemática do educando quanto para a sua educação global.

As atividades aqui apresentadas são indicadas para alunos do Ensino Médio que tenham um conhecimento prévio de Geometria Plana. Na rede estadual de ensino, os conteúdos aqui destacados são trabalhados em turmas do 2º ano do Ensino Médio. Para esta finalidade, apresentaremos três problemas, que serão resolvidos utilizando três tipos de materiais diferentes.

3.2.1 Proposta para a utilização das dobraduras

Neste tópico iremos apresentar uma proposta para trabalhar com material construído a partir de dobraduras. Para a sua confecção, iremos utilizar triângulos equiláteros iguais e peças de conexão[9] (Fig.12), além de quadrados com abas construídos com dobraduras (Fig.13).

Figura 12:Triângulos e peças de conexão feitos com dobraduras

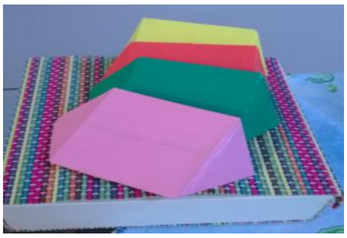


Figura 13: Faces quadradas feitas com dobraduras

Para este problema[10], é recomendado que o professor trabalhe previamente com seus alunos na produção do material. Sugerimos, inicialmente, que sejam confeccionadas as figuras planas que funcionarão como faces nas figuras espaciais. Para iniciar a atividade pedimos que sejam construídos sólidos mais simples, como, por exemplo, tetraedros, cubos, pirâmides de base quadrada, entre outros, para que o aluno conquiste confiança e familiaridade com o material. Em um segundo momento, o professor poderá sugerir a construção de poliedros com uma quantidade maior de faces diversas (triângulos e quadrados).

O ponto que estamos destacando neste material refere-se à montagem de poliedros convexos para poder trabalhar a relação de Euler. Durante a montagem do material, o professor deverá questionar seus alunos acerca das quantidades de faces, da forma das mesmas, da quantidade de peças de conexão, entre outros pontos que considerar importantes. No primeiro momento, o objetivo a ser alcançado pelo educador consiste em levar seus alunos a conjecturar uma expressão que permita calcular o número de arestas de um poliedro. Em seguida, pretende-se que os mesmos cheguem à fórmula de Euler.

[9] Peças construídas com dobraduras para unir triângulos e quadrados
[10] Esta atividade foi baseada em uma atividade na obra Vendo e entendendo Poliedros de Ana Maria M.R. Kaleff

Para a realização desta atividade, recomendamos que sejam levados modelos concretos dos sólidos pedidos para que o aluno possa ampliar a sua visão espacial. Ao final deste trabalho disponibilizamos em anexo os esquemas para a confecção das peças feitas com dobradura.

Através desta atividade estamos proporcionando uma aula atrativa baseada em expectativa e emoção, atribuindo assim o status de importante, fazendo com que a informação seja armazenada no córtex.

A proposta aqui apresentada está de acordo com a Teoria das Inteligências Múltiplas quando trabalha com a construção dos sólidos geométricos, estimulando a formação do pensamento matemático e a formulação de modelos concretos. Além de permitir que o aluno possa comparar diferentes modelos permitindo que o educando faça diferentes associações entre eles.

Além disso, esta atividade contempla os níveis de Van Hiele e as habilidades de Gutièrrez, já que o aluno terá em mãos o material podendo assim explorá-lo.

O aluno entra em contato com os níveis de visualização, análise e percepção de Van Hiele no momento em que ele entra em contato com as peças de dobraduras que irão compor os sólidos envolvidos nas atividades. E o nível de dedução pode ser atingido com a chegada à Formula de Euler.

As habilidades de Gutièrrez ganham destaque quando começa exploração das figuras espaciais. No momento em que os sólidos são montados, o educando poderá desenvolver qualquer uma das habilidades propostas por Gutiérrez. E uma dessas a qual podemos destacar, é a habilidade de rotação mental já que o aluno poderá movimentar o sólido em mãos gerando assim modelos que ele poderá imaginar mais tarde.

Embora, a atividade não aborde uma situação do cotidiano, as várias etapas da atividade desenvolvem e estimulam o raciocínio do educando através da resolução de problemas fazendo assim com que o mesmo aprenda a pensar.

Proposta de aula para trabalhar material com dobradura

- **Objetivos:** Identificar vértices, faces e arestas nos sólidos geométricos, deduzir e utilizar a Relação de Euler para resolver problemas.
- **Pré-requisitos:** Ponto, reta e plano no espaço. Posições relativas entre retas, perpendicularidade e paralelismo.
- **Duração:** 2 tempos (aproximadamente 1h40min)
- **Materiais:** Peças feitas com dobradura, sólidos de madeira, acrílico, canudos etc, marcador, quadro e papel.

  - **Problema 1:** Observe os sólidos das figuras abaixo:

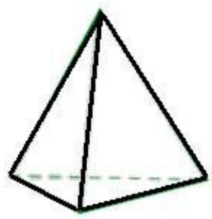


Figura 14:Tetraedro[11]

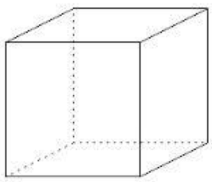


Figura 15: Cubo[12]

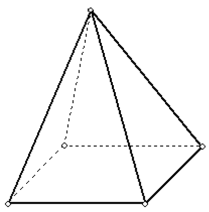


Figura16: Pirâmide[13]

I) Agora, construa cada um dos sólidos com as peças de dobraduras que você recebeu.

[11] Disponível em:< http://www.mundoeducacao.com/matematica/tetraedro-regular-1.htm> Acesso em janeiro de 2014
[12]Disponível em:<http://en.wikipedia.org/wiki/Necker_cube> Acesso em janeiro de 2014
[13] Disponível em:< http://educacao.uol.com.br/matematica/poliedro.jhtm> Acesso em janeiro de 2014

II) Preencha o quadro com informações de cada sólido.

Sólido	nº de Faces (F)	nº de Arestas (A)	nº de Vértices (V)	F+V-A
Tetraedro				
Hexaedro				
Pirâmide de base quadrada				

Tabela 1: Contagem do número de faces, arestas e vértices

O que você percebeu na última coluna da tabela? Como podemos escrever matematicamente uma relação para as quantidades de aresta, vértices e faces?

III) Um poliedro convexo possui 8 faces triangulares e 18 faces quadradas. Determine o número de vértices e de arestas desse poliedro. (Utilize a relação encontrada no item 2)

Solução: Após a atividade I com as dobraduras, o aluno deverá perceber que cada aresta é formada pela união de dois lados de polígonos distintos. Deste modo, ele será capaz de determinar facilmente o número de arestas de qualquer poliedro desde que ele conheça a forma das faces e a quantidade de cada tipo de face. No momento em que ele inicia a atividade II, ele será conduzido a encontrar a Relação de Euler e a partir daí ele poderá desenvolver a atividade III sem necessariamente utilizar o material. Assim, após a atividade II a tabela ficará preenchida deste modo:

Sólido	nº de Faces (F)	nº de Arestas (A)	nº de Vértices (V)	F+V-A
Tetraedro	4	6	4	2
Hexaedro	6	12	8	2
Pirâmide de base quadrada	5	8	5	2

No item III temos : Como são 8 faces triangulares, então: $8 \times 3 = 24$

E como são 18 faces quadradas, temos: $18 \times 4 = 72$

Portanto, teremos $24 + 72 = 96$ arestas, como estamos contando duas vezes cada aresta, temos: $96 \div 2 = 48$ arestas.

Como o poliedro é convexo, podemos utilizar a relação de Euler:

$$\mathrm{V} + \mathrm{F} = \mathrm{A} + 2$$

$$V + 26 = 48 + 2$$

$$V = 50 - 26$$

$$V = 24$$

3.2.2 Proposta para a utilização de modelos com canudos

O material apresentado a seguir é confeccionado com canudo e linha e esses modelos, apesar de não revelarem as faces de um determinado sólido geométrico, têm sua finalidade. Através dele podemos enxergar facilmente as arestas que compõem a figura espacial. Além disso, os esqueletos de canudinho servem para que os alunos possam enxergar dentro dos sólidos. De acordo com Kallef (2003, p. 123)

> tem se observado que alguns professores estranham a introdução deste tipo de construção e representação de poliedros por meio das arestas, pelo fato de tal representação não privilegiar o aparecimento do interior das faces dos sólidos, não dando a ideia real

> das mesmas. Todavia, a experiência tem revelado que a construção dos esqueletos não só é muito indicada para as primeiras séries escolares, como para o ensino médio, pois o aluno pode "ver" a parte interna da figura formada, enxergando por entre as arestas. Por outro lado, esse material também proporciona ao aluno a possibilidade de construir concretamente diversos elementos geométricos tais como: diagonais, alturas, seções planas etc.

Por meio destas considerações, percebemos a importância dos materiais construídos com canudos não só na construção das arestas de um sólido qualquer mas também na representação de outros elementos importantes para o estudo de Geometria Espacial, como apótemas, diagonais, alturas etc.

Para este estudo, o material não precisará ser construído pelo discente. Indicamos que o próprio docente realize a confecção do seu material antes de propor a atividade para seus alunos. Consideramos importante que sejam destacados os elementos principais envolvidos no problema, por este motivo é interessante utilizar canudos de cores diferentes para dar destaque a estes objetos.

Quando destacamos os elementos envolvidos fica mais fácil ver figuras planas importantes como triângulos equiláteros e triângulos retângulos que, na maioria das vezes, são peças fundamentais para a resolução de problemas na Geometria Espacial.

De acordo com TIM para estimular a aprendizagem em Geometria Espacial devemos propor atividades que utilizem símbolos abstratos para representar objetos concretos. Ao representarmos a pirâmide com os canudos, estamos colocando isso em prática. E, ainda nesta direção, o aluno ainda poderá fazer comparações do modelo com o objeto real (que pode ser mostrado através de uma foto), buscando padrões e relações entre eles. Além de desenvolver também a habilidade de Constancia perceptual, quando ele identifica que os dois objetos tratam da mesma pirâmide.

Quando o aluno identifica as características da pirâmide, entendendo, por exemplo, que a base da mesma é um quadrado e que as suas faces laterais são triângulos isósceles, ele desenvolve a capacidade de discriminação visual, definida por Gutièrrez. E, ao mesmo tempo, quando ele percebe essas figuras ele está avançando para o nível de análise de Van Hiele.

O problema também aborda uma situação real e estimula o pensamento e raciocínio lógico.

<u>Proposta de aula para trabalhar material com canudos</u>

- **<u>Objetivos:</u>** Determinar a área da base de uma pirâmide.
- **<u>Pré-requisitos</u>:** Geometria Plana, Áreas de figuras planas, Teorema de Pitágoras, Pirâmide.
- **<u>Duração:</u>** 1 tempo (aproximadamente 50min)
- **<u>Materiais:</u>** Pirâmide feita com canudo, sólidos de madeira, acrílico, etc, marcador, quadro e papel.

- **Problema 2[14]:** A grande pirâmide de Quéops, antiga construção localizada no Egito, é uma pirâmide regular de base quadrada, com 137 m de altura. Cada face dessa pirâmide é um triângulo isósceles cuja altura relativa à base mede 179 m. A área da base dessa pirâmide, em m², é:

a) 13272 b) 26544 c) 39816 d) 53088 e) 79432

<u>Solução:</u> Em primeiro lugar, seria importante o educador fazer uma leitura do problema interrogando aos alunos o que está sendo pedido, o que se deseja determinar e o que é preciso para resolver a questão. Após essas indagações, o professor poderá apresentar o modelo confeccionado com canudinhos e solicitá-los que identifique cada elemento que compõe a pirâmide. É indicado que os canudos que representem elementos diferentes no sólido em questão sejam de cores diferentes para uma melhor percepção. Após esse

[14] Questão do vestibular da UFF retirada da página do Professor Walter Tadeu.

momento, poderá ser dado início à resolução do problema destacando as figuras importantes para a sua solução.

Note que a utilização do material (Fig.17 e 18) facilita a visualização do triângulo isósceles composto por duas alturas de faces laterais opostas (g) e pelo segmento formado pelos pés destas que estão representados, respectivamente, pelos canudos de cores vermelha e amarela. Podemos perceber também que a altura (h) desta pirâmide representa a altura desse triângulo.

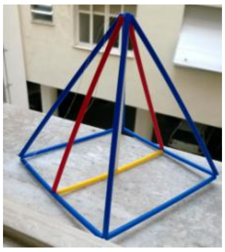


Figura 17: Pirâmide de canudos

Figura 18: Pirâmide de canudos

Pelas informações do problema, temos: $h = 137m \; e \; g = 179 \; m$

Como queremos determinar a área da base e a base é um quadrado, então o seu apótema medirá a metade da aresta desta. Seja L a medida da aresta da base. Logo o apótema $m = \frac{L}{2}$.

Pelo teorema de Pitágoras:

$$(179)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (137)^2$$

$$\frac{L^2}{4} = 32041 - 18769$$

$$\frac{L^2}{4} = 13272$$

$$L^2 = 4 \times 13272$$

$$L^2 = 53088$$

3.2.3 Proposta para a utilização de quebra-cabeças

Daremos destaque nesta sessão a outro tipo de material que são os quebra-cabeças espaciais. Existe uma infinidade destes que podem ser confeccionados com madeira, papel cartão, acetato, entre outros materiais. Para confeccionar o modelo do nosso problema, sugerimos utilizar papel cartão por ser um material fácil de ser encontrado e de baixo custo.

Para esta atividade, recomendamos 2 tempos de 50 minutos, para que os alunos possam explorar o material.

Com este tipo de material não só podemos trabalhar a criatividade do educando como também a sua visualização através de cortes de planos além da relação entre volumes de sólidos geométricos.

Outro ponto importante no uso de quebra-cabeças está relacionado aos diversos tipos de sólidos que podem aparecer na composição de outro após serem aplicadas diversas seções planas. Além disso, pode ser trabalhada também a interseção de planos com o sólido.

Para o problema[15] apresentado a seguir sugerimos um quebra-cabeça composto de 5 peças: 4 pirâmides de base triangular e um tetraedro regular. As peças desse quebra-cabeça compõem um cubo. Observe que com este mesmo quebra-cabeça podemos trabalhar o volume dos outros sólidos envolvidos como, por exemplo, o do prisma triangular, entre outros. Basta o professor imaginar e criar novos desafios. (Fig. 19,20 e 21).

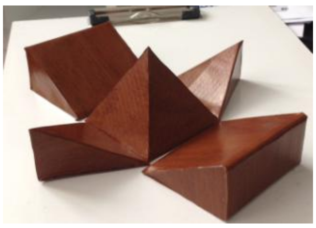


Figura 19: Peças Quebra-cabeça

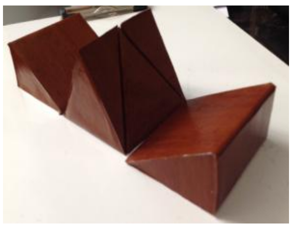


Figura 20: Peças quebra-cabeça

[15] O problema foi criado com base em uma questão do Enem de 2011.

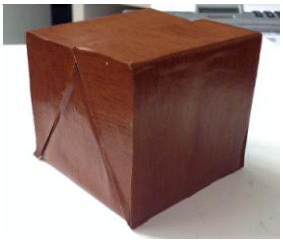


Figura 21: Quebra-cabeça montado

Nesta atividade, além do quebra-cabeça que desperta a curiosidade, estamos trazendo uma situação cotidiana, que poderá despertar maior interesse do aluno. Trata-se neste problema de uma investigação. A sua resolução consiste em várias etapas a fim de descobrir como será o objeto final. Antes de aplicar qualquer fórmula, terá que relacionar os sólidos descartados e fazer comparações de alturas, de arestas entre outros pontos necessários para a sua resolução. Estamos diante de um problema com um grau mais elevado de raciocinio.

Na manipulação do material envolvido, o educando poderá desenvolver assim como na primeira proposta de aula, todas as habilidades definidas pelo modelo de Gutièrrez. Uma habilidade importante que pode ser trabalhada aqui é a percepção da figura base, através das figuras semelhantes colocadas em orientações diferentes no quebra-cabeça.

Proposta de aula para trabalhar com quebra-cabeça

- **Objetivos:** Identificar e classificar diferentes tipos de poliedros, determinar aresta lateral e volume da pirâmide e volume desperdiçado.
- **Pré-requisitos:** Geometria Plana, Áreas de figuras planas, Teorema de Pitágoras, poliedros, prismas, cubos e pirâmides.
- **Duração:** 2 tempos (aproximadamente 1h40min)
- **Materiais:** quebra-cabeça de papel cartão, sólidos de madeira, acrílico, etc, marcador, quadro e papel.

Problema 3: Uma fábrica produzirá chaveiros, para a divulgação de sua marca, no formato de pirâmides quadradas. Para isto, um cubo maciço, feito de níquel, será seccionado a partir de quatro cortes. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas AD, BC, AB e CD, nesta ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos. Considere a aresta do cubo com medida igual a 10 cm e determine o que se pede:

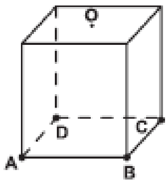


Figura 22 : cubo[16]

I) Identifique e classifique os poliedros descartados.

II) Determine a medida da aresta lateral da pirâmide quadrada.

III) Qual é o volume de níquel de um chaveiro?

IV) Qual é o volume de níquel desperdiçado para produzir um chaveiro?

Solução: As dificuldades por parte dos estudantes com relação ao corte de figuras espaciais são várias, muitos não conseguem enxergar a posição do plano ou da seção plana formada com a figura geométrica espacial.

Antes de apresentar as peças do quebra-cabeça o professor poderá apresentar a situação-problema a seus alunos para que pensem a respeito, podendo questionar sobre as figuras, o que eles acham sobre a relação dos volumes e outras perguntas que considere pertinentes. Após esse momento, o professor poderá apresentar o quebra-cabeça e desafiar seus alunos na sua construção e em seguida, resolver o problema.

I) Com os cortes, obtemos: 2 prismas triangulares congruentes e 2 tetraedros não regulares congruentes.(Fig. 23 e 24)

[16] Disponível em:<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/05_AMARELO_GAB.pdf> Acesso em: janeiro de 2014

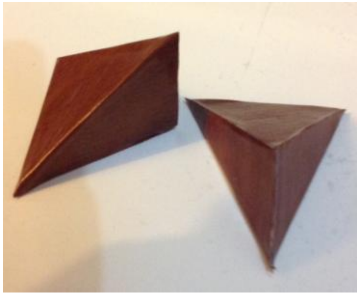


Figura 24: Tetraedros congruentes

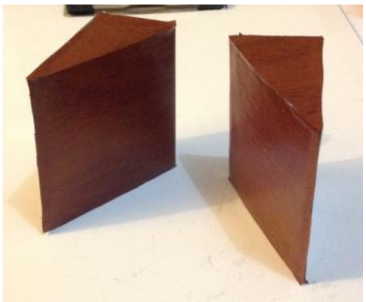


Figura 23: Prismas congruentes

II) Seja o triângulo composto pela altura, pelo apótema da pirâmide e pelo apótema da base, representado abaixo pelo triângulo verde.

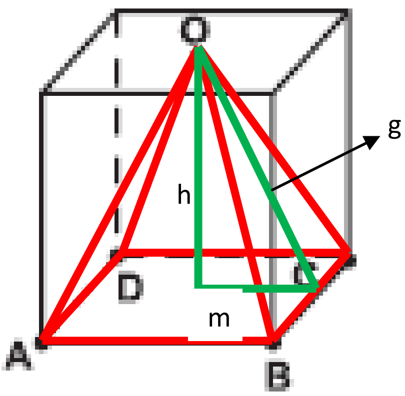


Figura 25: Pirâmide inscrita no cubo

Sejam h, g e m altura da pirâmide, geratriz e apótema da base, respectivamente. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$g^2 = h^2 + m^2$$

$$g^2 = 10^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$$g^2 = 100 + 25$$

$$g^2 = 125$$

Considere a face lateral OBC da pirâmide. Temos que o triângulo OBC é isósceles (Fig. 26):

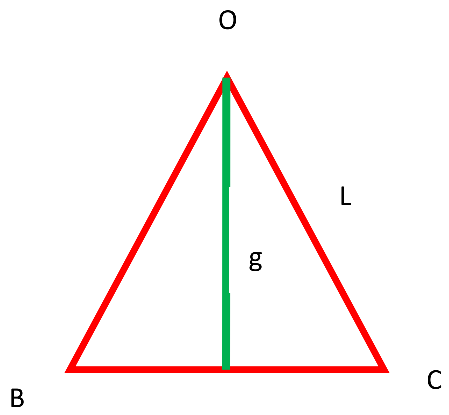


Figura 26: Triângulo OBC

Vamos determinar a medida da altura desse triângulo. Seja L a medida do lado OB do triângulo. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$L^2 = g^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$L^2 = 125 + 25$$

$$L^2 = 150$$

$$L = 5\sqrt{6}$$

III) A base da pirâmide é o quadrado de lado $L = 10$. (Fig. 25)

Logo a área da base será dada por:

$$Ab = 100$$

A pirâmide também possui altura $h = 10$. Portanto o seu volume será dado por:

$$V_{pirâmide} = \frac{100 \times 10}{3}$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1000}{3}$$

IV)Temos que $V_{cubo} = 1000$ e $V_{tetraedro} = \frac{1000}{3}$. Logo:

$$V_{desperdiçado} = 1000 - \frac{1000}{3}$$

$$V_{desperdiçado} = \frac{2000}{3}$$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base no trabalho que desenvolvemos diariamente em sala de aula, podemos notar com clareza que as dificuldades dos alunos em Geometria Espacial são muitas. Isto nos faz perceber a importância do presente trabalho, que apresenta não só a abordagem do material didático bem como a aplicação direta a problemas envolvidos no dia-a-dia da sala de aula. É de suma importância que os materiais tenham uma conexão com o exercício proposto. O material por si só não basta e vice-versa. Porém, este serve apenas como apoio para que o aluno desenvolva seu processo de raciocínio até que não seja mais necessário o seu uso.

Para o desenvolvimento de atividades com o mesmo cunho deste trabalho, existe uma infinidade de materiais. Cada um destes pode ser aplicado de formas diversas. Não existe material que atenda a um só tipo de exercício e nem problema que possa ser solucionado por um só tipo de material. Como exemplos, temos as dobraduras que também podem ser úteis para exercícios de áreas laterais e também os esqueletos de canudo que servem igualmente para trabalhar a relação de Euler. O mais importante neste sentido é adequar o material de acordo com as dúvidas dos alunos, tentando sempre deixar o entendimento mais claro.

Sabemos que os alunos se interessam por abordagens novas, diferentes do que estão habituados a ver na escola, e é ao encontro desse interesse que devemos ir, tentando fazer um estudo interessante, para que os mesmos construam o próprio conhecimento através da experiência prática. Sabemos que nem sempre os resultados obtidos serão satisfatórios, porém podemos dizer que sempre se pode modificar ou readaptar o material de acordo com as dúvidas que vão surgindo nas diferentes aplicações. É importante também o professor estar bem preparado para lidar com as dúvidas de suas turmas e saber que em cada uma novas dúvidas surgirão e, a partir daí, poderemos aprimorar cada vez mais as atividades e, assim, melhorar o seu desempenho.

Esperamos com esse trabalho levar docentes a pensar em aulas motivadoras para resgatar o interesse dos seus alunos e, além disso, que o conteúdo de Geometria Espacial se torne algo mais agradável de ser ensinado e de ser aprendido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ANDRADE, Fabiana Chagas de. **Jujubas: Uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio**. TCC, 62 p. Rio de Janeiro, RJ. UNIRIO, 2014.

[2] ANTUNES, Celso. **Como desenvolver conteúdos explorando as inteligências múltiplas. Fascículo 3**. Petrópolis, RJ: Vozes, 9ª edição, 2001.

[3] BECKER, Marcelo. **Uma alternativa para o ensino de geometria: visualização geométrica e representações de sólidos no plano**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/17161 >. Acesso em: 10. jan. 2014.

[4] BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Parâmetros* **curriculares nacionais: Ensino Médio**. Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologia. Brasília: MEC, 2006.

[5] Câmara dos Deputados, Projeto de Lei nº5218,de 2013. Disponível em: <http://www.camara.gov.br/proposicoesWeb/prop_mostrarintegra;jsessionid=0F86842988FE6EF04BE06232C1E00164.node1?codteor=1071439&filename=Avulso+-PL+5218/2013> Acesso em: 18.jan.2014

[6] CROWLEY, Mary L**. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.** In: LINDQUIST, Mary & SHULTE, Albert P. (organizadores), Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

[7] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contexto e aplicações.** São Paulo: Ática, 2010.

[8] FERREIRA, Ana Célia da C. **Ensino da Geometria no Brasil: enfatizando o período do Movimento da Matemática Moderna**. In: EDUCERE. III Congresso Nacional da área de educação, 5. Curitiba, PR. Resumo. Paraná. PUC, 2005, p. 94-101. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/painel/TCCI136.pdf>. Acesso em: 04. Set. 2013.

[9] GUTIERREZ, Angel. **Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework***.* University of Valence, Spain, 1996. Disponível em: <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>. Acesso em: 04. Nov. 2013.

[10] IMENES, Luiz Márcio. **Vivendo a matemática – geometria das dobraduras.** São Paulo: Scipione, 2007.

[11] INEP, ENEM. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/05_AMARELO_GAB.pdf> Acesso em: 28.jan. 2014.

[12] INEP, Relatórios Pedagógicos. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/relatorios-pedagogicos> Acesso em 14.jan.2014.

[13] KALLEF, Ana Maria. **Vendo e entendendo poliedros.** Niterói: EdUFF, 2003.

[14] LORENZATO, Sérgio et al. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006.

[15] Mathias Sant'Anna, Ato 3.2. Disponível em: <http://mathiassantanna.blogspot.com.br/2008_06_01_archive.html>. Acesso em:13. Dez.2013.

[16] Mercado Livre. Disponível em:< http://produto.mercadolivre.com.br/MLB-523718653-brinquedo-magnetico-criat-im-kit-56-pecas-colorido-_JM>. Acesso em: 13 dez. 2013

[17] Mundo Educação, Tetraedro Regular. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/tetraedro-regular-1.htm>. Acesso em: 28.jan.2014

[18] ______., A. M. M. R. ; REI, Dulce Monteiro ; HENRIQUES, A. S. ; FIGUEIREDO, L. G. . **Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de Van Hiele.** Bolema (Rio Claro), Rio Claro-SP, v. 10, p. 21-30, 1994.

[19] NOVA ESCOLA, Revista Nova Escola **– *Neurociência: Como ela ajuda a entender a aprendizagem*.** Edição nº 253, 2012. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/gestao-escolar/neurociencia-como-ela-ajuda-entender-aprendizagem-691867.shtml>

[20] PAVANELLO, R. M. "O abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Conseqüências." In: Zetetiké, n.1, p. 07-17, Unicamp, mar. 1993.

[21] Poliedros de Platao 1 (curiosidades). Disponível em: <http://origamimat.blogspot.com.br/2009/02/poliedros-de-platao-1-curiosidades.html>. Acesso em: 13.Dez.2013.

[22] POLYA, G. **O Ensino por Meio de Problemas**. Revista do Professor de Matemática,V.7, São Paulo, 1985

[23] PsiqWeb, Estresse e Alterações Cerebrais. Disponível em: <http://www.psiqweb.med.br/site/?area=NO/LerNoticia&idNoticia=292>. Acesso em 03.Dez. 2013. >

[24] RELVAS, Marta P. **Neurociência na prática pedagógica**. Rio de Janeiro: Wak,– 1ª edição, 2012.

[25] RÊGO, Rogéria Gaudêncio; RÊGO, Rômulo Marinho do; VIEIRA, Kleber Mendes. **Laboratório de ensino de geometria.** Campinas: Autores Associados, 2012.

[26] SOUSA, Ariana Bezerra de. **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática**. Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2005. Disponível em: <http://repositorio.ucb.br/jspui/handle/10869/1544>. Acesso em: 10.jan. 2014.

[27] UOL, Poliedro. Disponível em:< http://educacao.uol.com.br/matematica/poliedro.jhtm> Acesso em 28. jan.2014

[28] VALENTE, W.R. O nascimento da matemática do Ginásio. Annablume, São Paulo. 2004.

[29] VALENTE, W.R. Quem somos nós, professores de matemática? Cad. Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 11-23, jan./abr. 2008. Disponível em <http://www.cedes.unicamp.br>. Acesso em 01.mar.2014

[30] Varetas, canudos, arestas e... Sólidos regulares. Disponível em: <http://www.oocities.org/br/jaymeprof/tg/Platao/varetas.htm>. Acesso em: 13. Dez. 2013.

[31] Walter Tadeu, Pirâmides. Disponível em: <http://professorwaltertadeu.mat.br/GABPiramides2013.dochttp://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/inicio.htm>. Acesso em 09.dez.13

[32] Wikipédia, Necker cube. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Necker_cube> Acesso em: 28.jan. 2014

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

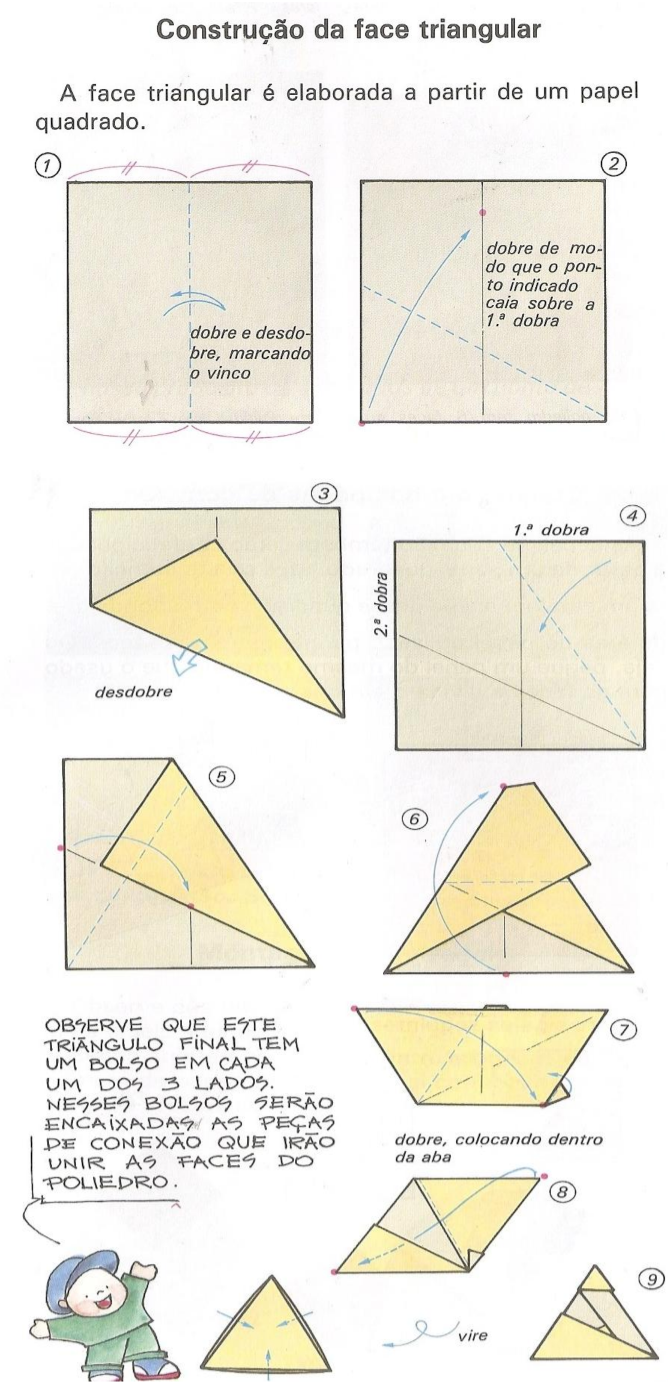
[1] CHAVES, Juliana de O. **Geometria Espacial no ensino fundamental: uma reflexão sobre as propostas metodológicas**. 88 p. Tese. Viçosa, MG. 2013. Disponível em: <http://www.tede.ufv.br/tedesimplificado/tde_arquivos/61/TDE-2013-07-01T142940Z-4666/Publico/texto%20completo.pdf>. Acesso em : 04.Set.2013.

[2] FONSECA, Laerte. **Protocolo Neuropsicopedagógico de avaliação das habilidades matemáticas**. Rio de Janeiro: Wak, 2013.

ANEXO : ESQUEMAS DE CONSTRUÇÕES DE FACES

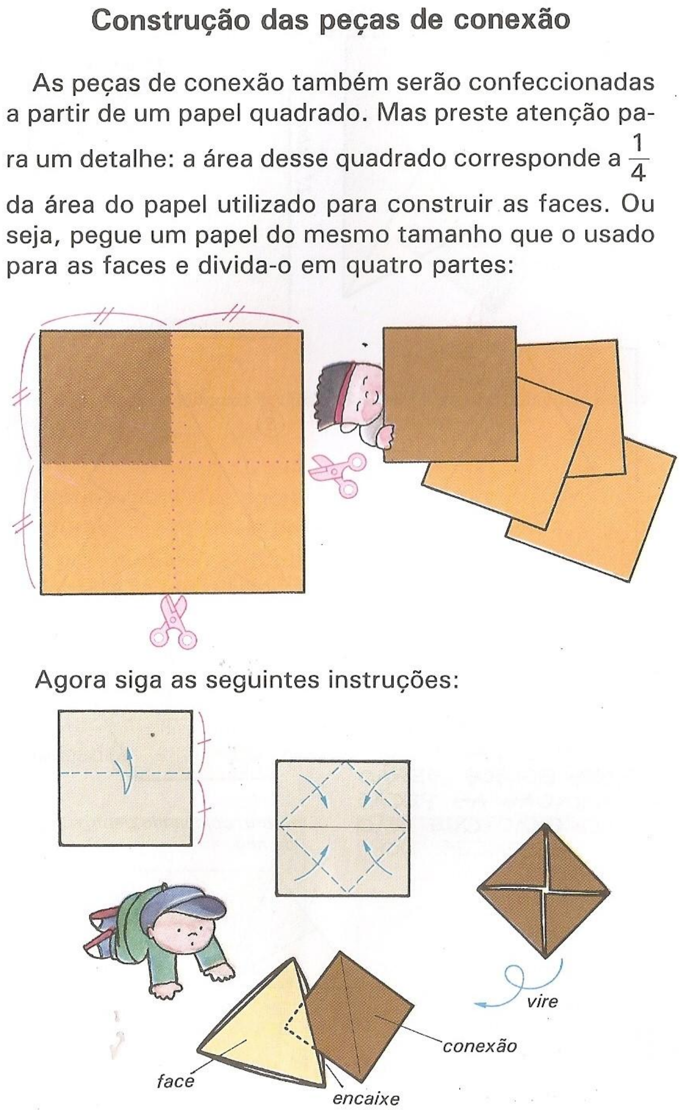
Construção da face triangular:

Segue a figura escaneada do livro Vivendo a matemática – geometria das dobraduras de Luiz Márcio Imenes:



Construção da peça de conexão:

Segue a figura escaneada do livro Vivendo a matemática – geometria das dobraduras de Luiz Márcio Imenes:



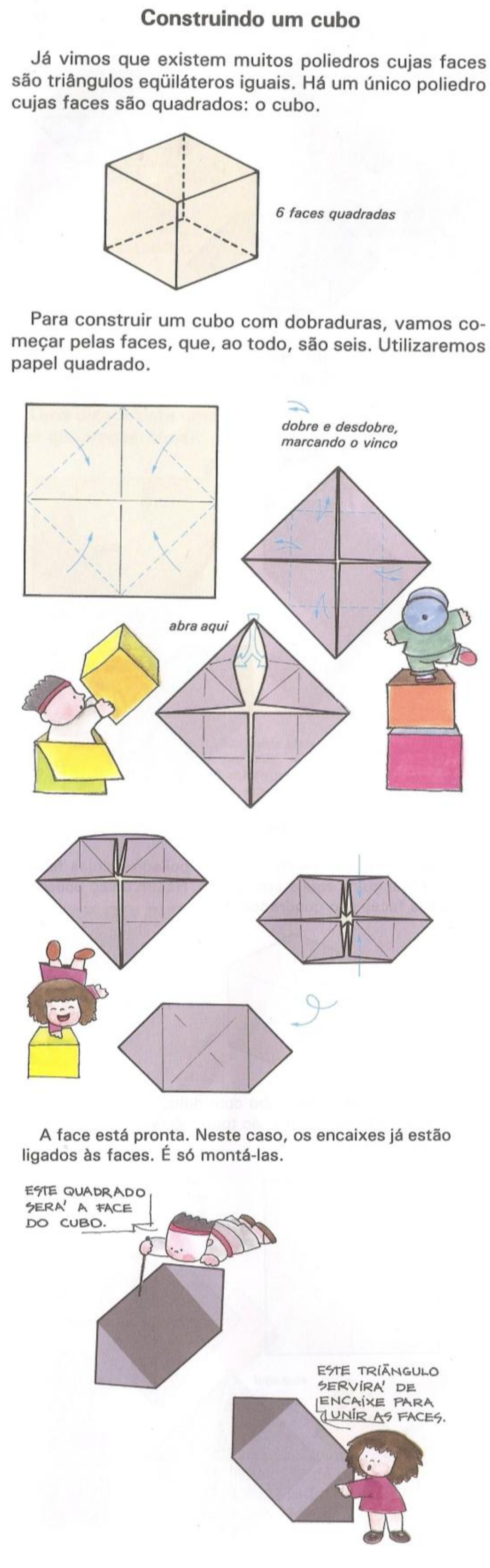
Construção das peças de conexão

As peças de conexão também serão confeccionadas a partir de um papel quadrado. Mas preste atenção para um detalhe: a área desse quadrado corresponde a $\frac{1}{4}$ da área do papel utilizado para construir as faces. Ou seja, pegue um papel do mesmo tamanho que o usado para as faces e divida-o em quatro partes:

Agora siga as seguintes instruções:

Construção da face quadrada:

Segue a figura escaneada do livro Vivendo a matemática – geometria das dobraduras de Luiz Márcio Imenes:



Construindo um cubo

Já vimos que existem muitos poliedros cujas faces são triângulos eqüiláteros iguais. Há um único poliedro cujas faces são quadrados: o cubo.

6 faces quadradas

Para construir um cubo com dobraduras, vamos começar pelas faces, que, ao todo, são seis. Utilizaremos papel quadrado.

dobre e desdobre, marcando o vinco

abra aqui

A face está pronta. Neste caso, os encaixes já estão ligados às faces. É só montá-las.

ESTE QUADRADO SERÁ A FACE DO CUBO.

ESTE TRIÂNGULO SERVIRÁ DE ENCAIXE PARA UNIR AS FACES.