Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Marisa Rezende Simão

Números Complexos:

Um estudo acerca dos conhecimentos prévios e das noções de aplicabilidade na perspectiva dos alunos do 3º ano do Ensino Médio

Juiz de Fora

2014

Marisa Rezende Simão

Números Complexos:
Um estudo acerca dos conhecimentos prévios e das noções de aplicabilidade na perspectiva dos alunos do 3º ano do Ensino Médio

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dra. Valéria Mattos da Rosa

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Simão, Marisa Rezende.
Números Complexos:
Um estudo acerca dos conhecimentos prévios e das noções de aplicabilidade na perspectiva dos alunos do 3º ano do Ensino Médio / Marisa Rezende Simão. – 2014.
109 f. : il.

Orientadora: Dra. Valéria Mattos da Rosa.
Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Números Complexos. 2. Aplicabilidade. 3. Motivação. I. Rosa, Valéria Mattos, orient. II. Título.

Marisa Rezende Simão

Números Complexos:

Um estudo acerca dos conhecimentos prévios e das noções de aplicabilidade na perspectiva dos alunos do 3º ano do Ensino Médio

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 22 de abril de 2014

Professora Dra. Valéria Mattos da Rosa - Orientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professora Dra. Beatriz Casulari da Motta Ribeiro
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Allan de Oliveira Moura
Universidade Federal de Viçosa

Dedico este trabalho a José Otávio, meu esposo, grande amor de minha vida, pela presença, amizade, companheirismo, apoio incondicional, paciência e dedicação aos mínimos detalhes que amenizam as dificuldades e os desafios que a vida nos oferece.

AGRADECIMENTOS

"Senhor, hei de cantar eternamente as vossas maravilhas!"

Obrigada pela minha existência e por tudo o que me tendes concedido!

À professora Doutora Valéria Mattos da Rosa, minha orientadora, pelo profissionalismo e entusiasmo durante a nossa caminhada tão amigável.

À EPCAR, na pessoa do Brigadeiro Alex Picchi Izmailov e da Cel. Denise Maria Belloni de Medeiros, não só por permitirem a realização desta pesquisa nesta Escola, como também pela concessão do afastamento parcial das minhas atividades, o que possibilitou o meu aprimoramento.

Aos Professores Doutores Allan de Oliveira Moura e Beatriz Casulari da Motta Ribeiro por aceitarem compor a banca examinadora desta dissertação.

Aos meus pais, Geraldo e Maria Emília e minha avó Corina, grande alicerce de minha vida e responsáveis pelos valores ensinados que me tornaram a pessoa que sou, com uma eterna saudade!

Aos meus filhos, meus amores:

Paulo Otávio e Tânia, que além de tudo, presentearam-me com a encantadora Cecília amenizando as situações estressantes desse curso;

Pedro Henrique e Clarissa, pelo apoio carinhoso e que, apesar de tantos compromissos, não mediram palavras de incentivo;

Thiaguinho e Corina, pessoas muito especiais em minha vida, que estiveram por perto em todos os momentos, pois a sua presença foi essencial para que eu atingisse meu objetivo.

Aos alunos das turmas Fox e Golf do Esquadrão Sirius, da EPCAR, pela participação neste trabalho demonstrando interesse e compromisso acima de tudo, apesar da rotina que vivenciaram nesta Escola.

Aos componentes da Equipe de Matemática da EPCAR, meus amigos, Andréa, Alexandre, Altamiro, Cavaca, José Antônio, Leila, Paulo César, Vicente, Vinícius pelo apoio irrestrito durante todo o Curso, nas substituições em aulas, na troca de ideias, nas sugestões de material para leitura e, sobretudo, agradeço-lhes pelas palavras de estímulo.

Ao colega e amigo Alexandre, agradeço de modo especial por ter me apresentado o caminho do PROFMAT me incentivando com argumentos fortes e convincentes sobre a importância e realização que tal Curso me proporcionaria; e que nos últimos dois anos, mesmo estando distante cursando seu doutorado na UFMG, não deixou de me apoiar em todos os momentos em que precisei.

À colega Ana Maria, pessoa sensível e competente, acima de tudo, pela amizade e pelo tempo carinhosamente dedicado à revisão do texto, com sugestões enriquecedoras.

Ao colega Antônio Ribeiro que não mediu esforços para enriquecer este trabalho criando um momento interdisciplinar entre a Matemática e a Física.

À colega Sheila Ávila, pela disponibilidade em me ajudar no *Abstract* e pelas palavras de incentivo torcendo pela minha conquista.

A todos os meus colegas de trabalho da EPCAR, que sempre me acolheram com carinho e que muito contribuíram para que eu tivesse êxito neste trabalho.

Aos professores e colegas do PROFMAT pela convivência nas aulas do Curso. Em especial, à Márcia pela amizade e apoio em muitos momentos; ao Aroldo, ao Jorge, ao Luiz Fernando, à Marta e ao Miguel pelos grupos de estudo que sempre ajudavam. Aos companheiros de viagem Altamiro, Cavaca, Célia, Josimar, Leandro e Lívia, pelos momentos de descontração em nossos deslocamentos a Juiz de Fora. Agradeço ainda à Letícia pela acolhida no Curso de Verão.

Aos alunos da primeira turma, Leandro Sodré pela torcida e interesse e, de modo especial, ao Leandro Dueli pela disponibilidade não só durante o Curso, mas também na fase final da pesquisa.

Enfim, a todos da Equipe de Coordenação do PROFMAT, os quais estão contribuindo para o aprimoramento de professores proporcionando grandes benefícios à Educação no Brasil.

O Espírito Divino expressou-se sublimemente nesta maravilha da análise, neste portento do mundo das ideias, este anfíbio entre o ser e o não ser, que chamamos de raiz imaginária da unidade negativa. (Leibniz)

RESUMO

O objetivo geral desta pesquisa foi estudar como os alunos da última série do Ensino Médio têm compreensão sobre os Números Complexos antes e depois da formalização dos conceitos referentes ao assunto. Mais precisamente, propõe-se uma forma de conduzir algumas aulas de modo que os alunos tenham maior interesse pelo assunto e apresentam-se sugestões que venham ajudar nos processos de ensino e de aprendizagem desse conteúdo. Com isso, buscou-se compreender como os alunos dão sentido aos Números Complexos antes da formalização dos conceitos referentes a esse assunto. Procurou-se, também, saber como os alunos se apropriam dos conceitos já formalizados relativos aos Números Complexos pesquisando e identificando motivações e desmotivações vivenciadas nesse processo. Fundamentou-se a pesquisa na apresentação de parte da história referente à consolidação do conjunto dos números complexos, na formalização de conceitos desse assunto, nas orientações curriculares nacionais e na temática de motivação. Cinquenta e três alunos da Escola Preparatória de Cadetes do Ar (EPCAR) compuseram o *corpus* desta pesquisa. Para dar subsídio à pesquisa, a estratégia de trabalho seguiu a seguinte rotina: um questionário foi aplicado logo no início do processo; na sequência, ocorreram as aulas teóricas com a formalização dos conceitos sempre reforçada com os aspectos históricos. Em seguida, houve uma apresentação voluntária feita pelos alunos acerca da aplicabilidade dos Números Complexos; após todo o conteúdo ter sido ministrado, uma prática interdisciplinar com a física promoveu a contextualização; e, para finalizar, os alunos responderam a um segundo questionário que permitiu identificar motivações e desmotivações vivenciadas nesse processo. Durante a pesquisa, contou-se com as observações anotadas em diário de campo. Para a análise dos dados, foram consideradas as respostas aos questionários. Algumas dessas deram-se por meio de gráficos que relativizaram as respostas dos alunos, outras, foram agrupadas por similaridade. A sequência das falas dos alunos relativas às suas apresentações foi elencada. Concluiu-se que como benefício houve uma mudança na maneira de pensar daqueles alunos, promovendo uma melhoria nos processos de ensino e de aprendizagem. Essa prática resultante da motivação do professor que busca alternativas de ensino se aplica a qualquer disciplina.

Palavras-chave: Números Complexos. Aplicabilidade. Motivação.

ABSTRACT

The general objective of this research was to study how students of last grade of high school have understood the Complex Numbers before and after the formalization of the concepts related to the topic. More precisely, it proposes a way to conduct some classes so that students have greater interest in the topic and there are also some suggestions that may help the process of teaching and learning the content. Thus, we tried to identify how students understand the Complex Numbers before the formalization of the concepts related to this topic. It was also taken into consideration how the students learn the already formalized concepts of the Complex Numbers by researching and identifying motivations and discouragement experienced during this process. The research was based on the presentation of the history related to the consolidation of the set of complex numbers, the formalization of the concepts related to this subject in the national curriculum guidelines and in the thematic of motivation. The corpus of this research is composed by fifty-three students from Escola Preparatória de Cadetes do Ar (EPCAR) To give subsidy to the research, the following strategy of work was adopted: a questionnaire was applied early in the process; after, classes which formalized the concepts enhanced with the historical aspects occurred. Then, there was a voluntary presentation about the applicability of Complex Numbers performed by students; after all the content has been covered, an interdisciplinary practice with Physics promoted the contextualization, and, to sum up, the students answered a second questionnaire which allowed for identifying motivations and discouragement experienced in this process. During the research, we were helped by the observations written down in a field diary. For data analysis, responses to the questionnaires were considered. Some of those given through graphs that relativized students responses; others were grouped by similarity. The sequence of accounts of the students concerning their presentations was listed. It was concluded that such benefit was a change in the way of thinking of those students, promoting an improvement in the process of teaching and learning. This practice resulting from teacher motivation which seeks alternative teaching applies to any discipline.

Key-words: Complex Numbers. Applicability. Motivation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CFOAv	Curso de Formação de Oficiais Aviadores
CPCAR	Curso Preparatório de Cadetes do Ar
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
EPCAR	Escola Preparatória de Cadetes do Ar
ITA	Instituto Tecnólogico de Aeronáutica
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA

Nestes 18 anos, lecionando matemática para turmas de alunos do 3º ano do Ensino Médio, percebi, ainda que empiricamente, uma resistência que ocorre por parte dos alunos quando alguns tópicos da Matemática são abordados. De modo especial, chama minha atenção o assunto Números Complexos, pois entre os diversos questionamentos feitos pelos alunos, destacam-se quase sempre: "Não sei por que eu preciso estudar este assunto!", "Os vestibulares não cobram!", "Onde vou empregar números complexos em minha vida?", "Números complexos, o assunto deve ser complexo!". Creio que tais questões sejam momentâneas e circunstanciadas pelo momento vivido pelos estudantes diante dos desafios que os rodeiam nessa fase da vida estudantil. O incômodo observado em ambas as partes, docente e discente, resultou em um esforço de aprimorar métodos para um ensino eficaz, buscando uma aprendizagem de sucesso.

Minha experiência me mostrou que o aluno escuta, durante toda sua vida escolar, que ao aplicar a fórmula de Bhaskara numa equação de 2º grau, se o valor do discriminante for um número negativo, então o conjunto-solução é o conjunto vazio, pois o conjunto universo considerado até então, é o conjunto dos números reais. Por ocasião do terceiro ano do Ensino Médio, o professor apresenta para a mesma equação um conjunto solução diferente do conjunto vazio e justifica que existem os números imaginários. E o aluno então pensa: "O que são números imaginários?" "Será que eles realmente existem?" E se para alguns a curiosidade sobre o assunto pode ser algo motivador, outros poderão não se interessar estabelecendo até mesmo um bloqueio, principalmente se ouvirem de colegas veteranos que o assunto é complexo, é difícil. Observo que a falta de aceitação pelo aluno cria uma barreira, que gera dificuldades para que esse conteúdo seja compreendido.

Para além das práticas de sala de aula, no meio de tantas indagações, tantos questionamentos, pensando em um modo de minimizar essa resistência, surgiu a ideia deste trabalho com a pretensão de propor que, na condução desse assunto, os processos de ensino e de aprendizagem fossem atingidos, resultando maior envolvimento por parte dos alunos e até mesmo de colegas professores.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

Nosso objetivo foi estudar como os alunos da última série do Ensino Médio têm compreensão sobre os Números Complexos antes e depois da formalização dos conceitos referentes ao assunto. Diante dessa pesquisa, pretendíamos propor uma forma de conduzir algumas aulas de modo que os alunos tivessem maior interesse pelo assunto apresentando sugestões que venham ajudar nos processos de ensino e de aprendizagem desse conteúdo.

Especificamente, intencionamos compreender como os alunos dão sentido aos Números Complexos antes da formalização dos conceitos referentes a esse assunto. Procuramos, também, saber como os alunos se apropriam dos conceitos já formalizados relativos aos Números Complexos pesquisando e identificando motivações e desmotivações vivenciadas nesse processo.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira: nesse Capítulo 1, está justificada a relevância da investigação que propusemos e estão explicitados nossos objetivos. O Capítulo 2 apresenta um aspecto histórico da construção do Conjunto dos Números Complexos, desde noções preliminares até a formalização das operações nesse conjunto. O Capítulo 3 relata as opções metodológicas de pesquisa. O Capítulo 4 traz algumas transcrições de respostas dos sujeitos participantes para os instrumentos utilizados e uma discussão suscitada por esses quanto da utilização dos Números Complexos para além da sala de aula de matemática. Nele são apresentadas também as análises para os dados registrados. O Capítulo 5 aborda as considerações finais da compreensão dos participantes sobre os Números Complexos tal qual nosso objetivo. Finalmente, o Capítulo 6 descreve as conclusões sobre nossa pesquisa fazendo uma proposta de ensino.

2 OS NÚMEROS COMPLEXOS

2.1 UMA QUESTÃO HISTÓRICA

Abordaremos inicialmente a parte histórica dos Números Complexos. Isso se fará na intenção de contribuir não só na introdução do assunto em sala de aula, mas também para que haja maior entendimento na evolução dos conceitos. Essa forma de abordagem é preconizada pelos PCNs ao indicarem que "A utilização da História da Matemática em sala também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos".

Condizente com uma abordagem que concilie partes da história dos números complexos, o conteúdo em si, propostas de abordagem que motivem os alunos a uma maior participação e uma análise bilateral, envolvendo docente e discente, é que propomos essa investigação.

Nós temos que ter em mente o fato de que os aspectos históricos não representam apenas dados biográficos de estudiosos que se destacaram na Matemática. É preciso que seja feita uma interligação desses fatos históricos, da sua evolução e das consequências no processo de construção da Ciência.

Acreditamos que a História da Matemática pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação dos conteúdos matemáticos a serem estudados. Além disso, o professor pode passar a entender possíveis dificuldades dos alunos em alguns tópicos da disciplina se tiver como base as históricas dificuldades que ocorreram na construção dos conceitos matemáticos.

Por isso, é que talvez possamos compreender melhor a resistência dos alunos quando esse assunto é abordado, se pensarmos na dificuldade que os matemáticos tiveram para admitir a existência dos números complexos ao longo de muitos anos, mesmo quando eram utilizados.

Historicamente, a teoria dos números complexos demorou a ser formalizada e foi a partir do século XVIII que seu desenvolvimento aconteceu de forma mais expressiva. A primeira citação de raiz quadrada de um número negativo talvez ocorra no século I quando Heron de Alexandria em sua obra Stereometrica (c.50 d.C) cita a expressão $\sqrt{81-144}$ conforme Hellmich(apud BAUMGART, 1992 v.4 p.61-3). No século III, há uma tentativa de Diofanto de buscar a resolução da equação $336x^2 + 24 = 172x$ e, assim, chega em $\sqrt{1849-2016}$, de acordo com Hellmich(apud BAUMGART, 1992 v.4 p.61-3). Em c.850, na Índia, Mahavira escreveu "Como na natureza das coisas, um negativo não é um quadrado, não admite raiz quadrada." Isto na verdade era uma dificuldade de aceitação dos números imaginários que permaneceu com os europeus Nicolas Chuquet (1484) e Luca Paccioli (1494), de acordo com Hellmich(apud BAUMGART, 1992 v.4 p.61-3).

O primeiro matemático a operar com números complexos sem rejeitá-los foi Cardano (1501-1576), de acordo com Domingues (apud IEZZI, 2005, p.51), ao resolver o problema clássico: "dividir 10 em duas part1es cujo produto seja 40", o que algebricamente conduz à equação $x(10-x)=40 \Rightarrow x^2-10x+40=0 \Rightarrow x=5+\sqrt{-15}$ ou $x=5-\sqrt{-15}$.

Conforme Cardano, "Deixando de lado a tortura mental envolvida, multiplique $5+\sqrt{-15}$ por $5-\sqrt{-15}$. O produto é $25-(-15)=40(...)$. Assim progride a sutileza aritmética cujo objetivo, como afirmado é tão refinado quanto inútil." Segundo Carvalho (apud MORGADO, 1992, p.109). Cardano provou então que o produto das raízes obtidas era 40 e que sua soma era igual a 10.

A preocupação de descobrir uma fórmula que resolvesse as equações de 3º grau trouxe grande desenvolvimento no estudo dos números complexos e isso envolveu matemáticos famosos como relata a História. Novamente Cardano (1501-1576), em 1539, convenceu a Tartaglia (1499-1557) que lhe mostrasse o método de resolução das raízes cúbicas, sob a promessa de que não revelaria nada a ninguém. No meio do processo, Tartaglia sentiu dificuldades ao encontrar raízes de números negativos e pediu ajuda a Cardano, que se recusou a fazê-lo.

Mais tarde, em 1543, como Cardano descobriu que Scipioni del Ferro também havia desenvolvido a fórmula para encontrar as raízes cúbicas, sentiu-se desobrigado com a promessa que fez a Tartaglia. Assim não hesitou em publicar em sua obra *Ars Magna* a fórmula que trazia a solução dessas equações. Cardano e del Ferro tiveram então os louros da vitória, o que deixou Tartaglia indignado. Como consequência desse fato, "em muitos países, a fórmula que resolve as equações cúbicas é dita fórmula de Cardano-Tartaglia" (DANTE, 2005, p.443):

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{m^3}{27}+\frac{n^2}{4}}+\frac{n}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{m^3}{27}+\frac{n^2}{4}}-\frac{n}{2}}$$

Cardano, ao aplicar a fórmula acima para resolver a equação $x^3=15x+4$ chegou a $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ e teve dificuldade em igualar essa expressão com o número 4, uma das raízes da equação (DANTE, 2005).

A solução foi dada pelo bolonhês Rafael Bombelli (1530-1579) quando estabeleceu $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+b\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-b\sqrt{-1}$ (DANTE, 2005).

Na evolução dos números complexos, ao longo dos anos, cada matemático foi assumindo um modo diferente de abordar a questão. Por exemplo, temos que Rafael Bombelli em 1500 já usava "d.m" para representar $\sqrt{-1}$ e Albert Girard (1637) utilizou símbolos tais como $\sqrt{-2}$, mas Cardano não usava a notação (DANTE, 2005). As expressões "real" e "imaginário", hoje usadas naturalmente, só foram utilizadas, a partir de 1637, por René Descartes (1596-1650). Uma frase de Descartes na *Geometrie* confirma suas ideias: "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma questão são reais. Às vezes elas são imaginárias" (GARBI, 2006, p.75).

Em um trabalho com data de 1777, publicado em 1794, Leonhard Euler (1707-1783) definiu $\sqrt{-1}$ como sendo "i". Essa notação acabou se tornando padrão depois de ter sido usada por Gauss (1777-1855), em 1801, devido a sua notoriedade (DANTE, 2005).

A associação dos números complexos a pontos do plano real se estabeleceu com estudos dos matemáticos Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855) (DANTE, 2005).

Os historiadores admitem que a representação gráfica dos números complexos seja uma descoberta de Wessel. Ele foi o pioneiro dessa ideia e publicou um artigo sobre o assunto em 1798. Entretanto, como o trabalho de Wessel permaneceu praticamente desconhecido, o plano complexo hoje é denominado plano de Gauss, embora Gauss só tenha publicado sua ideia trinta anos depois (BOYER, 1996, p.350).

Há relatos históricos de que anteriormente já havia a ideia de se representar os números imaginários em uma reta vertical. Segundo (BOYER, 1996, p.350),

> Desde a época de Girard sabia-se que os números reais positivos, negativos e zero podem ser representados como correspondendo a pontos de uma reta. Wallis tinha até sugerido que os imaginários puros fossem representados numa perpendicular ao eixo dos reais.

Em 1831, quando Gauss retomou os estudos do matemático Argand, pensou nos números $a + b\sqrt{-1}$, como coordenadas de um ponto em um plano cartesiano, tendo assim (a, b). Deu-se também uma interpretação geométrica para a adição e a multiplicação dos símbolos. Essa representação geométrica "fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade quanto aos números imaginários, pois estes agora podiam ser visualizados no sentido de que cada ponto no plano corresponde a um número complexo e vice versa." (BOYER, 1996, p.350). Foi Gauss também que, em 1832, utilizou a expressão "número complexo".

Logo a seguir, em 1837, aparece William Rowan Hamilton (1805-1865) que, utilizando pares ordenados, esclareceu como poderia ser considerada uma soma $a + bi$, embora suas parcelas "a" e "bi" fossem de diferentes espécies de acordo com Domingues (apud IEZZI, 2005, p.52).

Segundo Domingues (apud IEZZI, 2005, p.53) "Foi num artigo de 1833, apresentado à Academia Irlandesa, que Hamilton introduziu a álgebra formal dos números complexos. Estes, segundo sua ideia básica, passavam a ser encarados como pares ordenados (a, b) de números reais..." Assim, Hamilton, com a utilização de um par ordenado de números reais para representar um número complexo, reescreveu as definições geométricas de Gauss através da álgebra permitindo que as operações algébricas com esses números fossem definidas de modo mais simples.

2.2 CONCEITOS PRELIMINARES

Antes de definirmos o Conjunto dos Números Complexos é conveniente que falemos um pouco sobre os conjuntos numéricos, ou seja, conjuntos dos números que têm características semelhantes. Os alunos iniciam o estudo dos conjuntos numéricos desde os primeiros anos de escola a partir dos números naturais e os conceitos vão evoluindo à medida que algumas operações inversas exigem uma ampliação dos conjuntos já existentes para que seja preservada a propriedade do fechamento.

Ao terminarem de cursar o 2º ano do Ensino Médio, os alunos conhecem e utilizam até então o conjunto dos números reais. Neste momento, então, não lhes é cobrado o entendimento da solução para a equação $x^2 + 1 = 0$ para além desse conjunto, pois não existe um número real x que, elevado ao quadrado, resulte -1. A solução dessa equação está no conjunto dos Números Complexos que é formalmente introduzido quando o aluno está na última série do Ensino Médio. Assim, a partir do 3º ano do Ensino Médio os alunos passam a trabalhar com os seguintes conjuntos numéricos: Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$); Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$); Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$); Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$); Conjunto dos Números Complexos ($\mathbb{C}$). Para uma compreensão didática, os livros sugerem que esses conjuntos numéricos podem ser representados esquematicamente pela figura 1:

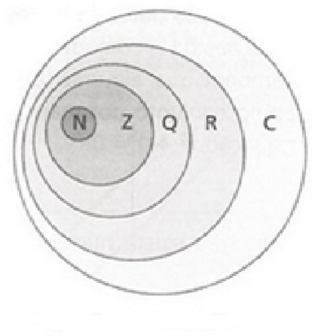

Figura 1 – Diagrama dos Conjuntos Numéricos

Para um estudo mais detalhado da formalização envolvida na criação dos conjuntos numéricos citamos a leitura de Ferreira (2013) e de Gonçalves (2006).

2.3 O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Historicamente, vimos primeiramente a proposta de Gauss em 1831, que em um trabalho, sugere uma teoria dos números complexos apoiada na representação no plano cartesiano.

Depois, em 1833, Hamilton reconhece os números complexos como sendo um par ordenado de números reais (a, b) e ele definiu a igualdade de dois pares ordenados (a, b) e (c, d) pelas condições $a = c$ e $b = d$.

A partir daí, a adição e a multiplicação de tais pares foram definidas também por ele por $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

As operações de adição e de multiplicação de pares ordenados de números reais têm a propriedade comutativa e a propriedade associativa. Além disso, a multiplicação é distributiva em relação à adição. Então temos que essas leis são válidas para a adição e a multiplicação de números reais. Uma observação que completa esse raciocínio foi feita por EVES, pesquisador que salienta que se deve

> notar que assim o sistema dos números reais está imerso no sistema dos números complexos. Isso significa que, identificando-se cada número real r com o par correspondente (r, 0), essa correspondência preserva a adição e a multiplicação, pois temos $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ e $(a, 0).(b, 0) = (ab, 0)$. Na prática, um número complexo da forma $(r, 0)$ pode ser substituído pelo número real r associado a ele (EVES, 2004, p.549).

Advém dessa observação a forma com a qual costumamos dizer que todo número real é um número complexo.

Para obter a forma $a + bi$ de um número complexo, a partir da forma de Hamilton, notemos que todo número complexo (a, b) pode ser escrito como $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0).(0, 1) = a + bi$

Sendo que $(0, 1)$ está representado pelo símbolo i e $(a, 0)$ e $(b, 0)$, pelos números reais a e b, respectivamente.

Finalmente, observemos que $i^2 = (0, 1).(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1$

Os pares ordenados nos quais o segundo elemento é diferente de zero correspondem aos números complexos que não são reais, são números imaginários.

O número real 1, representado pelo par ordenado $(1, 0)$, é chamado de unidade real.

Dessa forma, podemos definir o conjunto dos números complexos como um conjunto de pares ordenados de números reais onde são válidas as propriedades:

a) igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$
b) adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
c) multiplicação: $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

2.4 PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

A operação da adição em $\mathbb{C}$ verifica as seguintes propriedades para quaisquer números complexos $z = (a, b)$, $w = (c, d)$ e $v = (e, f)$:

2.4.1 Propriedade Associativa:

$(z + w) + v = z + (w + v)$

De fato, $(z+w)+v = [(a, b)+(c, d)]+(e, f) = [(a+c, b+d)]+(e, f) = (a+c+e, b+d+f) = [a+(c+e), b+(d+f)] = (a, b)+(c+e, d+f) = (a, b)+[(c, d)+(e, f)] = z+(w+v)$

2.4.2 Propriedade Comutativa:

$z + w = w + z$

De fato, $z+w = (a, b)+(c, d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c, d)+(a, b) = w+z$

2.4.3 Existência do Elemento Neutro:

$\exists e_a \in \mathbb{C} \mid z + e_a = e_a + z = z$

Fazendo $z = (a, b)$, provemos que existe $e_a = (x, y)$ tal que $z + e_a = z$

De fato, $(a, b) + (x, y) = (a, b) \Leftrightarrow a + x = a$ e $b + y = b \Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0$, portanto existe $e_a = (0, 0)$ e e_a é chamado de *elemento neutro* para a adição.

2.4.4 Existência do Elemento Simétrico ou Oposto:

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists z' \in \mathbb{C} \mid z + z' = z' + z = e_a$

Fazendo $z = (a, b)$, provemos que existe $z' = (x, y)$ tal que $z + z' = e_a$

De fato, $(a, b) + (x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow a + x = 0$ e $b + y = 0 \Leftrightarrow x = -a$ e $y = -b$. Assim $z' = (-a, -b)$ é o *simétrico ou inverso aditivo* de z.

2.5 SUBTRAÇÃO

Dados os números complexos $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ existe um único complexo v tal que $z + v = w$.

De fato, considerando $z' = (-a, -b)$, temos: $z + v = w \Rightarrow z' + (z + v) = z' + w \Rightarrow (z' + z) + v = z' + w = w + z' \Rightarrow v = w + z' = (c, d) + (-a, -b) \Rightarrow v = (c, d) - (a, b) \Rightarrow v = w - z$

2.6 PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO:

A operação da multiplicação em $\mathbb{C}$ verifica as seguintes propriedades para quaisquer números complexos $z = (a, b)$, $w = (c, d)$ e $v = (e, f)$:

2.6.1 Propriedade Associativa:

$(z.w).v = z.(w.v)$

De fato, $(z.w).v$
$= [(a, b).(c, d)].(e, f)$
$= (ac - bd, ad + bc).(e, f)$
$= [(ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e]$
$= [ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce]$
$= [(a(ce - df) - b(de + cf), a(de + cf) + b(ce - df)]$
$= (a, b).(ce - df, cf + de) = (a, b).[(c, d).(e, f)] = z.(w.v)$

2.6.2 Propriedade Comutativa

$z.w = w.z$

De fato, $z.w = (a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
$= (ca - db, da + cb) = (c, d).(a, b) = w.z$

2.6.3 Existência do Elemento Neutro:

$\exists e_m \in \mathbb{C}, e_m = (1, 0) \mid z.e_m = e_m.z = z$

De fato dado $z = (a, b)$, existe $e_m = (x, y)$ tal que $z.e_m = z$, ou seja,

$(a, b).(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow ax - by = a$ e $bx + ay = b \Leftrightarrow x = 1$ e $y = 0$, portanto existe $e_m = (1, 0)$ e e_m é chamado de *elemento neutro* para a multiplicação.

2.6.4 Existência do Elemento Inverso:

$\forall z \in \mathbb{C}, z \neq (0, 0), \exists z'' \in \mathbb{C} \mid z.z'' = z''.z = e_m = (1, 0)$

De fato, dado $z = (a, b)$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ existe $z'' = (x, y)$ tal que $z.z'' = e_m$, ou seja, $(a, b).(x, y) = (1, 0) \Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \Leftrightarrow ax - by = 1$ e $bx + ay = 0 \Leftrightarrow$ $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ e $y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$.

2.6.5 Propriedade Distributiva da Multiplicação em Relação à Adição:

$z.(w + v) = z.w + z.v$, $\forall z, v, w \in \mathbb{C}$

De fato, dados $z = (a, b)$, $w = (c, d)$ e $v = (e, f)$ temos
$z.(w + v) = (a, b).[(c, d) + (e, f)] = (a, b).(c + e, d + f) =$

$= [a(c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e)] =$
$= [ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be] =$
$= [(ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)] =$
$= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) =$
$= (a,b).(c,d) + (a,b).(e,f) = z.w + z.v$

2.7 DIVISÃO

Dados os números complexos $z = (a,b)$, não nulo e $w = (c,d)$ existe um único z' tal que $z'.z = w$.

De fato, seja z'' o inverso multiplicativo de z.

Temos $z'.z = w \Rightarrow z''.(z'.z) = z''.w \Rightarrow z''.z'.z = z''.w \Rightarrow z''.z.z' = z''.w \Rightarrow (z''.z).z' = z''.w \Rightarrow z' = z''.w \Rightarrow z' = w.z'' \Rightarrow z' = \dfrac{w}{z}$

$z' = (c,d)\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\dfrac{ca+db}{a^2+b^2}, \dfrac{da-cb}{a^2+b^2}\right)$ é chamado *quociente* entre w e z.

2.8 FORMA ALGÉBRICA

Dado um número complexo qualquer $z = (x,y)$ podemos escrever:

$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y.0 - 0.1, y.1 + 0.0) =$

$= (x,0) + (y,0).(0,1) = x + yi$

Assim $x + yi$ é a forma algébrica de z onde $x = Re(z)$ e $y = Im(z)$.

Observações:

1. A forma algébrica $(x + yi)$ é mais prática que o par ordenado (x,y) na representação dos números complexos, tendo em vista que ela facilita as operações. Além disto, ela atende perfeitamente também as propriedades abaixo:

    - igualdade: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \;\; e \;\; b = d$
    - adição: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
    - multiplicação: $(a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di) =$
      $= (a + bi).(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

2. O produto dos pares ordenados $(0,1).(0,1)$ demonstra a propriedade básica da unidade imaginária, ou seja, $i^2 = -1$. De fato, $(0,1).(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1,0) = -1$.

2.9 POTÊNCIAS NATURAIS DE i

Calculando as potências naturais de i, temos:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2.i = -1.i = -i$
- $i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$
- $i^5 = i^4.i = 1.i = i$

De modo geral, sendo k um número natural, pode-se estabelecer que $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$.

De fato, sendo n um número natural tal que $n = 4k + r$, no cálculo de i^n, basta considerar $i^n = i^r$, onde r é o resto da divisão de n por 4.

2.10 CONJUGADO

Chama-se conjugado do complexo $z = x + yi$ ao complexo $\bar{z} = x - yi$

Propriedades do conjugado[1]: Para todo $z \in \mathbb{C}$, temos:

- $z + \overline{z} = 2.Re(z)$
- $z - \overline{z} = 2.Im(z).i$
- $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

2.11 USO DO CONJUGADO NA DIVISÃO

Temos que: $z.\bar{z} = (a + bi).(a - bi) = a^2 - b^2.i^2 = a^2 + b^2$.

Baseado nisso podemos efetuar a divisão de números complexos de maneira prática bastando para tal multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador.

Dados $z = a + bi$, $z \neq 0$, e $w = c + di$, temos:

$$\frac{w}{z} = \frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di).(a - bi)}{(a + bi).(a - bi)} = \frac{ca + db}{a^2 + b^2} + \frac{da - cb}{a^2 + b^2}i$$

[1] As demonstrações destas propriedades encontram-se em Iezzi, 2005, p.12-13

2.12 FORMA TRIGONOMÉTRICA

2.12.1 Norma:

Chama-se norma de um número complexo $z = x + yi$ ao número real não negativo $N(z) = x^2 + y^2$.

2.12.2 Módulo:

Chama-se módulo de um número complexo $z = x + yi$ ao número real não negativo $|z| = r = \rho = \sqrt{N(z)} = \sqrt{x^2 + y^2}$

2.12.3 Propriedades do Módulo:

Sendo $z = x + yi$ um número complexo qualquer, temos[2]

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$
- $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$

Outras propriedades do módulo:

Dados dois números complexos quaisquer, z e w, temos que:

- $|z.w| = |z|.|w|$
- $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$

2.12.4 Argumento

Dado o número complexo não nulo, $z = x + yi$, chama-se argumento de z o ângulo θ tal que $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$ e $\sin\theta = \dfrac{y}{\rho}$, onde $\rho = |z|$.

Convém observar que existe pelo menos um ângulo θ que satisfaz a condição, pois $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\dfrac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\rho}\right)^2 = \dfrac{x^2}{\rho^2} + \dfrac{y^2}{\rho^2} = \dfrac{x^2 + y^2}{\rho^2} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$.

[2] As demonstrações destas propriedades encontram-se em Iezzi, 2005, p.18-19

Se fixarmos o complexo z não nulo, os valores de $\cos\theta$ e $\sin\theta$ não mudam, entretanto θ pode ter infinitos valores, congruentes módulo 2π. Temos que esse complexo z tem argumento $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ onde θ_0 é chamado de argumento principal.

2.12.5 Plano de Argand-Gauss

A cada número complexo $z = x + yi$ está associado um par ordenado de números reais (x, y) e a cada par ordenado de números reais (x, y) está associado um único ponto do plano. Então podemos associar cada número complexo $z = x + yi$ ao ponto $P(x, y)$ que é chamado de afixo de z.

Esse plano que contém esses pontos que são associados aos números complexos é chamado de Plano de Argand-Gauss.

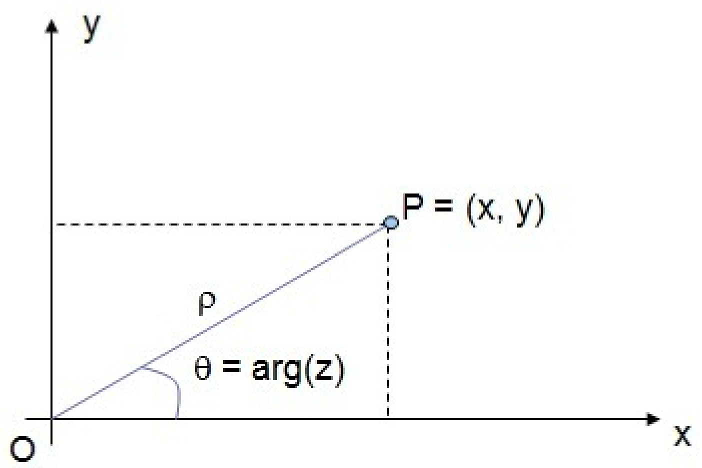

Figura 2 – Plano de Agand-Gauss

Temos então:

xOy = plano de Argand-Gauss

Ox = eixo real

Oy = eixo imaginário

P = afixo de z

Notemos que a distância entre $P(x, y)$ e a origem é $OP = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$

O ângulo formado por $\vec{OP}$ com o eixo real é θ_0 tal que $\cos\theta_0 = \dfrac{x}{\rho}$ e $\sin\theta_0 = \dfrac{y}{\rho}$.

2.12.6 Forma trigonométrica

Dado um número complexo $z = x + yi$, não nulo, temos:

$z = x + yi = \rho.\left(\frac{x}{\rho} + i\frac{y}{\rho}\right) \Rightarrow z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ é chamada forma trigonométrica ou forma polar de z, que é mais prática para as operações de potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$.

2.12.7 Potenciação

2.12.7.1 Módulo e Argumento de Produto

Teorema 2.12.7.1. *O módulo do produto de dois números complexos é igual ao produto dos módulos dos fatores e seu argumento é congruente à soma dos argumentos dos fatores.*

Prova 2.12.7.1. *Consideremos os números complexos z_1 e z_2 tais que*

$z_1 = \rho_1.(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = \rho_2.(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

Calculemos $z = z_1.z_2 = \rho.(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = z_1.z_2 = \rho_1\rho_2.(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \rho_1\rho_2.[(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \sin\theta_1.\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1.\cos\theta_2 + \sin\theta_2.\cos\theta_1)] = \rho_1\rho_2.(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = \rho.(\cos\theta + i\sin\theta)$. *Assim* $\rho = \rho_1.\rho_2$ *e* $\theta = (\theta_1+\theta_2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Observação:

A fórmula demonstrada anteriormente estende-se ao produto de n fatores $(n > 2)$.

Pela propriedade associativa da multiplicação $z = z_1.z_2.\cdots.z_n \Rightarrow$

$\rho.(\cos\theta + i\sin\theta) = (\rho_1.\rho_2.\ldots\rho_n).[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)] \Rightarrow \rho = \rho_1.\rho.\ldots\rho_n$ e $\theta = (\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Caso os n fatores sejam todos iguais, ou seja, $z_1 = z_2 \ldots = z_n = z$,então $z^n = \rho^n.(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, fórmula citada no item seguinte que é chamada de primeira fórmula de Moivre.

Essa fórmula facilita o cálculo de potências de números complexos, uma vez que a forma algébrica que é usada nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, não é muito prática na operação de potenciação de números complexos.

2.12.7.2 Primeira Fórmula de Moivre

Teorema 2.12.7.2. [3] *Dados o número inteiro n e o número complexo não nulo* $z = \rho.(\cos\theta + i\sin\theta)$ *temos* $z^n = \rho^n.(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

[3] A demonstração deste teorema pode ser acompanhada em Iezzi, 2005, p.35

2.13 RADICIAÇÃO

2.13.1 Raiz Enésima

Dado um número complexo z a raiz enésima de z, denotada por $\sqrt[n]{z}$, é o número complexo z_k tal que $(z_k)^n = z$, ou seja, $\sqrt[n]{z} = z_k \Leftrightarrow (z_k)^n = z$.

2.13.2 Segunda Fórmula de Moivre

Teorema 2.13.2.1. [4] *Dado o número complexo $z = \rho.(\cos\theta + i\sin\theta)$ e o número natural $n(n > 1)$, então existem n raízes enésimas de z que são da forma*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

onde $\sqrt[n]{\rho} \in {\mathbb{R}^*}_+$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Prova 2.13.2.1. *Seja $\sqrt[n]{z} = z_k$ com $z_k = r(\cos w + i\sin w)$, onde r é um número real positivo.*

$\sqrt[n]{z} = z_k \Leftrightarrow (z_k)^n = z$

então, $(z_k)^n = r^n.(\cos nw + i\sin nw) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

Devemos ter então,

$r^n = \rho \Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$

$\cos nw = \cos\theta$ *e* $\sin nw = \cos\theta \Rightarrow nw = \theta + 2k\pi \Rightarrow w = \dfrac{\theta}{n} + k.\dfrac{2\pi}{n}$, *onde k varia de 0 a $n-1$ gerando as n raízes enésimas de z.*

2.13.3 Interpretação Geométrica

Todo número complexo z, não nulo, admite n raízes enésimas distintas, sendo que todas têm mesmo módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$ e argumentos principais que formam uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $\dfrac{\theta}{n}$ e a razão é $\dfrac{2\pi}{n}$.

Os afixos das n raízes enésimas de z dividem a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $r = \sqrt[n]{|z|}$ em n partes congruentes de tal forma que:

- se $n = 2$ então são pontos diametralmente oposto
- se $n > 2$ então são vértices de um polígono regular inscrito na circunferência citada.

Entendemos que grande parte do que foi exposto nesse Capítulo 2 é de alguma forma sabido pela comunidade de professores de matemática. Entretanto, tínhamos três objetivos com

[4] Uma demonstração mais detalhada pode ser acompanhada em Iezzi, 2005, p.40-41

a compilação aqui apresentada: (i) levantar aspectos históricos da construção conceitual do campo dos complexos; (ii) auxiliar aos interessados no assunto - Números Complexos - fornecendo-lhes uma apresentação completa e sucinta da temática; e (iii) propor uma sequência da temática que foi seguida por nós em sala de aula e que pode ser, dessa forma, utilizada em outras salas de aulas.

Assim sendo, partimos para o Capítulo 3 apresentando nosso percurso de pesquisa que foi alicerçado em nossa experiência à frente da sala de aula, no nosso conhecimento do assunto e no desejo de contribuir com pesquisas acerca do ensino e da aprendizagem em sala de aula de matemática.

3 A PESQUISA: OPÇÕES METODOLÓGICAS

3.1 CONTEXTO

O local escolhido para a pesquisa foi a Escola Preparatória de Cadetes do Ar (EPCAR), onde trabalho há 18 anos lecionando Matemática sempre para alunos do 3º ano do Ensino Médio. Localizada em Barbacena, Minas Gerais, é, atualmente, uma tradicional instituição de ensino da Força Aérea Brasileira que recebe jovens do sexo masculino de diversas regiões do Brasil, entre 14 e 20 anos de idade. Os alunos ingressam nessa Escola através de concurso público para cursarem o primeiro ano do Ensino Médio. É a única escola do Brasil que, por meio do Curso Preparatório de Cadetes do Ar (CPCAR), além de proporcionar o Ensino Médio, tem a missão de preparar os alunos para iniciarem o Curso de Formação de Oficiais Aviadores (CFOAv) na Academia da Força Aérea (AFA) em Pirassununga, São Paulo.

A organização escolar na EPCAR é peculiar. Há que se fazer uma descrição do contexto para compreensão do que se chama rotina diária de um aluno do CPCAR.

Ao serem aprovados no concurso de ingresso na EPCAR, os alunos são classificados em ordem decrescente de notas nas avaliações intelectuais que fazem: matemática, português, inglês e redação. Os alunos do primeiro ano são classificados a partir daí, por suas médias finais no concurso de ingresso para o CPCAR. Nas séries seguintes, os alunos são distribuídos de acordo com sua classificação pela média global anual da série imediatamente anterior. As turmas têm número de integrantes que varia de 25 a 30 em cada uma e são denominadas com as identificações: Alfa, Bravo, Charlie, Delta, Echo, Fox, Golf e Hotel, que são termos comuns na linguagem do piloto.

O número total de alunos em cada série determina o número de turmas nas quais os alunos são distribuídos pela classificação. O aluno que tem a maior média global é chamado de 01 (lê-se zero um) e fica na turma Alfa, o que tem a média imediatamente inferior é o 02 e fica na turma Bravo e, assim por diante, seguindo a ordem decrescente de classificação. No caso de haver oito turmas, o 08 estará na turma Hotel, o 09 na turma Hotel, o 10, na turma Golf, o 11, na Fox, e o processo continua até que alcance o aluno que possui a menor média global do esquadrão. A Tabela 1, p.33, demonstra essa distribuição por turmas para o caso da série na qual foi realizada a investigação.

Cada série é chamada de esquadrão. Os alunos, ao ingressarem na EPCAR, escolhem um nome que identificará o esquadrão ao qual pertencem até a formatura. No ano de 2013 a EPCAR contava com 568 alunos, sendo 173 no primeiro ano, 185 no segundo ano e 210 no terceiro ano cujos esquadrões eram identificados, respectivamente, como “Manda Bala”, “Ares” e “Sirius”.

Os alunos, sob o regime de internato, cursam os três anos do Ensino Médio no

TURMAS							
Alfa	Bravo	Charlie	Delta	Echo	Fox	Golf	Hotel
01	02	03	04	05	06	07	08
16	15	14	13	12	11	10	09
17	18	19	20	21	22	23	24
...	...	...	...	...	...	...	...
177	178	179	180	181	182	183	184
192	191	190	189	188	187	186	185
193	194	195	196	197	198	199	200
208	207	206	205	204	203	202	201
209	210						

Tabela 1 – Exemplo da distribuição dos alunos por turmas, de acordo com sua classificação.

CPCAR, tendo uma rotina onde recebem também instrução militar além da instrução científica. Aqueles que concluem o CPCAR com o aproveitamento devido têm direito ao Certificado de Conclusão do Ensino Médio. Além disso, os que conseguirem cumprir as condições de saúde, as psicológicas e as de condicionamento físico competente, solicitadas para o ingresso na AFA, têm direito a se matricular no CFOAv.

Sua rotina diária, de segunda a sexta-feira, inicia-se com o toque de alvorada às seis horas e os alunos no espaço de tempo de 40 minutos tomam seu café da manhã e se preparam para a formatura matutina que antecede a instrução científica que corresponde a seis horários de aulas de 45 minutos cada, a partir das sete horas. Eles têm, a partir das 12h e 45min, uma hora de almoço e uma parada militar que acontece antes ou após o almoço, conforme o dia da semana, e que dura cerca de 45 minutos.

Após o lanche da tarde, dedicam uma hora para o treinamento físico, das 16 às 17 horas com possível complementação de 60 minutos, caso seja necessário. Além disso, faz parte de sua rotina semanal duas aulas de 45 minutos de instrução militar e outros horários à disposição do Comandante do Esquadrão, do Comandante do Corpo de Alunos, bem como do Chefe da Divisão de Ensino. Após o jantar, que é servido às 18 horas, sobra-lhes um tempo livre de 55 minutos e depois dedicam uma hora para estudo obrigatório e monitoria. Em seguida, uma ceia é servida a eles e fica estabelecido silêncio absoluto após as 22 horas. Eventuais atendimentos médicos e odontológicos são feitos nos intervalos dessas atividades.

Essa rotina expressiva dos alunos fez com que refletíssemos sobre as dificuldades que poderíamos encontrar no transcorrer da pesquisa. Se por um lado há muitos alunos nivelados, porque ao entrar na EPCAR fizeram uma prova que os seleciona, por outro lado, na verdade não lhes sobra muito tempo para atividades fora da sala de aula. Então, antes de iniciar o processo, fizemos uma avaliação prévia do que poderia interferir no resultado e pensamos que outros obstáculos poderiam surgir. Tivemos receio de que os alunos não entendessem o nosso objetivo e não concordassem em fazer a pesquisa ou de que, apesar de aceitarem, não tivessem compromisso com o trabalho pela falta de maturidade ou por não dominarem o assunto.

3.2 PARTICIPANTES

Apesar dos temores, continuamos nosso planejamento. No ano de 2013, lecionava para duas turmas do 3º esquadrão na EPCAR. Assim, como já tinha o contato em sala de aula, iniciado há cerca de três meses, resolvi convidar esses alunos para participar deste trabalho. Dessa maneira, os participantes foram os cinquenta e três alunos que compunham as turmas Fox e Golf do 3º ano que concluiriam o Ensino Médio em 2013. São alunos que fizeram parte do Esquadrão Sirius, com idade de 16 a 20 anos, e que ingressaram na EPCAR em 2011. Na oportunidade do concurso de seleção desses alunos, notou-se uma concorrência de quarenta candidatos por vaga. Vale a pena acrescentar que entre esses alunos que participaram deste trabalho de pesquisa, seis da turma Fox e três da turma Golf, já haviam cursado o 3º ano do Ensino Médio antes de ingresso na EPCAR.

Em primeiro lugar, quando já tínhamos um projeto de pesquisa e uma sequência da rotina de investigação a ser proposta aos alunos, eu os apresentei ao comandante da Escola explicando a razão de nosso trabalho. Na oportunidade, ele permitiu que esse estudo fosse feito com alguns alunos do 3º ano do Ensino Médio da EPCAR. Ressaltei que as atividades não modificariam, nem prejudicariam a rotina dos alunos nem mesmo nas aulas de Matemática e que os dados coletados seriam de uso exclusivo da pesquisa e não seriam divulgados ou usados para avaliação do comportamento ou atitude dos envolvidos. A autorização do Comandante foi formalizada em modelo próprio conforme Apêndice F.

3.3 SEQUÊNCIA DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS COM OS ALUNOS

Como já foi dito anteriormente, além de pesquisadora, exercia a função de professora das turmas escolhidas para a pesquisa. Assim, na sequência dos conteúdos previstos para a série, foram incluídas algumas atividades de intervenção na rotina das aulas.

De acordo com os PCNs (1998, p.46), entre outras competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, estão previstas a produção de textos matemáticos adequados, a utilização adequada de recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação bem como exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.

Assim sendo, aplicamos algumas atividades concomitantemente com a abordagem da teoria dos Números Complexos para podermos compreender a posição dos alunos diante de um conteúdo que seria novidade na Matemática do 3º ano do Ensino Médio. Pensamos dessa forma, pois imaginávamos que se tratasse de um assunto não bem recebido por grande parte dos alunos, tendo como base nossa experiência de anos anteriores.

Passamos, então, a descrever a sequência das atividades.

3.3.1 Primeira Atividade

No dia 22 de abril de 2013, reuni-me com os alunos e primeiramente falei do trabalho pretendido, deixando claro que a participação de cada um era voluntária e que ninguém seria penalizado por se omitir. Os alunos maiores de idade assinaram o termo de consentimento e os menores de idade providenciaram a autorização junto de seus pais ou responsáveis legais. Os modelos desses termos se encontram nos Apêndices D e E desse relato.

Esclareci que os resultados da pesquisa seriam comunicados através de nomes fictícios para os envolvidos, que teriam, assim, suas identidades preservadas.

3.3.2 Segunda Atividade

Em um segundo momento, no dia 6 de maio de 2013, os alunos responderam ao primeiro questionário, que teve aceitação de todos os integrantes das duas turmas que estavam presentes na sala de aula totalizando 51 alunos, naquela data. O modelo desse instrumento encontra-se no Apêndice B desse relato.

3.3.3 Terceira Atividade

Na quarta-feira, dia 8 de maio de 2013, iniciei a primeira aula teórica acerca dos números complexos com a seguinte pergunta: “Qual a expectativa de vocês ao iniciarmos a teoria dos números complexos?”

Essa aula foi gravada com auxílio de filmadora. Apesar disso, não foi possível identificar todos os que responderam, pois algumas vezes os alunos falaram de forma rápida, talvez na empolgação de participarem, ou usavam um tom de voz muito baixo, talvez por timidez. Entretanto, ouvi claramente as expressões: “Complexo só no nome!”, “Complexo porque é difícil!” e “Nunca vi isto antes!”.

Algumas outras respostas foram mais expressivas e os autores puderam ser identificados não só pela filmagem, mas também por meio das anotações em diário de campo que aconteceram tão logo as aulas acabassem ou no exato momento ocorrido conforme o andamento da aula. Nesse relato, os alunos serão nomeados por A1, A2, A3 e assim sucessivamente com o intuito de preservar suas identidades. Usaremos “A?” para designar os alunos não identificados por suas falas.

Citamos, a seguir, alguns exemplos de respostas que conseguimos:

A1:"É difícil!"

A2:"Eu nunca vi esses números não... a matéria do trimestre anterior eu já tinha estudado. Por um lado é positivo porque é novo, por outro lado vou ter que dar o gás."

A3:"A minha expectativa é de entender a aplicabilidade dos números complexos porque para mim, raiz quadrada de número negativo, até o momento, não existe."

A4:"Professora, eu posso escrever um número real com a parte imaginária sem ser nula?"

Alguém diz:

A?:"Não. Ele vai ser complexo".

Partimos então para a Teoria dos Números Complexos mostrando a abordagem histórica competente. Apresentamos como exemplo uma equação de 2º grau com discriminante negativo. Seguimos, portanto, as orientações dos PCNs (2008, p.71) segundo as quais "Os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$".

Apresentamos aos alunos os números complexos, mas deixamos claro que "foram as equações de 3º grau e não as de 2º grau que ocasionaram todo o desenvolvimento teórico havido naquela área, trabalho que durou mais de dois séculos a partir da ideia pioneira de Bombelli." (GARBI, 2006, p.53)

Falamos da evolução dos conjuntos numéricos citando a necessidade de ampliação tendo em vista a propriedade de fechamento das operações inversas, mas esclarecemos que historicamente o desenvolvimento dos conjuntos numéricos não ocorreu necessariamente na mesma ordem.

Enfatizamos que o conjunto dos números reais está imerso no sistema dos números complexos e isso serviu de alerta, pois a maioria da turma havia se equivocado ao responder às perguntas número sete e número oito do primeiro questionário que pediam para marcar entre os números citados, aqueles que eram números complexos.

Procuramos continuar a aula sem falar muito diretamente do instrumento de coleta utilizado, mas ao comentarmos de modo geral sobre as questões número nove e número dez que se referiam à resolução de equações percebemos que os itens "e" $(x - 1)^3 = 0$ e "f" $x^3 - 1 = 0$ foram objeto de muita polêmica e nos ajudaram na condução do assunto, conforme descrevemos no Capítulo 4 que se refere à análise dos resultados obtidos nos questionários.

Abordamos as leis dos pares ordenados e suas implicações na formalização da teoria dos números complexos e terminamos a aula indagando sobre o conteúdo que estava sendo apresentado, se tinha atendido à expectativa da turma.

Ouvimos respostas bem diretas tais como: “Interessante.” “Tranquilo.” “É Álgebra.” “É novo.”

Mas, numa das turmas, ao terminar a aula, o A5 questiona:

A5:“Não consigo entender porque $i^2 = -1$”

Mostramos o produto dos pares ordenados $(0,1).(0,1) = -1$, mas ele continua:

A5: “Por esta forma eu entendi, mas i^2 não é igual a $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{+1} = 1$?”

Dissemos que não e ele ainda argumentou:

A5: “Mas $\sqrt{2}.\sqrt{3}$ não é igual a $\sqrt{6}$?”

Sentimos que era um momento importante para reforçar que a igualdade anterior é válida apenas quando há um produto de números reais e que o par ordenado $(0,1)$ corresponde à unidade imaginária, não sendo assim um número real.

De repente, escutamos o A6:

A6: “Qual a utilidade dos Números Complexos?”

Aproveitamos a oportunidade para esclarecer que fora proposital aquela maneira de conduzir a aula sem falar da aplicabilidade, pois a intenção era que os próprios alunos pesquisassem sobre esse assunto e que repassassem a informação para a turma. Como tinham acabado de sair de uma semana de provas e estavam ainda muito cansados, sugerimos um prazo para que pudessem se preparar para a apresentação.

Reforçamos que o trabalho de pesquisa seria voluntário e que nenhum aluno seria penalizado por não querer participar. Alguns aceitaram e ficou combinado que no dia 20 de maio eles trariam o resultado podendo, para tal, usar recursos que estivessem ao seu alcance buscando fontes diversas tais como a Biblioteca da Escola, a internet etc.

Antes de sairmos da sala, o A3 argumentou:

A3: “Eu sei que existe raiz quadrada de número negativo, mas isto é como se fosse um conceito que me foi imposto e que ainda não existe. Na minha concepção eu não consigo imaginar a aplicabilidade dos Números Complexos. Raiz quadrada de menos quatro, por exemplo, para mim não existe. Eu sei que tem porque foi imposto. Não consigo ver ainda este lado dos Números Complexos”.

Sugerimos que ele aguardasse o desenvolvimento das aulas e que se empenhasse na pesquisa para que também pudesse apresentar seu trabalho no dia 20 de maio.

3.3.4 Quarta Atividade

Na data combinada, aconteceu a apresentação do trabalho por oito alunos sendo cinco de uma turma e três da outra. Transcrevemos, a seguir, alguns dos detalhes que foram registrados em vídeo. Deixamos os demais para o Capítulo 4 de Análise e Discussão:

A3: “Um negócio que achei legal na internet é que Joukowski utilizou a teoria dos Números Complexos e construiu o perfil de uma asa de avião. Aí usando o princípio de Bernoulli e a Teoria das funções complexas, que eu não faço nem ideia, usou uma fórmula que permite calcular as força de levantamento responsável pela sustentação da asa do avião. Os Números Complexos permitem uma explicação matemática do voo.”

A7: “A minha pesquisa foi semelhante, mas não entendi direito.”

A4: “Eu pesquisei e achei que os Números Complexos são úteis no eletromagnetismo porque a gente pode associar os Números Complexos a um par ordenado de números reais. E no caso do eletromagnetismo vai ficar um número associado à parte elétrica e o outro ao magnetismo.”

A9: “Gostaria de saber a parte com vetores como vai ser usada. Eu não entendi se vai dar alguma propriedade, se simplesmente vai dar algum dado diferente do vetor, como módulo, ou coisa assim. Em que vai influenciar. Eu li também que com a rotação eu tenho como construir figuras geométricas.”

Ao final da apresentação da aplicabilidade, nas duas turmas nós enfatizamos como foi importante a resposta dos alunos para o trabalho que tínhamos sugerido e que para nós fora um momento diferente na sala de aula que esperávamos ter gerado crescimento para todos. Cumprimentamos os que participaram diretamente pelo empenho demonstrado e valorizamos a interação dos demais alunos naquele momento. Aproveitamos para investigar se os alunos tinham uma ideia diferente dos Números Complexos, se eles julgavam ser importante estudar Números Complexos e surgiram respostas variadas:

A?: “É complicado, ainda é muito abstrato.”

A8: “Quando vem alguma coisa que a gente nem pode imaginar talvez o resultado seja complicado.”

A13: “Vai de encontro com a própria definição de raiz quadrada que a gente tem... um número vezes ele mesmo não tem como dar um número negativo.”

A10: “Sim. A importância é aprender agora para não chegar cru num curso.”

Perguntamos, então, se eles conseguiam enxergar a utilidade dos Números Complexos e alguns se manifestaram:

A3: “É abstrato. Consigo enxergar até na utilidade, mas dentro não dá para enxergar. Não consigo imaginar.”

A14: “A gente sabe, por exemplo, na Aerodinâmica. Mas não consigo ver como se usam Números Complexos.”

A10: “A aplicabilidade a gente não vai perceber tão explicitamente agora.”

A15: “Oh, Professora, sai da teoria porque a gente só vê aplicabilidade no quadro, a gente não vê isso aqui na prática. Não é só o que vamos ver neste trimestre e acabou. A gente vai precisar disto lá fora.”

Apesar da dificuldade apresentada por alguns, continuamos perguntando: “Mas isto gerou em você motivação para o aprendizado?” Para essa pergunta, ouvimos:

A?: “Com certeza!”

A?: “Eu acho importante.”

A?: “É importante no 3º grau.”

A16: “Gerou porque, para mim, ia passar como algo inútil neste trimestre e agora vejo que não.”

A10: “No Ensino Médio a gente não vai usar tudo isto nunca, mas foi bom para despertar que a gente vai usar isso lá fora, na Faculdade, na AFA. E isto foi bom para direcionar a atenção.”

A11: “Sim porque eu pensei complexo como uma coisa imaginária. Eu falava; Ah, se é imaginário por que eu preciso saber? Não vai ter utilidade para mim. Vai ser uma coisa inexistente. Vou ficar imaginando, mas isto não existe. Eu vi que é aplicável. Eu vi que há aplicações disto.”

A15: “Sim, claro. Ainda mais que se falou que tem a ver com o que a gente quer, com o que a gente almeja; está muito ligado à aviação.”

A17: “O estudo desses Números Complexos vai aperfeiçoar nossa Álgebra.”

A16: “Sinceramente eu achava que número complexo, raiz quadrada de número negativo, literalmente não existia. Só que agora vejo que tem aplicações.”

Comentamos que era natural que eles ainda não tivessem todo o entendimento do processo e sugerimos que, à medida que a teoria fosse apresentada, eles procurassem ler mais sobre o assunto, que estudassem participando ativamente das aulas, o que poderia lhes trazer o esclarecimento de muitas das dúvidas que persistissem. Salientamos que muitas das aplicações citadas pelos colegas não poderiam ser esclarecidas plenamente naquele instante e, com certeza, nem até o final do Ensino Médio, citando como exemplo, a aplicação no eletromagnetismo que só ocorre em alguns cursos do 3º grau.

Falamos que nossa meta era pedir a um Professor de Física da EPCAR que nos ajudasse, mostrando esse aspecto através de alguma atividade em sala de aula. Reforçamos que os conceitos de Física apresentados que não foram bem compreendidos ou que tivessem eventuais imprecisões seriam trabalhados na oportunidade. Encerramos dizendo que no transcorrer das aulas, abordaríamos a associação de um número complexo a um vetor, esclarecendo dessa forma a dúvida do aluno A9 e que os outros conceitos matemáticos citados por outros alunos seriam revistos também.

Percebemos que o processo estava apenas iniciando e que seria uma temeridade tentar obter um resultado do trabalho naquele instante. Na verdade, precisávamos de muito mais tempo para que a resposta a nossa pesquisa acontecesse, pois ela seria construída através das aulas subsequentes sobre o assunto.

As falas dos alunos suscitaram em nós o desejo de um diagnóstico mais aprofundado de suas percepções nas aulas de Números Complexos. Dessa forma, organizamos um segundo questionário que deveria ser aplicado posteriormente quando os alunos estivessem mais tranquilos e pudessem manifestar sua opinião posterior à formalização dos conceitos pertinentes ao conjunto dos Números Complexos.

Após a apresentação dos alunos, analisamos as perguntas que havíamos feito em sala de aula. Elas nos serviram de base para a confecção desse novo referencial de coleta de dados permitindo, assim, que cada depoimento ficasse registrado por escrito.

Sabemos que, na proposta das Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio, há uma recomendação de que parte da educação básica para o Ensino Médio seja desenvolvida de forma contextualizada e interdisciplinar. Assim, o planejamento e a abordagem dos conteúdos do ensino e as situações de aprendizagem devem promover as diversas interações entre as várias disciplinas do currículo.

As afinidades de algumas disciplinas que se identificam, tais como a Matemática e a Física, por exemplo, oferecem uma oportunidade para que professores de mesma turma façam o planejamento de um ensino interdisciplinar.

Então, procuramos um colega da área de Física, e falamos sobre nossa pesquisa e indagamos se não seria possível que ele promovesse um momento interdisciplinar com as duas turmas. Relatamos tudo o que já havíamos feito, inclusive as apresentações dos alunos onde foram abordados alguns conceitos de Física.

Conscientes da importância da participação desse colega em nossa pesquisa, falamos que era nossa vontade que ele não ficasse no anonimato, se fosse possível. Ele concordou em ser identificado assinando o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, conforme Apêndice A.

Pontuamos que talvez pudessem apresentar alguma incoerência conceitual. Manifestada assim nossa preocupação, ele se dispôs a participar criando um momento no qual, além de apresentar a aplicabilidade dos Números Complexos na Física, ele reforçaria alguns conceitos básicos do eletromagnetismo, podendo esclarecer dúvidas ou impropriedades que porventura tivessem ocorrido na fala dos alunos no dia em que fizeram a apresentação.

3.3.5 Quinta Atividade

No dia 24 de outubro, o Professor Ribeiro, coordenador da área de Física, deu uma aula sobre eletromagnetismo salientando para as turmas que os cálculos feitos com a ajuda dos Números Complexos tornam-se mais simples. Isso gerou um interesse dos alunos que interagiram e observamos que alguns participaram com respostas usando a teoria dos Números Complexos desenvolvida em sala.

Antes de terminar, ele falou sobre a aplicabilidade citada nas apresentações reforçando que os números complexos estão presentes no voo, na Física Quântica e citou também a teoria do caos.

3.3.6 Sexta Atividade

Ela foi aplicada no dia 25 de outubro, sexta-feira, e foi nosso último encontro com as duas turmas em sala de aula. Na oportunidade, primeiramente comentamos que nossas atividades estavam chegando ao final e abordamos nosso trabalho de pesquisa explicando que, apesar de estar bem adiantado, ainda dependia do depoimento de todos os alunos após o conteúdo de Números Complexos ter sido todo ministrado. Para que pudéssemos concluir nossa pesquisa, falamos que seria importante a aplicação de um 2º questionário, que está citado no Apêndice C que nos daria subsídio para tal. Ressaltamos que cada aluno não deveria se sentir obrigado a participar, mas que precisávamos de seriedade e compromisso, pois só dessa forma saberíamos se nosso objetivo havia sido atingido. Tivemos receio de que nem todos aderissem, mas os 53 alunos presentes nas salas naquele momento participaram encerrando a sequência de atividades com os alunos das turmas Fox e Golf do esquadrão Sirius.

Na Tabela 2, apresentamos, cronologicamente, as atividades propostas durante a pesquisa, bem como os sujeitos aos quais essas atividades foram submetidas.

Data	**Atividade**	**Forma de Apresentação**
22/04/2013	Apresentação da proposta aos alunos e apresentação do termo de consentimento livre e esclarecido	Impresso entregue aos alunos na sala de aula e recolhido, ao final, daqueles maiores de 18 anos. Os demais levaram para que seus pais autorizassem.

06/05/2013	Apresentação aos alunos da proposta de atividade de pesquisa	Oral, em sala de aula, durante a primeira aula do conteúdo de números complexos. Nesse mesmo dia, antes de qualquer apresentação formal de nossa parte acerca de Números Complexos, aplicamos o que chamamos de 1º questionário. Este estava impresso e continha 12 questões, sendo 8 discursivas e 4 objetivas.
08/05/2013	Primeira aula teórica de Números Complexos	Aula expositiva com recurso de lousa. Foi gravada em vídeo.
20/05/2013	Apresentação dos alunos	Os alunos se fizeram valer de sua pesquisa particular. Alguns levaram papel e outros se valeram da oralidade. Um dos alunos valeu-se de explicação no quadro. Outro imprimiu um desenho em preto e branco e passou para a turma ver. Todo esse momento foi registrado em vídeo e posteriormente transcrito.
24/10/2013	Aula ministrada pelo professor Ribeiro da área de Física	Expositiva, em sala de aula, com auxílio de computador para a apresentação das ideias.
25/10/2013	Aplicação do segundo questionário	Durante a última aula do semestre, em sala, conduzimos oralmente a leitura das questões que eram respondidas na sequência pelos alunos em formato impresso contendo 8 questões discursivas

Tabela 2 – Cronograma das atividades de preparação da pesquisa e coleta de dados

3.4 DESCRIÇÕES DOS INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Uma vez que já comentamos como foi a sequência das atividades que envolveram os alunos do 3º ano que participaram de nossa pesquisa, passamos, então, a descrever os instrumentos utilizados nas aulas e a intencionalidade em cada um deles.

3.4.1 Primeiro Questionário

Para que pudéssemos obter as informações necessárias ao nosso estudo, idealizamos uma atividade em forma de questionário que seria aplicado em momento que favorecesse o desenvolver da investigação com os alunos. Este instrumento se encontra nos apêndices desse relato.

Nesse questionário, tínhamos a intenção de saber o que o aluno do 3º ano do Ensino Médio pensava a respeito dos Números Complexos antes mesmo que tal conteúdo lhe fosse apresentado formalmente. Como na EPCAR é possível haver alunos que já tenham cursado tal série, procuramos nos acautelar e uma das perguntas foi no sentido de saber se era a primeira vez que o aluno iria cursar o 3º ano do Ensino Médio.

Procuramos investigar sobre possíveis dificuldades com a Matemática em geral e indagamos acerca da compreensão no que vem sendo ensinado nas aulas dessa disciplina.

Pedimos que citassem os conjuntos numéricos com uma breve descrição de cada um. Partimos então para questões que envolviam os Números Complexos sendo que uma delas consistia em assinalar os números que o aluno julgava que pertencessem ao Conjunto dos Números Complexos.

Apresentamos sete equações para que fossem resolvidas, algumas sem solução no conjunto dos Números Reais, e solicitamos que em cada caso fosse feita uma associação do grau da equação com o número de raízes que ele havia encontrado. Direcionamos uma questão sobre a aplicação de números que fosse além dos Números Complexos. Para terminar, pedimos que assinalassem o grau de nervosismo experimentado em determinadas situações, vivenciadas na sala de aula, referentes à Matemática, de modo especial na busca da aplicabilidade de determinado assunto em matemática.

3.4.2 Pesquisa Feita pelos Alunos

Pensando em trabalhar aspectos preconizados nos PCNs, iniciamos nossa primeira aula sobre os números complexos. Abordamos o aspecto histórico, a resolução de equações de grau 2 e 3, além de definições e propriedades inerentes ao conjunto dos Números Complexos.

Ao final, sugerimos aos alunos que fizessem uma pesquisa sobre a aplicabilidade dos Números Complexos. Na ocasião, pedimos que se preparassem para que cada um que desejasse fizesse uma apresentação do seu trabalho para a turma.

Esclarecemos que ninguém deveria se sentir obrigado a fazer a pesquisa, pois não representaria acréscimo de nota para quem aderisse, nem penalidade para os que não quisessem. Desse modo, o aluno que se dispusesse a participar teria maior compromisso e vimos nessa atitude uma possibilidade de buscar motivação para os processos de ensino e de aprendizagem.

3.4.3 Segundo Questionário

Após todo o conteúdo de Números Complexos já ter sido ministrado, nosso objetivo era saber como os alunos se apropriaram dos conceitos já formalizados relativos a esse assunto, pesquisando e identificando motivações e desmotivações vivenciadas nesse processo.

Iniciamos o questionário perguntando diretamente sobre a opinião em relação ao assunto antes do conteúdo ser ministrado e se depois havia ocorrido alguma mudança.

Procuramos saber se o conhecimento da aplicabilidade dos números complexos, antes mesmo de ter maior base conceitual do assunto, despertou mais interesse do aluno em aprender o conteúdo. Tendo em vista a aplicabilidade ter sido pesquisada e apresentada por alguns colegas, investigamos se esse fato fez diferença para o processo de aprendizagem. Pedimos que manifestassem sua opinião sobre a contextualização de questões sobre o assunto, embora em outros conteúdos da Matemática essa característica seja mais forte. Solicitamos que opinassem sobre a parte da história da matemática que acompanhou a exposição das aulas, se trouxe algum benefício para atingir o objetivo.

Numa das questões, abordamos a prática da interdisciplinaridade apresentada pelo Professor de Física e quisemos saber como foi essa experiência na visão dos alunos. Para finalizar, apresentamos um quadro onde eles deveriam explicitar, caso existissem, características positivas e características negativas da abordagem que foi feita para iniciar o conteúdo de números complexos.

Organizado dessa forma, esse questionário foi aplicado ao final do semestre quando todo o conteúdo já tinha sido ministrado, depois do momento interdisciplinar que foi dirigido pelo Professor Ribeiro da área da Física.

3.5 ORGANIZAÇÃO DOS DADOS PARA ANÁLISE

Após a coleta dos dados, iniciamos o processo de organização de todos os materiais produzidos. Inicialmente, assistimos ao vídeo da aula em que os alunos fizeram suas apresentações acerca do que pesquisaram sobre os números complexos. Depois, tabulamos as respostas dos questionários aplicados aos alunos para identificarmos aquelas que pudessem ser agrupadas para nossa futura análise.

Posteriormente, revimos o vídeo, porém com o foco em transcrever as falas para averiguar a aproximação ou o distanciamento de nosso objetivo de pesquisa: estudar como os alunos da última série do Ensino Médio têm compreensão sobre os Números Complexos antes e depois da formalização dos conceitos referentes ao assunto.

No caso das falas dos alunos, tanto no vídeo quanto nas respostas aos questionários, primeiramente transcrevemos literalmente como os alunos falaram e, posteriormente, fizemos algumas adequações à norma culta da língua portuguesa. Algumas falas dos alunos foram omitidas propositalmente com o intuito de se tornarem menores e mais claras. A identificação de tais partes será feita pelo uso de [...].

No próximo capítulo, damos ênfase à análise e à discussão dos três momentos de coleta de dados, quais sejam: primeiro questionário, pesquisa feita pelos alunos e o segundo questionário.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO

Nesse capítulo, apresentamos uma análise e interpretação de quatro momentos que entendemos como relevantes em nossa investigação: (1) as respostas ao primeiro questionário; (2) a aula teórica sobre números complexos; (3) a apresentação dos alunos; e (4) as respostas ao segundo questionário.

4.1 RESPOSTAS AO PRIMEIRO QUESTIONÁRIO

Após aplicarmos o primeiro questionário, fizemos uma transcrição das respostas para que, em cada questão, pudéssemos agrupá-las por natureza. Os dados que permitiram foram classificados quantitativamente e representados em gráficos de setores, o que nos permitiu uma visão mais clara dos percentuais apresentados. Nas questões em que isso não foi possível, apresentamos algumas respostas que selecionamos por se aproximarem ou se distanciarem dos objetivos de investigação.

Apesar de serem cinquenta e três alunos nas duas turmas participantes; no dia da aplicação, estavam presentes cinquenta e um alunos. Em virtude da rotina exaustiva dos alunos colaboradores, decidimos por não aplicar aos dois faltosos, uma vez que isso deveria ser feito em horário extraturno. Essa atitude é condizente com a proposta de intervir o mínimo nas atividades rotineiras dos alunos.

A seguir apresentamos os resultados tabulados nesse instrumento.

Primeira Questão: Primeira vez que vai cursar o 3º ano do Ensino Médio?

No nosso entendimento, esta questão foi de suma importância na condução dos trabalhos tanto na sala de aula, no lidar como professora de matemática, quanto nos

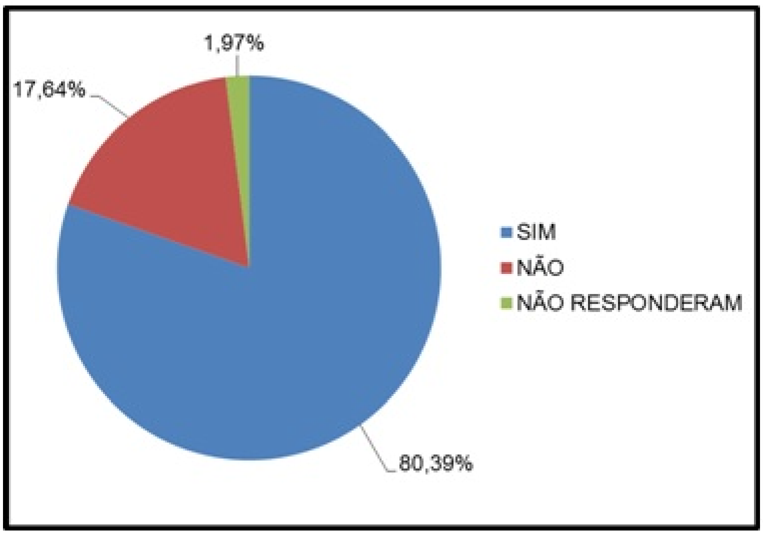

Figura 3 – Respostas dos alunos à primeira questão do primeiro questionário instrumentos de coleta de dados, quando sobressaía o nosso lado de pesquisadora. A relevância dessa pergunta, especialmente no contexto da EPCAR, dá-se pelo elevado índice de alunos que já têm concluído o Ensino Médio anteriormente à sua entrada para o CPCAR. Uma vez que só é possível a entrada para cursar todo o Ensino Médio na EPCAR, há alunos que tentam por várias vezes a seleção de ingresso e só o alcançam quando já estão avançados nos estudos escolares.

Acontece que há um choque de realidade da escola anterior, ainda no meio civil, e da que é proposta na EPCAR. Temos o costume de aprofundar os conteúdos da Matemática do Ensino Médio. Por vezes somos questionados pelos alunos inclusive, da importância do assunto ministrado e sobre a ligação que haverá com estudos subsequentes na AFA ou em outros cursos.

No caso das duas turmas para as quais essa questão foi aplicada, temos um percentual acima de 15% de alunos que já cursaram tal série.

Segunda Questão: Durante toda a sua vida escolar, você tem aulas de Matemática. Se você tivesse chance de poder escolher as disciplinas para cursar, você escolheria Matemática? SIM ou NÃO. Por quê?

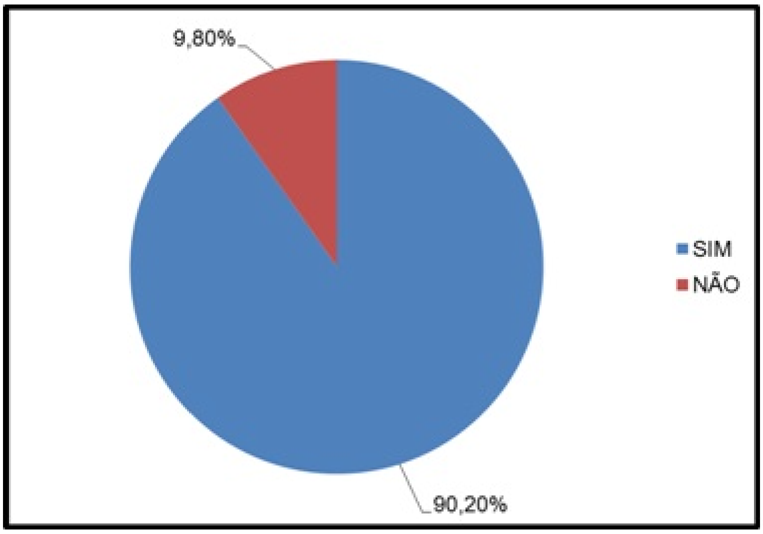

Figura 4 – Respostas dos alunos à segunda questão do primeiro questionário

Como justificativas à resposta, encontramos as seguintes respostas, as quais apresentamos na Tabela 3:

Justificativas	Quantidades
Acham que é uma disciplina importante	22
Gostam da disciplina	11
Gostam e têm facilidade	5
Gostam e acham importante	4
Têm facilidade	2
Acha importante e tem facilidade	1
Gosta, tem facilidade e acha importante	1
Total	46

Tabela 3 – Tabulação das justificativas "SIM" à segunda questão do primeiro questionário

Nós observamos que cerca de 60% dos alunos que disseram SIM abordaram a importância da disciplina em sua vida. Dentre aquelas que encontramos, destacamos (Tabela 4):

Aluno	Algumas justificativas "SIM" à segunda questão do primeiro questionário
A41	Sim. Considero importante o conteúdo. Ajuda no desenvolvimento intelectual.
A10	Sim. Escolheria cursar Matemática, pois essa disciplina é uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento cognitivo e intelectual do indivíduo.
A42	Sim. Eu escolheria Matemática para cursar, pois é uma matéria essencial na nossa vida, além de desenvolver nosso raciocínio lógico e cognitivo.
A11	Sim. Escolheria Matemática, pois tenho afinidade com as ciências exatas, pretendo cursar engenharia e vejo na Matemática uma importante ferramenta para desenvolver o raciocínio lógico.
A46	Sim. É uma disciplina que sempre tive dificuldade, porém aprendi a administrar essa dificuldade, passando assim a gostar da matéria.
A23	Eu gosto da disciplina em questão, pois apresenta caráter desafiador e isto me estimula a querer aprender.
A31	Sim. A matemática possui aplicações práticas, frequentes, em nosso cotidiano.

Tabela 4 – Justificativas do "SIM" de alguns alunos à segunda questão do primeiro questionário

Para aqueles que responderam **NÃO** (Tabela 5):

Justificativas	Quantidades
Não se identificam com a disciplina	2
Não têm interesse	2
Apesar de gostar, não escolheria por ter dificuldade	1
Total	5

Tabela 5 – Tabulação das justificativas “NÃO” à segunda questão do primeiro questionário

Como apenas 5 alunos se manifestaram de forma negativa quanto a escolha da Matemática, destacamos no quadro (Tabela 6) a seguir suas justificativas.

Aluno	Justificativas “NÃO” à segunda questão do primeiro questionário
A16	Não. Apesar de gostar das exatas, sempre tive dificuldades em aprender.
A15	Não. Acho outras disciplinas mais interessantes.
A49	Não. Prefiro a parte humana (história).
A21	Não. Não gostaria de cursar Matemática por que existem outras áreas que me interessam mais.
A40	Não. Por não ser uma disciplina que necessite de uma busca pelo entendimento mais apurado e social, e sim uma forma sistematizada e de conceitos quase imutáveis.

Tabela 6 – Justificativas do “NÃO” dos alunos à segunda questão do primeiro questionário

Pela experiência do ouvir contar de colegas de profissão que não lecionam na EPCAR, entendemos que essa questão que permite ao aluno manifestar-se quanto a sua preferência ou não pela matemática é significativa de duas formas. Por um lado, porque não nos estranha, a nós professores de matemática, expressões que traduzem o pouco interesse pela matemática e aqui podemos ver exemplos dessas. Por outro, porque, conforme outras pesquisas já realizadas no âmbito da EPCAR (RODRIGUES, 2010; CANTARUTI, 2012), expressões de um gosto muito forte pela matemática ou mesmo uma identificação com tal conteúdo são quase que naturais. As respostas a essa segunda questão nos dão uma noção do universo estudantil com o qual trabalhamos durante o CPCAR.

Terceira Questão: O quanto você compreende o que está sendo ensinado nas aulas de Matemática?

A análise feita com base no gosto pela área é semelhante àquela que temos na interpretação da terceira questão desse instrumento. Em geral os alunos dizem compreender com satisfação aquilo que lhes é ensinado em sala de aula.

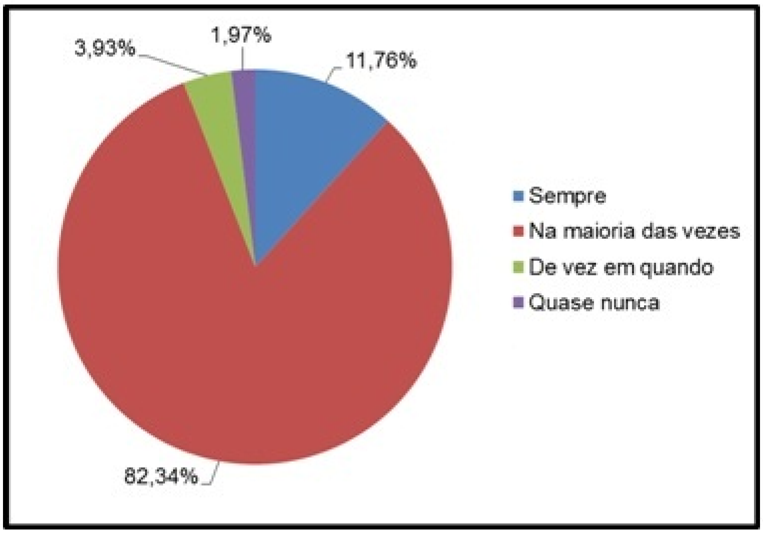

Figura 5 – Respostas dos alunos à terceira questão do primeiro questionário

Quarta Questão: Quais são os conjuntos numéricos? Com suas palavras, descreva cada um.

Para nós, fica muito claro que temos dois grupos de alunos em sala de aula que podem de alguma forma indicar uma tendência na resposta a essa questão. A priori, entendíamos que aqueles alunos que já haviam cursado o 3º ano do Ensino Médio apresentariam uma visão mais completa acerca do estudo dos conjuntos numéricos para o nível ao qual estavam.

Além desse aspecto, por termos dado as necessárias e devidas explicações aos alunos, referentes ao domínio da pesquisa, inclusive mencionando nosso objetivo, tínhamos receio de que uma linha tendenciosa aparecesse em suas respostas. Acreditávamos que nossa intervenção alteraria de forma significativa as respostas apresentadas por eles a esse questionamento. Para nós, nossa atitude de falar de nossas intenções teria despertado nos alunos conhecimentos anteriores que já haviam sido explorados em sala de aula em outras ocasiões. Pensávamos, em suma, que as respostas a essa questão não fossem diferir daquilo que lhes foi apresentado em sala, anteriormente, em séries distintas daquela na qual estavam em 2013.

Para nossa surpresa, o resultado foi um pouco diferente. Dessa forma, registramos os resultados a seguir, para o que mais nos chamou a atenção:

1. 47,06% (24 alunos) dos alunos abordaram até o conjunto dos números complexos, mas apenas 17,65% (9 alunos) fizeram a descrição correta dos conjuntos;

2. 52,94% (27 alunos) mencionaram até o conjunto dos números reais, mas somente 9,80% (5 alunos) fizeram a descrição corretamente.

Observamos ainda que 13,73% (7 alunos) confundiram números irracionais com números imaginários, citando, por exemplo, $\sqrt{-2}$ e $i\sqrt{2}$ como pertencentes ao conjunto dos números irracionais. Outros 15,68% (8 alunos) classificaram as dízimas periódicas como irracionais e as dízimas não periódicas como números racionais.

A quantificação apontada pode indicar tanto lacunas no processo de ensino quanto no processo de aprendizagem, ou ainda, que tal estudo é de certa forma um campo complexo, sem a intenção de fazer um trocadilho com o conjunto numérico de nosso interesse.

Aprofundar no estudo sobre a visão do aluno acerca dos conjuntos numéricos pode auxiliar na identificação correta dos elementos desses conjuntos. Além disso, pode ser um referencial de metodologias alternativas que aprimorem os processos de ensino e de aprendizagem.

Quinta Questão: O que você caracterizaria como "Estudos dos Números Complexos"?

Assim como nos surpreendemos com o resultado geral na pergunta anterior, quando questionamos acerca da caracterização dos números complexos não foi muito diferente. Registramos os resultados abaixo (Tabela 7), para todas as respostas, agrupando-as por semelhança:

Justificativas	Quantidades
Números além dos reais, não comuns, não vistos, não reais, que fogem à regra normal, que fogem à reta real, novo conjunto, exige estudo mais avançado	17
Resultado de expressão que não pertence a $\mathbb{R}$, números não reais, raiz quadrada de número negativo, raízes negativas	16
Estudo de números complexos	7
Uso de unidade imaginária	4
Desconheço	4
Estudo dos números irracionais, estudos dos números reais	2
Sem resposta	1
Total	51

Tabela 7 – Tabulação das justificativas dos alunos à quinta questão do primeiro questionário

Essa pergunta mostra um pouco da resistência que os alunos apresentam para o estudo de números complexos, ao afirmarem que há necessidade de conhecimento mais avançado que envolve toda a Matemática. Observamos também o quanto o assunto ainda está associado à complexidade, quando, por exemplo, citam os números complexos como números não comuns, números que não existem que fogem à regra normal e por isso são complexos, uma transformação no que já estudaram até hoje.

A seguir (Tabela 8), apresentamos algumas justificativas dadas pelos alunos de ambas as turmas inquiridas acerca de sua caracterização do estudo dos números complexos:

Aluno	Justificativas
A51	A área que tenta explicar / estudar os números complexos, que na minha concepção, são aqueles que fogem à regra normal, por isso, complexo.
A31	Estudo dos números imaginários, que não cabem a nossa percepção imediata.
A34	O resultado de uma expressão que não pode ser representado no campo dos reais.
A35	É o estudo do resultado das raízes negativas.
A37	Números negativos dentro de raízes quadradas.
A14	Caracterizaria o "Estudo dos Números Complexos" como a compreensão de um novo conjunto numérico, que traz consigo novas utilidades para a matemática, como a radiciação de números negativos. A meu ver, existe uma abstração matemática.
A11	Estudo de números complexos seria o estudo dos números negativos com radical de índice par.
A10	Estudo de um grupo de números que, além dos números reais, engloba outros números.
A12	Como fogem da reta real, deve-se definir um novo plano que comporte tais números; operações fundamentais com complexos e demais aplicações matemáticas.

Tabela 8 – Algumas justificativas apresentadas pelos alunos para a quinta questão do primeiro questionário

Percebemos uma resposta evasiva dos seis alunos que declararam não saber, desconhecer o assunto ou que não responderam. Abaixo apresentamos suas respostas (Tabela 9):

Aluno	Justificativas
A21	Não tenho ideia do que seja. Apenas sei que existe.
A40	Desconheço tais números.
A13	Não sei.
A27	Não respondeu.
A28	Eu não sei.

A3	Ainda não sei definir.

Tabela 9 – Justificativas apresentadas pelos alunos para a quinta questão do primeiro questionário por seu desconhecimento do assunto

Sexta Questão: Em que situações de sala de aula você já ouviu a expressão "Números Complexos"?

Com o intuito de melhor expormos algumas respostas que nos chamaram a atenção para esta sexta questão do primeiro questionário, decidimos agrupar os assuntos tratados por semelhanças. Assim, formamos os grupos de "**A**" a "**E**" além do grupo **T1**:

Grupo A: Alunos que associavam número complexo à solução de uma equação do segundo grau com discriminante negativo;

Grupo B: Alunos que associavam número complexo ao resultado de uma raiz de índice par de um número negativo;

Grupo C: Alunos que associavam número complexo à procura de raízes de uma equação;

Grupo D: Alunos que ouviram dizer de outros colegas que se trata de um assunto complicado;

Grupo E: Alunos que associavam número complexo a aplicação do assunto; e

Grupo T1: Alunos que já tinham cursado a 3ª série do Ensino Médio e que, portanto, julgavam conhecer os números complexos.

Para apresentação dessas respostas, confeccionamos tabelas nos quais apresentamos algumas falas dos alunos em cada grupo, seguidos de nossos comentários.

Aluno	Justificativas
A3	Em situações quando na equação do segundo grau encontro o valor de Δ (delta), negativo.
A36	Quando na resolução de uma equação do 2º grau, acha-se uma raiz quadrada de um número negativo.
A8	Quando não há solução para uma questão no conjunto R, por exemplo: $x^2 = -7$.
A37	Quando a raiz de alguma equação do 2º grau dava negativa.
A38	Quando o professor resolve uma equação de segundo grau no quadro e a resposta dá uma raiz quadrada negativa e alguém grita "usa o i".
A14	Em situações que se torna necessário obter a raiz de números negativos, por exemplo, quando se tem uma equação do 2º grau com delta negativo.
A24	Quando se trata de equações e se acha a raiz quadrada de um número negativo.

A15	Quando aparecia algum número elevado ao quadrado igualasse a um número negativo.

Tabela 10 – Grupo A: Alunos associavam número complexo à solução de uma equação do segundo grau com discriminante negativo

Percebemos ser muito forte a interpretação da origem dos números complexos para resolução de uma equação de grau 2. Em sala, pudemos comentar tal fato durante as aulas teóricas, nas quais também era utilizado o recurso da história da matemática.

Aluno	Justificativas
A23	Na raiz de um número negativo (raiz quadrada) e o professor disse ser impossível.
A1	Na ocorrência da raiz de índice par de um número negativo.
A39	Quando perguntava qual a raiz de -2.
A4	Situações em que são citados números negativos dentro de um radical, fato que dentro do conjunto dos números reais é impossível.
A53	Números que parecem não ter solução. Exemplo:$\sqrt{-2}$.
A49	Quando se fala de raiz quadrada de número negativo.

Tabela 11 – Grupo B: Alunos que associavam número complexo ao resultado de uma raiz de índice par de um número negativo

Entendemos que de alguma forma essa percepção dos alunos desse grupo estreitamente ligada àquela dos alunos do grupo anterior. Parece-nos que há uma origem comum no pensamento.

Aluno	Justificativas
A11	Já ouvi a expressão "números complexos" em situações nas quais a resposta "aparentava" pertencer a um conjunto vazio. No estudo das equações e polinômios com números aparentemente impossíveis, tal como $\sqrt{-2}$.
A46	Quando uma equação não possui solução real, dizemos que ela terá uma nos números complexos.
A48	Quando algum resultado não está dentro do conjunto dos números reais.

Tabela 12 – Grupo C: Alunos que associavam número complexo à procura de raízes de uma equação

Possivelmente, estes alunos também tinham uma crença muito forte de que a origem dos números complexos se deu para resolução de uma equação de grau 2, entretanto conheciam um pouco mais e sabiam da extensão dos números complexos para solução de equações de qualquer grau. Tal fato também foi amplamente comentado durante as aulas sobre os números complexos.

Aluno	Justificativas
A21	Quem já estudou me disse que se trata de um assunto trabalhoso.

Tabela 13 – Grupo D: Alunos que ouviram dizer de outros colegas que se trata de um assunto complicado

Apesar de termos apenas um aluno que associou, possivelmente, a palavra complexo a trabalhoso, por nossa experiência em sala de aula, é constante ouvirmos tal expressão.

Aluno	Justificativas
A9	Apenas no estudo da Física, mais precisamente em Elétrica.
A20	Apenas em resoluções de problemas, ao desconsiderar resultados por serem raízes com índice par de números negativos.

Tabela 14 – Grupo E: Alunos que associavam número complexo a aplicação do assunto

Essa associação foi amplamente trabalhada na sala de aula, especialmente em dois momentos: na atividade na qual os alunos apresentaram suas pesquisas acerca da aplicabilidade dos números complexos e na aula interdisciplinar apresentada pelo professor de física.

Aluno	Justificativas
A27	Apenas quando estudei os números complexos.
A30	Na aula de matemática, quando cursei o 3º ano pela primeira vez.
A35	Por já ter estudado os complexos, quando ouvi a expressão "Números Complexos" lembrava-me logo do i.

Tabela 15 – Grupo T1: Alunos que já tinham cursado a 3ª série do Ensino Médio e que, portanto, julgavam conhecer os números complexos

Esse grupo de alunos, no contexto de nossa pesquisa, merece destaque, pois como já dissemos, é um grupo sempre presente na EPCAR aqueles alunos que já haviam concluído o Ensino Médio antes de sua entrada na escola. Entendemos que se tornam um grupo à parte por, de alguma forma, já terem passado por aulas nas quais já foi feita uma apresentação formal dos conteúdos que abordamos nessa pesquisa.

Sétima Questão: Dos números abaixo, marque aqueles que você julga que são "Números Complexos".

Fornecemos abaixo os percentuais das opções dos alunos para cada item:

Ordem	Número	Percentual de acerto
a)	π	$7,84\%$
b)	i	$70,59\%$
c)	$\sqrt{2}$	$5,88\%$
d)	$\sqrt{4}$	$1,96\%$
e)	$\sqrt{-2}$	$98,04\%$
f)	$\sqrt{-4}$	$98,04\%$
g)	$log_3 2$	$5,88\%$
h)	e	$7,84\%$
i)	$x^2 = 2$	$3,92\%$
j)	$x^2 = 4$	$1,96\%$
k)	$x^2 = -2$	$98,04\%$
l)	$x^2 = -4$	$98,04\%$
m)	e^π	$15,68\%$
n)	$-3i$	$82,35\%$
o)	$x^3 = 2$	$5,88\%$
p)	$x^3 = 4$	$5,88\%$
q)	$x^3 = -2$	$17,64\%$
r)	$x^3 = -4$	$15,68\%$
s)	0	$3,92\%$

Tabela 16 – Tabulação das respostas à sétima questão do primeiro questionário

Nossas observações:

- Apenas um aluno assinalou todos e que os demais fizeram as seguintes opções;
- 50 alunos, quase 100%, marcaram $x^2 = -2$, $x^2 = -4$,$\sqrt{-2}$ e $\sqrt{-4}$;
- 36 alunos, cerca de 70%, marcaram "i";
- 42 alunos, cerca de 80%, marcaram "$-3i$";
- O fato de quase 100% da turma ter assinalado $x^2 = -2$, $x^2 = -4$,$\sqrt{-2}$ e $\sqrt{-4}$ reforça nossa observação dentro de sala de aula de que o contato dos alunos com números complexos aconteceu praticamente nas equações de segundo grau com discriminante negativo e nas raízes de números negativos em que o radical tem índice par.

Oitava Questão: Dos números abaixo, marque aqueles que você julga que pertencem ao "Conjunto dos Números Complexos".

Fornecemos abaixo os percentuais da opção dos alunos para cada item:

Ordem	Número	Percentual de acerto
a)	π	$13,72\%$
b)	i	$76,47\%$
c)	$\sqrt{2}$	$9,80\%$
d)	$\sqrt{4}$	$7,84\%$
e)	$\sqrt{-2}$	$94,11\%$
f)	$\sqrt{-4}$	$94,11\%$
g)	$log_3 2$	$11,76\%$
h)	e	$17,64\%$
i)	$x^2 = 2$	$9,80\%$
j)	$x^2 = 4$	$7,84\%$
k)	$x^2 = -2$	$94,11\%$
l)	$x^2 = -4$	$92,15\%$
m)	e^{π}	$19,60\%$
n)	$-3i$	$84,35\%$
o)	$x^3 = 2$	$11,76\%$
p)	$x^3 = 4$	$11,76\%$
q)	$x^3 = -2$	$25,49\%$
r)	$x^3 = -4$	$23,52\%$
s)	0	$13,72\%$

Tabela 17 – Tabulação das respostas à oitava questão do primeiro questionário

Observamos que nesta questão 4 alunos assinalaram todos os itens.

As respostas nos mostram que a ideia da imersão dos números reais no conjunto dos números complexos ainda não está assimilada pelos alunos, nesse momento, embora alguns tenham citado que todos pertencem ao conjunto dos números complexos.

Nona Questão: Resolva as equações

Observamos que a maioria dos alunos acertou as soluções das equações apresentadas nos itens "a", "b", "c" e "d" e o item "g" mostrou exatamente quem já tinha alguma noção de números complexos, mas a dificuldade maior apresentada foi com os itens "e" e "f", como discriminamos a seguir:

Ordem	Equação	Percentual de acerto
a)	$3x - \sqrt{7} = \pi$	$92,15\%$
b)	$(3x+1).(3x-1) - 9(x+1)^2 = 0$	$75,55\%$
c)	$x^2 - 6x + 9 = 0$	$96,08\%$
d)	$(x+1).(x-1) = 2$	$82,35\%$
g)	$x^2 - 2x + 5 = 0$	80%

Tabela 18 – Tabulação das respostas à nona questão do primeiro questionário (1)

Ordem	Equação	Comentário
e)	$(x-1)^3 = 0$	$92,15\%$ (46 alunos) resolveram a questão sendo que: (i) 3 registraram 1 e -1 como raízes; e (ii) 43 identificaram apenas 1 como raiz, mas somente 5 conseguiram reconhecê-la como raiz de multiplicidade 3.
f)	$x^3 - 1 = 0$	Nenhum aluno encontrou as três raízes desta equação. Dos 50 alunos que resolveram, 2 alunos encontraram as raízes 1 e -1 e os outros 48 alunos, encontraram 1 como raiz mas apenas um aluno registrou que deveria aplicar Briot-Ruffini para achar as demais, mas não se lembrava.

Tabela 19 – Tabulação das respostas à nona questão do primeiro questionário (2)

Décima Questão: Sabe-se que o grau de uma equação determina o número e raízes da equação. Diante desta afirmativa como você explicaria sua resolução nos itens de “a” a “g”?

Observamos que foram muitos alunos que disseram no item f que o conjunto solução era composto por três raízes iguais a 1.

Percebemos, ainda, que a ideia de associar o número de raízes com o grau da equação ainda foge ao pensamento dos alunos.

Outras observações:

- 4 alunos entenderam e fizeram comentários corretos;
- 13 alunos não entenderam a questão;
- 22 alunos resolveram, mas erraram apenas o item “e” e/ou o item “f”;

- 2 alunos deixaram a questão em branco; e
- 10 alunos tiveram erros diversos.

Décima Primeira Questão: Você já ouviu ou pensou alguma aplicação de números que fossem além dos "Números Reais"? Em caso positivo, qual?

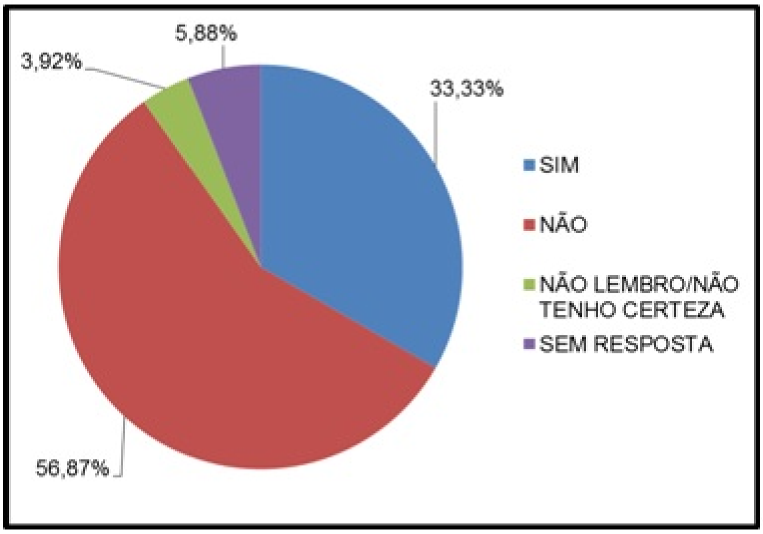

Figura 6 – Respostas dos alunos à décima primeira questão do primeiro questionário

Percebemos que mais da metade dos alunos nunca tinha ouvido falar em aplicação de números que fosse além dos "números reais".

Entre os 17 que responderam sim, a maioria abordou simplesmente "aplicação dos números complexos" ou para resolver equações do 2^o grau com o discriminante negativo. Apenas dois citaram a eletricidade e um falou da aplicação na aviação. Registramos depoimentos de alguns alunos.

O que nos chamou a atenção foi que nem todos que já haviam estudado números complexos sabiam de sua aplicabilidade.

Aluno	Justificativas
A31	Já ouvi falar sobre a aplicação na aviação, mas não sei explicar, apenas tenho ciência de que há essa aplicação.
A11	Para o caso teórico, já pensei em equações cuja solução vá além dos números reais, porém nunca consegui achar utilização prática para esses números o que os torna aparentemente inúteis.
A35	Apesar de já ter estudado os complexos não sei ainda sua utilidade prática

Tabela 20 – Algumas aplicações dos números complexos apontadas na décima primeira questão do primeiro questionário por alunos que já haviam concluído o Ensino Médio

Outro fato que nos saltou aos olhos foi a existência da ligação de números complexos, talvez com assuntos complexos:

Aluno	Justificativas
A36	Sim, a utilização em cálculos de maior complexidade.
A25	Sim, no estudo de π.

Tabela 21 – Algumas aplicações dos números complexos apontadas na décima primeira questão do primeiro questionário

Décima Segunda Questão: Para cada item a seguir, assinale o que melhor se adapta a você.

Fornecemos abaixo os percentuais das opções dos alunos para cada item. Em negrito, destacamos o maior percentual:

	Não fico nervoso	Fico um pouco nervoso	Fico muito nervoso	Fico muito, muito nervoso
Iniciar um novo tópico de Matemática.	**80,39%**	11,77%	1,96%	0,00%
Estudar um assunto sozinho que o professor não explicou ainda.	**70,59%**	21,57%	1,96%	0,00%
Ouvir o professor de Matemática em classe.	**80,39%**	9,81%	3,92%	0,00%
Ser questionado da aplicabilidade de determinado assunto em matemática.	37,26%	**49,02%**	5,88%	1,96%
Ter que buscar aplicabilidade de determinado assunto em matemática.	**62,75%**	23,53%	3,92%	3,92%

Tabela 22 – Tabulação das respostas à décima segunda questão do primeiro questionário

Na análise das respostas tivemos 5,88% (três alunos) que não responderam a questão e observamos a turma de modo geral bem tranquila em relação aos tópicos abordados a não ser a busca da aplicabilidade de determinado assunto em matemática onde só 19 alunos ficam tranquilos.

O que nos chamou a atenção de modo especial foi o fato de 14 alunos terem marcado apenas a primeira coluna, ou seja, declararam que não ficam nervosos em nenhuma das situações abordadas, entretanto sentem-se um pouco nervosos quando há a possibilidade de serem questionados sobre a aplicabilidade de determinado assunto em matemática.

4.2 A AULA TEÓRICA SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS

Aplicado o primeiro instrumento de coleta de dados, iniciamos o conteúdo de números complexos. Esse foi o primeiro momento que tivemos com os participantes, em sala de aula, para falarmos formalmente sobre o tema. Como ficou tudo registrado através da filmagem, foi possível assistir às partes que nos interessaram por diversas vezes, o que nos permitiu o registro de detalhes que nos ajudaram sobremaneira nas conclusões.

No início dessa atividade, os alunos quiseram logo saber a respeito do primeiro questionário que havia sido aplicado. Embora tivéssemos feito uma leitura rápida das respostas, explicamos que, em dois dias, não era possível que nós tivéssemos conhecimento de tudo o que eles haviam escrito e procuramos não tocar nesse assunto, pelo menos, naquele momento.

Fizemos então a pergunta:

“Qual a expectativa de vocês ao iniciarmos a teoria dos Números Complexos?”

E ouvimos:

A?: “Complexo porque é difícil”

A1: “É difícil”

A4: “É imaginário”

A3: “A minha expectativa é de entender a aplicabilidade dos números complexos por que para mim, raiz quadrada de número negativo, até o momento não existe.”

Logo de início percebemos que tanto a preocupação com uma possível dificuldade do assunto como uma expectativa sobre a aplicabilidade dos Números Complexos estavam presentes no pensamento de alguns alunos.

Como de costume, já havíamos planejado a introdução dos conceitos abordando também os aspectos históricos e assim o fizemos. Foi um bom procedimento porque a História da Matemática mostra a resistência que os matemáticos tiveram, ao longo de muitos anos, em aceitar os números imaginários, o que talvez explicasse o porquê da resistência que os alunos geralmente têm em aprender Números Complexos.

Prosseguimos a aula usando como exemplo a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$, cujo conjunto solução que era vazio dentro dos números reais, com a introdução do conjunto dos números complexos, agora passava a ter os elementos $1 + 2i$ e $1 - 2i$, apresentando desta forma os números imaginários para a turma.

Seguimos as orientações dos PCNs segundo os quais “Os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$".

Entretanto deixamos claro que o desenvolvimento teórico dos Números Complexos não aconteceu a partir das equações de 2º grau e sim dos estudos feitos no sentido de encontrar uma solução para as equações de 3º grau, chamando a atenção para o equívoco às vezes cometido por autores de livros didáticos, quando afirmam o contrário.

Falamos dos conjuntos numéricos citando a necessidade de ampliação, tendo em vista a propriedade de fechamento das operações inversas, mas esclarecemos que historicamente o desenvolvimento desses conjuntos não ocorreu necessariamente na mesma ordem.

Tendo em mente a leitura rápida das respostas do primeiro questionário, que nos permitiu perceber a dificuldade que eles tiveram na questão quatro, sentimos que era o momento para descrever os conjuntos numéricos pedidos, reforçando os conceitos. Abordamos o fato de haver uma imersão do conjunto dos números reais no sistema dos números complexos, tendo em vista que poucos alunos haviam acertado as questões de números sete e oito do mesmo questionário que pediam para identificar os números que eram complexos e os que pertenciam ao conjunto $\mathbb{C}$, respectivamente.

Um momento expressivo dessa aula foi quando comentamos sobre a resolução das equações $(x-1)^3 = 0$ e $x^3 - 1 = 0$ e percebemos como os alunos não têm a ideia de como associar o número de raízes com o grau de uma equação dada. Quando perguntamos qual o conjunto solução de $x^3 - 1 = 0$, vários alunos sugeriram que o conjunto solução era o mesmo para as duas equações e registramos as falas:

A?: "1 é raiz."

A1: "Aplica Briot-Ruffini."

Nós alegamos que esse recurso não poderia ser utilizado, pois tal conteúdo ainda seria ministrado no semestre seguinte e pedimos: "Quem sugere uma alternativa?"

A?: "$x^3 - 1$ tem três raízes iguais a 1 também."

Nós então insistimos: "Mas então $(x-1)^3 = x^3 - 1$?"

A9: "Transforma a segunda em um cubo perfeito."

Argumentamos: "Não tem como. Como seria então?"

A4: "Tem como desmembrar. Quem é que lembra?"

Na verdade, ele estava sugerindo a fatoração que acabou sendo feita no quadro por ele mesmo, com a ajuda da turma, e o conjunto solução foi finalmente encontrado.

Na outra turma também apenas um aluno conseguiu achar a solução desta equação, usando a fatoração. Foi o A12, que foi ao quadro e resolveu por conta própria e despertou comentários da turma:

A?: “Ah, A12!”

A?: “Rumo ao ITA!”

Esse acontecido nos faz refletir como fica incompleto o estudo das Equações Polinomiais sem o conteúdo de Números Complexos com suas propriedades, que nem sempre faz parte do currículo das escolas.

Em seguida, abordamos as leis dos pares ordenados e suas implicações na formalização da teoria dos números complexos mostrando a representação algébrica como mais prática para as operações em $\mathbb{C}$.

Na sequência, um aluno questionou:

A18: “Como se coloca isto no plano cartesiano?”

Aproveitamos a oportunidade para falar que os números complexos ficavam bem representados no Plano de Argand-Gauss constituído de eixos ortogonais, um eixo na horizontal onde ficavam os pares ordenados que correspondiam aos números reais e outro eixo na vertical onde, se excluíssemos o ponto $(0,0)$, ficariam os números chamados de imaginários puros.

Escutamos alguém perguntar:

A?: “Mas e o zero?”

A10: “Não, zero é real.”

A?: “Mas zero não está nos dois eixos?”

A6: “É do tipo entuba[1].”

Explicamos que os pontos da reta dos números reais correspondiam aos pares ordenados em que o segundo número era nulo e zero correspondia ao par $(0,0)$. Aproveitamos para falar sobre a ausência de ordem dos elementos no conjunto $\mathbb{C}$, quando escutamos o aluno:

A19: “Existe negativo, real negativo, imaginário negativo?”

E, aproveitando dessa dúvida, indagamos: O que é um número negativo para você?

A19: “É um número menor que zero.”

Comentamos que os números reais estão dispostos em uma reta e o zero serve como referência. Pedimos que pensassem nos números complexos que estão dispostos em um plano, como determinaríamos uma ordem? Falamos a respeito da ordenação de números numa reta e num plano, mostrando para os alunos que, em $\mathbb{C}$, não há ordem [2].

---

[1] Na linguagem do aluno CPCAR existem termos que somente eles conhecem e “entuba” significa “aceitar sem entender.”

[2] “Nenhuma relação de ordem torna o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos um corpo ordenado”. Para um conhecimento mais aprofundado:*Meu Professor de Matemática e outras Histórias*(LIMA, 1991, p.173)

Em seguida, numa das turmas, ao terminar a aula, o A5 questiona:

A5: “Não consigo entender porque $i^2 = -1$”

Mostramos o produto dos pares ordenados $(0, 1) \times (0, 1) = -1$, mas ele continua:

A5: “Por esta forma eu entendi, mas i^2 não é igual a $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{+1} = 1$?”

Dissemos que não e ele ainda argumentou:

A5: “Mas $\sqrt{2}.\sqrt{3}$ não é igual a $\sqrt{6}$?”

Sentimos que era um momento importante para reforçar que a igualdade anterior é válida apenas quando há um produto de números reais e que o par ordenado $(0, 1)$ corresponde à unidade imaginária, não sendo assim um número real .

De repente, escutamos o A6:

A6: “Qual a utilidade dos Números Complexos?”

Aproveitamos a oportunidade para esclarecer que fora proposital aquela maneira de conduzir a aula sem falar da aplicabilidade, pois a intenção era que os próprios alunos pesquisassem sobre esse assunto e que repassassem a informação para a turma.

Nesse momento, ficou combinado que alguns alunos, que se dispuseram a fazer a pesquisa, fariam a apresentação no dia 20 de maio de 2013.

Nas aulas seguintes, demos continuidade ao conteúdo dos números complexos seguindo uma ordem de apresentação tal como aquela que indicamos no capítulo 2 dessa dissertação.

4.3 A APRESENTAÇÃO DOS ALUNOS

Observamos que houve diferentes maneiras na condução da apresentação dos alunos nas duas turmas.

Registramos, a seguir, as falas dos alunos de ambas as turmas envolvidas que participaram diretamente da apresentação sobre a aplicabilidade dos números complexos e a impressão geral do que ocorreu.

4.3.1 Alunos da Turma Fox

Na primeira turma, após eu ter perguntado quem tinha feito a pesquisa, o Aluno A4 comentou antes de começar as apresentações:

A4: “Professora, não é o caso da gente falar, assim, com muita explicação. Cada um fala um pouco.”

Eu, querendo deixá-los bem à vontade, sugeri que eles poderiam falar da própria carteira, o que ficaria mais descontraído. Preocupada com a organização, eu só pedi que quando alguém quisesse fazer algum comentário durante as apresentações seria permitido bastando que, para tal, levantasse a mão.

Na sequência, todos dessa turma optaram por falar assentados em seus lugares, nas próprias carteiras. Embora demonstrassem compromisso com o material que tinham conseguido na internet, foram bem discretos usando às vezes um tom de voz mais baixo. Talvez isso tenha acontecido por estarem sendo filmados, o que pode ter lhes causado certa inibição, ou até mesmo receio de se exporem. O primeiro a falar foi o A3:

> A3: Um negócio que achei legal na internet é que Joukowski utilizou a teoria dos Números Complexos e construiu o perfil de uma asa de avião. Aí usando o princípio de Bernoulli e a Teoria das funções complexas, que eu não faço nem ideia, usou uma fórmula que permite calcular as força de levantamento responsável pela sustentação da asa do avião. Os números complexos permitem uma explicação matemática do voo.
>
> A7: A minha pesquisa foi semelhante, mas não entendi direito.
>
> A4: Eu pesquisei e achei que os números complexos são úteis no eletromagnetismo porque a gente pode associar os números complexos a um par ordenado de números reais. E no caso do eletromagnetismo vai ficar um número associado à parte elétrica e o outro ao magnetismo.
>
> A8: No Curso de Engenharia Elétrica os cálculos são feitos com números complexos. Quem vai estudar Engenharia Elétrica vai usar bem os números complexos.
>
> A4: Nessa área eles vão ser usados de forma direta.
>
> A9: Gostaria de saber a parte com vetores como vai ser usada. Eu não entendi se vai dar alguma propriedade, se simplesmente vai dar algum dado diferente do vetor, como módulo, ou coisa assim. Em que vai influenciar.
>
> A9: Eu li também que com a rotação eu tenho como construir figuras geométricas.
>
> A8: Fiz uma pesquisa e achei exatamente o contrário: que o surgimento dos números complexos se fez através de uma equação do 2º grau.

Aproveitamos a oportunidade para esclarecer esse equívoco muitas vezes cometido até mesmo por autores em livros didáticos.

4.3.2 Alunos da Turma Golf

Na segunda turma, o primeiro aluno a se manifestar foi à frente da turma e, com empolgação, discorreu sobre o tema. Ele fez a leitura de um texto de apoio que trouxe impresso. No final, ele mostrou aos colegas algumas fotos que complementaram o que havia dito. O aluno seguinte também foi à frente da turma e falou sem inibição. Para encerrar, o terceiro participante fez uso do quadro e pincel, chegando a construir um gráfico à medida que relatava o que havia pesquisado.

> A10: "Eu achei uma coisa que se encaixa bastante no nosso dia a dia."

Em seguida faz uma leitura do texto:

> A10: Os números complexos são muito úteis na Aerodinâmica: Joukowski, utilizando transformações geométricas, construiu uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião (aerofólio de Joukowski) e, usando o princípio de Bernoulli e a teoria das funções complexas deduziu a fórmula que permite calcular a força de levantamento responsável pela sustentação do voo de um avião. Os números complexos permitiram uma explicação matemática para o voo. Daí em diante o progresso aeronáutico foi rápido.

> A10: Outro ponto que a gente tem estudado é a parte da eletricidade: Na eletrônica e na eletricidade, a análise de circuitos de corrente alternada é feita com a ajuda de números complexos. Grandezas como a impedância (em ohms) e a potência aparente (em volt - ampere) são exemplos de quantidades complexas.

> A10: E a última foi uma curiosidade mesmo, algo que eu não faço nem ideia do que seja, mas parece ser bem interessante: os procedimentos (algoritmos) recursivos (iterativos ou recorrentes) no plano complexo criaram na maioria das vezes figuras invariantes por escala denominadas fractais. Estas formas geométricas de dimensão fracionária servem como ferramenta para descrever as formas irregulares da superfície da Terra; modelar fenômenos aparentemente imprevisíveis (teoria do caos), de natureza meteorológica, astronômica, econômica, biológica, etc. Os cientistas Von Koch e Júlia foram os pioneiros no nascimento dessa nova matemática.

> A10: É o que eu tinha que falar. Eu não imaginava tinha alguma coisa a ver com aerodinâmica e que se encaixa com nosso contexto aqui. E também na parte de estudo que a gente tem visto que é eletricidade, eu não imaginava, mas também se encaixa. Agora essa aqui, a da teoria do caos e formas irregulares da superfície da Terra, eu achei bem curioso e as imagens também são chamativas. Eu achei que era válido passar para a turma.

> A11: Bem, eu não trouxe a pesquisa impressa não, mas eu fiz e achei que tem relação, que é muito parecida com a do A10.

> A11: Por exemplo, a parte que ele falou da eletricidade, a aplicação que eu achei foi do eletromagnetismo porque vai ter no estudo duas variáveis; vai ter a força elétrica e a força magnética. Então nos números complexos, como estamos usando duas variáveis “x” e “y”, faz uma analogia no estudo de eletromagnetismo.

> A11: Eu achei também que na Física Quântica tem aplicação dos números complexos. Talvez tenha a ver coma teoria do caos que o A10 citou.

> A11: Eu achei aplicação também no estudo das derivadas, e derivada juntamente com integral tem aplicação na Engenharia e vai ter aplicação no nosso dia a dia. Quase tudo que é produzido inicialmente, todas as construções, a indústria aeronáutica, por exemplo, que é mais aplicada ao nosso quotidiano, envolve Engenharia e vai ser baseada nesses cálculos.

> A11: Eu também achei que o estudo dos complexos foi uma nova perspectiva do estudo do conjunto dos reais. Por exemplo, é como se fosse uma passagem de duas dimensões para três dimensões. Talvez a gente não veja aplicação assim imediata, mas por a gente ter uma nova perspectiva, um conhecimento expandido, fica mais fácil de entender o conjunto dos reais.

> A12: No livro eu achei uma aplicação interessante que é usar o número complexo em trigonometria. Por exemplo, se você pega o plano de Argand-Gauss você vai definir o complexo como sendo um vetor porque é muito semelhante. Você tem o vetor $\vec{AB}$ e todo mundo sabe que a definição do vetor $\vec{AB}$ é $B - A$, onde $B = z$ e $A = (0, 0)$.

> A12: Você tem também o vetorzinho $z - w$ e $|z - w| = d(z, w)$.

> A12: Como isso pode ser aplicado? O ângulo pode ser descoberto facilmente através da relação $\cos\theta + i\sin\theta = cis\theta.e^i$. Quando você integra isso aqui, você chega numa fórmula que tem aplicações, principalmente, no Cálculo Vetorial.

Para nós, foi um momento inédito durante nossa experiência docente, pois nunca tínhamos conduzido uma aula usando como recurso a fala dos alunos nem mesmo abrindo espaço para que eles mostrassem pesquisas próprias sobre determinado assunto. Entendemos, desde então, que tínhamos ganhado um auxiliar no processo de ensino para compartilharmos o que pretendíamos ensinar. Isso, de modo geral, proporcionou um momento de descontração, no qual houve uma boa aceitação por parte dos alunos. As impressões deles acerca desse momento foram registradas posteriormente com o auxílio do segundo questionário e serão apropriadamente relatadas nesse texto nos itens 4.3 e 4.4.

Assim que terminou cada apresentação, comentamos que voltaríamos a falar sobre os assuntos trazidos por eles nas aulas seguintes reforçando conceitos matemáticos que talvez não tivessem sido bem compreendidos por todos, tanto por aqueles que pesquisaram quanto pelos que ficaram como que espectadores na apresentação. Ressaltamos que é normal acontecer alguma imprecisão.

Quanto à parte da Física, esclarecemos que pediríamos a um professor da disciplina para fazer a abordagem em um momento interdisciplinar, para assim esclarecer qualquer dúvida que tivesse ficado durante as apresentações.

Concluímos que os eventuais deslizes dos alunos que ocorreram no discorrer sobre o assunto não serviram de obstáculo para que a noção da aplicabilidade fosse repassada aos colegas.

4.4 RESPOSTAS AO SEGUNDO QUESTIONÁRIO

A ideia desse segundo questionário, como já aludido anteriormente, deu-se quando discutimos acerca da necessidade de termos registradas as impressões dos alunos sobre o processo pelo qual havíamos passado durante as aulas de números complexos.

A essa altura, tínhamos maior clareza de nosso objetivo: estudar como os alunos da última série do Ensino Médio têm compreensão sobre os números complexos antes e depois da formalização dos conceitos referentes ao assunto. Contudo, não sabíamos se o tínhamos atingido, de que forma e em que grau.

Assim sendo, discutimos fortemente sobre a aplicação de um segundo questionário aos alunos das duas turmas participantes. Colocamos foco na necessidade do registro escrito da opinião dos alunos acerca de todo o processo. Com isso, construímos esse instrumento de coleta de dados composto de oito questionamentos subjetivos.

Naquele momento da elaboração do questionário, não desejamos nos furtar das funções tanto de professora quanto de pesquisadora. Muito embora soubéssemos que o que investigávamos era tarefa da pesquisadora. Dessa forma, colocamos as duas questões iniciais como principais para a conclusão dessa investigação, mas sem que as demais não representassem importância para nós.

De posse das respostas dos alunos a essas duas questões, resolvemos que sua análise se daria de forma separada das demais por justificarem todo o processo que empreendemos. Nesse item, analisaremos as seis últimas questões do segundo questionário. Com isso, no item 4.5, analisamos separadamente as respostas a essas duas questões com maior profundidade.

Terceira Questão: Qual a sua opinião sobre saber da aplicabilidade do assunto “Números Complexos” antes mesmo de ter maior aprofundamento no conteúdo? Trouxe maior interesse para o processo de aprendizagem?

Na tabulação das respostas, primeiramente nos preocupamos em quantificá-las observando a indicação positiva quanto a ter trazido maior interesse no processo de aprendizagem ou a negativa. Assim, registramos os resultados:

Com os dados apresentados no gráfico, notamos que há uma parcela significativa,

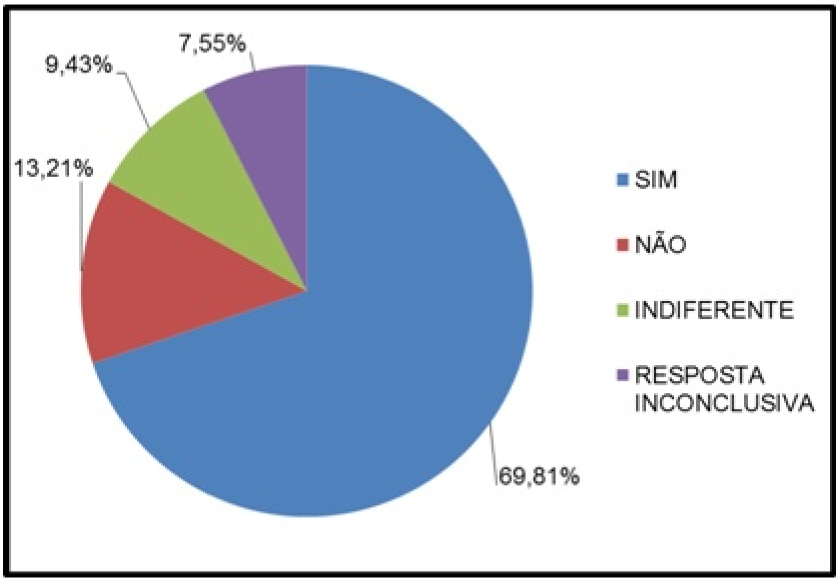

Figura 7 – Respostas dos alunos à terceira questão do segundo questionário

aproximadamente 70%, dos alunos que a forma como foi conduzido o estudo dos números complexos trouxe maior interesse para o processo de aprendizagem. Há justificativas expressivas que ressaltam o valor do processo na opinião dos alunos. A seguir destacamos algumas à nossa escolha:

Aluno	Justificativas
A41	Trouxe maior interesse, uma vez que pudemos perceber as aplicações práticas em nossas vidas, como, por exemplo, na aviação, onde os números complexos têm grande valia.
A6	Sim. Pois ao aluno conhecer a aplicabilidade antes de ver o conteúdo ele vê um sentido para a existência daquele conteúdo.
A22	É importante sabermos o motivo, como também a aplicabilidade, de estudarmos algo para que tenhamos interesse e nos sintamos motivados. Por isso foi muito importante o conhecimento sobre a aplicabilidade do assunto: números complexos.
A23	Ao saber a aplicabilidade dos Números Complexos tive interesse em estudar, pois deu validade ao trabalho de aprender todos os novos conceitos que no ensino fundamental não existiam.
A51	Saber a aplicabilidade de qualquer assunto que se vai aprender ajuda muito a criar uma motivação maior. Incentivando a aprendizagem.
A27	Com certeza trouxe maior interesse, pois quanto eu tinha visto esse conteúdo em outra escola, eu não tinha nenhuma noção para que servia e por isso o interesse meu e dos outros alunos era bem menor.

A31	Ter noção da aplicabilidade do assunto foi, com certeza, muito proveitoso, despertou o interesse pela matéria. Muitas vezes, a física me traz maior interesse por ser bem mais clara a sua aplicabilidade, porém esse estudo dos números complexos pode alcançar isso bem.

Tabela 23 – Algumas opiniões positivas apontadas na terceira questão do segundo questionário

Também existiram comentários para mostrar um descontentamento com a condução do conteúdo. São menos quantitativamente, mas merecem destaque algumas respostas como apresentamos abaixo:

Aluno	Justificativas
A44	Muito importante a evolução da física, porém não me trouxe interesse maior no processo de aprendizagem.
A17	Na verdade, não. Pois tem aplicabilidade na física e na aviação, dois assuntos que não interessam muito.
A11	Saber da aplicabilidade trouxe maior interesse inicialmente, porém no decorrer do estudo a abordagem foi a mesma que seria sabendo ou não da aplicabilidade e esta não remete a nosso cotidiano e sim ao das engenharias e ciências exatas, o que acabou diminuindo o interesse inicial por saber a aplicabilidade.

Tabela 24 – Algumas opiniões negativas apontadas na terceira questão do segundo questionário

Quarta Questão: E sobre o fato da aplicabilidade ter sido apresentada por colegas? Foram eles que pesquisaram e trouxeram para a turma. Se você pensa que isso fez diferença, conte-me como.

Também quantificamos as respostas apresentadas pelos alunos

Nos relatos dos alunos percebemos que entre os que disseram NÃO, quatro prefeririam que a professora fizesse a apresentação da aplicabilidade, alegando que os colegas apresentaram o assunto superficialmente e um achou pouco proveitosa pela insegurança que os colegas demonstraram na apresentação.

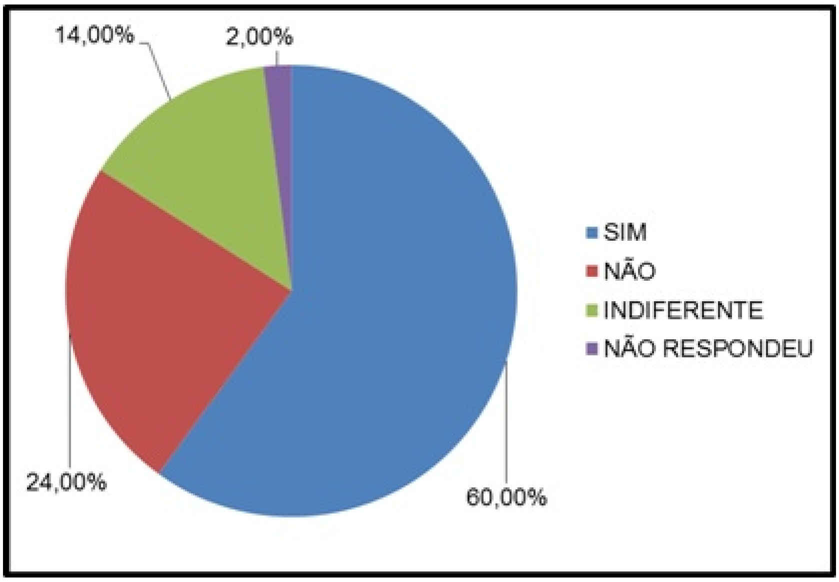

Figura 8 – Respostas dos alunos à quarta questão do segundo questionário

Entre os que disseram SIM, houve também um aluno que achou que a pesquisa só foi interessante para os que participaram diretamente, pois foi uma oportunidade de aprendizado.

Entre os que declararam ter sido INDIFERENTE quatro afirmaram que tanto faz ser o aluno ou o professor a pesquisar e repassar aos colegas, justificando que "não importa o mensageiro e sim a mensagem final".

Registramos a seguir o depoimento do A22:

> Talvez não tenha feito diferença em nossa sala, ou até mesmo no esquadrão devido termos diversas outras coisas/matérias a estudar e colocarmos como prioridade outras coisas fazendo, então, a pesquisa ser menos interessante. Porém, acredito que o intuito do educador de fazer os alunos pesquisarem é o melhor modo de influenciar o aluno a ter mais empenho e interesse.

Embora ele tenha valorizado a ideia da pesquisa, ele deixou visível o momento de dificuldade que os alunos estavam vivenciando. Nós realmente tivemos receio da aceitação desse segundo questionário por parte de alguns alunos, pois, como não foi possível antecipar a data para a aplicação desse dado de coleta de informações, acabou coincidindo com outras atividades na semana que antecedeu a Prova do ENEM, também última semana de aula antes das provas parciais. Os alunos já estavam cansados e alguns estressados com as atividades de avaliação a que seriam submetidos na incerteza de sua aprovação e preocupados com a sua formatura que se aproximava. Entretanto os dados registrados mostram que nosso trabalho não foi em vão.

Optamos por não destacar as falas dos alunos para não alongar esse relato e tornar enfadonha a leitura desse texto. Entretanto, transcreveremos duas delas. A primeira em razão de, como já dissemos outras vezes, da peculiaridade de termos alunos que já concluíram o Ensino Médio e o refazem na EPCAR, achamos que a declaração do aluno A32 representa fortemente o momento de aprendizagem que foi proporcionado com a apresentação dos alunos:

> A32: "Esse fato fez grande diferença, pois como meus colegas compartilhavam da mesma opinião errada que eu tinha antes de estudar esse assunto, ao fazerem a pesquisa, foram surpreendidos pela aplicabilidade dos números complexos, inclusive na aviação."

A segunda, por termos visto o apontamento da motivação como fator de promoção ao estudo, à aprendizagem. Para nós, esse fator motivacional é um pilar que sustenta o processo de aprendizagem e também o processo de ensino. A fala do A4 é representativa de muitas compiladas nessa questão, mas supomos que seja, também, de diversos docentes.

> A4: Como já dito anteriormente, ao saber como uma matéria do Ensino Médio é aplicada no cotidiano, vemos uma espécie de 'motivação', diferente de alguns assuntos desnecessários da nossa grade de ensino, e essa 'motivação' nos ajuda de certa forma a estudar mais a matéria.
>
> Obs.: vale ressaltar que às vezes fica um pouco abstrato o uso deles, embora ocorra um ligeiro entendimento.

Quinta Questão: Qual é sua opinião sobre a contextualização de questões sobre o conteúdo "Números Complexos"?

Nessa questão registramos os dados:

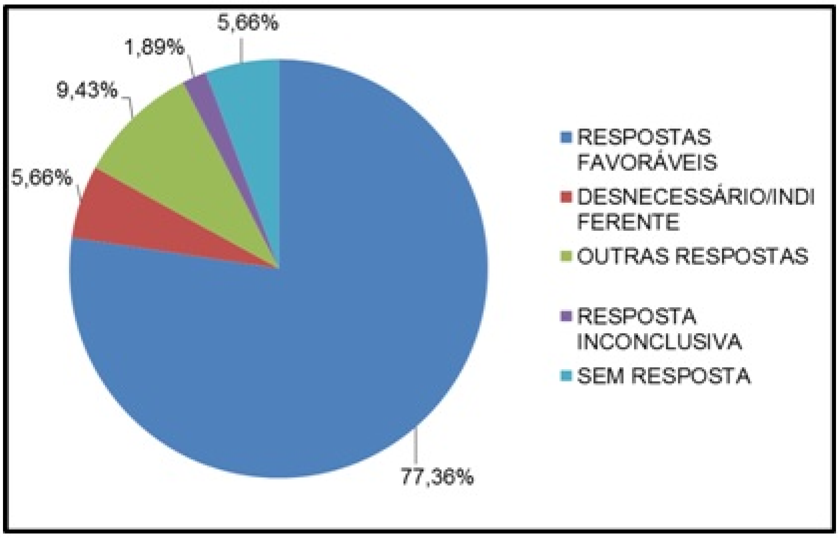

Figura 9 – Respostas dos alunos à quinta questão do segundo questionário

Observamos que a maioria da turma foi favorável à contextualização de questões sobre o assunto com citações diversas, mas alguns abordaram não se tratar de um assunto em que a contextualização ocorra de maneira tão fácil como acontece em outros conteúdos da Matemática.

Registramos a seguir algumas das respostas:

Aluno	Justificativas
A20	Geralmente, questões sobre os complexos são diretas, não contextualizadas. Esse modelo é de mais fácil entendimento, porém é 'chato', cansativo e não leva ao conhecimento pleno do conteúdo, a situação não é compreendida. Por isso é necessário a contextualização de questões, obrigando o aluno a desenvolver o raciocínio em cima do conteúdo dentro da situação. Além de exercitar a mente torna o modelo de estudo muito mais dinâmico.
A6	A contextualização do conteúdo é muito importante para que os alunos não fiquem presos só aos números e sim a toda uma situação que ele envolve.
A45	Minha opinião é que, diminui a visão abstrata da matéria enquanto conteúdo, e nos dá uma noção de como pode ser usada no dia-a-dia.
A11	Traz maior interesse ao seu estudo, porém, pouco foi feito neste aspecto.
A12	Os problemas contextualizados de números complexos são poucos, porém são mais interessantes.
A46	Foi importante para o estímulo do aprendizado.
A23	Partindo do principio que contextualizar as questões do conteúdo 'números complexos' confere ao aluno uma visão mais ampla dos conjuntos numéricos e também amplia a quantidade de soluções com as quais ele pode trabalhar eu acho muito válida a contextualização.
A53	A contextualização de questões sobre o conteúdo supracitado é de suma importância, pois podemos entender o funcionamento de diversas coisas no nosso cotidiano e entender que o conteúdo não se resume a uma simples equação.
A36	É importante, pois é através da contextualização de questões sobre o conteúdo que se pode perceber a importância de tal assunto.
A14	É muito importante, pois em um conteúdo que, inicialmente, parece ser algo imaginário e ficar desmotivado o aprender é muito fácil.

Tabela 25 – Algumas opiniões apontadas na quinta questão do segundo questionário

Sexta Questão: Apresentamos o conteúdo "Números Complexos" por meio de partes da história da matemática. Você acha que o uso da história da matemática pode ser um aliado no processo de aprendizagem? Se você pensa que isso fez diferença, conte-me como

Na quantificação das respostas obtivemos:

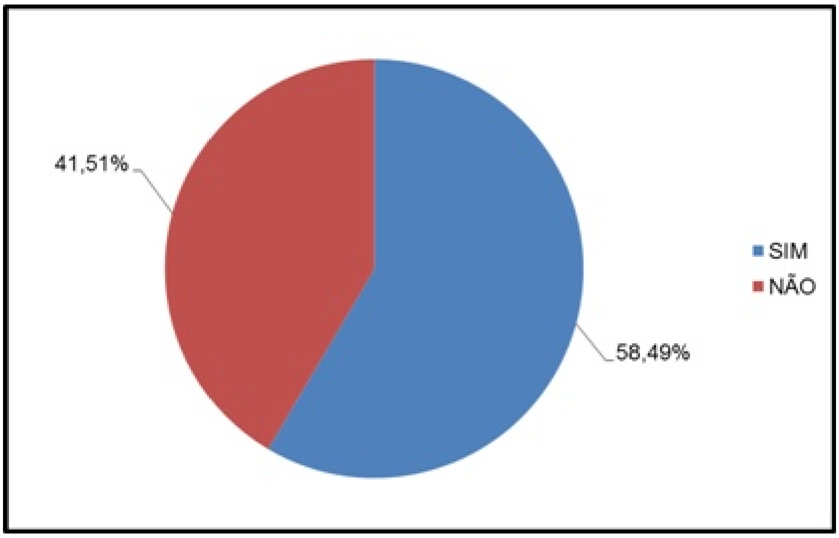

Figura 10 – Respostas dos alunos à sexta questão do segundo questionário

Registramos no quadro abaixo alguns depoimentos:

Aluno	Justificativas
A23	Eu penso que o uso da história faz diferença, pois o embasamento histórico cria um alicerce e solidifica a origem dos estudos apresentados, proporcionando uma maior veracidade ao assunto e credibilidade ao professor.
A11	É uma aliada, pois mostra a origem e evolução destes estudos, bem como reforça o que foi falado sobre aplicabilidade.
A12	A história ajuda o aluno a memorizar e assimilar os conceitos da matéria.
A53	A apresentação do conteúdo já citado por meio de partes da história da matemática é uma grande aliada no processo de aprendizagem, uma vez que fica mais claro saber o pensamento do conteúdo e sua origem, facilitando assim o desenvolvimento do raciocínio em cima da matéria.
A14	Sim, pois mostra todo o desenvolvimento e descobertas advindas do estudo dos complexos.
A22	Não que seja ruim, mas devido ao pouco tempo de aula e a necessidade de escolhermos prioridades, acredito que se devem apresentar mais conteúdos atuais e modernos ligados à utilidade dos números complexos.
A45	Acredito que a competência e a forma com que o professor expõe, faz mais diferença, ajudando ou não a aprendizagem. Apenas ensinar ou mostrar a história da matemática não é tão relevante, se o professor não tem carisma ou facilidade para expor o conteúdo.
A42	Eu, particularmente, não achei muito interessante a abordagem histórica, pois não fez diferença na minha aprendizagem.

A21	Considero que não faça diferença, mas gosto de saber como se deu a ocorrência da descoberta de algo que estou aprendendo.

Tabela 26 – Algumas opiniões apontadas na sexta questão do segundo questionário

Sétima Questão: E a prática da interdisciplinaridade apresentada valeu a pena? Conte-me como.

Nessa questão, registramos numericamente as opiniões dos alunos conforme o gráfico abaixo:

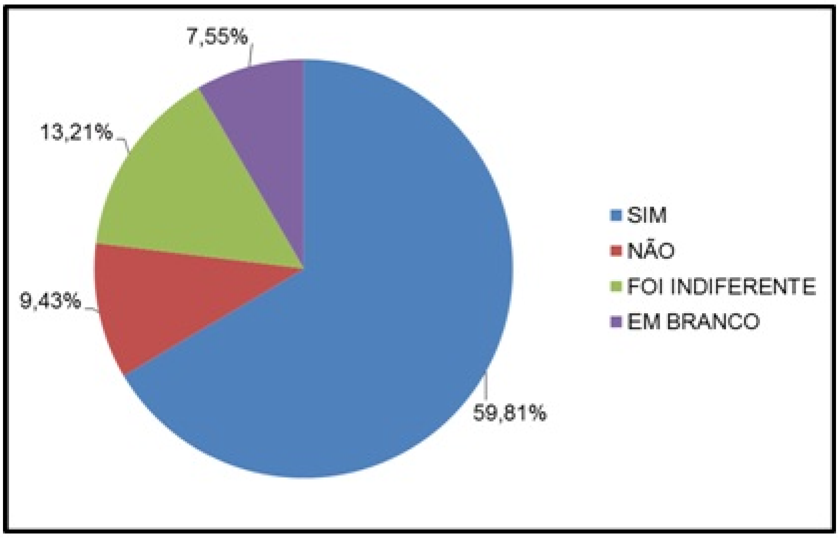

Figura 11 – Respostas dos alunos à sétima questão do segundo questionário

Dentre as opiniões dos alunos, destacamos algumas. Apresentamos tanto aquelas que indicam ter valido a pena quanto outras.

Aluno	Justificativas
A53	Na prática interdisciplinar, no caso a matéria de circuito de corrente alternada, na disciplina física, ficou bem clara a aplicação e importância dos números complexos, como forma de simplificar os cálculos e o entendimento daquela matéria.
A22	A prática interdisciplinar foi interessante, pois pudemos conhecer uma situação do conhecimento sobre números complexos que facilita bastante na observação sobre circuitos elétricos, É notável que sem tal conhecimento sobre números complexos, as avaliações e fórmulas seriam bem mais complicadas.

A31	Sim, foi possível perceber, mesmo que não de forma abrangente, a aplicação dos números complexos que antes nos parecia algo bem abstrato e, agora, houve, de certa forma, uma motivação para o estudo da matéria. A14 Não muito. Mostrou mais teoria que prática.
A25	Tal prática é muito importante para o aprendizado, tal como motivação do aluno.
A10	É, mais ou menos. Não usamos muito isso no Ensino Médio.
A26	Não, indiferente.

Tabela 27 – Algumas opiniões apontadas na sétima questão do segundo questionário

Oitava Questão: No quadro a seguir, explicite características positivas e características negativas da abordagem que foi feita para iniciar o conteúdo de números complexos.

Preencha seguindo uma ordem de maior importância para você seguindo um *ranking* de valores pessoais. (Não é necessário completar o quadro todo! Coloque aquilo que é mais relevante)

Observamos que 3 alunos deixaram essa questão em branco, mas entre os 50 alunos que responderam, um dado importante que registramos foi que 21 alunos, ou seja 42%, não apontaram nenhuma característica negativa.

Procuramos agrupar as respostas apresentadas por natureza e relacionamos os resultados a seguir:

Característica	Número de alunos	Justificativas
Aplicabilidade	31	Explicação da utilidade da matéria nos cursos e profissões atuais; Descobrir o uso desses números em outras áreas; Respondeu a pergunta tradicional do aluno: “Pra que vou usar isso na minha vida”; Aplicações práticas; Solucionar problemas da Matemática sem solução; Explicação da utilidade da matéria nos cursos e profissões atuais.
Teoria apresentada	23	Facilitou o aprendizado; Aprimorou a álgebra; Bom proveito em concursos; Houve tempo para aprendizagem; Foi dinâmica.
Pesquisa realizada pelos alunos	13	Participação dos colegas; Iniciativa; Capacidade de pesquisa individual; Incentivou o aluno a pesquisar; Trouxe aprendizado individual profundo; Gerou aumento de interesse.

História da Matemática	12	Contexto histórico; Abordagem da história da matemática.
1º questionário	11	Dinamismo; Breves explicações sobre o tema antes de iniciá-lo; Noção prévia para ver o que o aluno sabia; Resolução de exercícios.
Interdisciplinaridade	9	Aspecto interdisciplinar; Solucionar problemas físicos de circuitos para simplificar as contas; Relacionar o assunto com outras disciplinas; Descobrir o uso desses números em outras áreas.
Contextualização	7	Questões contextualizadas; Nos situa melhor no conteúdo; Nos contextualiza com a aviação.
Outros	1	Fato de ter sido no primeiro semestre.

Tabela 28 – Características positivas apontadas por alguns alunos na oitava questão do segundo questionário

Característica	Número de alunos	Justificativas
Contextualização	4	Pouco explorada; Faltou no início da matéria; A contextualização e, principalmente, a interdisciplinaridade poderiam ter sido mais bem exploradas através de trabalhos ao longo do trimestre.
Conteúdo	17	Virtual; Abstrato; Sem significado para o nível; Complexo; Sem aplicabilidade; Maçante; Cansativo; Sem abordagem nos vestibulares; Fórmulas cansativas; Demonstrações desnecessárias.
Aplicabilidade	3	Inexistente; Mostrada só no início; Deveria ter sido apresentada pelo professor; Na participação dos alunos também poderia se valer de aulas dedicadas a debates sobre o assunto estudado.
Tempo	5	Gastou muito tempo/atrasou a matéria.
História da Matemática	6	Referências históricas demasiadamente longas; Não fez diferença.
1º questionário	2	Aplicado sem a explanação anterior da teoria/poucos sabiam.
Aprendizado	2	Da turma foi superficial/“buracos” no decorrer do aprendizado.

Desmotivação	4	Cansaço; Matéria chata; É uma matéria que será utilizada a longo prazo dependendo da profissão; Falta de motivação.

Tabela 29 – Características negativas apontadas por alguns alunos na oitava questão do segundo questionário

4.5 CONFRONTANDO IDEIAS INDICADAS NOS DOIS QUESTIONÁRIOS

Na etapa que se seguiu à releitura dos dados, percebemos que as respostas dos alunos às duas primeiras questões do segundo questionário nos dariam um indicativo significativo do que poderia ter ocorrido no processo de aprendizagem dos números complexos.

Assim sendo, vamos considerar as duas perguntas seguintes que foram respondidas no segundo questionário, depois de já ter sido ministrado todo o conteúdo sobre Números Complexos:

1ª Questão: Qual era sua opinião em relação ao conteúdo "Números Complexos" ANTES de iniciarmos as atividades propostas para as aulas desse assunto na EPCAR?

2ª Questão: Sua opinião HOJE é diferente? Sim ou Não?

Conte-me sobre isso. Gostaria de saber os motivos que você tem para ter tal procedimento.

Para analisarmos as 53 respostas a essas perguntas, entendemos que poderíamos agrupá-las por semelhanças. Para isso, formamos os grupos de "**F**" a "**K**" com foco na mudança ou não de opinião. Formamos, também, os grupos **T2**, e **T3**, exclusivamente com respostas dos alunos que já tinham cursado a 3ª série do Ensino Médio antes de seu ingresso na EPCAR observando indicações de mudança ou não de opinião:

Grupo F: Alunos que tinham alguma resistência ao conteúdo e mudaram de opinião

Grupo G: Alunos que tinham alguma resistência ao conteúdo e não mudaram de opinião

Grupo H: Alunos que não tinham uma expectativa ou não davam importância ao conteúdo e que mudaram de opinião.

Grupo I: Alunos que não tinham uma expectativa ou não davam importância ao conteúdo e que não mudaram de opinião.

Grupo J: Alunos que tinham uma expectativa positiva e que não mudaram de opinião.

Grupo K: Alunos que desconheciam o assunto, mas tinham uma expectativa quanto à aprendizagem e aplicação.

Grupo T3: Alunos que já tinham cursado a 3ª série do Ensino Médio e que não mudaram de opinião.

Grupo T2: Alunos que já tinham cursado a 3ª série do Ensino Médio e que mudaram de opinião

Para apresentação dessas respostas, confeccionamos quadros nos quais apresentamos todas as respostas em cada grupo.

Aluno	Resposta à 1ª QUESTÃO (antes)	Resposta à 2ª QUESTÃO (hoje)
A41	Pensava ser uma matéria de grande dificuldade, quase uma introdução ao nível superior.	Sim. Atualmente possuo outra visão acerca do conteúdo, pois percebi ser um aprofundamento, uma continuação, dos números reais, e que, quando se tem um bom embasamento desses, fica ainda mais fácil o conteúdo dos números complexos.
A10	Que seria um assunto obscuro e de difícil compreensão.	Sim. Consegui aprender o assunto satisfatoriamente e consegui bom resultado na avaliação.
A17	Eu pensava que o conteúdo de Números Complexos fosse algo muito complicado de se entender, algo que exigisse um esforço grande (estudo).	Sim. O interesse em aprender me fez querer compreender esse assunto. E, percebi que não era algo tão difícil quanto imaginava.
A23	O conteúdo que abrange o estudo dos Números Complexos era visto por mim como uma matéria de difícil compreensão, esta visão era precipitada e só denotava que temos "medo" do que não conhecemos.	Sim. Hoje meu posicionamento é diferente, pois após exercitar os conceitos que tangem os números complexos percebi que achar este conteúdo difícil foi uma percepção equivocada. E essa mudança é por conta do leque de soluções que pude achar que anteriormente era impossível trabalhando nos reais. Eu me senti evoluído no conteúdo da Matemática.
A31	Eu tinha uma visão obscura e distorcida desse conteúdo, via como algo muito abstrato e que talvez nem caberia à matemática como ciência exata e muito menos podia ver a aplicabilidade.	Sim. Ao inteirar-me do conteúdo, aprender a matéria, pude ter uma visão mais ampla e entender o porquê do estudo dos Números Complexos (para resolver, por exemplo etc).

A49	Antes de iniciarmos as atividades com os Números Complexos, eu achava que era um conteúdo que não teria utilidade na minha vida profissional.	Sim. Com o estudo dos números complexos, percebi que eles são fundamentais para o avanço da tecnologia, e o da física.
A36	Antes da apresentação do conteúdo “números complexos”, tinha uma impressão negativa quanto à matéria, acreditando ser um nível de dificuldade alto, devido ao relato de outras pessoas que já tinham estudado antes.	Sim. Durante abordagem da matéria, percebi o equívoco, já que não percebi tal dificuldade que me foi relatada por outros que já haviam estudado a matéria.
A8	Antes de iniciarmos os estudos a respeito dos números complexos, pensava que seria um assunto de difícil compreensão. Isso se deve ao contato prévio com alunos de Ensino Médio regular.	Sim. Minha opinião hoje é diferente devido a certa facilidade no aprendizado deste conteúdo.
A39	Pensava que era um assunto muito difícil e que não servia para nada.	Sim. Ao descobrir a utilidade do aprendizado da matéria aumentei o interesse pelo aprendizado.
A21	De algo teoricamente e praticamente impossível, que seria de difícil resolução e solução. Realmente algo que não tinha confiança.	Sim. Com o prosseguimento das aulas, fui aprendendo o conteúdo referente aos Números Complexos e percebi que não era lá o ‘bicho de sete cabeças’ que havia criado em minha mente.
A18	Antes pensava que era um assunto muito complexo e difícil de trabalhar.	Sim. Depois de estudar os complexos percebi que não é um assunto muito complicado e que dá para ser trabalhado e compreendido com facilidade.
A15	Que era um assunto complicado.	Sim. Depois de estudar a matéria sei que não era tão complicada.
A3	Minha opinião era de que o conteúdo era meio abstrato, não conseguia compreender sua finalidade.	Sim. Com o estudo dos números complexos percebi que a matemática vai muito mais além daquilo que imaginava, comecei a perceber a importância dos números complexos e sua finalidade.
A37	Acreditava que seria um conteúdo difícil de ser estudado.	Sim. A matéria após ser explicada ficou muito fácil.

A51	Assim que eu soube o nome da matéria achei que fosse muito complicado.	Sim. Conforme foi sendo passado o conteúdo eu comecei a perceber que não é tão complicado assim.
A5	Eu enxergava o assunto de maneira obscura, já que na época era muito difícil imaginar a raiz de um número negativo, com os conhecimentos que tinha.	Sim. Após ter estudado o assunto aqui na Escola já consigo aceitar essa ideia da existência de raízes de números negativos e é bom poder utilizar este saber.
A14	Que era um conteúdo distante do cotidiano e que se utilizava de muitos "artifícios" para existir.	Sim. Os complexos possuem uma ampla utilização no cotidiano, principalmente na engenharia aeronáutica.
A25	Era um conteúdo desconhecido e que gerava medo. A princípio, achava que era um conteúdo difícil, complicado e que não me sairia muito bem.	Sim. Após estudar o conteúdo em sala de aula e ter entendido melhor a sua aplicabilidade em nosso dia-a-dia, percebi que esse conteúdo era interessante e, por incrível que pareça muito simples.
A33	Acreditava que seria um conteúdo com pouca aplicabilidade e difícil.	Sim. Aprendi qual a utilidade desta matéria em diversas áreas além da matemática.

Tabela 30 – Grupo F: Alunos que tinham alguma resistência e mudaram de opinião

Aluno	Resposta à 1ª QUESTÃO (antes)	Resposta à 2ª QUESTÃO (hoje)
A40	Que eram números difíceis de serem entendidos.	Não. Ainda não compreendo bem o assunto, porém já tenho um maior conhecimento sobre o tema.

Tabela 31 – Grupo G: Alunos que tinham alguma resistência e não mudaram de opinião

Aluno	Resposta à 1ª QUESTÃO (antes)	Resposta à 2ª QUESTÃO (hoje)
A42	A minha opinião era de que esse assunto, Números Complexos, seria apenas mais um dos tantos assuntos de matemática e que não teria aplicações práticas.	Sim. Pois a partir do momento que o professor aborda as aplicações práticas, bem como a importância do assunto, ele se torna bem mais prazeroso.
A6	Não havia uma opinião, pois não conhecia o assunto.	Sim. Agora conhecendo essa parte da Matemática, vi que o quão importantes são os números complexos e como eles influenciam o cotidiano das pessoas.

A2	Sinceramente, não tinha muitas perspectivas quanto ao aprendizado e ao emprego dos números complexos.	Sim. Apesar de responder sim, considero minha opinião dividida, pois agora domino o conteúdo, mesmo que as noções básicas, mas a aplicabilidade continua um campo obscuro para mim.
A13	Não tinha opinião formada a respeito do assunto, pois nem imaginava o que poderia ser.	Sim. Hoje tenho conhecimento acerca do conteúdo, logo posso formar uma opinião. Não vejo porque estudar esta matéria no Ensino Médio.
A48	Acreditava que os números complexos não seriam úteis.	Sim. Foram expostos alguns motivos para estudarmos tal assunto.
A28	Ainda não tinha uma opinião formada.	Sim. Entendendo melhor a aplicabilidade dos números complexos vejo que há utilidade e necessidade em seu aprendizado.
A16	Acreditava ser totalmente inútil e sem aplicações cotidianas.	Sim. Vejo que Números Complexos possui aplicabilidade no dia-a-dia, especialmente no estudo da aerodinâmica, na aviação que é a área na qual desejo trabalhar.
A46	Era um conjunto desconhecido, não tínhamos nenhum conhecimento sobre a aplicabilidade deles.	Sim. Agora sabemos para que servem e como eles estão presentes em nosso dia-a-dia.
A53	Antes de iniciarmos os estudos dos “Números Complexos”, não entendia a importância desse conteúdo bem como suas aplicações e pensava que esse conteúdo só servia para efeitos de cálculos e resolução de equações.	Sim. Após o estudo dos “Números Complexos” pude perceber suas aplicações no cotidiano bem como em outras disciplinas, percebendo assim a dimensão da importância do estudo daquele conteúdo.
A50	Antes das aulas eu só sabia que Números Complexos tinham relação com a retirada das raízes negativas.	Sim. Hoje sei que referido assunto vai além do que eu apresentei anteriormente. Aprendi que este “número complexo” faz parte do conjunto dos complexos, que vai além dos reais ($\mathbb{R}$), tendo propriedade na Física entre outros que fogem ao que é visto no Ensino Médio. Por isso é importante criar uma boa base sobre a matéria neste momento.

A9	Antes de iniciar as atividades, imaginava que os números complexos faziam parte de um grupo à parte dos números reais.	Sim. Hoje tenho pensamento diferente, pois vi que o conjunto dos números complexos compreende todos os números, sejam eles reais ou imaginários.
A52	Era um campo da Matemática nunca conhecido.	Após iniciarmos os estudos percebemos que os Números Complexos podem ser utilizados em diversas áreas da tecnologia.
A4	A única opinião que eu possuía acerca de Números Complexos era que a raiz quadrada de -1 era o tal i. Mal sabia eu que era um leigo no assunto.	Sim. Ao estudar os números complexos pude entender mais sobre o assunto e suas aplicações tomando uma postura bem diferente da que eu possuía antes de estudá-los.
A47	Que os números complexos estavam em outro conjunto.	Sim. Pois percebi que o conjunto dos números complexos não é um conjunto à parte e sim um conjunto que engloba todos os outros.

Tabela 32 – Grupo H: Alunos que não tinham expectativa ou não davam importância ao assunto e que mudaram de opinião

Aluno	Resposta à 1ª QUESTÃO (antes)	Resposta à 2ª QUESTÃO (hoje)
A43	Mais uma matéria do Ensino Médio em Matemática.	Não. Não gosto de matemática e só quero passar de ano. Não me identifico com exatas, prefiro humanas.
A45	Como uma nova matéria qualquer.	Não. Continuo achando que ele foi uma matéria normal, como qualquer outra.
A26	Indiferente.	Não. Não mudou em nada, mais uma matéria do Ensino Médio, como qualquer outra.
A12	Como já tinha conhecimento prévio do assunto, não tive muitas dificuldades no conteúdo, e já conhecia as aplicações práticas dos complexos.	Não. Observando atentamente às aulas ministradas, embora o assunto tenha sido abordado por completo, assim como suas aplicações, o curso de Números Complexos foi básico demais.

Tabela 33 – Grupo I: Alunos que não tinham expectativa ou não davam importância ao assunto e que não mudaram de opinião

Aluno	Resposta à 1ª QUESTÃO (antes)	Resposta à 2ª QUESTÃO (hoje)
A11	Minha opinião era de que seria um conteúdo que me acrescentaria ferramentas algébricas para a resolução de problemas matemáticos e que seria interessante este estudo.	Não. Já tinha algumas noções sobre o tema e opiniões que se concretizaram no decorrer do estudo.
A38	Que seria um assunto de maior facilidade para com as pessoas que tivessem facilidade com álgebra e trigonometria.	Não. Mantive a opinião.
A29	O conteúdo era de natureza desconhecida, porém, de rumores interpretados, percebi que não haveria dificuldades.	Não. A matéria mostrou-se prazerosa e de fácil entendimento, assim como antes imaginado.
A7	Eu já conhecia o assunto, tinha interesse e curiosidade, mas foi no aprendizado desse ano de 2013 que eu comecei a entender e até gostei do assunto.	Não. Eu, de certa forma, gostava do assunto e após as aulas mantive este gosto, só que minha curiosidade diminuiu.

Tabela 34 – Grupo J: Alunos que tinham uma expectativa positiva e que não mudaram de opinião

Aluno	Resposta à 1ª QUESTÃO (antes)	Resposta à 2ª QUESTÃO (hoje)
A24	Uma matéria a qual desconhecia e tinha vontade de aprender.	Sim. Hoje que o conheço vejo sua importância.

Tabela 35 – Grupo K: Alunos que desconheciam o assunto, mas tinham uma expectativa quanto à aprendizagem e aplicação

Aluno	Resposta à 1ª QUESTÃO (antes)	Resposta à 2ª QUESTÃO (hoje)
A1	Um assunto relativamente fácil, sem muitos problemas para aprendizagem.	Não. É uma questão pessoal, possuo facilidade para ciências exatas e já tinha conhecimento prévio do assunto.
A44	Números de difícil compreensão, pois não havia compreendido quando vi o conteúdo.	Não. Pois não aprendi de maneira satisfatória.

A32	Como já tinha o Ensino Médio completo, já possuía opinião formada em relação aos Números Complexos. É um assunto que gera interesse aos alunos, principalmente após o conhecimento da história da Matemática e da aplicabilidade do assunto.	Não. As aulas sobre os números complexos ministradas na EPCAR não alteraram minha opinião. Como disse na primeira questão, já havia estudado o assunto antes.

Tabela 36 – Grupo T2: Alunos que já tinham cursado a 3ª série do Ensino Médio e que não mudaram de opinião

Aluno	Resposta à 1ª QUESTÃO (antes)	Resposta à 2ª QUESTÃO (hoje)
A35	Particularmente, já tinha estudado os números complexos e esperava que fosse mais ou menos parecido à minha escola civil.	Sim. Hoje, descobri que o conjunto dos números complexos é bem mais amplo, em suas propriedades e aplicabilidade, do que já tinha estudado no outro Ensino Médio.
A27	Acreditava que os números complexos era um conteúdo qualquer com pouca importância dentro da Matemática.	Sim. Com o aprendizado sobre os números complexos eu vi que era algo muito importante.
A34	Não tinha o conhecimento necessário para ter uma opinião formada, contudo não via o porquê de estudar esse assunto.	Sim. Totalmente diferente, ao saber que os números complexos são utilizados na construção das asas de um avião pude perceber o nível de importância desse conjunto numérico.
A30	Como já tinha aprendido o assunto, minha ideia era de melhorar ainda mais o entendimento e aproveitar o conhecimento.	Sim. Melhorou, pois toda vez que aprendemos algo pela segunda vez, o campo do conhecimento aumenta e com isso a visão de mundo que envolve tal assunto também.
A22	Eu não tinha um conhecimento adequado sobre o assunto e o interpretava como algo pouco útil.	Sim. Mesmo ainda não conhecendo bem suas aplicabilidades sei que o estudo dos números complexos é importante nos cálculos matemáticos. Principalmente quanto a desenvolvimentos tecnológicos os quais abrangem áreas como saúde e equipamentos facilitadores do trabalho humano.

A19	Considerava os números complexos um conteúdo interessante, mas inaplicável, pois desconhecia suas colaborações para o desenvolvimento de várias tecnologias.	Hoje compreendo várias de suas aplicações e procuro apreender todo o conteúdo passado para utilizá-lo posteriormente.

Tabela 37 – Grupo T3: Alunos que já tinham cursado a 3ª série do Ensino Médio e que mudaram de opinião

Nesse trabalho de pesquisa, observamos que 88,64%, dos 44 alunos que estavam cursando o 3º ano pela primeira vez, ou seja, 39 alunos, que estão classificados nos grupos “F”, “H” “J” e “K”, deram um depoimento que a experiência vivenciada em sala de aula foi favorável, pois de alguma maneira gerou uma mudança para melhor ou atendeu às suas expectativas trazendo, desta forma, algum benefício.

Por outro lado, nesse mesmo grupo tivemos 11,36% dos participantes, 5 alunos, que estão classificados nos grupos “G” e “I”, para os quais o que foi vivenciado em sala de aula, abordando Números Complexos, não atendeu às suas expectativas ou não gerou crescimento em nenhum aspecto.

Quanto aos 9 alunos que já haviam cursado o 3º ano, registramos que, mesmo já conhecendo o assunto, 6 alunos do grupo “T2” assumiram que o processo lhes trouxe algum crescimento enquanto 3 desses alunos que integram o grupo “T3” não mudaram de opinião.

Pudemos ver, também, que o fato de conhecer o assunto não implicava necessariamente que era aluno que já tinha cursado a 3ª série do 3º ano. É o caso do A12 do Grupo “I” e A7 do Grupo “J” que declararam já ter um conhecimento prévio do assunto. Sabíamos que esses dois alunos estavam cursando o 3º ano pela primeira vez.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vou falar em primeiro lugar, não como pesquisadora, mas como a professora que lecionava para as duas turmas que participaram dessa pesquisa. Enxergo duas pessoas: uma antes desse trabalho e outra hoje, após tudo o que foi desenvolvido. Essa experiência foi um aprendizado, pois me mostrou, acima de tudo, o quanto um professor motivado pode exercer uma influência frente ao aluno resgatando uma situação de resistência ao aprendizado.

Na verdade, foi uma situação que, até então, nunca havia vivenciado. Iniciei minha carreira como docente aos 14 anos, quando os revezes da vida me obrigaram, como filha mais velha, para ajudar no sustento de nossa família, a assumir um Cursinho de Admissão ao Ginásio, e algumas aulas na 5ª série do Ginásio Sete de Setembro que existia na época, em Barbacena.

Já no primeiro ano da graduação em matemática, assumi as turmas de primeiro e segundo anos do Ensino Médio do Colégio de Aplicação, vinculado à Faculdade, onde estudava. Naquela época, exerci a docência por pouco tempo, pois com a aprovação em um concurso do Banco do Brasil em 1971, tentei conciliar o exercício das duas profissões, o que se tornou inviável.

Assim, terminei a graduação em 1973 e optei por trabalhar no Banco do Brasil até a aposentadoria em janeiro de 1996. A essa época, com a aprovação em um concurso público do Ministério da Aeronáutica, retomei a carreira de professora para dar aulas na EPCAR, onde leciono até a atual data.

Considero minha vida uma série de desafios, entre os quais citaria que retornar à sala de aula depois de 23 anos não foi nada fácil. Quando iniciei na EPCAR em 1996, ano de reabertura do curso CPCAR que foi interrompido em 1991, deparei-me com alunos de 3º ano em um nível de exigência e de conhecimento muito acima da realidade que hoje vivencio. Procurei, logo de início, um aprimoramento cursando uma Pós-Graduação na Universidade Federal de São João del Rei e outra nas Faculdades Claretianas de São José, mas foi preciso muita persistência para que não viesse a desistir de tudo.

Da mesma forma, a aprovação no exame de seleção do PROFMAT em novembro de 2011, um novo desafio me trouxe. Muitas preocupações surgiram até iniciar o curso em 2012. O que não ficou somente nesse estágio. Perdurou, perdura.

Não posso negar que não foram raras as vezes que, por pouco, desisti de tudo. Meu tempo de graduação estava muito distante do tempo da maioria da turma que era composta por alunos mais jovens, muitos recém-formados. Não faltou quem me estimulasse, pois sempre escutava de alguém: “Desistir nunca!” Um grupo de estudos se formou em Juiz de Fora e não medi sacrifícios para participar de tudo, mesmo tendo que me deslocar de Barbacena.

Foram momentos que, na posição de discente, senti de perto a importância de ter alguém que me incentivasse, que me fizesse resgatar a motivação que muitas vezes me escapa aos sentidos. Ainda bem que a minha determinação falou mais alto, pois a oportunidade de fazer esta pesquisa é também um desafio que foi o coroar de tudo.

Ao chegar ao final deste trabalho, senti que atingimos não só o objetivo de, especificamente, compreender como alunos dão sentido aos Números Complexos antes da formalização dos conceitos referentes a esse assunto, como também, alcançamos a meta de procurar saber como alunos se apropriam dos conceitos já formalizados relativos aos Números Complexos, identificando motivações e desmotivações vivenciadas nesse processo, mas fomos além.

Já no início em que estava cursando o PROFMAT, quando fiquei sabendo pelos colegas da turma anterior, que deveria apresentar um Trabalho de Conclusão de Curso, pensei em fazer uma pesquisa que envolvesse alunos da EPCAR e que fossem meus alunos. Consequentemente tinha que ser um conteúdo do 3º ano e me veio a ideia de trabalhar com os números complexos, pensando na resistência que percebia nos alunos quando o assunto era tratado em sala de aula.

Entretanto, eu não sabia exatamente o que abordar e em uma conversa com minha amiga, Professora Andréia Cavaca, ela me disse que a ideia era boa e que os alunos da EPCAR iriam gostar tendo em vista haver uma explicação matemática para o voo, baseada na teoria dos Números Complexos. Pesquisando sobre o assunto pude verificar o quanto esse tema foi objeto de estudo em muitos trabalhos de pesquisa. Procurando um foco diferente, Deus me trouxe a inspiração que foi trabalhar com os próprios alunos fazendo a pesquisa sobre a aplicabilidade dos Números Complexos e eles mesmos apresentarem para os colegas em um momento na sala de aula, como foi feito.

Procurei citar sempre com muita ênfase a História da Matemática, pois senti que os conceitos não se formalizam plenamente se não houver um conhecimento paralelo da história de sua evolução. Essa é a postura que estendo também a outros conteúdos da Matemática.

Em sala de aula, procuro sempre ter como base os conceitos em Matemática. A parte conceitual dos Números Complexos que foi citada no Capítulo 2 é o que, de fato, trabalho com os alunos em todas as turmas, inclusive com as demonstrações citadas. Refletindo sobre tudo que foi feito, concluí que os meios empregados estavam corretos, pois mostraram que essa pesquisa, além de estimular a melhoria no ensino da Matemática, me incentivou a adotar uma postura crítica acerca das aulas dessa disciplina.

Quanto aos instrumentos de pesquisa, inicialmente achava que o primeiro questionário e as gravações em vídeo das apresentações seriam suficientes. Entretanto, no dia das apresentações percebi que precisava ter o registro das conclusões dos alunos, o que não seria viável naquele instante, pois era necessário que todo o conteúdo tivesse sido todo ministrado.

Surgiu então a necessidade do segundo questionário, o que realmente complementou nossa análise e nos permitiu alcançar o objetivo que era saber como alunos se apropriam dos conceitos já formalizados relativos aos Números Complexos, identificando motivações e desmotivações vivenciadas nesse processo.

Eu sabia que não seria uma pesquisa fácil, pois os dois questionários totalizaram 20 perguntas e tínhamos 53 participantes e não vi como diminuir essa amostra uma vez que a pretensão inicial era envolver todos os alunos das duas turmas. Para que pudesse concluir uma análise que retratasse todo o procedimento adotado, não foram poucas as vezes que recorri mais de uma vez às atividades para entender o que havia sido registrado pelos alunos.

Assim, assisti aos vídeos mais de uma vez, refiz a leitura dos questionários recorrendo também às anotações feitas em um caderno, durante e após as aulas. Somente assim pude classificar as respostas por natureza para que os agrupamentos fossem montados e depois fazer as quantificações possíveis.

Ao assistir novamente àquela primeira aula teórica sobre o assunto, que está gravada em vídeo, e que foi tão importante nesse processo, após toda a experiência vivenciada um senso crítico me faz refletir e me sinaliza o quanto aprendi, pois senti que aquele momento seria enriquecido com detalhes que essa pesquisa me mostrou.

Citei esse fato como exemplo, mas senti um aprimoramento que é uma consequência da motivação que essa experiência me trouxe e que, portanto, não se restringe apenas ao conteúdo de Números Complexos, que foi o foco desse trabalho. Na verdade, esse aprimoramento deve se estender não só a outros tópicos da Matemática, como também a outras disciplinas, pois é fruto de uma motivação que se faz necessária a qualquer educador.

De um ponto de vista psicoeducacional, o papel do professor em classe é desenvolver e manter a motivação da turma como um todo, o que não seria fácil acontecer com alguém desmotivado.

Senti que a experiência adotada em sala de aula de aliar dois lados da mesma pessoa, professora e pesquisadora, até então inédita para mim, evidenciou que mesmo dentro de uma realidade na qual poderia haver certa resistência para aprender determinado assunto, o aluno pode sentir-se incentivado com a implantação de diferentes métodos de ensino.

Dessa forma, usando a criatividade, trabalhei a dificuldade em aprender Números Complexos com uma estratégia diferente do que era habitual, que foi o fato dos próprios alunos pesquisarem sobre a aplicabilidade do assunto para depois, eles mesmos, repassarem aos colegas o que haviam encontrado.

Senti que esse recurso apresentou mais pontos positivos que negativos, pois embora alguns poucos alunos tivessem declarado que seria melhor que o professor fizesse tal apresentação, tendo em vista a pouca experiência dos colegas, a maioria foi favorável à maneira como foi conduzido o processo, conforme respostas apuradas no segundo questionário. Nesse momento, passo a dar voz à pesquisadora, muito embora pareça confundirem-se dada a dificuldade de colocar as palavras corretas para ambas.

A escolha dos instrumentos de pesquisa utilizados pareceu-me satisfatória e entendo que me levaram a obter êxito no intento da pesquisa. Acredito, também, que com a intenção de explorar um assunto tão complexo por natureza e amplo por tratar da opinião de outro, o aluno, com aspecto instável, o estudo desse assunto só poderia ser significativo com uma vasta gama de instrumentos de produção de dados.

Por meio dos instrumentos de coleta de dados, pude construir evidências em relação aos alunos que acompanhei acerca dos objetivos propostos. A seguir, ofereço respostas às questões iniciais de pesquisas bem como questionamentos que surgiram durante o percurso e que podem indicar trabalhos futuros. Retomando as questões de pesquisa, após leituras e releituras atentas de todo o texto já escrito e de longas reflexões, busquei dar lugar ao olhar crítico e atento de pesquisador que nasceu durante esse processo.

Retomo as questões propostas e, tendo como base as minhas análises e discussões, apresentarei respostas às minhas indagações. Tendo em vista que a pesquisa científica nunca se encerra ao responder meras perguntas, ressalto que essas respostas visam não serem em si a palavra final de uma história quer seja minha ou de meus alunos ou de minhas aulas, mas, sim, um preâmbulo da história que doravante poderá ser contada.

Com o objetivo de **estudar como os alunos da última série do Ensino Médio têm compreensão sobre os Números Complexos antes e depois da formalização dos conceitos referentes ao assunto**, formulei as seguintes questões de pesquisa:

1. Como os alunos dão sentido aos Números Complexos antes da formalização dos conceitos referentes a esse assunto?

2. Como os alunos se apropriam dos conceitos já formalizados relativos aos Números Complexos?

3. Quais são as motivações e desmotivações vivenciadas nesse processo?

Sobre a primeira pergunta, percebi que antes da formalização dos conceitos referentes ao assunto existia uma resistência muito grande manifestada por 31 alunos, mais de 50% dos participantes dessa pesquisa, apontando motivos diversos tais como receio de ser um conteúdo de difícil entendimento, um assunto complexo, obscuro que gerava medo, com pouca ou nenhuma aplicabilidade. Um fato que ficou registrado em algumas das respostas e que me chamou a atenção foi como a memória dessa resistência é passada por colegas que já tinham estudado o assunto em série anteriores e para os quais a barreira da resistência ainda não tinha sido desfeita. Havia também um grupo menor de 7 alunos que achavam que seria um conteúdo fácil ou interessante.

Em relação à segunda questão, após a formalização dos conceitos relativos ao estudo de Números Complexos, percebi uma mudança expressiva, pois entre os 31 alunos citados na primeira questão, apenas 2 ainda apresentavam uma resistência em estudar números complexos. No grupo dos 7 alunos que tinham uma expectativa positiva, apenas 2 mudaram de opinião, ou seja para 5 alunos o conteúdo foi fácil, interessante.

Já com relação ao terceiro questionamento percebi que situações de resistência foram trabalhadas gerando um fator que influenciou a aprendizagem. Alguns alunos chegaram a declarar que se sentiram motivados para o estudo dos Números Complexos Para falar sobre a posição do aluno e a motivação em aprender, vou citar Boruchovitch e Bzuneck (2000, p.24-25), que, quando abordam o papel do professor e da escola na motivação do aluno, falam que

> problemas de motivação estão no aluno, no sentido de que ele é o portador e o maior prejudicado. Mas isto não significa que ele seja o responsável, muito menos o único, por essa condição. (...) Por exemplo, alunos inteligentes, mas entediados precisam de desafios em nível adequado. O tédio também pode ser eliminado com as práticas de variar as tarefas e métodos, abrindo-se mais espaço aos que propiciem participação ativa de toda a classe.

Eu entendo que, apesar dos problemas de motivação estarem no aluno, pois ele é o portador e é quem sofre as maiores consequências, o professor não pode ter uma postura do conformismo e concluir que o aluno seja o único responsável por tal condição. O ambiente externo no qual o aluno está inserido poderá ou não trazer algum benefício para que haja uma mudança, dependendo do compromisso de quem nele atua. E nesse ambiente externo entendemos que o espaço ocupado pela sala de aula com a presença de nós, professores, é um grande aliado para encontrar a motivação em aprender. Nós, professores, não podemos nos dar por vencidos, pois a busca de novos métodos, as práticas de ensino devem ser constantes em nossas vidas.

Para finalizar, agora como professora-pesquisadora, admito a convivência, na sala de aula em um mesmo ambiente, de várias realidades opostas e divergentes. É possível imaginar que tais realidades não sejam encontradas em outras salas de aula como aquelas em que pesquisei? Imagino salas de aulas em que as práticas matemáticas nem sejam pautadas nas observações que fiz nem naquelas dos alunos. É possível ter sucesso nos processos de ensino e de aprendizagem ali implicados? Quais seriam as atitudes possíveis a cada realidade pensando em professores diferentes, escolas diferentes e alunos diferentes que levariam a metodologias de ensino da matemática e a aprendizagem matemática efetiva e de sucesso?

6 CONCLUSÕES

As possibilidades de novos trabalhos a partir desta pesquisa são fatores motivadores para nossa continuidade com a pesquisa em nossa sala de aula de matemática. É tangível que pesquisas futuras possam surgir inspiradas no levantamento de dados e na forma como apresentamos.

Percebemos que o benefício imediato foi para os próprios alunos-pesquisadores, pois ao se prepararem, com o fato de pesquisarem, estudar o assunto, pensar numa maneira de falar aos colegas, tudo contribuiu para seu crescimento. Acreditamos também que se essa prática for habitual o exercício da expressão oral tem um ganho, uma vez que o aluno precisa transformar tudo o que aprendeu em uma linguagem metalinguística, ou seja, explicar matemática através da matemática para esclarecer as dúvidas dos colegas. Nesse processo ocorrem novos benefícios como vencer a timidez e o receio de falar em público. Além disso, pode-se falar no desenvolvimento do uso da linguagem matemática que é tão importante nos processos de ensino e de aprendizagem que envolvem essa disciplina.

A rotina expressiva dos alunos inicialmente fez com que refletíssemos sobre as dificuldades que poderíamos encontrar no transcorrer da pesquisa. Pois, conforme já dissemos, se por um lado temos muitos alunos bons, porque ao entrar na EPCAR fizeram uma prova que os seleciona, por outro lado, na verdade não lhes sobra muito tempo para atividades fora da sala de aula.

Tivemos receio também de que os alunos não entendessem o nosso objetivo e não concordassem em fazer a pesquisa ou de que, apesar de aceitarem, não tivessem compromisso sério com o trabalho ou pela falta de maturidade ou por não dominarem o assunto. Houve um momento em que os alunos estavam sobrecarregados, quando aplicamos o segundo questionário, mas nada disso comprometeu para que nossa pesquisa não lograsse êxito. Além disso, nós tínhamos entre os participantes desse trabalho de pesquisa, nove alunos que já haviam cursado o 3º ano do Ensino Médio antes de ingresso na EPCAR, mas, na verdade, pelos resultados apurados percebemos que esses alunos não foram motivo para que os resultados obtidos pudessem ser vistos como algo tendencioso.

Tudo isto é uma prova de que nós, professores, temos que estar motivados, pois não podemos jamais nos dar como vencidos deixando que pressuposições negativas ou temores infundados nos impeçam de buscar alternativas que possam trazer algo em prol do aprendizado.

Constituíram-se momentos importantes nessa pesquisa:

(i) aplicabilidade direta da metodologia empregada a outros temas da matemática bem como de outras áreas do conhecimento; (ii) interdisciplinaridade (iii) apresentação de contextualização; (iv) uso da história da matemática; (v) ouvir a voz do aluno; (vi) pesquisa feita pelos próprios alunos; (vii) benefício imediato para quem fez a pesquisa; (viii) exercício da expressão oral; (ix) iniciativa; (x) uso da linguagem matemática; (xi) simplicidade de recursos. A seguir, escolhemos alguns para comentarmos.

Sabemos que na proposta das Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio há uma recomendação de que parte da educação básica para o Ensino Médio seja desenvolvida de forma contextualizada e interdisciplinar. Assim o planejamento e a abordagem dos conteúdos do ensino e as situações de aprendizagem devem promover as diversas interações entre as várias disciplinas do currículo.

As afinidades de algumas disciplinas que se identificam, tais como a Matemática e a Física, por exemplo, oferecem uma oportunidade para que professores de mesma turma façam o planejamento de um ensino interdisciplinar. Baseando nisso um colega professor da área de Física apresentou aos alunos a aplicação dos Números Complexos no eletromagnetismo, o que foi uma oportunidade para que os alunos percebessem a contextualização envolvendo o assunto, já que a Matemática tem outros conteúdos nos quais a contextualização se faz com mais habitualidade.

A contextualização contribui para que o aluno desenvolva a capacidade de relacionar o que apreendeu com o que observou e a parte teórica com suas consequências e aplicações. Ela promove uma ligação da Matemática não só com outros temas da Ciência, como também faz uma interligação entre conteúdos da própria disciplina.

Não podemos deixar de mencionar a História da Matemática como uma importante aliada da contextualização, pois ao relatar a evolução dos fatos evidencia as dificuldades pelas quais determinados tópicos da Matemática tiveram que enfrentar ao serem estabelecidos. Com o estudo dos Números Complexos essa realidade é expressiva, pois os matemáticos da época tiveram resistência em aceitar os números imaginários e a formalização dos conceitos referentes a esse assunto foi muito demorada.

Nós fizemos essa pesquisa pensando na teoria dos Números Complexos, o que talvez possa levar muitos colegas a pensarem que se trata de trabalho que não tenha tanta importância tendo em vista que o conteúdo abordado não faz parte do currículo de algumas escolas e nem é cobrado em determinados exames de vestibular. Acreditamos que essa maneira de pensar é equivocada, pois a busca da aplicabilidade de determinado assunto feita pelos próprios alunos é uma prática que pode ser adotada para qualquer conteúdo, não só da Matemática, bem como pode se estender às demais disciplinas. Isso fica bem claro também na maneira de pensar do aluno:

> A20: É um recurso que deveria ser usado por todos os professores de ciências exatas e naturais, na maior parte possível dos conteúdos. Isso desperta o interesse, ao exibir-nos que o que é aprendido tem uma finalidade específica e poderá algum dia ser utilizado em nosso favor.

A observação desse aluno se enquadra perfeitamente no que dizem Boruchovitch e Bzuneck (2000, p.24-25), já destacado em nossas considerações finais.

Na nossa maneira de pensar, o professor há de ter um eterno compromisso frente ao aluno cumprindo a sua missão como o educador que não desiste, não acomoda, buscando sempre alternativas que propiciem um ensino de melhor qualidade.

Assim, esperamos que os colegas que tiverem a oportunidade de ler este trabalho de pesquisa possam também encontrar uma maneira não só de estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis, mas também, incentivar uma postura crítica acerca das aulas de Matemática nos níveis do Ensino Fundamental e Médio, que enfatize o papel central do conhecimento de matemática frente às exigências da sociedade moderna; esses são dois dos objetivos do PROFMAT que visa a uma melhoria nos processos de ensino e de aprendizagem.

Acreditamos que esta pesquisa pode ser o primeiro passo de uma longa caminhada. Alguns passos ainda podem ser dados por nós. Outros passos podem ser dados por outros interessados no PROFMAT. Ainda mais passos podem ser dados por aqueles que estão na sala de aula de matemática e desejarem utilizar-se do que apontamos aqui.

E é momento de encerrarmos. Cremos que caminhamos tal como preceituam os objetivos do PROFMAT. Dessa maneira, entendemos que durante todo o período de formação, em especial no processo de escrita desta dissertação, fomos estimulados pela melhoria do ensino de matemática no nível ao qual lecionamos. Fomos além, pois tomamos uma postura crítica acerca das aulas de matemática. Buscamos a ênfase do papel central do conhecimento de matemática frente às exigências da sociedade moderna. E, agora, podemos reafirmar que nos sentimos mais valorizados profissionalmente como professor tendo em vista nosso aprimoramento na formação. Acreditamos que esse trabalho atingiu o seu objetivo, pois como disse o aluno

A2: “Respondeu a pergunta tradicional do aluno: ‘Pra que vou usar isso na minha vida?’ ”

REFERÊNCIAS

[1] BAUMGART, J. K. *História da Álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. v.4.

[2] BORUCHOVITCH, E.; BZUNECK, J. A. *A Motivação do Aluno*. Petrópolis: Editora Vozes Ltda, 2001.

[3] BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias*: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

[5] CANTARUTI, A. C. R. *Um Estudo sobre a Influência de Emoções e Sentimentos no Processo Avaliativo de Matemática: uma perspectiva de pedagogos, psicólogos, alunos e professores do Ensino Médio da Escola Preparatória De Cadetes do Ar*. 2012. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação) - Universidade Americana

[6] DANTE, L. R. *Matemática*. Livro do Professor. São Paulo: Editora Ática, 2008.

[7] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Trad. Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

[8] FERREIRA, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[9] GARBI, G. G. *O Romance das Equações Algébricas*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

[10] GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[11] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 7ª ed. São Paulo: Editora Atual, 2005. v.6.

[12] LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras Histórias*. Rio de Janeiro: GRAFTEX Comunicação Visual, 1991.

[13] MORGADO, A. C.; CARMO, M. P.; WAGNER, E. *Trigonometria Números Complexos*. Rio de Janeiro: GRAFTEX Comunicação Visual, 1992.

[14] RODRIGUES, A. J. *Um Estudo das Identidades Matemáticas de Alunos do Ensino Médio da Escola Preparatória de Cadetes do Ar*. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Minas Gerais.

APÊNDICE A – CARTA DE ANUÊNCIA DO PROFESSOR ANTÔNIO RIBEIRO DE REZENDE NETO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) PARA PESQUISA COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Senhor Professor Antônio Ribeiro de Rezende Neto, Professor e atual Coordenador da Equipe de Professor de Física da Escola Preparatória de Cadetes do Ar,

Meu nome é Marisa Rezende Simão. Sou Professora da Equipe de Matemática na EPCAR desde 1996, cursando o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na Universidade Federal de Juiz de Fora. Como parte das atividades do curso de Mestrado, propus um projeto de pesquisa "Números Complexos: um estudo acerca dos conhecimentos prévios e das noções de aplicabilidade na perspectiva dos alunos do 3º ano do Ensino Médio", que será realizada por mim, com acompanhamento de minha orientadora do curso de Mestrado, Profª. Dra. Valeria Mattos da Rosa, professora do Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Com esta pesquisa pretendemos estudar como os alunos do último ano do Ensino Médio têm compreensão sobre os Números Complexos antes e depois da formalização dos conceitos referentes ao assunto.

Para que a pesquisa possa ser realizada, é necessário o desenvolvimento de um trabalho de campo que é constituído da realização de dois questionários com os alunos das turmas Fox e Golf, uma apresentação dos alunos dessas turmas em sala de aula acerca da aplicabilidade dos Números Complexos, de uma aula de um professor da área de física da EPCAR que contemple aplicações dos Números Complexos no seu universo e pelas anotações em caderno de campo que a pesquisadora fará.

Assim, gostaríamos de convidá-lo a ministrar uma aula para tais turmas e nos relatar sua experiência com os alunos sobre essa modalidade interdisciplinar de ensino. Garantimos, através deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, que a pesquisa não modificará ou prejudicará a rotina das demais aulas de física.

Os dados repassados pelo senhor relativos à aula serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação do comportamento ou atitude do senhor. Também garantimos que o senhor não será penalizado ou prejudicado se discordar em participar da pesquisa, ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa. Os resultados da pesquisa serão comunicados utilizando nomes fictícios para os alunos, tentando assim, preservar suas identidades. De outra forma, solicitamos, ainda, que nos autorize a divulgar no relato da pesquisa - Dissertação final do mestrado - seu nome como colaborador nessa tão importante tarefa.

Ao solicitar o seu consentimento, queremos esclarecer que a pesquisa em nada deverá prejudicar o andamento normal das aulas ou interferir de forma indesejada em seu cotidiano. Para isso, solicito que combine previamente com os alunos a melhor data para tal priorizando a manutenção de seus planejamentos e de seus interesses. Agradecemos desde já sua colaboração.

Atenciosamente,

Orientadora: Profª. Dra. Valéria Mattos da Rosa (valeria.rosa@ufjf.edu.br)

Mestranda: Profa. Marisa Rezende Simão (marisarsimao@gmail.com)

Telefone de contato: (xx)xxxx-xxxx

AUTORIZAÇÃO

AUTORIZAÇÃO DO PROFESSOR PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA: "Números Complexos: um estudo acerca dos conhecimentos prévios e das noções de aplicabilidade na perspectiva dos alunos do 3º ano do Ensino Médio", de acordo com os esclarecimentos fornecidos pela Profa. Dra. Valéria Mattos da Rosa, orientadora da pesquisa, e sua orientanda Profa. Marisa Rezende Simão.

Eu, ____ aceito o convite para ministrar a aula solicitada e dou o meu consentimento para publicação do meu nome no relato desta investigação "Números Complexos: um estudo acerca dos conhecimentos prévios e das noções de aplicabilidade na perspectiva dos alunos do 3º ano do Ensino Médio", nos termos propostos pelos pesquisadores responsáveis e por este documento de TCLE. Li e compreendi as informações fornecidas e recebi respostas para qualquer questão que coloquei acerca dos procedimentos da pesquisa. Entendi e concordo com as condições do estudo. Receberei uma cópia assinada deste formulário de consentimento. Aceito, voluntariamente, participar desta pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento.

Barbacena, de de 2013.

____

Assinatura

APÊNDICE B – PRIMEIRO QUESTIONÁRIO

Caro aluno,
O questionário abaixo se destina à minha Pesquisa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora UFJF. A Dissertação tem o seguinte título: "Números Complexos: um estudo acerca dos conhecimentos prévios e noções de aplicabilidade na perspectiva de alunos do 3º ano do Ensino Médio".
Suas respostas às questões abaixo irão ajudar-me na compreensão de como você se posiciona diante de um assunto que se configura como uma novidade na matemática do 3º ano do Ensino Médio, ou seja, os Números Complexos. Ainda que você não tenha noção completa acerca da totalidade do assunto, procure responder a todas as questões. Para aquelas em que você não souber a resposta, tente explicar o processo pelo qual se daria a resolução.
Sua colaboração é de fundamental importância.
Pela sua contribuição, desde já agradeço.

Marisa Rezende Simão

Nome Completo: ______________________________ Idade: anos

1. Primeira vez que vai cursar o 3º ano do Ensino Médio? ( )Sim ( )Não

2. Durante toda a sua vida escolar, você tem aulas de Matemática. Se você tivesse chance de poder escolher as disciplinas para cursar, você escolheria Matemática? ( )Sim ( )Não. Por quê?

____

____

3. O quanto você compreende o que está sendo ensinado nas aulas de Matemática?
( )Sempre ( )Na maioria das vezes ( )De vez em quando
( )Quase nunca ( )Nunca

4. Quais são os conjuntos numéricos? Com suas palavras, descreva cada um.

____

____

____

____

____

____

5. O que você caracterizaria como "Estudos dos Números Complexos?"

6. Em que situações de sala de aula você já ouviu a expressão "Números Complexos"?

7. Dos números abaixo, marque aqueles que você julga que são "Números Complexos".

a) π b) i c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{4}$ e) $\sqrt{-2}$

f) $\sqrt{-4}$ g) $log_3 2$ h) e i) $x^2 = 2$ j) $x^2 = 4$

k) $x^2 = -2$ l) $x^2 = -4$ m) e^π n) $3i$ o) $x^3 = 2$

p) $x^3 = 4$ q) $x^3 = -2$ r) $x^3 = -4$ s) 0

8. Dos números abaixo, marque aqueles que você julga que pertencem ao "Conjunto dos Números Complexos".

a) π b) i c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{4}$ e) $\sqrt{-2}$

f) $\sqrt{-4}$ g) $log_3 2$ h) e i) $x^2 = 2$ j) $x^2 = 4$

k) $x^2 = -2$ l) $x^2 = -4$ m) e^π n) $3i$ o) $x^3 = 2$

p) $x^3 = 4$ q) $x^3 = -2$ r) $x^3 = -4$ s) 0

9. Resolva as equações:

a) $3x - \sqrt{7} = \pi$

b) $(3x + 1).(3x - 1) - 9(x + 1)^2 = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $(x + 1).(x - 1) = 2$

e) $(x - 1)^3 = 0$

f) $x^3 - 1 = 0$

g) $x^2 - 2x + 5 = 0$

10. Sabe-se que o grau de uma equação determina o número de raízes da equação. Diante desta afirmativa como você explicaria sua resolução nos itens:

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

11. Você já ouviu ou pensou alguma aplicação de números que fosse além dos "Números Reais"? Em caso positivo, qual?

____

____

____

____

12. Para cada item a seguir, assinale o que melhor se adapta a você.

	Não fico nervoso	Fico um pouco nervoso	Fico muito nervoso	Fico muito, muito nervoso
Iniciar um novo tópico de Matemática.				
Estudar um assunto sozinho que o professor não explicou ainda.				
Ouvir o professor de Matemática em classe.				
Ser questionado da aplicabilidade de determinado assunto em Matemática.				
Ter que buscar aplicabilidade de determinado assunto em Matemática.				

Tabela 38 –

APÊNDICE C – SEGUNDO QUESTIONÁRIO

Caro aluno, o questionário a seguir é parte de um estudo que estou desenvolvendo no Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Assim como já desenvolvemos algumas atividades em sala a respeito do Conjunto dos Números Complexos, solicito de você um pouco mais de empenho ao responder as questões abaixo. Sua sinceridade será de grande importância para o trabalho que estou desenvolvendo e servirá de subsídio a aulas futuras bem como outras pesquisas e atividades que poderei desenvolver.

Desde já agradeço sua colaboração!

1) Qual era sua opinião em relação ao conteúdo "Números Complexos" antes de iniciarmos as atividades propostas para as aulas desse assunto na EPCAR?

____

____

____

____

2) Sua opinião hoje é diferente? ( )Sim ( )Não

Conte-me sobre isso. Gostaria de saber os motivos que você tem para ter tal posicionamento.

____

____

____

____

3) Qual a sua opinião sobre saber da aplicabilidade do assunto "Números Complexos" antes mesmo de ter maior aprofundamento no conteúdo? Trouxe maior interesse para o processo de aprendizagem?

____

____

____

____

4) E sobre o fato da aplicabilidade ter sido apresentada por colegas? Foram eles que pesquisaram e trouxeram para a turma. Se você pensa que isso fez diferença, conte-me

como.

5) Qual é sua opinião sobre a contextualização de questões sobre o conteúdo “Números Complexos”?

6) Apresentamos o conteúdo “Números Complexos” por meio de partes da história da matemática. Você acha que o uso da história da matemática pode ser um aliado no processo de aprendizagem? Se você pensa que isso fez diferença, conte-me como.

7) E a prática da interdisciplinaridade apresentada valeu a pena? Conte-me como.

8) No quadro a seguir, explicite características positivas e características negativas da abordagem que foi feita para iniciar o conteúdo de números complexos.

Preencha seguindo uma ordem de maior importância para você seguindo um ranking de valores pessoais. (Não é necessário completar o quadro todo! Coloque aquilo que é mais relevante)

Características positivas	Características negativas
1)	1)
2)	2)
3)	3)

4)	4)
5)	5)
6)	6)
7)	7)
8)	8)
9)	9)
10)	10)

Muito Obrigada!

Marisa Rezende Simão

APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS ALUNOS DA ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES DO AR (EPCAR)

Caros alunos da turma “F” do “3º ano - 2013” da EPCAR,

Estamos encaminhando este documento para consentimento da realização da pesquisa em sua turma, cuja finalidade será fazer um estudo da compreensão dos conhecimentos prévio e formal, descritos por aqueles anteriores e posteriores à formalização do assunto em sala de aula, respectivamente, e da aplicabilidade de determinado tema da Matemática, bem como a contextualização de questões que podem influenciar nos processos de ensino e de aprendizagem, junto aos alunos da Escola Preparatória de Cadetes do Ar.

A pesquisa será realizada por mim, Marisa Rezende Simão, professora de Matemática da EPCAR há mais de dezessete anos com acompanhamento de minha orientadora do Curso de Mestrado, Professora Doutora Valéria Mattos da Rosa, da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Esta pesquisa será realizada para construir minha dissertação do Curso Pós-graduação stricto sensu, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, que estou cursando junto à Universidade Federal de Juiz de Fora. É uma atividade obrigatória para obtenção do título de Mestre e tem como objetivo principal o aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica.

A pesquisa envolverá aplicação de questionários com alguns alunos, gravação em áudio e vídeo de aulas de matemática e diário de campo através de registro escrito. Informamos que a pesquisa não modificará ou prejudicará a rotina das aulas de matemática. Os dados coletados nos questionários, nas entrevistas e nas aulas serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação do comportamento ou atitude de vocês. Também garantimos que nenhum de vocês será penalizado ou prejudicado se discordar em participar da pesquisa, ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa. Os resultados da pesquisa serão comunicados através de nomes fictícios para que as identidades de vocês sejam preservadas.

Agradecemos desde já sua colaboração.

Atenciosamente,

Orientadora: Prof.ª Doutora Valéria Mattos da Rosa (valeria.rosa@ufjf.edu.br)

Mestranda: Profa. Marisa Rezende Simão (marisarsimao@gmail.com)

Telefone de contato: (xx)xxxx-xxxx

AUTORIZAÇÃO DOS ALUNOS:

Eu, (nome completo do aluno), concordo em participar da pesquisa acima citadanos termos propostos deste documento, permitindo filmagem de aulas, respondendo aos questionários e/ou participando de entrevista com gravação em áudio e vídeo.

____ , de de 2013.

(Assinatura do aluno/data)

APÊNDICE E – ANUÊNCIA DOS PAIS OU RESPONSÁVEIS

COMUNICANDO INTENÇÃO, OBJETIVOS E PROCEDIMENTOS DE PESQUISA A SER REALIZADA NA TURMA “F” DO TERCEIRO ANO 2013 DO ENSINO MÉDIO DA ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES DO AR (EPCAR)

Caros pais dos alunos da turma “F” do terceiro ano do Ensino Médio,

Meu nome é Marisa Rezende Simão. Sou Professora de Matemática da EPCAR há mais de dezessete anos e atualmente curso o Mestrado em Matemática na Universidade Federal de Juiz de Fora em Minas Gerais. Como parte das atividades do curso de Mestrado, estou propondo um projeto de pesquisa que tem por objetivo fazer um estudo da compreensão dos conhecimentos prévio e formal, descritos por aqueles anteriores e posteriores à formalização do assunto em sala de aula, respectivamente, e da aplicabilidade de determinado assunto da Matemática, bem como a contextualização de questões que podem influenciar nos processos de ensino e de aprendizagem, junto aos alunos da Escola Preparatória de Cadetes do Ar.

Assim, estou encaminhando este documento para solicitar o consentimento dos Srs. para a realização da referida pesquisa a se realizar na turma “F”, em que seu filho é aluno, no ano letivo de 2013.

A pesquisa será realizada apenas com consentimento de pais e/ou responsáveis de todos os alunos da turma, bem como dos próprios alunos. Os alunos serão informados da pesquisa, em sala de aula, por mim, responsável pela pesquisa.

A realização desta pesquisa será feita por mim, com acompanhamento de minha orientadora do Curso de Mestrado, Professora Doutora Valéria Mattos da Rosa, da Universidade Federal de Juiz de Fora em Minas Gerais.

A pesquisa envolverá os seguintes instrumentos: questionários para os alunos, registro em áudio e vídeo de aulas de Matemática e diário de campo através de registro escrito.

Informamos que a pesquisa não modificará ou prejudicará a rotina das aulas de Matemática. Os dados coletados serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação do comportamento ou atitude dos alunos. Também garantimos que nenhum dos alunos será penalizado ou prejudicado se discordar em participar da pesquisa, ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa. Os resultados da pesquisa serão comunicados através de nomes fictícios para os alunos e colaboradores, que terão, assim, suas identidades preservadas.

Agradecemos desde já sua colaboração.

Atenciosamente,

Orientadora: Prof.ª Doutora Valéria Mattos da Rosa (valeria.rosa@ufjf.edu.br)

Mestranda: Profa. Marisa Rezende Simão (marisarsimao@gmail.com)

Telefone de contato: (xx)xxxx-xxxx

AUTORIZAÇÃO DOS PAIS E/OU RESPONSÁVEIS PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA, de acordo com os esclarecimentos dados acima.

Concordo em colaborar e autorizo o aluno a participar da pesquisa que tem por objetivo fazer um estudo da compreensão dos conhecimentos prévio e formal, descritos por aqueles anteriores e posteriores à formalização do assunto em sala de aula, respectivamente, e da aplicabilidade de determinado assunto da Matemática, bem como a contextualização de questões, que podem influenciar nos processos de ensino e de aprendizagem, junto aos alunos da Escola Preparatória de Cadetes do Ar, com questionários para os alunos, registro em áudio e vídeo de aulas de Matemática e diário de campo através de registro escrito.

(assinatura do pai ou responsável)

Discordo e desautorizo o aluno a participar da pesquisa em questão.

(assinatura do pai ou responsável)

APÊNDICE F – AUTORIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO

Exmo Sr Brigadeiro do Ar Alex Picchi Izmailov, Comandante da Escola Preparatória de Cadetes do Ar,

Eu, Marisa Rezende Simão, Professora da Equipe de Matemática na EPCAR desde 1996, estou cursando o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na Universidade Federal de Juiz de Fora, venho solicitar junto a Vossa Excelência a autorização para realizar, na EPCAR, em duas turmas do 3º Esquadrão uma pesquisa de campo.

Como parte das atividades do curso de Mestrado, almejo propor uma pesquisa junto a alunos e professores de Matemática do 3º ano do CPCAR, nas turmas Fox e Golf. Essa pesquisa será realizada para construir minha dissertação do Curso e é pré-requisito deste. As atividades de investigação serão realizadas para embasar minha dissertação e têm como objetivo geral o aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica.

A pesquisa será realizada por mim, com acompanhamento de minha orientadora, Professora Doutora Valéria Mattos da Rosa, docente da Universidade Federal de Juiz de Fora em Minas Gerais.

Com essa pesquisa, temos como um dos objetivos específicos fazer um estudo da compreensão dos conhecimentos prévio e formal, descritos por aqueles anteriores e posteriores à formalização do assunto em sala de aula, respectivamente, e da aplicabilidade de determinado assunto da Matemática, bem como a contextualização de questões que podem influenciar nos processos de ensino e de aprendizagem, junto aos alunos da Escola Preparatória de Cadetes do Ar.

Para que a pesquisa possa ser realizada, é necessário o desenvolvimento de um trabalho de campo que será constituído pela realização de questionários que serão respondidos pelos alunos das turmas Fox e Golf, pelo acompanhamento de algumas aulas de Matemática com gravação de áudio/vídeo dessas aulas e pelas anotações que farei durante todas essas atividades.

Vale ressaltar que essas atividades não modificarão ou prejudicarão a rotina dos alunos nem mesmo as aulas de Matemática. Os dados coletados nos questionários e nas aulas serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação do comportamento ou atitude dos envolvidos. Os resultados da pesquisa serão comunicados através de nomes fictícios para os envolvidos, que terão, assim, suas identidades preservadas.

Agradecemos desde já sua colaboração.

Atenciosamente,

Orientadora: Prof.ª Doutora Valéria Mattos da Rosa (valeria.rosa@ufjf.edu.br)

Mestranda: Profa. Marisa Rezende Simão (marisarsimao@gmail.com)

Telefone de contato: (xx)xxxx-xxxx

AUTORIZAÇÃO

Eu, Brigadeiro do Ar Alex Picchi Izmailov, Comandante da Escola Preparatória de Cadetes Ar, concordo que a pesquisa nos termos acima, cujo objetivo será fazer um estudo da compreensão dos conhecimentos prévio e formal, descritos por aqueles anteriores e posteriores à formalização do assunto em sala de aula, respectivamente, e da aplicabilidade de determinado assunto da Matemática, bem como a contextualização de questões que podem influenciar nos processos de ensino e de aprendizagem, junto aos alunos da Escola Preparatória de Cadetes do Ar, seja realizada.

Brigadeiro do Ar Alex Picchi Izmailov

Comandante da Escola Preparatória de Cadetes do Ar