



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

# Projeção de Mercator

Edem Assunção Baima Neto

Teresina - 2014

**Edem Assunção Baima Neto**

**Dissertação de Mestrado:**

**PROJEÇÃO DE MERCATOR**

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.

**Teresina - 2014**

Baima, Edem Assunção.

Projeção de Mercator

Edem Assunção Baima Neto – 2014.

"Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa".

1. Geometria. 2. Matemática . 4 . Projeção. I. Título.

CDD xxx

**Edem Assunção Baima Neto**

# **Projeção de Mercator**

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Piauí para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa (Orientador - UFPI).
- Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes (UFPI).
- Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Junior (UESPI).

**Teresina - 2014**

*Aos meus pais Reginaldo e Clecimar.*

*A minha esposa Alzeni.*

*Aos meus irmãos e amigos, pelo apoio e  
companheirismo.*

# Agradecimentos

Nesse momento tão especial da minha vida, quero agradecer primeiramente a Deus por mais essa conquista e por todo o sucesso que obtive em minha vida.

Agradeço aos meus pais Reginaldo e Clecimar, pelas broncas, dedicação, incentivo, esforço, carinho, cuidado e principalmente pelo exemplo de pessoas que são. Também agradeço o apoio e companheirismo do meu irmão Edson e dos demais irmãos.

A minha esposa Alzeni, por está ao meu lado todo esse tempo, por me apoiar sempre que precisei, pelas brigas, pela sua compreensão e carinho nos momentos difíceis e por me proporcionar momentos inesquecíveis de alegria ao seu lado.

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Paulo Alexandre, que foi peça fundamental desde a escolha do tema até a conclusão do trabalho, pela paciência e amizade.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática pelos seus ensinamentos e aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram direta ou indiretamente para meu enriquecimento pessoal e profissional.

Aos meus colegas e amigos de graduação, em especial ao meu amigo Ítalo Dowell pelas inúmeras ajudas todos esses anos.

Aos meus colegas de mestrado, em especial ao meu amigo Diego Fer-

reira por toda ajuda e paciência nesses dois anos de estudo e aos amigos da gelada pelos momentos de diversão e boas conversas.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse mestrado.

*“Se você quer vencer na vida é muito simples; Conheça o que faz; Ame o que faz; E acredite no que faz.”.*

WILL ROGERS.

# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo evidenciar a matemática por trás das Projeções Cartográficas, com destaque para a Projeção de Mercator, incentivando a inclusão e adequação de atividades que explorem a matemática nas projeções cartográficas. Após uma pequena abordagem da história de Mercator e do desenvolvimento das projeções estudadas, com o uso de alguns resultados da geometria plana, geometria espacial e do cálculo de integrais de superfícies chega-se a algumas fórmulas matemáticas para facilitar o desenvolvimento das projeções estudadas na educação básica. Um dos propósitos deste trabalho é sugerir atividades interdisciplinares, a serem desenvolvidas em nível de educação básica, que estimulem a curiosidade dos alunos pelos conhecimentos científicos nelas contidos.

Palavras-chave: Projeção Estereográfica; Projeção de Mercator.

# Abstract

This work aims to show the math behind the Cartographic Projections, especially the Mercator projection, encouraging inclusion and appropriateness of activities that explore math in map projections. After a short approach to the history and development of Mercator projections studied, using some results of plane geometry, spatial geometry and calculation of surface integrals we arrive at some mathematical formulas to facilitate the development of projections studied in education Basic. One purpose of this paper is to suggest interdisciplinary activities, to be undertaken at the level of basic education, to stimulate students' curiosity by scientific knowledge contained therein.

Keywords: Stereographic projection; Mercator projection.

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Resumo</b>  | <b>7</b>  |
| <b>Abstract</b>  | <b>8</b>  |
| <b>Introdução</b>  | <b>11</b> |
| <b>1 Mercator: vida e obra</b>                                   | <b>13</b> |
| <b>2 Geometria das Projeções</b>                                 | <b>17</b> |
| 2.1 Geometria Plana . . . . .                                    | 17        |
| 2.2 Geometria Espacial . . . . .                                 | 19        |
| 2.2.1 A superfície esférica em coordenadas cartesianas . . . . . | 19        |
| 2.2.2 Planos e Superfícies Esféricas . . . . .                   | 21        |
| 2.3 Integrais de Superfícies . . . . .                           | 26        |
| <b>3 Projeções Cartográficas</b>                                 | <b>29</b> |
| 3.1 Projeção Eestereográfica ou Plana . . . . .                  | 31        |
| 3.1.1 A Expressão Matemática . . . . .                           | 32        |
| 3.2 Projeção Cilíndrica ou de Mercator . . . . .                 | 35        |
| 3.2.1 A Expressão Matemática . . . . .                           | 36        |
| <b>4 Considerações Finais</b>                                    | <b>40</b> |



# Introdução

Trabalhando lado a lado com as ideias propostas pela criação do PROF-MAT, que visa o aprimoramento da formação profissional dos docentes com ênfase no domínio aprofundado do conteúdo matemático relevante para a atuação docente e tendo como seu principal objetivo proporcionar a formação matemática aprofundada, relevante e articulada com exercício da docência no Ensino Básico, visando fornecer ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de matemática, foi que se deu o desenvolvimento deste trabalho.

Este trabalho pretende propor uma articulação entre a Geometria Esférica e a Geografia do globo terrestre, visando apresentar alguns resultados elaborados a partir de uma situação problema contextualizada que mostra a relação interdisciplinar entre esses domínios do conhecimento.

Em todo o trabalho adotaremos a superfície do globo terrestre como a superfície esférica para um melhor desenvolvimento e praticidade com uso da geometria, com o objetivo de se desenvolver uma situação problema através do uso de fórmulas matemáticas que facilitem o entendimento e uso dos alunos na educação básica. Tal situação-problema, projeção da superfície terrestre em um plano, nos conduziu a exploração de algumas noções vistas mais intensamente sob o ponto de vista geográfico, a saber: polos, linha do equador e paralelos terrestre [1].

A motivação inicial deste trabalho baseou-se em contextualizar a Matemática e relacioná-la com fatos e problemas mais próximos do cotidiano. Na verdade essa contextualização reflete a vontade de mudar a abordagem dada ao ensino da Geometria, como forma de reverter este quadro, ou seja, para tentar tornar interessante e útil a matemática do ponto de vista dos alunos, a ponto de estimular a curiosidade do aluno para querer estudá-la. Sob essa perspectiva, acredita-se que sejam possíveis mudanças positivas, mas para que isso ocorra, torna-se necessária a aplicação de metodologias para tornar as aulas mais interessantes.

Como objetivo principal, a Projeção de Mercator, será trabalhada ao longo do desenvolvimento desse trabalho com destaque para suas principais características e vantagens em comparação com outras projeções, principalmente a Projeção Estereográfica. Trazendo resultados matemáticos que nos ajudem a entender o tamanho da importância e da contribuição de Mercator para a Cartografia e para o mundo [2].

Trabalho esse organizado em poucos capítulos, e para iniciar após a "Introdução", apresentaremos um pouco da "Vida e Obra de Mercator", trazendo um breve contexto de sua vida e destacando sua importante contribuição para a Cartografia de um modo geral. Em seguida, vem o Capítulo "Projeções Cartográficas" trazendo o contexto em que se encaixa a matemática com as projeções da superfície terrestre em superfícies intermediárias, fazendo uso da geometria com o desenvolver de fórmulas matemáticas que ajudem no objetivo do nosso trabalho. No Capítulo seguinte "Geometria das Projeções" traz conceitos, definições e fórmulas matemáticas usadas ao longo do trabalho e que serão de grande importância para nossas conclusões. Por fim o último Capítulo "Considerações Finais" com resultados comparativos e mostrando os objetivos alcançados.

# Capítulo 1

## Mercator: vida e obra



Figura 1.1: Gerardus Mercator

Gerard de Cremer (latinizado Gerardus Mercator = mercador) nasceu em 5 de março de 1512 na região de Flandres (hoje Bélgica) [3]. Em 1532 Mercator formou-se em Filosofia na Universidade de Louvain, ele pesquisava sobre a questão da origem do mundo e discordava da doutrina da Igreja Católica e de seus filósofos. Dois anos depois, Mercator voltou para Louvain para estudar Matemática, ele queria aplicar o conhecimento obtido

em matemática na Cosmografia e se tornou assistente de Gemma Frisius (1508-1555), matemático, astrônomo e construtor de globos, mapas e instrumentos astronômicos. Junto com a aprendizagem dessas artes, Mercator chegou a dar aulas de Matemática na universidade e até construir um globo feito com blocos de cobre para o imperador Carlos V [4].

Em 1537 Mercator confeccionou seu primeiro mapa, tendo como tema a representação da Palestina e a partir daí, e no decorrer de toda sua vida, ele produziu inúmeros mapas (e o primeiro atlas), globos e até manuais de caligrafia. Mercator não foi apenas cartógrafo, mas também se encarregava, junto com seus filhos, da comercialização dos seus mapas e atlas, dos quais, nas suas edições luxuosas quase todas eram vendidas.

Em 1569 Mercator revolucionou a cartografia ao conseguir a façanha de representar o globo terrestre em um retângulo plano, a “Projeção de Mercator”, na época, chamado por ele de “Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usum Navigatium Emendate (”Nova e aumentada descrição da Terra, corrigida para uso em navegação”). Diferente das representações cartográficas anteriores como os mapas de Ptolomeu ou as cartas de Portolana, do fim da Idade Média, o mapa mundi representado por Mercator não usava uma malha de coordenadas aleatórias, mas se baseava na matematização do real na qual Mercator concebia a Terra como uma esfera (=tridimensional) e não uma superfície (=bidimensional), o que permitiu traçar o sistema de coordenadas, "em que o nível de distorção seja matematicamente controlado"[4].

Felizmente, Mercator era melhor com mapas do que com nomes e sua projeção foi, por séculos, utilizada na navegação (como o nome original sugeria), fazendo com que todas as cartas náuticas usadas até então se tornassem obsoletas, sendo até hoje usada em muitos atlas e, praticamente, em todos os mapas de fusos horários. Tratando-se de uma projeção conforme (con-

servação dos ângulos entre os meridianos e paralelos no globo), a forma de qualquer pequena área, tanto no globo como no mapa, é a mesma, enquanto, dada a variação da escala do mapa, áreas extensas, sobretudo nas altas latitudes, são objetos de deformações consideráveis. Mantendo-se a linha do equador como grandeza real, tanto os meridianos quanto os paralelos são representados por linhas retas, como no globo, se cortam em um ângulo de  $90^\circ$ .

Mercator conseguiu, utilizando 24 linhas verticais (meridianos) e 12 horizontais (paralelos) que iam se afastando umas das outras conforme se aproximavam dos polos, representar todos os continentes da terra em um mapa que podia ser utilizado para traçar rotas através de “curvas-traçado” (que ele chamava de “loxódromo”) de maneira surpreendentemente eficiente para a época.

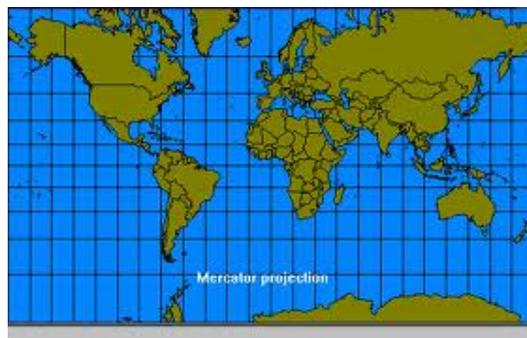


Figura 1.2: Projeção de Mercator

Mas, como toda projeção cartográfica, a de Mercator possui distorções, que ocorrem principalmente nos polos. Devido à forma como são representados, os continentes afastados da linha do Equador (Europa, Canadá, Groenlândia, etc.) ficam maiores do que são na realidade. Um exemplo comum utilizado, é a Groenlândia que, na Projeção de Mercator aparece maior que a América do Sul, quando, na verdade, a América do Sul é bem maior. Essa

distorção cartográfica faz com que a precisão na medição das distâncias seja tão prejudicada quanto maior for a latitude da rota medida. O que, porém não prejudicou o trabalho de Mercator que passou a ser considerado o pai da cartografia [2].

A partir da projeção de Mercator foram desenvolvidas outras formas de projeção: a “Mercator Transversa”, projeção cilíndrica com o plano tangente ao Equador e usada em mapeamentos topográficos e base para projeção UTM (Universal Transversa de Mercator); a “Oblíqua de Mercator”, com o plano tangente a um círculo máximo qualquer que não é o Equador nem o meridiano de Greenwich e é usado para projetar imagens de satélite no sistema Landsat, serviu de base para a projeção SOM (Space Oblique Mercator) e para mapear regiões como o Alaska, que se estendem em direção oblíqua; e, a “Projeção Equivalente de Lambert”, que é parecida com a de Mercator só que com o plano tangente ao Equador, de forma que a escala na linha do Equador é a real e conforme vai se aproximando dos pólos vai diminuindo causando uma distorção aparente, inversamente proporcional a da projeção de Mercator.

# Capítulo 2

## Geometria das Projeções

### 2.1 Geometria Plana

Vamos assumir os conceitos básicos de **ponto**, **reta** e **plano**, como conhecidos [5].

**Definição 2.1.** Sejam  $P = (a, b)$  e  $Q = (c, d)$  pontos num plano  $\pi$  dados pelas suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais  $OXY$ . Assim a distância entre os pontos  $P$  e  $Q$  é dado por:  $d(P, Q) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ .

**Exemplo 2.1.** Determine a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ , para  $A = (-1, 2)$  e  $B = (0, -2)$ .

**Solução:** Temos:

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \sqrt{(0 + 1)^2 + (2 + 2)^2} \\ &= 3.\end{aligned}$$

**Definição 2.2.** O círculo  $C$  de centro no ponto  $A \in \pi$  e raio  $r > 0$  é o conjunto que consiste dos pontos do plano  $\pi$  situados à distância  $r$  do ponto

$A$ , ou seja:

$$C = \{P \in \pi \mid d(P, A) = r\}.$$

Se  $A = (a, b)$  num sistema de eixos ortogonais  $OXY$  no plano  $\pi$ , e  $P = (x, y) \in C$ , então:  $d(P, A) = r \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . Assim associamos ao círculo  $C$  a equação  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos.

Em um círculo de centro  $O$  e raio  $r$ , também denominamos **raio** do mesmo a todo segmento que une o centro  $O$  a um de seus pontos. Uma **corda** é um segmento que une dois pontos quaisquer do círculo e o **diâmetro** uma corda que passa por seu centro.

**Definição 2.3.** A área de um retângulo de base  $b$  e altura  $h$  é definida como  $b.h$ .

**Definição 2.4.** O comprimento de uma circunferência de raio  $r$  é  $2\pi r$ .

**Definição 2.5.** A área do círculo de raio  $r$  é  $\pi r^2$ .

**Exemplo 2.2.** Determine a área  $A$  e o comprimento  $C$  do círculo de raio  $5\text{cm}$ .

**Solução:** Temos que,

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot 5^2 & \text{e} & & C &= 2 \cdot \pi \cdot 5 \\ &= 25\pi. & & & &= 10\pi. \end{aligned}$$

## 2.2 Geometria Espacial

### 2.2.1 A superfície esférica em coordenadas cartesianas

A partir dessa seção usaremos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem  $O$  [5].

**Definição 2.6.** Sistema formado por três retas mutuamente perpendiculares que se intersectam em um único ponto chamado de **origem**, e onde:

- Essas retas são ditas **eixos ordenados** chamados de **eixo OX**, **eixo OY** e **eixo OZ**;
- Cada dois eixos formam um plano que é ortogonal ao eixo remanescente;
- Esses planos, são ditos **planos ordenados**, são chamados de **plano xy**, **plano xz** e **plano yz**;
- Os planos ordenados dividem o espaço em oito partes chamadas de **octantes**;
- Cada ponto  $P$  do espaço corresponde, de forma biunívoca a um terno ordenada de números reais **(a,b,c)**;
- A coordenada "a" corresponde a distância de  $P$  até o plano  $yz$ , a coordenada "b" corresponde a distância de  $P$  até o plano  $xz$  e a coordenada "c" corresponde a distância de  $P$  ao plano  $xy$ ;
- A origem corresponde ao terno  $(0, 0, 0)$ .

Dado um ponto  $P = (x, y, z)$  do espaço em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem  $O$  (ver Figura 4.3), se aplicarmos o Teorema de Pitágoras, primeiramente no triângulo  $\triangle OQR$ , determinamos a distância  $d(O, Q) = \sqrt{x^2 + y^2}$  e depois, no triângulo  $\triangle OPQ$ , concluímos

que a distância de P até O é dada por

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

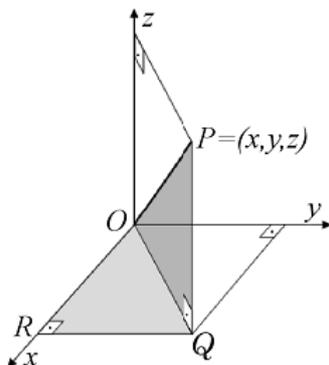


Figura 2.1: Sistema Ortogonal

De modo geral, a distância entre os pontos  $P = (x, y, z)$  e  $A = (p, q, r)$  é dada por

$$d(P, A) = \sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2}.$$

Assim, dado  $R \in \mathbb{R}$ , ( $R > 0$ ) representamos uma superfície esférica  $S$  de centro  $A = (p, q, r)$  e raio  $R$  pelo conjunto de todos os pontos  $P$  tais que

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2 = R^2.$$

A equação acima é chamada de equação reduzida da superfície esférica  $S$  que, quando desenvolvida, fica na forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = d = 0,$$

onde  $a, b, c, d$  são números reais tais que  $a = -2p$ ,  $b = -2q$ ,  $c = -2r$  e  $d = p^2 + q^2 + r^2 - R^2$ .

A equação acima é chamada de equação geral da superfície esférica  $S$  e é importante ressaltar que nem toda equação dessa forma representa uma superfície esférica, pois é necessário que, quando escrita na forma reduzida,  $R$  seja positivo, ou seja,  $R > 0$  e como

$$\begin{aligned} R^2 &= p^2 + q^2 + r^2 - d \\ &= \sqrt{p^2 + q^2 + r^2 - d} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d} \end{aligned}$$

então

$$R > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 > 4d.$$

Veja no exemplo abaixo uma forma de verificar isso.

**Exemplo 2.3.** Verificar se  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 2z + 26 = 0$  representa uma superfície esférica.

**Solução:** Basta completar os quadrados da equação dada

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 2z + 26 &= -26 \\ (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 2z + 1) &= -26 + 16 + 4 + 1 \\ (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 &= -5 \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 2z + 26 = 0$  representa o conjunto vazio e não uma superfície esférica, pois não existem  $x, y$  e  $z$  tais que a soma de seus quadrados seja negativa.

## 2.2.2 Planos e Superfícies Esféricas

A relação entre superfícies esféricas e planos no espaço é similar com a relação entre circunferências e retas no plano [5].

**Definição 2.7.** Dado um ponto  $O$  e um número real  $r$ , chamamos de **superfície esférica de raio  $r$  e centro  $O$** , indicada por  $S$ , o conjunto de todos os pontos  $P$  do espaço tais que

$$d(P, O) = r$$

onde  $d(P, O)$  denota a distância entre  $P$  e  $O$ .

**Definição 2.8.** Dado um ponto  $O$  e um número real  $r$ , chamamos de **esfera de raio  $r$  e centro  $O$** , indicada por  $E$ , o conjunto de todos os pontos  $P$  do espaço tais que

$$d(P, O) \leq r .$$

Os pontos que pertencem à esfera e não pertencem à superfície esférica a ela correspondente, são chamados de **pontos interiores à superfície esférica**.

Um plano  $\Pi$  é **tangente** a uma superfície esférica  $S$  se a intersecção entre ambos é um único ponto que é chamado **ponto de tangência**. Se  $\Pi \cap S$  contém mais de um ponto, então o plano é **secante** a superfície esférica.

**Definição 2.9.** O plano **tangente a  $S$  em  $P$** , designado por  **$\text{Tp}S$** , é o plano que passa por  $P$  e é paralelo ao plano que passa pela origem formado pelas retas tangentes a  $S$  em  $P$ .

O teorema abaixo caracteriza o plano tangente a uma superfície esférica.

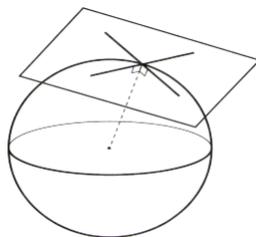


Figura 2.2: Plano tangente.

**Teorema 2.1.** Um plano perpendicular a um raio na sua extremidade comum com a superfície esférica é tangente à mesma. Reciprocamente, todo plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência.

Demonstração: Sendo  $\Pi$  um plano perpendicular ao raio  $\overline{OT}$  em  $T$ , vamos mostrar que nenhum outro ponto de  $\Pi$  está na superfície esférica.

Seja  $P$  um ponto de  $\Pi$ ,  $P$  distinto de  $T$ . Como  $\Pi$  é perpendicular a  $\overline{OT}$  temos que o triângulo  $OPT$  é retângulo com hipotenusa  $\overline{OP}$  e os catetos  $\overline{OT}$  e  $\overline{PT}$ . Logo  $\overline{OP} > \overline{OT} = r$  e, portanto,  $P$  não está na superfície esférica.

Reciprocamente, seja  $\Pi$  um plano tangente à superfície esférica no ponto  $T$ . Suponha, por absurdo, que  $\Pi$  não seja perpendicular ao raio  $\overline{OT}$ . Vamos mostrar que essa hipótese nos leva a uma contradição.

Sendo  $F$  o pé da perpendicular ao plano  $\Pi$ , traçada a partir de  $O$ , temos  $F \neq T$ , pois  $\Pi$  não é perpendicular a  $\overline{OT}$ . Seja  $R$  o ponto da reta que passa por  $\overline{FT}$ , tal que  $F$  é ponto médio de  $\overline{TR}$ . Então o  $\triangle OFR \cong \triangle OFT$  (pelo critério LAL de congruência de triângulos) de modo que  $OR = OT = r$ , então temos que  $R \in S$ . Logo  $\Pi$  intersecta  $S$  em um ponto distinto  $T$ , o que é um absurdo pois  $\Pi$  é um plano tangente a  $S$ .

**Teorema 2.2.** A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio.

Demonstração: Dado uma superfície esférica  $S$  com centro  $O$  e raio  $r$  e um plano  $\Pi$  que passa por  $O$ , a interseção  $S \cap \Pi$  é o conjunto de todos os pontos de  $\Pi$  cuja a distância a  $O$  é igual a  $r$ . Essa é exatamente a definição de uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ .

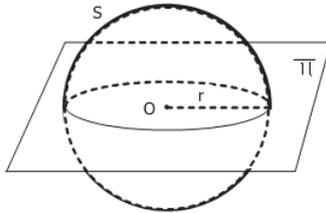


Figura 2.3: Circunferência máxima.

Obs: A interseção da superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é chamada de circunferência máxima da superfície esférica (No globo terrestre essa circunferência é representada pela linha do Equador).

**Teorema 2.3.** Se um plano contém um ponto do interior de uma superfície esférica, então a interseção do plano com a superfície esférica é uma circunferência. O centro dessa circunferência é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da superfície esférica.

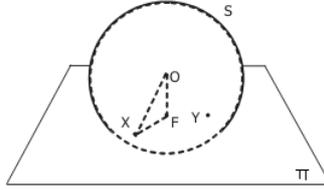


Figura 2.4:

Demonstração: Seja  $\Pi$  um plano que não passa pelo centro  $O$  da superfície esférica  $S$  e que contém um ponto  $Y$  no seu interior. Sendo  $F$  o pé da perpendicular a  $\Pi$  traçada a partir de  $O$ , vamos mostrar que  $\Pi \cap S$  é uma circunferência de centro  $F$ .

Sabemos que  $OY < r$ , pois  $Y$  está no interior de  $S$ . No triângulo retângulo  $\triangle OFY$  temos que  $\overline{OY}$  é hipotenusa, enquanto que  $\overline{OF}$  é cateto. Logo  $OF < OY < r$ , ou seja,  $F$  também está no interior de  $S$ .

Seja  $X$  um ponto da intersecção  $\Pi \cap S$ . Então  $\triangle OFX$  é retângulo em  $F$  e, pelo Teorema de Pitágoras:

$$OF^2 + FX^2 = OX^2 = r^2$$

e, portanto,  $FX = \sqrt{r^2 - OF^2}$  (note que  $r^2 - OF^2 > 0$ ). Logo  $X$  está na circunferência de centro  $F$  e raio  $r^2 - OF^2$ . Provamos assim que  $\Pi \cap S$  está contida na circunferência de centro  $F$  e raio  $r^2 - OF^2$ . Mas isso ainda não significa que a intersecção é a circunferência, para completar a demonstração, precisamos mostrar que todo ponto da circunferência pertence a intersecção. Seja  $X$  um ponto qualquer da circunferência, em  $\Pi$ , com centro  $F$  e raio  $r^2 - OF^2$ . Novamente pelo Teorema de Pitágoras,

$$OX^2 = OF^2 + FX^2 = OF^2 + r^2 - OF^2 = r^2.$$

Portanto,  $OX = r$  e  $X \in S$ .

## 2.3 Integrais de Superfícies

Começaremos considerando uma região fechada no plano  $xy$ , denotada pelo símbolo  $D$ . Suponha que  $S$  seja uma superfície sobre  $D$  e tenha a equação  $z = f(x, y)$ , onde  $f$  e suas derivadas parciais são contínuas em  $D$ . Seja  $G : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, a integral de  $G$  sobre  $S$  é definida como

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \iint_D G(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} dA.$$

Quando  $G(x, y, z) = 1$ , a fórmula acima torna-se

$$\iint_S 1 d\sigma = \iint_D \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} dA.$$

O valor  $\iint_S 1 d\sigma$  é denominado a área da Superfície  $S$ .

Para um melhor aprofundamento dessa seção ver [7].

**Exemplo 2.4.** Calcular a integral de superfície  $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$ , onde  $S$  é a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  entre os planos  $z = 0$  e  $z = \frac{1}{2}$ .

**Solução:** Temos a superfície  $S$  projetada sobre a região  $D$  do plano  $xy$ . A região  $D$  é limitada por dois círculos de raios 1 e  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , cujos centros estão na origem. Resolvemos a equação de  $S$  em  $z$ , onde  $z \geq 0$ , e obtemos  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Logo,

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad f_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Veja que  $G(x, y, f(x, y)) = 1$ , daí obtemos:

$$\begin{aligned}\iint_S d\sigma &= \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1} dA \\ &= \iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dA.\end{aligned}$$

Calculamos a integral dupla usando coordenadas polares, onde  $x = r \cdot \cos \theta$ ,  $y = r \cdot \text{sen} \theta$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$  e  $dA = r dr d\theta$ . Logo,

$$\begin{aligned}\iint_S d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ &= [-2\pi \cdot \sqrt{1-r^2}]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \\ &= -2\pi \cdot (\sqrt{1-1} - \sqrt{1-\frac{3}{4}}) \\ &= \pi.\end{aligned}$$

No exemplo abaixo determinaremos a expressão para calcular a área de uma faixa qualquer da esfera, delimitada por dois planos paralelos.

**Exemplo 2.5.** Calcular a integral de superfície  $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$ , onde  $S$  é a faixa da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1^2$  entre os planos  $z = m$  e  $z = n$ , com  $0 \leq m < n \leq 1$  e  $z \geq 0$ .

**Solução:** Temos a superfície  $S$  projetada sobre a região  $D$  do plano  $xy$ . A região  $D$  é limitada por dois círculos de raios  $a = \sqrt{1-m^2}$  e  $b = \sqrt{1-n^2}$ , cujos centros estão na origem. Resolvemos a equação de  $S$  em  $z$ , onde  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ . Logo,

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad f_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Veja que  $G(x, y, z) = G(x, y, f(x, y)) = 1$ , daí obtemos:

$$\begin{aligned} \iint_S d\sigma &= \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1} dA \\ &= \iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dA. \end{aligned}$$

Calculamos a integral dupla usando coordenadas polares, onde  $x = \rho \cdot \cos \theta$ ,  $y = \rho \cdot \sin \theta$ ,  $x^2 + y^2 = \rho^2$  e  $dA = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$ . Logo,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_b^a \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \\ &= 2\pi \int_b^a \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho \\ &= 2\pi \cdot [-\sqrt{1-\rho^2}]_b^a \\ &= -2\pi[\sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2}] \end{aligned}$$

Como  $a = \sqrt{1-m^2}$  e  $b = \sqrt{1-n^2}$ , temos que:

$$\begin{aligned} S &= -2\pi \cdot (\sqrt{1-(1-m^2)} - \sqrt{1-(1-n^2)}) \\ &= -2\pi(\sqrt{m^2} - \sqrt{n^2}) \\ &= -2\pi(m - n) \\ &= 2\pi(n - m). \end{aligned}$$

**Exemplo 2.6.** Determinar a área da região da esfera unitária compreendida entre os planos  $z = \frac{1}{2}$  e  $z = \frac{3}{4}$ .

**Solução:** Temos,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \cdot 1 \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 0,5\pi. \end{aligned}$$

## Capítulo 3

# Projeções Cartográficas

Para a prática da ciência cartográfica é de fundamental importância a utilização de recursos técnicos, e o principal deles é a projeção cartográfica. A projeção cartográfica é definida como um traçado sistemático de linhas numa superfície plana, destinado à representação de paralelos de latitude e meridianos de longitude da Terra ou de parte dela, sendo a base para a construção dos mapas [1].

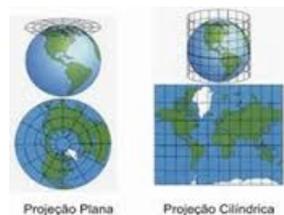


Figura 3.1: Projeção: Plana e Cilíndrica.

A representação da superfície terrestre em mapas, nunca será isenta de distorções. Nesse sentido, as projeções cartográficas são desenvolvidas para minimizarem as imperfeições dos mapas e proporcionarem maior rigor científico à cartografia.

No entanto, nenhuma das projeções evitará a totalidade das deforma-

ções, elas irão valorizar alguns aspectos da superfície representada e fazer com que essas distorções sejam conhecidas, cada projeção é adequada a um tipo de aplicação.

O planeta Terra não é uma esfera perfeita, é uma geoide, no entanto nos estudos cartográficos não levamos em consideração esse fato. Mas mesmo a Terra sendo considerada uma esfera ainda temos problemas para representá-la no plano. Por quê? Primeiro porque a Terra tem os três eixos do plano cartesiano ( $X$ ,  $Y$ , e  $Z$ ) ou seja é tridimensional e o mapa só possui dois eixos ( $X$  e  $Y$ ) sendo então bidimensional. Segundo, há dificuldade de passar a superfície curva da Terra para uma superfície plana.

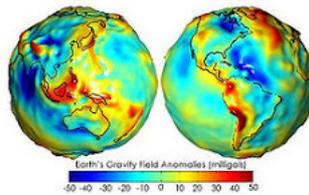


Figura 3.2: Terra Geoide

Os engenheiros cartográficos tentam mapear essa superfície curva, mas não conseguem fazer um mapa perfeito. Assim todo mapa terá algum tipo de distorção. Os cartógrafos vão fazer o mapa do seu jeito, dependendo do seu objetivo, por isso a história dos mapas é impregnada de ideologias [4].

Uma projeção é um “Traçado sistemático de linhas numa superfície plana, destinado à representação de paralelos de latitude e meridianos de longitude da Terra ou de parte dela. Pode ser construído mediante cálculo analítico, ou desenhada geometricamente”.

Como a esfera não se desenvolve sobre o plano, passamos a utilizar superfícies intermediárias, que tenham a propriedade de se desenvolver. O cilindro e o plano, são exemplos destas superfícies intermediárias.

Nas duas próximas seções trabalharemos com duas superfícies intermediárias: o plano e o cilindro.

### 3.1 Projeção Estereográfica ou Plana

Esse é um tipo de projeção em que a superfície de uma esfera é representada sobre um plano tangente a ela, utilizando-se como origem um ponto diametralmente oposto ao ponto de tangência daquele plano com a esfera. Neste tipo de projeção, as deformações são pequenas nas proximidades do polo tangente ao plano, mas aumentam à medida que nos distanciamos do ponto de tangência [6].

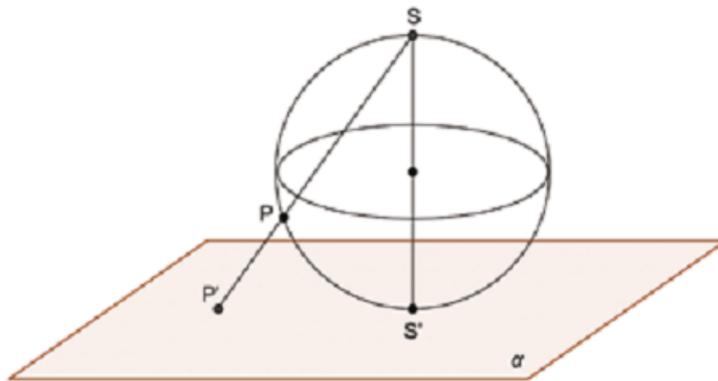


Figura 3.3: Definição de projeção estereográfica.

Principais características da Projeção estereográfica:

- Tangente a um plano.
- Indicada para representação dos polos.
- Problema - grande distorção nas regiões longes do ponto de tangência.

### 3.1.1 A Expressão Matemática

Considere a esfera unitária  $S$ , centrada na origem, o plano tangente  $\Pi$  de equação  $z = -1$  e a origem da projeção como sendo  $(0, 0, 1)$ .

Defina a reta  $r$ , onde  $r$  passa pelo ponto diametralmente oposto ao ponto de tangência e por  $P = (a, b, c) \in S$  então:

$$r : \{(0, 0, 1) + t.(a, b, c - 1); t \in \mathbb{R}\} = \{(ta, tb, 1 + t.(c - 1)); t \in \mathbb{R}\}$$

e o plano  $\pi : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -1\}$ .

Daí,  $r \cap \pi : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (ta, tb, -1)\}$ , temos que:

$$\begin{aligned} 1 + t.(c - 1) &= -1 \\ t.(c - 1) &= -2 \\ t &= \frac{2}{1-c}. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 - (0, 0, 1) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \cong r \cap \Pi \\ (a, b, c) &\longrightarrow \left( \frac{2a}{1-c}, \frac{2b}{1-c} \right). \end{aligned}$$

**Exemplo 3.1.** O ponto  $A = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ , tal que  $A \in S$  quando projetado no plano usando a projeção estereográfica resulta no ponto  $B = \left( 2 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}}, 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = (2\sqrt{2}, 2)$ .

Veja que a projeção estereográfica projeta a circunferência determinada pela intersecção de um plano (paralelo ao plano tangente) com a esfera para uma circunferência no plano tangente com a esfera.

Considere a esfera cuja equação é  $x^2 + y^2 + z^2 = 1^2$  e um plano  $\pi$  que intercepta a esfera em  $z = m$ . A intersecção  $S \cap \pi$ , resulta em uma circunferência  $C_1$  de equação  $x^2 + y^2 = 1 - m^2$ . Um ponto de  $C_1$  é da forma  $(x, y, m)$ , e quando projetado no plano (usando a projeção estereográfica), temos:  $(p, q) = \left( \frac{2x}{1-m}, \frac{2y}{1-m} \right)$ . Mas veja que,

$$p^2 + q^2 = \frac{4x^2}{(1-m)^2} + \frac{4y^2}{(1-m)^2} = \frac{4(x^2 + y^2)}{(1-m)^2} = \frac{4(1-m^2)}{(1-m)^2} = \left( 2 \cdot \sqrt{\frac{1+m}{1-m}} \right)^2.$$

Portanto  $(p, q)$  pertence a uma circunferência com centro na origem e raio  $2 \cdot \sqrt{\frac{1+m}{1-m}}$ , com  $-1 < m < 1$ .

**Exemplo 3.2.** Determine o raio da circunferência projetada no plano, quando o plano  $z = \frac{1}{2}$ , plano paralelo ao plano tangente ( $z = -1$ ) à esfera, intercepta a esfera de raio unitário.

**Solução:** Usando o resultado apresentado acima, o raio  $r$  da circunferência projetada no plano é:

$$r = 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}} = 2\sqrt{3}.$$

**Exemplo 3.3.** Calcular a área da superfície esférica  $S$  determinada entre os planos  $z = 0$  e  $z = \frac{1}{2}$ , quando a mesma é projetada no plano  $\Pi : z = -1$ , tangente a  $S$ .

**Solução:** Vejamos que quando os planos  $z = 0$  e  $z = \frac{1}{2}$  interceptam a esfera obtemos duas circunferências e quando projetamos as mesmas no plano  $\Pi$ , obtemos duas circunferências concêntricas de equação:

$$C_1 : x^2 + y^2 = 2^2 \quad e \quad C_2 : x^2 + y^2 = (2\sqrt{3})^2.$$

Portanto a área desejada é a região delimitada pelas duas circunferências.

Daí,

$$\begin{aligned}A_p &= \pi(2\sqrt{3})^2 - \pi \cdot 2^2 \\ &= \pi \cdot (12 - 4) \\ &= 8\pi.\end{aligned}$$

No exemplo abaixo determinaremos a expressão para calcular a área de uma faixa qualquer da esfera unitária delimitada por dois planos paralelos, quando essa faixa é projetada no plano.

**Exemplo 3.4** Calcular a área da superfície esférica unitária  $S$  determinada entre os planos  $z = m$  e  $z = n$  ( $-1 < m < n < 1$ ), quando a mesma é projetada em um plano  $\Pi : z = -1$ , tangente a  $S$ .

**Solução:** Vejamos que quando os planos  $z = m$  e  $z = n$  interceptam a esfera obtemos duas circunferências e quando projetamos as mesmas no plano  $\Pi$ , obtemos duas circunferências concêntricas de equação:

$$C_1 : x^2 + y^2 = \left(2 \cdot \sqrt{\frac{1+m}{1-m}}\right)^2 \quad e \quad C_2 : x^2 + y^2 = \left(2 \cdot \sqrt{\frac{1+n}{1-n}}\right)^2.$$

Portanto a área desejada é a área da região delimitada pelas duas circunferências.

Daí,

$$\begin{aligned}A_p &= \pi \left(2 \cdot \sqrt{\frac{1+n}{1-n}}\right)^2 - \pi \cdot \left(2 \cdot \sqrt{\frac{1+m}{1-m}}\right)^2 \\ &= 4\pi \cdot \left(\frac{1+n}{1-n} - \frac{1+m}{1-m}\right).\end{aligned}$$

**Exemplo 3.5** Calcular a área da superfície esférica unitária  $S$  determinada entre os planos  $z = -\frac{1}{2}$  e  $z = -\frac{1}{4}$ , quando a mesma é projetada em um plano  $\Pi : z = -1$ , tangente a  $S$ .

**Solução:** Usando o resultado do exemplo 3.4, obtemos que:

$$\begin{aligned} A &= 4\pi \left( \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} - \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \right) \\ &= 4\pi \left( \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right) \\ &\approx 1,066\pi. \end{aligned}$$

## 3.2 Projeção Cilíndrica ou de Mercator

A superfície da projeção é um cilindro envolvendo a esfera terrestre. Depois de realizada a projeção dos paralelos e meridianos do globo para o cilindro, este é aberto ao longo do meridiano oposto ao de Greenwich, tornando-se um plano sobre o qual será desenhado o mapa [6].

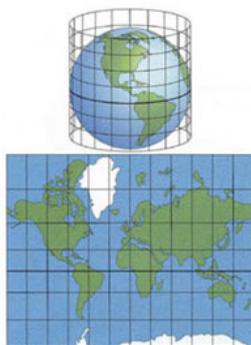


Figura 3.4: Projeção Cilíndrica

Principais características da Projeção de Mercator:

- Cilíndrica.
- Conforme: representam sem deformações os ângulos em torno de qualquer ponto, bem como a forma de pequenas regiões.
- Tangente a linha do Equador.
- Indicada para a representação de todo o planeta.
- Problema: grande distorção de áreas em regiões distantes da linha do Equador.

### 3.2.1 A Expressão Matemática

Considere a esfera unitária  $S$  e  $C$  o cilindro tangente a ela, cujas equações são respectivamente:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \text{ e } C^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1\}.$$

Dado  $P = (a, b, c) \in S$ , seja  $r$  a reta que passa pelo centro da esfera de tal forma que  $P \in r$ . E  $r$  intercepte  $C$  no ponto  $Q$ , então:

$$r(t) = (0, 0, 0) + t \cdot (a, b, c) = (ta, tb, tc).$$

Como:  $Q \in r \cap C^2$ , temos:  $\exists t > 0$  tal que  $Q = (ta, tb, tc)$ , donde

$$t^2 a^2 + t^2 b^2 = 1; t > 0, \text{ daí: } t^2 = \frac{1}{a^2 + b^2} \implies t = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Portanto:  $Q = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ .

**Exemplo 3.6.** O ponto  $A = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ , tal que  $A \in S$  quando projetado no cilindro  $C$  usando a projeção cilíndrica resulta em um ponto  $B =$

$$\left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{4}}}, \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{4}}}, \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{4}}} \right) = \left( \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

Do mesmo modo da projeção estereográfica, a circunferência formada pela intersecção de um plano  $z = m$  e a esfera de raio  $r$ , na projeção cilíndrica projeta-se a circunferência da esfera  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1^2$  para uma circunferência no cilindro  $C : x^2 + y^2 = 1$ .

**Exemplo 3.7.** Calcular a área da superfície esférica do Exemplo (3.3) quando a mesma é projetada em um cilindro  $C$  tangente a esfera.

**Solução:** A superfície  $S$  projetada sobre  $C$  resultará em uma faixa que quando planificada dá origem a um retângulo de comprimento  $2\pi$  e altura  $d$ , onde  $d$  é a altura dessa faixa e essa altura é determinada pela distância entre as circunferências projetadas no cilindro.

Então para  $z = 0$  temos a circunferência de equação  $C_1 : x^2 + y^2 = 1$  que é a circunferência da intersecção  $S \cap C$ . Para  $z = \frac{1}{2}$  temos a circunferência de equação  $C_2 : x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ . Agora tome um ponto  $P \in C_1$  e  $Q \in C_2$  e projete esses pontos no cilindro obtendo  $P^1$  e  $Q^1$ , assim:

$$\begin{aligned} P = (0, 1, 0) &\Rightarrow P^1 = (0, 1, 0) \\ Q = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) &\Rightarrow Q^1 = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right). \end{aligned}$$

Veja que a altura da faixa do cilindro é a diferença entre os planos  $z = 0$  e  $z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , logo  $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Assim a área da região procurada é:

$$\begin{aligned}
A_c &= 2\pi \cdot d \\
&= 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.
\end{aligned}$$

No exemplo seguinte determinaremos uma expressão para calcular a área de uma faixa qualquer da esfera unitária, delimitada por dois planos paralelos, quando essa faixa é projetada no cilindro tangente a ela.

**Exemplo 3.8.** Determine a área da superfície esférica unitária  $S$  determinada entre a intersecção dos planos  $z = m$  e  $z = n$  ( $0 \leq m < n \leq 1$ ), quando a mesma é projetada no cilindro  $C: \{x^2 + y^2 = 1\}$ , tangente a  $S$ .

**Solução:** De modo análogo ao exemplo anterior, quando a superfície de  $S$  for projetada em  $C$  resultará em uma faixa que quando planificada da origem a um retângulo de comprimento  $2\pi$  e altura  $d$ , onde  $d$  é a altura dessa faixa e essa altura é determinada pela distância entre as circunferências projetadas no cilindro. Então na intersecção entre  $S$  e o plano  $z = m$  temos a circunferência de equação  $C_1: x^2 + y^2 = (\sqrt{1 - m^2})^2$  e para  $z = n$  temos a circunferência de equação  $C_2: x^2 + y^2 = (\sqrt{1 - n^2})^2$ .

Agora tome um ponto  $P \in C_1$  e  $Q \in C_2$  e projete esse ponto no cilindro obtendo  $P^1$  e  $Q^1$ , assim:

$$P = (0, \sqrt{1 - m^2}, m) \Rightarrow P^1 = \left(0, 1, \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}\right)$$

$$Q = (0, \sqrt{1 - n^2}, n) \Rightarrow Q^1 = \left(0, 1, \frac{n}{\sqrt{1 - n^2}}\right)$$

Veja que  $d$  é a altura da faixa do cilindro, ou seja, a distância entre os planos  $z = \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$  e  $z = \frac{n}{\sqrt{1 - n^2}}$ , logo  $d = \frac{n}{\sqrt{1 - n^2}} - \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$ . Assim a área

da região procurada é:

$$\begin{aligned} A_c &= 2\pi \cdot d \\ &= 2\pi \cdot \left( \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} - \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \right). \end{aligned}$$

**Exemplo 3.9.** Calcular a área da superfície esférica unitária  $S$  determinada pela intersecção dos planos  $z = \frac{3}{4}$  e  $z = \frac{7}{8}$ .

**Solução:** Usando o resultado encontrado no exemplo anterior, temos:

$$\begin{aligned} A_c &= 2\pi \left( \frac{\frac{7}{8}}{\sqrt{1-\frac{49}{64}}} - \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{9}{16}}} \right) \\ &= 2\pi \left( \frac{7}{\sqrt{15}} - \frac{3}{\sqrt{7}} \right) \\ &\approx 1,3469\pi. \end{aligned}$$

# Capítulo 4

## Considerações Finais

Ao incluir projeções nas aulas de matemática trazemos para sala de aula a importância de estudar a Geometria com suas figuras e formas, entre outros motivos, elas explicam como enxergamos e percebemos o mundo.

Após uma análise dos resultados desenvolvidos ao longo de todo o trabalho, apresentaremos os resultados matemáticos contextualizados com a Geografia. Com o objetivo de atrair o interesse e a curiosidade dos alunos, para contribuir com a aprendizagem. Tendo em vista a Geografia do globo terrestre. (Figura 4.1).



Figura 4.1: Globo terrestre.

Vamos analisar a tabela abaixo, considerando a esfera de raio unitário ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ), o cilindro ( $x^2 + y^2 = 1$ ) e o plano  $\Pi$  ( $XY$ ) ambos tangentes a esfera. E fazendo uso das fórmulas apresentadas para o cálculo da Área de uma faixa na esfera ( $2\pi(n - m)$ ), quando a mesma é projetada sobre o plano  $\left(4\pi \cdot \left(\frac{1+n}{1-n} - \frac{1+m}{1-m}\right)\right)$  pela projeção Estereográfica e quando a mesma é projetada sobre o cilindro  $\left(2\pi \cdot \left(\frac{n}{\sqrt{1-n^2}} - \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\right)\right)$  pela projeção de Mercator.

| Intervalo no plano $z$            | Área no Plano | Área no Cilindro | Área na Esfera |
|-----------------------------------|---------------|------------------|----------------|
| $\frac{7}{8}$ à $\frac{15}{16}$   | $64\pi$       | $1,7733\pi$      | $0,125\pi$     |
| $\frac{3}{4}$ à $\frac{7}{8}$     | $32\pi$       | $1,3469\pi$      | $0,25\pi$      |
| $\frac{1}{2}$ à $\frac{3}{4}$     | $16\pi$       | $1,1130\pi$      | $0,5\pi$       |
| $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{2}$     | $5,3320\pi$   | $0,6383\pi$      | $0,5\pi$       |
| $0$ à $\frac{1}{4}$               | $2,6664\pi$   | $0,5163\pi$      | $0,5\pi$       |
| $0$ à $-\frac{1}{4}$              | $1,6\pi$      | $0,5163\pi$      | $0,5\pi$       |
| $-\frac{1}{4}$ à $-\frac{1}{2}$   | $1,0664\pi$   | $0,6383\pi$      | $0,5\pi$       |
| $-\frac{1}{2}$ à $-\frac{3}{4}$   | $0,7616\pi$   | $1,1130\pi$      | $0,5\pi$       |
| $-\frac{3}{4}$ à $-\frac{7}{8}$   | $0,3044\pi$   | $1,3469\pi$      | $0,25\pi$      |
| $-\frac{7}{8}$ à $-\frac{15}{16}$ | $0,1288\pi$   | $1,7733\pi$      | $0,125\pi$     |

Após analisar a tabela acima e considerando a esfera de raio uni-

tária como o globo terrestre (Figura 4.1), o cilindro envolvendo esse globo e um plano tangente ao Polo Sul, apresentaremos a seguir conclusões para cada projeção analisada.

### Projeção Plana

Quando se projeta a sombra das coordenadas para uma folha que toca o globo terrestre somente em um ponto. O centro do mapa pode ser localizado em qualquer parte do planeta, por isso é muito utilizada pela navegação aérea, já que permiti estabelecer rotas e rumos com precisão. Nos resultados apresentados na tabela abaixo considerremos o ponto de tangência entre o globo terrestre e o plano sendo o Polo Sul.

Analisando os resultados apresentados na tabela e a figura 4.1, temos a tabela abaixo:

| <b>PARALELOS (Globo Terrestre)</b>               | <b>DISTORÇÃO</b> |
|--|------------------|
| Polo Norte - Círculo Polar Ártico                | Alta             |
| Círculo Polar Ártico - Trópico de Câncer         | Alta             |
| Trópico de Câncer - Equador                      | Alta             |
| Equador  | Alta             |
| Equador - Trópico de Capricórnio                 | Alta             |
| Trópico de Capricórnio - Círculo Polar Antártico | Média            |
| Círculo Polar Antártico - Polo Sul               | Baixa            |

### Projeção Cilíndrica

Quando projetamos as linhas imaginárias sobre um cilindro que envolve o globo terrestre, a esfera terrestre é transferida para uma superfície plana,

onde são marcadas as coordenadas geográficas dos continentes e oceanos. Nos resultados apresentados a linha do equador é a única coordenada que mantém a dimensão original, os outros paralelos são distorcidos para acompanhar a dimensão do Equador, principalmente na região dos polos.

Analisando os resultados apresentados na tabela e a figura 4.1, temos a tabela abaixo:

| <b>PARALELOS (Globo Terrestre)</b>               | <b>DISTORÇÃO</b> |
|--|------------------|
| Polo Norte - Círculo Polar Ártico                | Alta             |
| Círculo Polar Ártico - Trópico de Câncer         | Média            |
| Trópico de Câncer - Equador                      | Baixa            |
| Equador  | Inexistente      |
| Equador - Trópico de Capricórnio                 | Baixa            |
| Trópico de Capricórnio - Círculo Polar Antártico | Média            |
| Círculo Polar Antártico - Polo Sul               | Alta             |

Com os resultados apresentados nas tabelas acima fica evidente que a Projeção de Mercator é bem mais eficiente que a Projeção Estereográfica, na representação do globo terrestre em um plano.

Por fim espera-se que esse trabalho possa, de alguma forma, despertar um maior interesse nas pesquisas sobre geometria por parte dos colegas professores e dos alunos, como uso de uma forma interdisciplinar. Sempre visando abrir lugar para novas discussões e tornar os conteúdos matemáticos mais significativos para os alunos.

## Referências Bibliográficas

- [1] LOCH, C., *Topografia contemporânea: planimetria*/ Carlos Loch Cordini. 3.ed. - Florianópolis: Ed. da UFSC, 2007.
- [2] FARIA, C., *Projeção de Mercator*. Disponível em: <http://www.infoescola.com/cartografia/projecao-de-mercator>.
- [3] ALVES, R., *Projeção de Mercator*. Disponível em: <http://www.brasilecola.com/geografia/projecao-mercator.htm>.
- [4] SUEEMANN, J., *Mercator e os Geógrafos em Busca de uma Projeção do Mundo*. Disponível em: <http://www.mercator.ufc.br/index.php/mercator/article/viewFile/159/127>.
- [5] ALVES, S., *A Geometria do Globo Terrestre*, Programa de Iniciação Científica - OBMEP.
- [6] ADRIANO, M., *Projeções Cartográficas*. Disponível em: <http://www.etecgeo.xpg.com.br/iep/materiais/projecoes.pdf>.
- [7] GUIDORIZZI, H., *Um curso de cálculo*, volume 3/ Hamilton Luiz Guidorizzi - 5ed - Rio de Janeiro: LTC, 2013.