Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Jorge Mageste da Cruz Junior

A Matemática por trás de um Número: Razão Áurea

Juiz de Fora

2014

Jorge Mageste da Cruz Junior

A Matemática por trás de um Número: Razão Áurea

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Cruz Junior, Jorge Mageste da.
A Matemática por trás de um Número : Razão Áurea./
Jorge Mageste da Cruz Junior – 2014.
48 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki.
Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Números Áureos. Números Irracionais. I. Miyagaki, Olímpio Hiroshi, orient. II. Título.

Jorge Mageste da Cruz Junior

A Matemática por trás de um Número: Razão Áurea

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 22 de abril de 2014

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª. Dra. Valéria Mattos da Rosa
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Allan de Oliveira Moura
Universidade Federal de Viçosa

Dedico este trabalho ao meu grande Pai Jorge Mageste da Cruz!

AGRADECIMENTOS

À Deus que me guardou por todos esses anos de estudos e vida!

À minha querida Mãe que sempre me apoiou e nunca me deixou desistir!

Ao meu Irmão, sua esposa e minha irmã Alexia, que torceram pela minha vitória!

À minha futura esposa Camila e sua família, em especial ao senhor Jorge, que sempre ficou ao meu lado, me apoiando e torcendo por mim!

Aos meus avós Madalena, Sérgio e Norval, pelos exemplos deixados!

Aos meus parentes mais próximos, em especial minha avó Maria Lúcia, por suas palavras!

À Ana Luiza, Carolina, Larissa e Laura pelo apoio e ajuda!

Aos professores, em especial ao Olímpio e colegas de estudo!

Aos grandes amigos que fiz, em especial ao Aroldo, Luiz Fernando, Marisa, Miguel, Reinaldo e Sebastião!

À Marta, uma amiga mais que especial, que com seu incentivo, dedicação, companherismo e insistência para não deixar eu desistir, se tornou essencial nessa conquista!

À todos da equipe da coordenação do PROFMAT que estão contribuindo para o avanço da educação no Brasil com esse curso.

À CAPES pelo apoio financeiro que sem ele muitos não teriam como frequentar às aulas, e conseguir realizar o sonho de ser mestre.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo descrever e conceituar a importância dos números áureos. Sua aplicabilidade acompanha o ser humano e frequentemente são vivenciados em situações cotidianas. Durante a elaboração deste estudo procurou-se demonstrar as diferentes aparições do número áureo, nas mais diversas áreas em que vivemos, seja na natureza, nos animais, na arquitetura e até mesmo no corpo humano. A pesquisa foi realizada através de consultas em livros escritos por autores renomados e em artigos publicados em bases de dados confiáveis. Esta pesquisa visa ampliar o conhecimento e apresentar aos alunos uma maneira diferente de ver e entender a matemática e sua aplicabilidade e influência no dia-a-dia.

Palavras-chave: Números Áureos. Números Irracionais.

ABSTRACT

The present work aims to describe and conceptualize the importance of golden numbers. Its applicability with humans and often are experienced in everyday situations. During the preparation of this study sought to demonstrate the different appearances of the Golden number, in the most diverse areas in which we live, whether in nature, animals and even in the human body. The survey was conducted through consultations in books written by renowned authors and in articles published in reliable databases. This research aims to expand the knowledge and present to students a different way to see and understand the mathematics and its applicability and influence in everyday life.

Key-words: Golden Numbers. Irrational Numbers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Secção Áurea. Fonte:[27] 12
Figura 2 – Sequência de Fibonacci. Fonte:[25] 16
Figura 3 – Girassol. Fonte:[33] 18
Figura 4 – Girassol de 100 pontos. Fonte:[14] 18
Figura 5 – Girassol de 200 pontos. Fonte:[14] 19
Figura 6 – Triângulo de Pascal e Sequência de Fibonacci. Fonte:[18] 19
Figura 7 – Decágono áureo. Fonte:[34] 20
Figura 8 – Construção do retângulo áureo. Fonte:[35] 21
Figura 9 – Justificativa da construção do retângulo áureo. Fonte:[35] 21
Figura 10 – Sequência de Fibonacci e o retângulo de ouro. Fonte:[17] 22
Figura 11 – Retângulo áureo. Fonte:[23] 23
Figura 12 – Retângulo áureo. Fonte:[16] 23
Figura 13 – Pentágono regular. Fonte: Autor 24
Figura 14 – Pentágono estrelado. Fonte:[29] 24
Figura 15 – Estrela formada por pentágonos regulares. Fonte:[36] 25
Figura 16 – Catedral de Chartres: Vista da entrada principal. Fonte:[30] 26
Figura 17 – Pentagrama no centro de um octógono no portão do coro da Catedral de Chartres. Fonte:[35] 27
Figura 18 – Homem em forma de estrela de cinco pontas. Fonte:[11] 28
Figura 19 – Triângulo isósceles áureo com espiral áurea. Fonte:[26] 29
Figura 20 – Triângulo isósceles áureo. Fonte: Autor 29
Figura 21 – Razão áurea no corpo humano. Fonte:[10] 32
Figura 22 – Razão áurea nos olhos. Fonte:[9] 33
Figura 23 – Razão áurea nas mãos. Fonte:[19] 34
Figura 24 – Razão áurea nas orelhas. Fonte:[20] 34
Figura 25 – À esquerda Vila Stein e à direita Vila Malcontenda. Fonte:[22] 35
Figura 26 – Planta moderna, feita usando retângulos áureos. Fonte: Autor 36
Figura 27 – Flores de girassol e esquema da organização das sementes. Fonte:[21] . 37
Figura 28 – Pinhas e esquema dos espirais formados pelas sementes. Fonte:[15] . . . 38
Figura 29 – Ilustração da espécie *Achillea ptarmica* e esquema do padrão de crescimento. Fonte:[24] 38
Figura 30 – Exemplos de distribuição de folhas em formato espiral e ilustração da Espiral Áurea. Fonte:[12] 39
Figura 31 – Chifre de carneiro com crescimento de acordo com a Espiral Áurea. Fonte:[28] 40
Figura 32 – Formato das ondas do mar; furacão e galáxia espiral. Fonte:[13] 41
Figura 33 – Análise do crescimento da planta. Fonte:[32] 43
Figura 34 – Estrutura de um girassol. Fonte:[31] 44

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Razão Áurea e sequência de Fibonacci. Fonte: Autor 17
Tabela 2 – Aproximação de π. Fonte: Autor 31
Tabela 3 – Dimensões dos cômodos. Fonte: Autor 36
Tabela 4 – Razão entre comprimento e largura. Fonte: Autor 37
Tabela 5 – Coleta de dados masculino. Fonte: Autor 42
Tabela 6 – Coleta de dados feminino. Fonte: Autor 42

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

2 NÚMERO ÁUREO E/OU RAZÃO ÁUREA 12

3 RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI 15

4 RAZÃO ÁUREA NA GEOMETRIA 20

4.1 RETÂNGULO ÁUREO 20

4.2 PENTAGRAMA 22

4.3 TRIÂNGULO ÀUREO 28

5 NÚMEROS IRRACIONAIS 30

6 APLICABILIDADE DO NÚMERO ÁUREO E/OU RAZÃO ÁUREA 32

6.1 APLICABILIDADE NO CORPO HUMANO 32

6.2 APLICABILIDADE NA ARQUITETURA 35

6.3 APLICABILIDADE NA NATUREZA 37

6.3.1 **Girassóis** 37

6.3.2 **Pinhas** 38

6.3.3 **Crescimento de plantas** 38

6.3.4 **Disposição das folhas** 39

6.4 APLICABILIDADE NOS ANIMAIS 39

6.4.1 **Abelhas** 39

6.4.2 **Crescimento de chifres** 39

6.4.3 **Voo do Falcão Peregrino** 40

6.5 OUTROS 40

6.5.1 **Ondas no mar, furacões e galáxias espirais** 40

7 ATIVIDADES 42

7.1 CORPO HUMANO 42

7.1.1 **Objetivo** 42

7.1.2 **Metodologia** 42

7.1.3 **Conclusão** 42

7.2 NATUREZA 43

7.2.1 **Objetivo** 43

7.2.2 **Metodologia** 43

7.2.3 **Conclusão** 44

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS 45

REFERÊNCIAS **46**

1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é mostrar aos alunos uma forma diferente de ver a matemática, buscar o interesse de alunos nessa matéria, mostrando que a matemática está presente em seu cotidiano de formas diversas.

Grécia, século V a.C., o então escultor Phidias projetava o templo da deusa Atena, o Parthenon. Para garantir a harmonia e a beleza da obra, preocupou-se em implementar suas medidas seguindo uma proporção específica entre suas partes. Surgia então, uma das tantas obras que guardam entre si uma peculiaridade curiosa e que, acredita-se, as tornam mais belas e mais agradáveis ao olhar. Tal peculiaridade é a razão áurea.

Não bastasse ser essa uma característica comum entre alguns dos feitos mais marcantes da arte e da arquitetura em diferentes épocas e civilizações, como a Mona Lisa de Leonardo da Vinci, a pirâmide de Quéops e o próprio Parthenon, o número de ouro também é encontrado entre as medidas do corpo humano, nas espirais das sementes de um girassol, na distribuição das estrelas ao redor de um astro e muitos outros. Com tantas ocorrências desta mesma razão nos mais distintos campos, é compreensível o fascínio e a curiosidade que permeiam o tema.

Trata-se de um número que encanta e surpreende facilmente aqueles que com ele se deparam: encantou Pitágoras, Platão, Euclides e muitos outros estudiosos e leigos que se dividem entre o racional e o divino ao tentar explicar esta improvável coincidência.

O presente trabalho se propõe a explorar este assunto intrigante abordando-o sob três pontos principais. Em um primeiro momento a razão áurea é tratada sob o ponto de vista matemático, expondo sua obtenção algébrica e sua presença na sequência de Fibonacci e na geometria. Em um segundo tópico, é exposta uma visão geral sobre o aparecimento dos números irracionais e sua evolução. Por fim, será feita uma abordagem do número áureo nos elementos de nosso cotidiano, desde sua aplicabilidade na arquitetura, até sua presença no corpo humano e na natureza.

2 NÚMERO ÁUREO E/OU RAZÃO ÁUREA

Conhecido desde o século V a.C. pelos Pitagóricos, o Número Áureo vem sendo objeto de pesquisa de vários estudiosos no mundo inteiro. Muitos já comprovaram sua aplicabilidade na arte, na música, na arquitetura e nos reinos animal e vegetal.

O grego Euclides de Alexandria, em sua obra "Os Elementos", escrita entre os anos 323 a 285 a.C já apresentava estudos sobre o Número Áureo. Na Proposição VI, da referida obra, Euclides descreve a melhor maneira de se buscar o modo mais harmonioso das medidas.

Conforme Euclides, *"dividir um segmento de reta em média e extrema razão é a melhor maneira de se obter harmonia."* (EUCLIDES, apud LAURO, 2005), ou seja, o ponto C divide o segmento em média e extrema razão (FIGURA 1), a razão entre o segmento todo e o maior lado é igual a razão entre o maior e o menor lado.

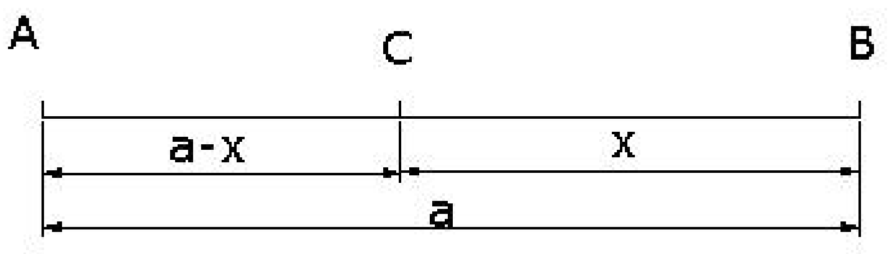

Figura 1 – Secção Áurea. Fonte:[27]

Temos a seguinte demonstração do fato:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \qquad (1)$$

Multiplicando ambos os membros por $x(a-x)$, temos:

$$\frac{ax(a-x)}{x} = \frac{x^2(a-x)}{a-x}$$

Simplificando ambos os membros:

$$a^2 - ax = x^2$$

Somando $(-x^2)$ em ambos os membros, obtemos a seguinte equação do segundo grau em função da variável x:

$$-x^2 - ax + a^2 = 0 \qquad (2)$$

Aplicando a fórmula de Bháskara para encontrar as raízes da equação (2), obtemos:

$$x_1 = \frac{-(-a) + (\sqrt{(-a)^2 - 4(-1)(a^2)})}{2(-1)}$$

$$x_2 = \frac{-(-a) - (\sqrt{(-a)^2 - 4(-1)(a^2)})}{2(-1)}$$

Simplificando x_1 e x_2:

$$x_1 = \frac{a + (\sqrt{a^2 + 4a^2})}{-2}$$
$$x_2 = \frac{a - (\sqrt{a^2 + 4a^2})}{-2}$$

Fatorando x_1 e x_2:

$$x_1 = \frac{-a(1 + \sqrt{5})}{2} \qquad (3)$$

$$x_2 = \frac{-a(1 - \sqrt{5})}{2} \qquad (4)$$

Como $\sqrt{5}$ é um valor entre 2 e 3, temos as seguintes situações: Equação (3): a fração toda está multiplicada por (-), o que implica que essa é negativa, não podendo assim ser aceita nesse caso, por tratar de uma medida de segmento. Equação (4): o valor de $(1 - \sqrt{5})$ é negativo. Como essa fração também está multiplicada por (-), temos que o resultado de x_2 é positivo.

Logo, o valor que atende a demonstração é:

$$x_2 = \frac{-a(1 - \sqrt{5})}{2}$$

Substituindo o valor de x encontrado, no denominador da primeira razão, na equação (1) obtemos:

$$\frac{a}{\frac{-a(1-\sqrt{5})}{2}} = \frac{x}{a - x}$$

Como a primeira razão possui uma divisão de frações, simplificando, temos:

$$-\frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{x}{a-x} \qquad (5)$$

Racionalizando a primeira razão da equação (5):

$$-\frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618... \qquad (6)$$

Substituindo o resultado de (6) em (5), temos:

$$\frac{x}{a-x} = 1,618...$$

Logo o segmento $\overline{AB}$ determina uma seção áurea.

O Número Áureo também pode ser encontrado em documentos da antiguidade, datados de 1650 a.C. como o Papiro de Rhind. Em tal documento há uma referência a uma determinada razão, considerada Razão Sagrada, que na época estudiosos acreditavam ser a Razão Áurea.

Isso comprova que há aproximadamente três mil e quinhentos anos o Número Áureo já era assunto de interesse de estudiosos gregos. O Número Áureo é representado pela letra grega φ em referência ao matemático grego Fídias.

3 RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

O matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci viveu entre os anos de 1.180 a 1.250. Conforme obra de BARISON (2005), os primeiros anos de Fibonacci foram vividos em uma comunidade cristã onde recebeu instrução acadêmica e conheceu, através de maometanos de Barbaria, o sistema arábico ou décimal de numeração e ensinamentos de álgebra.

Fibonacci, em seu livro Liber Abaci, 1202, demonstra diferenças significativas entre o sistema arábico e romano de numeração, comprovando vantagens daquele sobre este. A obra apresenta ainda, estudos sobre um clássico problema envolvendo populações de coelhos, representado na Figura 2.

Tais estudos foram a base para o estabelecimento da seguinte sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ..., onde cada termo posterior surge pela soma dos dois anteriores. Esta sequência recebeu o nome de Sequência de Fibonacci.

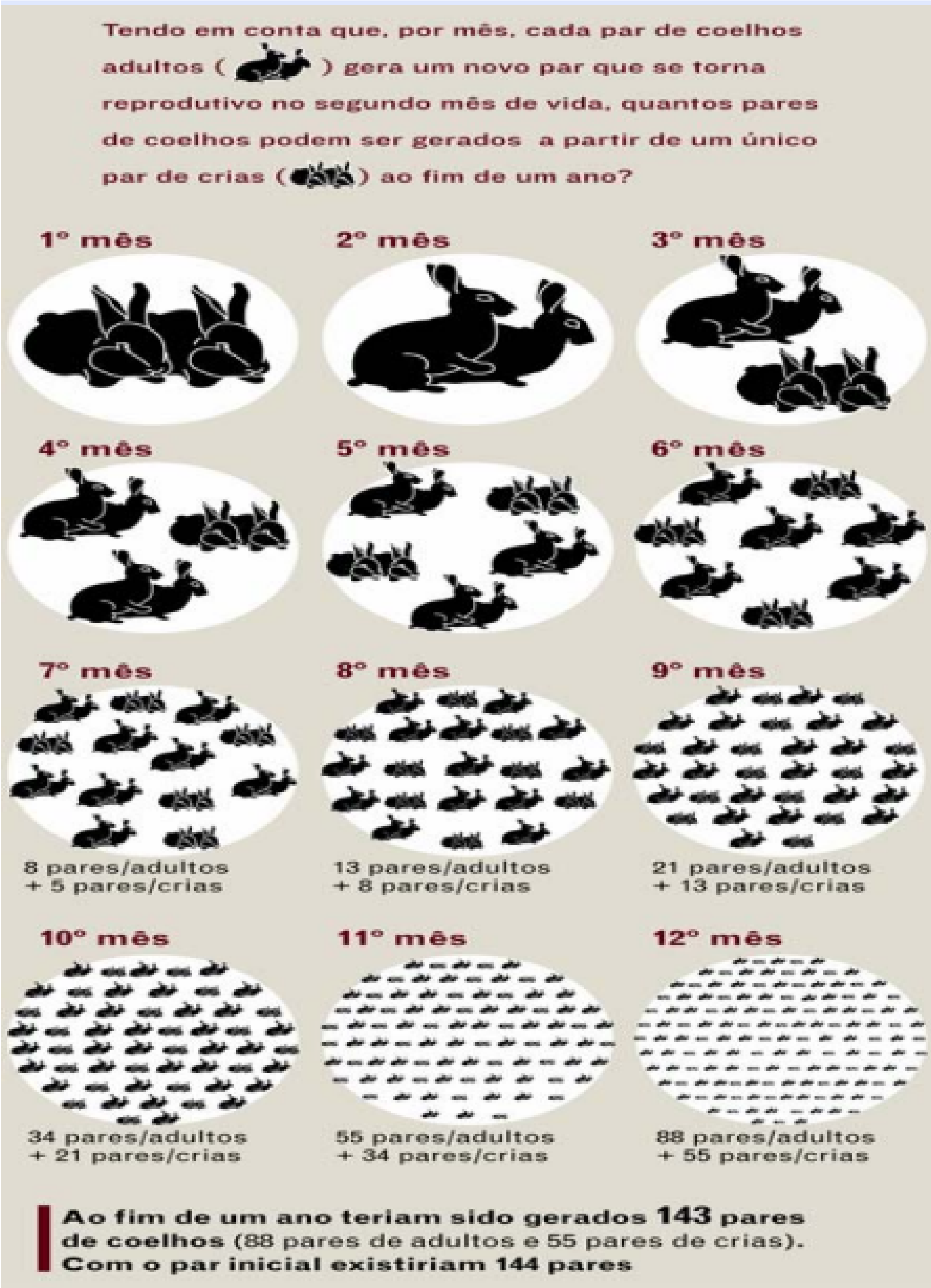

Figura 2 – Sequência de Fibonacci. Fonte:[25]

Essa sequência se tornou ainda mais fascinante devido a importantes características, sendo a principal delas a obtenção de um número próximo ao de ouro através da divisão de qualquer termo da sequência de Fibonacci pelo seu antecessor. Quanto maior forem os termos utilizados da sequência, mais essa divisão se aproximará da razão áurea, conforme mostra a Tabela 1.

1	÷	1	=	1
2	÷	1	=	2
3	÷	2	=	1,5
5	÷	3	=	1,666666667
8	÷	5	=	1,6
13	÷	8	=	1,625
21	÷	13	=	1,615384615
34	÷	21	=	1,619047619
55	÷	34	=	1,617647059
89	÷	55	=	1,618181818
144	÷	89	=	1,617977528
233	÷	144	=	1,618055556
377	÷	233	=	1,618025751
610	÷	377	=	1,618037135
987	÷	610	=	1,618032787
1597	÷	987	=	1,618034448
2584	÷	1597	=	1,618033813
4181	÷	2584	=	1,618034056
6765	÷	4181	=	1,618033963
10946	÷	6765	=	1,618033999

Tabela 1 – Razão Áurea e sequência de Fibonacci. Fonte: Autor

Esta sequência não ficou famosa somente por encontrarmos a razão áurea, mas sim por encontrá-la em diversas partes da natureza, bem como em frutas e legumes. Podemos citar, ainda as sementes de flores diferentes, que podem expressar sequências de números distintos. Como exemplo, temos as sementes do girassol que se encontram em intervalos formando espirais logarítmicas, que ora se curvam para a direita, ora para a esquerda, conforme podemos ver na Figura 3. Ao analisarmos uma flor desse tipo com 100 pontos (Figura 4), observa-se que existem 13 espirais viradas para uma direção e 21 para outra, enquanto que em uma flor também desse tipo, porém com 200 pontos (Figura 5), existem 21 para uma direção e 34 para outra, o que nos remete a números consecutivos da sequência de Fibonacci.

Figura 3 – Girassol. Fonte:[33]

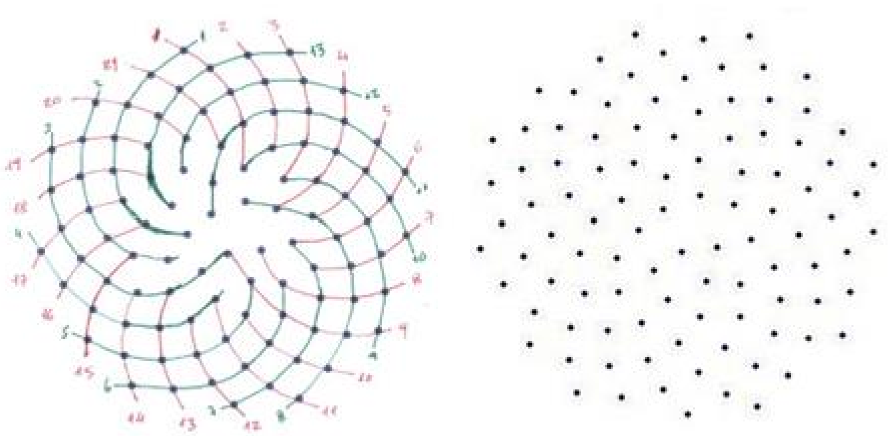

Figura 4 – Girassol de 100 pontos. Fonte:[14]

Outro exemplo de onde se pode encontrar a sequência de Fibonacci é no triângulo de Pascal, ao traçar diagonais paralelas como mostra a Figura 6, a soma dos termos dessas diagonais, resulta nos termos consecutivos da sequência de Fibonacci.

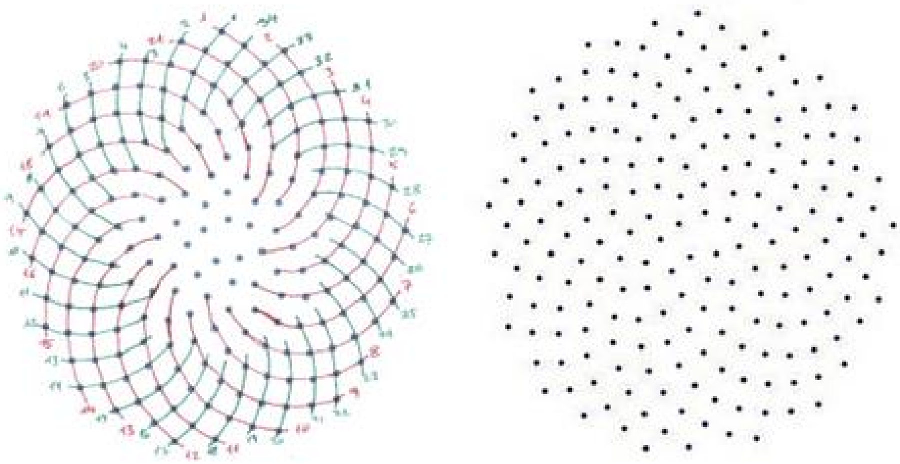

Figura 5 – Girassol de 200 pontos. Fonte:[14]

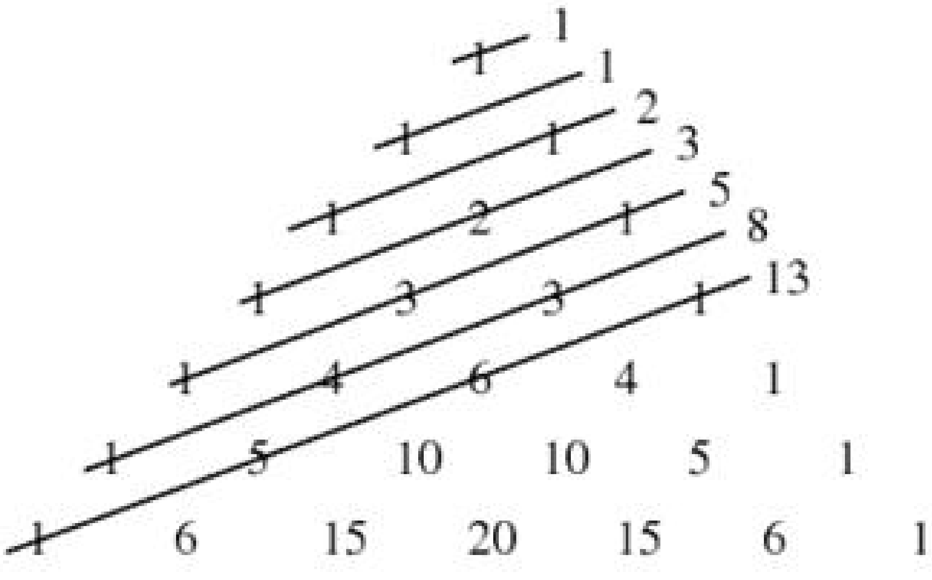

Figura 6 – Triângulo de Pascal e Sequência de Fibonacci. Fonte:[18]

4 RAZÃO ÁUREA NA GEOMETRIA

As figuras geométricas áureas recebem esse nome por serem bem harmoniosas e simétricas. São consideradas figuras perfeitas, por possuírem a divina proporção, sendo exemplificadas por retângulo áureo, pentagrama (pentágono regular estrelado) e triângulo isósceles áureo. Formas como essas, por mais divididas que sejam sempre irão formar outras igualmente perfeitas, tendo a mesma característica e podendo assim construir a chamada espiral áurea (MAGESTE JÚNIOR, 2010).

Embora o decágono regular (FIGURA 7), seja também figura geométrica áurea, este trabalho fará abordagens apenas do retângulo, do pentagrama e do triângulo áureos.

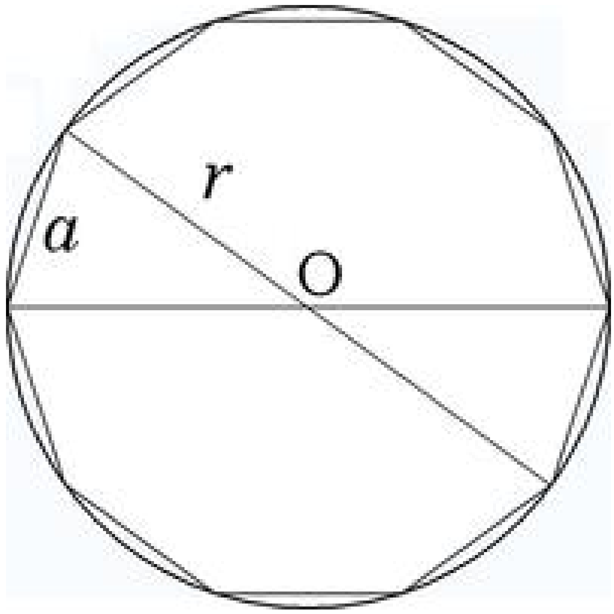

Figura 7 – Decágono áureo. Fonte:[34]

4.1 RETÂNGULO ÁUREO

Todo retângulo cuja razão entre a medida do maior lado pelo menor, resulta na razão áurea, chama-se retângulo áureo (ou retângulo de ouro), um retângulo ABCD que possui a seguinte propriedade: se o dividirmos em um quadrado e em um outro retângulo, o novo retângulo será semelhante ao original.

A construção desse retângulo segue fases específicas, segundo demonstrado por Mageste Júnior, 2010:

- Constrói-se um quadrado ABCD qualquer;
- Encontra-se o ponto médio M do lado AB;
- Com o centro em M e raio MC, traçar um arco de circunferência que intersecta o prolongamento do lado AB no ponto E (Figura 8);
- AE é a base do retângulo áureo;

- Para completá-lo, basta traçar uma reta perpendicular a AE pelo ponto E, que intersecta o prolongamento de CD no ponto F;
- AEFD é um retângulo áureo (Figura 9).

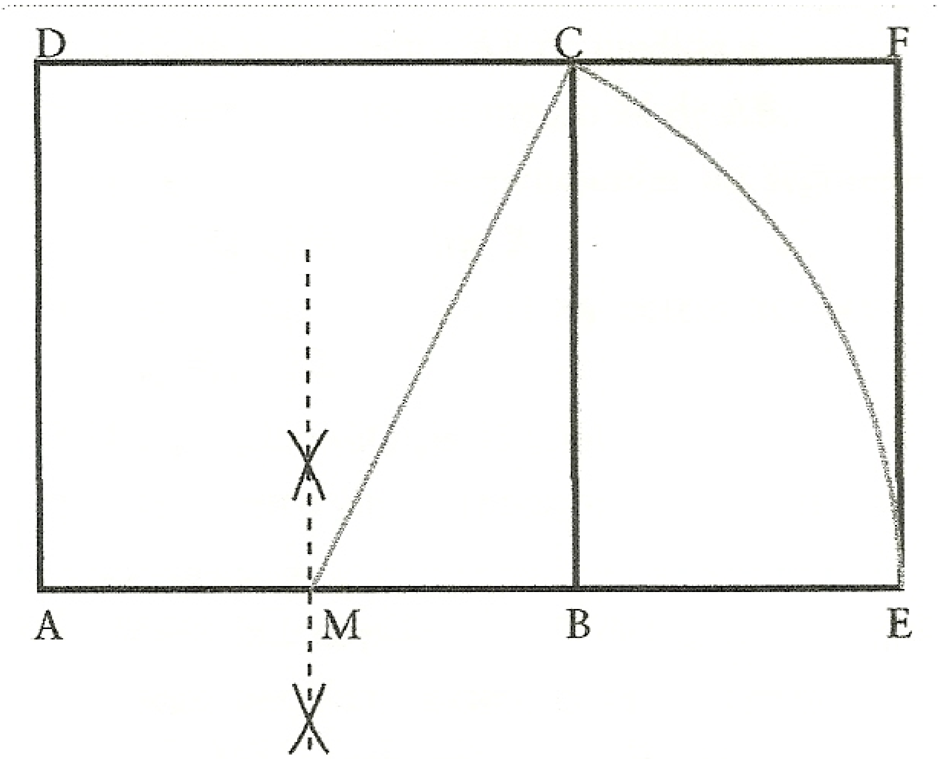

Figura 8 – Construção do retângulo áureo. Fonte:[35]

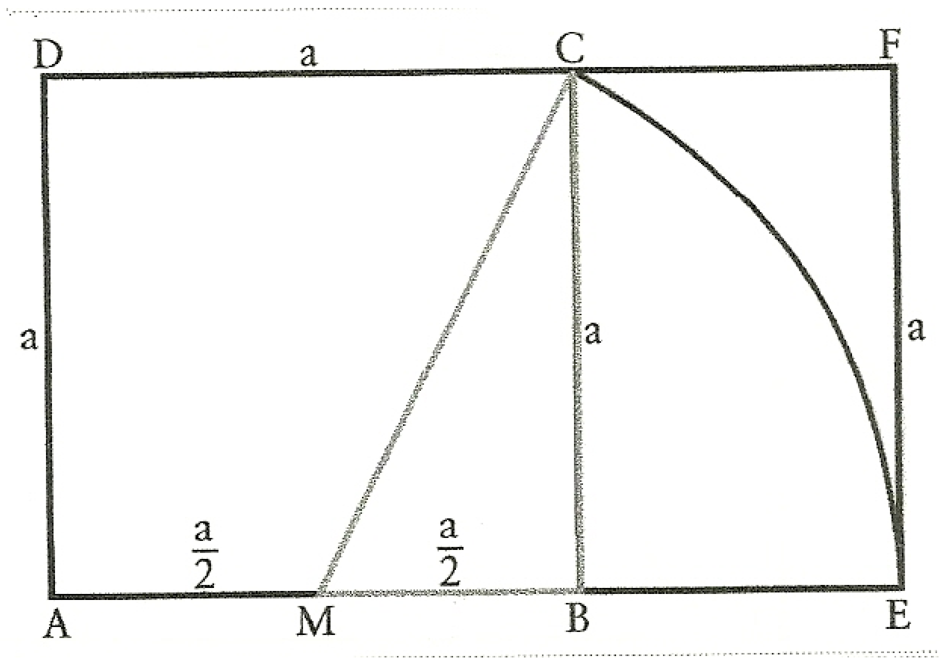

Figura 9 – Justificativa da construção do retângulo áureo. Fonte:[35]

A sequência de Fibonacci também pode ser vista na construção de um retângulo de ouro de forma distinta ao que foi descrito acima:

- A partir de um quadrado de lado unitário, adiciona-se um quadrado do mesmo tamanho formando assim um novo retângulo;

- Desta forma, adicionando quadrados cujos lados são o comprimento do maior lado do retângulo, que será sempre um número da sequência de Fibonacci;

- Eventualmente, o grande retângulo formado será semelhante a um retângulo de Ouro - quanto maior a repetição desse evento, mais próximo do retângulo de ouro ficará, conforme ilustrado na figura 10.

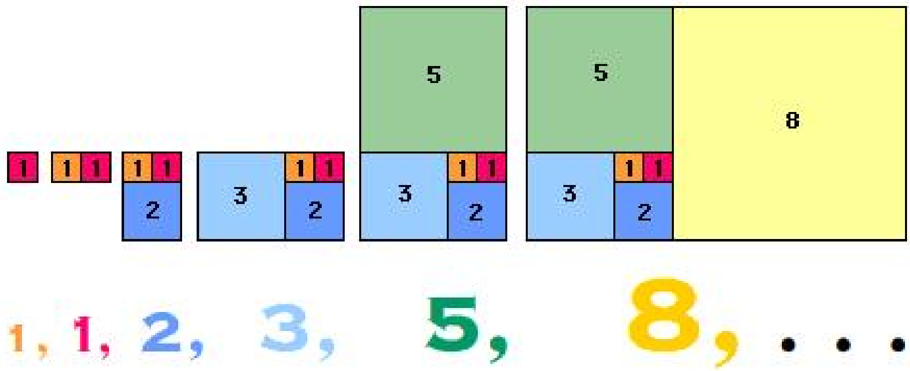

Figura 10 – Sequência de Fibonacci e o retângulo de ouro. Fonte:[17]

Por possuir dimensões específicas pertinentes à divina proporção, é possível encontrá-la em muitas construções gregas, como o Partenon (FIGURA 11), cuja imponente fachada exibe retângulos áureos. Também é possível percebê-los na famosa pintura de Mona Lisa (FIGURA 12), de Leonardo da Vinci, que possui algumas representações da aplicação de retângulos áureos como parâmetro de harmonia.

Comprova-se, analisando os traços principais dessas importantes obras, que o retângulo áureo está presente, desde a antiguidade, na arquitetura e na arte, como afirma Ávila, Geraldo: *´´O retângulo áureo tem sido considerado, desde a antiguidade grega, como o retângulo mais bem proporcionado e de maior valor estético; e tem sido utilizado por vários arquitetos e pintores em sua obra de arte".*

4.2 PENTAGRAMA

Os pentagramas são formados por meio de pentágonos regulares e estão presentes em muitos dados históricos, principalmente na arquitetura e na arte.

Figura 11 – Retângulo áureo. Fonte:[23]

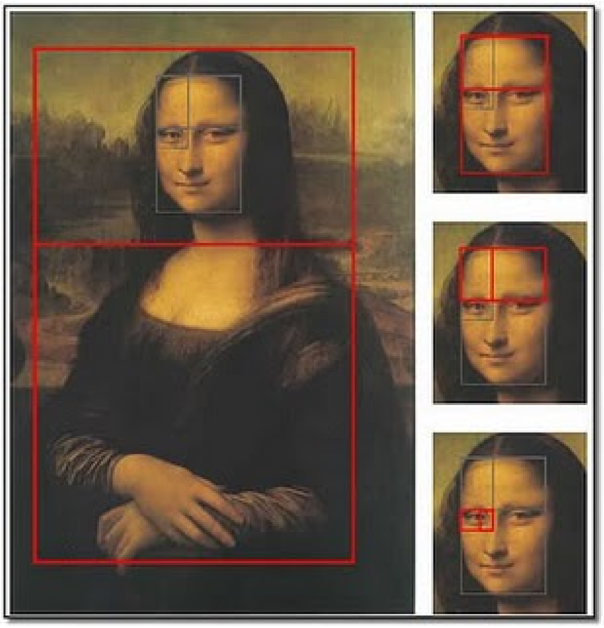

Figura 12 – Retângulo áureo. Fonte:[16]

A partir do pentágono regular ABCDE (FIGURA 13), traçam-se todas as diagonais, que formam um pentagrama ou pentágono estrelado. Em seu centro obtém-se um novo pentágono, semelhante ao primeiro e assim sucessivamente (FIGURA 14).

Em um pentágono regular, ao se realizar a razão entre a medida da diagonal traçada e o valor de seu lado, obtém-se a razão áurea. Sendo assim, esse pentágono pode ser chamado de áureo.

Como afirma o autor Carl B. Boyer (1996): *"Se começarmos com um polígono ABCDE e traçarmos as cinco diagonais, essas diagonais se cortam nos pontos A'B'C'D'E', que formam outro pentágono regular. Observando que o triangulo BCD', por exemplo, é* *semelhante ao triangulo isósceles BCE e observando também os muitos pares de triângulos congruentes no diagrama, não é difícil ver que os pontos A'B'C'D'E' dividem as diagonais de um modo notável. Cada um deles divide uma diagonal em dois segmentos desiguais, tais que a razão da diagonal toda para o maior é igual à deste para o menor. Essa subdivisão das diagonais é a bem conhecida "secção áurea" de um segmento."*

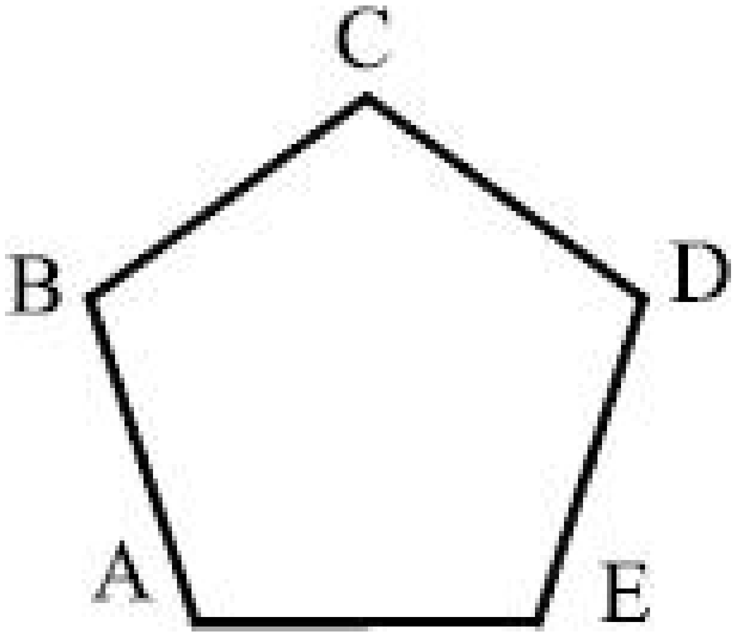

Figura 13 – Pentágono regular. Fonte: Autor

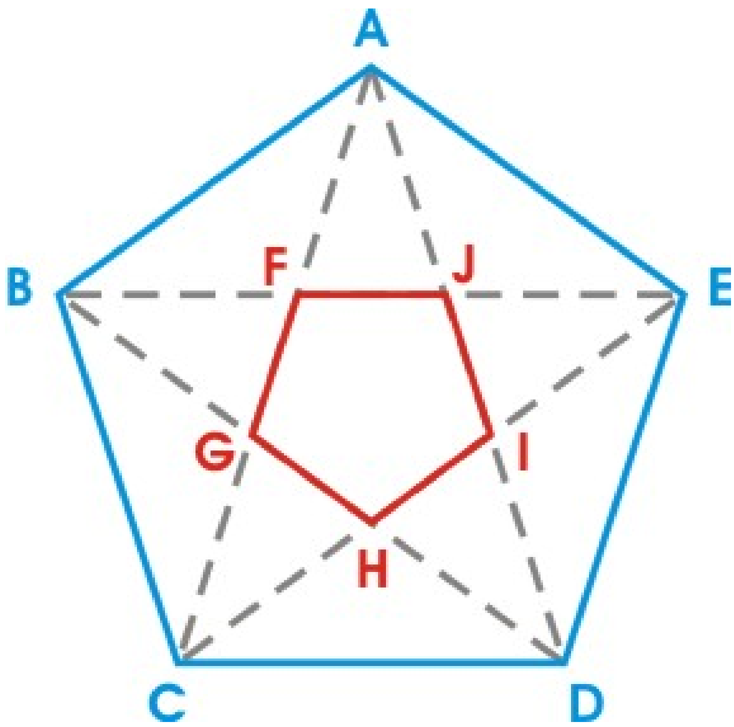

Figura 14 – Pentágono estrelado. Fonte:[29]

Ao se juntar seis pentágonos para construir um pentágono ainda maior, o conjunto formará “buracos” em forma de triângulos áureos (triângulos isósceles com a razão entre o lado e a base formando a razão áurea), seis desses triângulos por sua vez formam um pentágono ainda maior e assim por diante, conforme ilustra a figura 15.

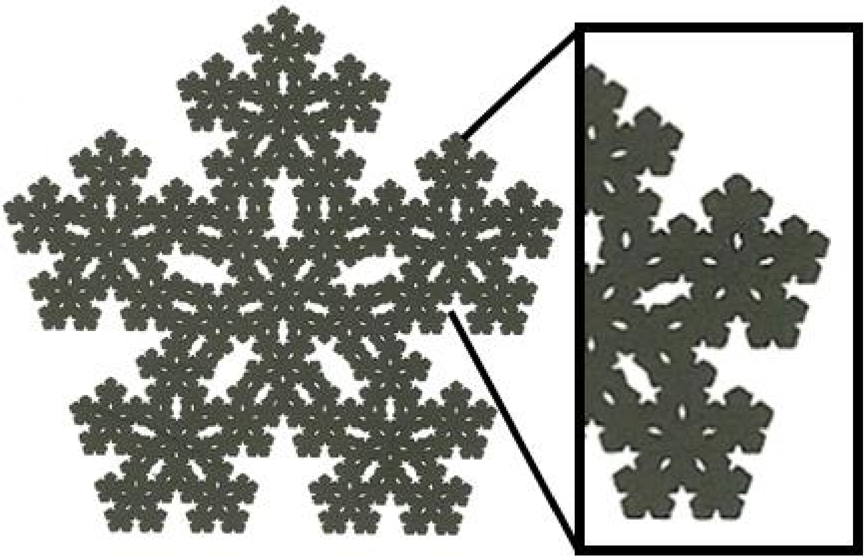

Figura 15 – Estrela formada por pentágonos regulares. Fonte:[36]

Observa-se que o pentagrama ou pentágono estrelado aparece duas vezes em uma importante obra da arquitetura, a Catedral de Notre Dame de Chartres. Após treze incêndios sua estrutura foi restaurada, ainda se encontra um pentagrama em sua fachada (FIGURA 16) e outro em sua entrada principal (FIGURA 17).

Figura 16 – Catedral de Chartres: Vista da entrada principal. Fonte:[30]

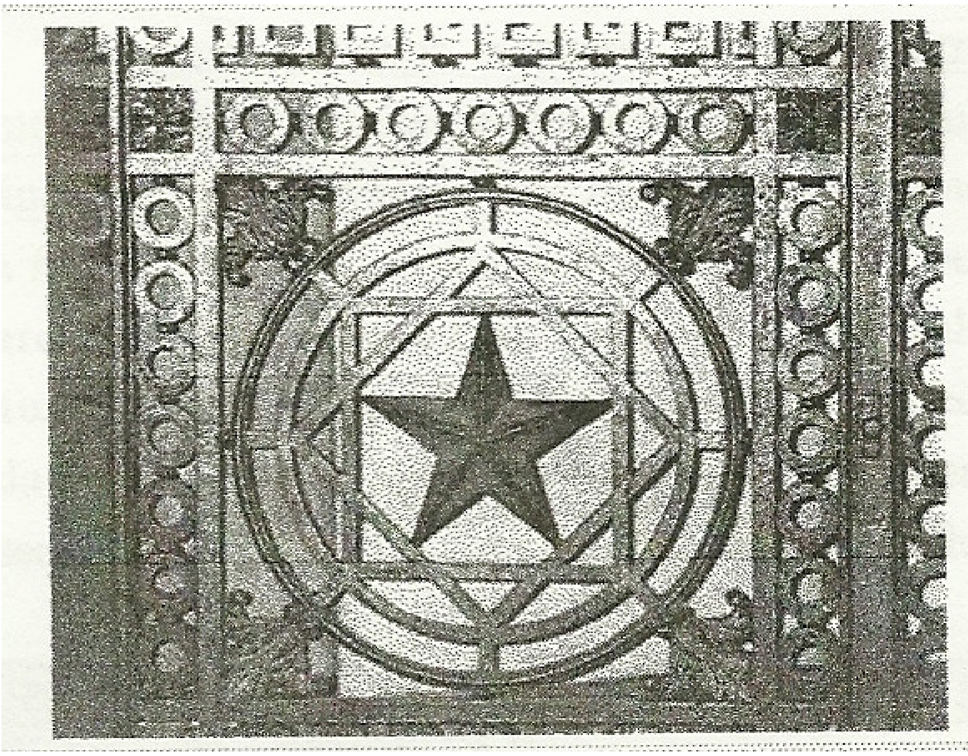

Figura 17 – Pentagrama no centro de um octógono no portão do coro da Catedral de Chartres. Fonte:[35]

Outra obra de fundamental importância é a de Leonardo da Vinci que foi o chamado Homem em forma de estrela de cinco pontas, conforme figura 18.

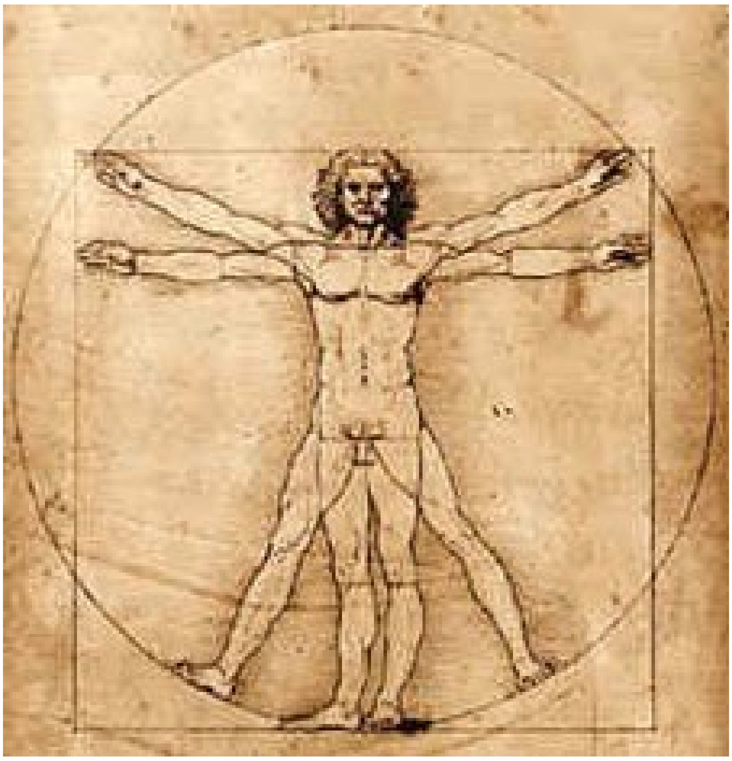

Figura 18 – Homem em forma de estrela de cinco pontas. Fonte:[11]

4.3 TRIÂNGULO ÀUREO

O triângulo áureo é um triângulo isósceles, cuja razão entre a medida do maior lado, pelo menor, resulta na razão áurea e que tem a seguinte propriedade: em um triângulo ABC isósceles, ao traçar a bissetriz em um dos ângulos da base, o novo triângulo obtido formado pela base do inicial é semelhante ao triângulo ABC dado.

Podemos citar como exemplo, um triângulo cuja base é unitária e os outros dois lados iguais correspondem a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que é a mesma proporção que o retângulo de ouro possui e que consequentemente forma a espiral áurea, conforme figura 19.

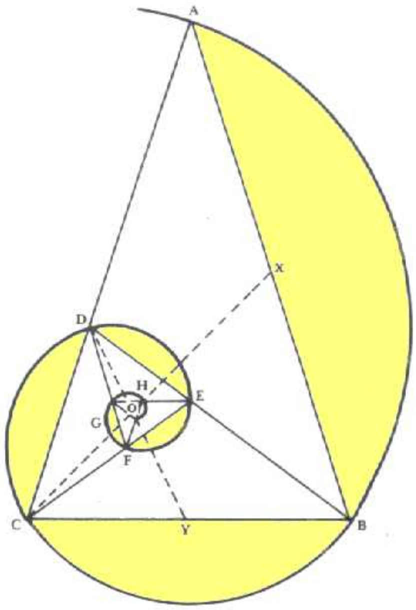

Figura 19 – Triângulo isósceles áureo com espiral áurea. Fonte:[26]

Esse triângulo pode ser obtido em um pentágono, conforme figura 20. Seja um pentágono regular ABCDE, qualquer triângulo obtido dentro desse pentágono, de forma que a base do triângulo seja um dos lados do pentágono e o vértice do triângulo está ligado a um vértice oposto ao lado da base. Nessa figura, temos ACD, um triângulo isósceles áureo.

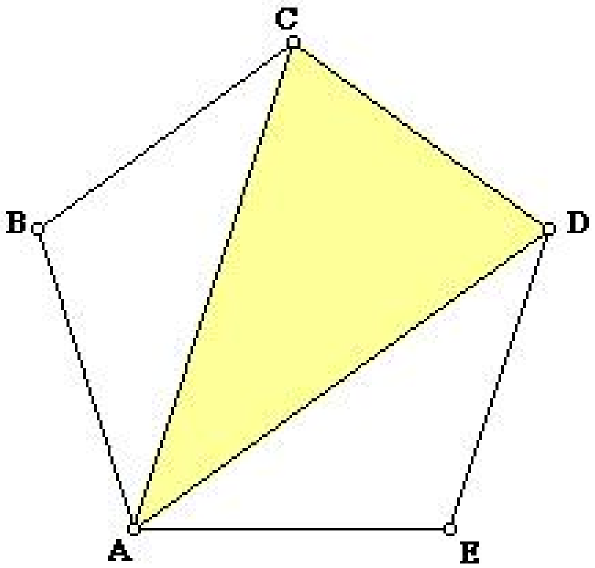

Figura 20 – Triângulo isósceles áureo. Fonte: Autor

Nessa figura, tempos ACD um triângulo isósceles áureo.

5 NÚMEROS IRRACIONAIS

A probabilidade de que poderia haver números com infinitas casas decimais sem nenhuma repetição causou muitos desacordos entre os filósofos. Sendo uma das causadoras desta crise, a razão áurea.

A descoberta de que existiam números como a razão áurea, que seguiriam com infinitas casas decimais sem demonstrar qualquer repetição ou padrão foi responsável por uma crise filosófica. Há uma lenda, que conta, que extasiados com a descoberta, os Pitagóricos sacrificaram cem bois, há controvérsias acerca deste relato, pois eles eram vegetarianos. Não se pode precisar sobre o aparecimento dos números irracionais, estima-se que tenham aparecido com a necessidade de contabilização de lucros e perdas. Mas, posteriormente, a contabilidade não seria feita somente com produtos com números inteiros, como em medição de um terreno ou para aferir pequenas distâncias.

Através de demonstração geométrica, Hipaso de Metaponto, seguidor de Pitágoras, mostrou que a raiz de 2 é irracional. Já Pitágoras achava que o número dois maculava a imagem dos números por não resultar em um número real, já que a raiz deste resultava em um número com infinitas casas decimais. Hipaso, apresentou com fatos e lógica, a importância do número dois. Pitagoras, não pôde refutar, porem surgiu a lenda que seu seguidor foi submetido ao afogamento. Após o afogamento, os números irracionais foram novamente estudados na Grécia com os Elementos de Euclides, sendo este, um importante trabalho do autor.

Os números reais algébricos irracionais e os números reais transcendentes são os dois tipos de números irracionais existentes. Os primeiros são raízes de polinômios com coeficientes inteiros, todo número real que pode ser corroborado através de uma quantidade finita de somas, subtrações, multiplicações, divisões e raízes de grau inteiro a partir dos números inteiros. Porém, existem números algébricos que não podem ser representados através de radicais, conforme o Teorema de Abel-Ruffini. Já os números reais trascendentes não são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. Várias constantes matemáticas são transcendentes, como o número de Euler (e) e o pi (π). (ÁVILA, 2006)

Euclides ratificou que o número positivo cujo quadrado é 2, isto é, o número positivo x que satisfaz a equação $x^2 = 2$ não é racional. O matemático argumentou com a seguinte proposição: Suponhamos que o número x satisfazendo (2) seja racional. Então existem inteiros positivos p e q, primos entre si, tais que $\frac{p^2}{q^2} = 2$ Ou seja, $p^2 = 2q^2$. Portanto p^2 é par e p também é par; p pode ser escrito na forma $p = 2k$. Assim, $(2k)^2 = 2q^2 \leftrightarrow 2k^2 = q^2$. Por esta razão, pode-se concluir que q também deve ser par, mas isso traz uma contradição, pois p e q são primos entre si por hipótese!

Assim, a suposição de que $x = \frac{p}{q}$ nos leva a uma contradição é, considerada falsa, portanto, deve ser descartada. Chegando à conclusão que $\sqrt{2}$, que é como representamos o número positivo cujo quadrado é 2, é um número irracional.

O irracional π é definido como sendo a área restringida por um círculo de raio 1. Ele é certamente o irracional transcendente mais conhecido. A expressão transcendente significa, neste contexto, um algarismo irracional que não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Os irracionais$\sqrt{2}$ e $1+\sqrt{3}$ não são transcendentes, pois são raízes das equações polinomiais $x^2 = 2, x^2 - 2x - 2 = 0$ respectivamente (ÁVILA, 1985). Neste último caso dizemos que os números são algébricos. A primeira manifestação de que π é irracional só foi obtida em 1766 por J. H. Lambert, de forma não totalmente rigorosa, tendo sido finalmente (re) obtida de modo sistemático pelo famoso matemático A. M. Legendre e publicada em 1855. A prova de que π é transcendente é muito mais complicada e só foi obtida em 1882 por F. Lindermann. (ÁVILA, 1994)

Foi Arquimedes, o primeiro matemático a conseguir uma aproximação razoável de π por números racionais, foi verificado que o perímetro de uma circunferência está compreendido entre o perímetro de um polígono inscrito e outro semelhante circunscrito a essa circunferência. Desta forma, aumentando progressivamente o número de lados dos polígonos inscrito e circunscrito, conforme mostra a Tabela 2, Arquimedes provou que $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$, ao utilizar dois polígonos regulares de 96 lados, um inscrito e outro circunscrito a um círculo de raio igual a 1.

NÚMERO DE LADOS	*POLÍGONO INSCRITO*	*POLÍGONO CIRCUNSCRITO*
6	3	3,1410
12	3,1058	3,2154
24	3,1326	3,1597
48	3,1393	3,1461
96	3,1410	3,1428

Tabela 2 – Aproximação de π. Fonte: Autor

6 APLICABILIDADE DO NÚMERO ÁUREO E/OU RAZÃO ÁUREA

Além de sua notoriedade histórica, a razão áurea é fundamental também nos dias atuais, podendo ser notada nas obras de grandes nomes da história, como: Leonardo da Vinci, Vitruvius, Le Corbusier e contar com a participação de mentes brilhantes que fizeram nome na matemática, o número áureo está presente em diversas partes do nosso cotidiano.

Tomando como exemplo a razão de duas dimensões de um objeto, uma planta ou até mesmo o corpo humano, quanto mais próximo este valor for do número de ouro, mais belo e agradável esse será ao olhar humano, devido à sua simetria.

Entre fenômenos naturais, plantas e animais, a natureza exibe diversos exemplares que se relacionam com o número de ouro. Podendo destacar também sua presença na arquitetura histórica e atual. A seguir, são listados alguns destes exemplos e de que maneira o número áureo é encontrado em cada um.

6.1 APLICABILIDADE NO CORPO HUMANO

A primeira pessoa a usar o *"recurso da proporção humana como argumento racional para determinar formas que devem ser sentidas como belas"* foi Marcus Vitruvius Pollio, arquiteto e engenheiro romano (SANTOS apud FRINGS, 2007). Tendo vivido no século I a.c., Vitruvius demonstrou a perfeição humana através do *homo vitruvianus*, sendo essa demonstração uma prova da presença da razão áurea em diversas medidas do corpo humano, como mostra a figura 21.

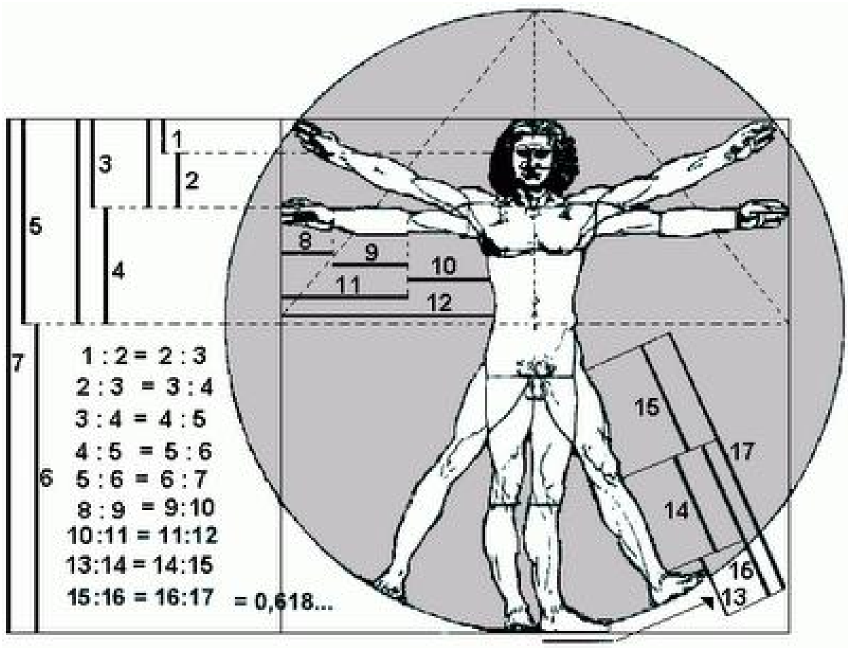

Figura 21 – Razão áurea no corpo humano. Fonte:[10]

A representação dessa obra, realizada por Leonardo Da Vinci, é de suma importância no marco histórico devido às razões de determinadas dimensões resultarem na razão áurea. Essa obra ficou conhecida mundialmente como Homem em forma de estrela de cinco pontas e, desde então o antropomorfismo passou a ser utilizado tanto na arquitetura quanto em todas as obras sobre harmonia no Renascimento e no Barroco.

Vitruvio fez um dos mais conhecidos estudos sobre simetria dos templos e apresenta a proporção entre as partes do corpo tal qual a cabeça seria 1/8 da altura do corpo, os pés seriam 1/6 do corpo e a face seria 1/10 do corpo. [...] Assim, Leonardo da Vinci, informa para a largura do busto como 1/4 da altura do corpo, cuja razão aplica-se sobre os ombros. Da Vinci também reduziu o pescoço de um 1/15 do corpo humano para 1/24 e o pé de 1/6 da altura do corpo para 1/7. (SANTOS, 2007)

A definição de Vitruvius para a simetria se resume em: "Divisão das obras de construção mesmo se demonstrando harmonia e que sobre estimada parte (módulos), base da reciprocidade de parte única, para se separado, formar a obra de construção num todo." (SANTOS, 2007)

Além de Vitruvius outros estudiosos se dedicaram a descoberta da presença da razão áurea no corpo humano. Podemos citar os resultados para a face humana e suas dimensões, as mãos e as orelhas.

Na figura 22, observa-se que a presença da razão áurea se dá principalmente com relação às dimensões dos olhos e da boca. Como exemplo, podemos citar que se obtém a razão áurea através da divisão entre o comprimento total da face e a distância entre os olhos e o queixo. Temos ainda a presença da razão áurea nas dimensões dos lábios superiores.

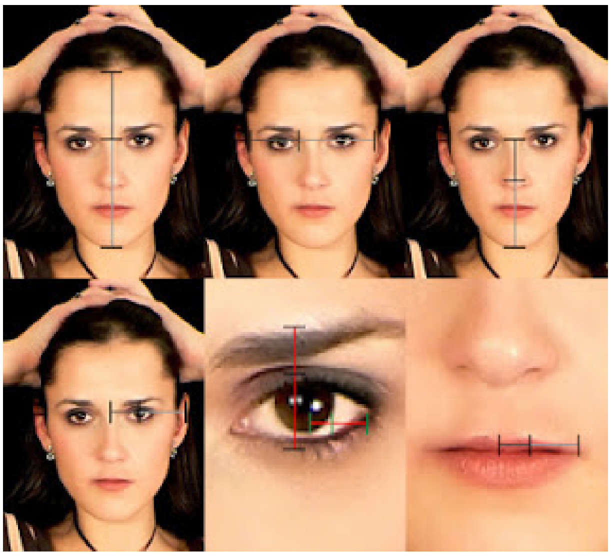

Figura 22 – Razão áurea nos olhos. Fonte:[9]

Para a mão, vemos a razão áurea principalmente nas medidas dos ossos que a formam, conforme ilustrado na figura 23. A orelha humana, como ilustra a figura 24, apresenta em sua formação a espiral áurea.

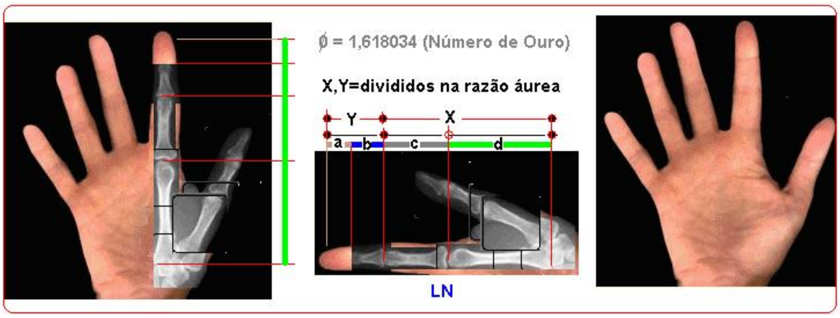

Figura 23 – Razão áurea nas mãos. Fonte:[19]

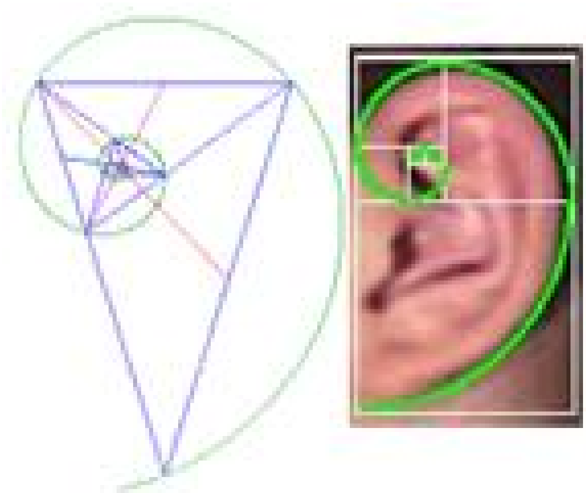

Figura 24 – Razão áurea nas orelhas. Fonte:[20]

6.2 APLICABILIDADE NA ARQUITETURA

A utilização da razão áurea para obtenção de simetria na arquitetura pode ser chamada de arquitetura harmônica. Destacam-se nessa forma de arte dois grandes nomes Le Corbusier e Palladio.

Charles-Edouard Jeanneret-Gris, mais conhecido pelo pseudónimo de Le Corbusir, nasceu em La Chaux-de-Fonds, no dia 6 de outubro de 1887, foi arquiteto, urbanista e pintor francês de origem suíça. Le Corbusier foi o responsável pela mais significativa tentativa moderna de relacionar arquitetura com medidas humanas ao escrever um corpo humano em um duplo quadrado.

São interpretadas como construções monolíticas, e sob consideração de diferentes tratamentos dos telhados se confirmam, que ambos os edifícios com oito unidades de comprimento, 5 $\frac{1}{2}$ de largura e 5 de altura. Além disso, há uma estrutura semelhante a distribuição. (SANTOS apud NAREDI; ROWE, 2007)

Andrea di Pietro della Gondola, vulgo Palladio, nascido em Pádua, no dia 30 de novembro de 1508, foi um grande arquiteto italiano. Uma das fascinantes obras de Palladio foi a Villa Copa-Retonda, porque foi pensada matematicamente, abstrata, quadrada e sem função conhecida. “ Para Palladio, uma casa deve refletir por séculos a ordem harmônica de sua concepção e de seus ocupantes”. (SANTOS, 2007)

Para ilustrar o trabalho desses dois profissionais temos na figura 25 a Vila Stein de Le Corbusier e a Vila Malcontenda de Palladio.

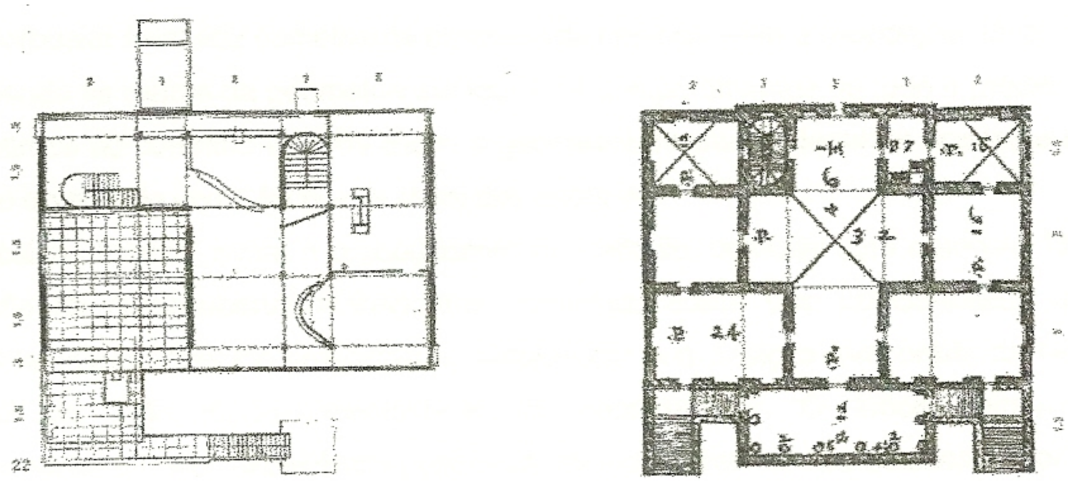

Figura 25 – À esquerda Vila Stein e à direita Vila Malcontenda. Fonte:[22]

A grande diferença entre essas duas obras se dá pelo fato da proporção áurea ser encontrada em todos os compartimentos da Vila Malcontenda, enquanto que na Vila Stein a geometria é encontrada somente nas dimensões totais do edifício e não nos compartimentos. Tal fato justifica-se pela coincidência da construção de Palladio com a redescoberta da proporção no século XVIII.

Atualmente, a razão áurea também é encontrada e muito utilizada na arquitetura moderna para a obtenção de uma construção mais harmoniosa e simétrica, exemplificada na figura 26 que ilustra uma planta baixa de uma casa cujas dimensões dos cômodos formam retângulos áureos. Na tabela 3 e 4 apresentam-se os dados das dimensões dos cômodos e a razão entre elas.

Figura 26 – Planta moderna, feita usando retângulos áureos. Fonte: Autor

Dimensões dos cômodos			
Cômodo		Comprimento (m)	Largura (m)
1	Banho	2,5	1,5451
2	Quarto	4,0	2,4721
3	Lavabo	1,2	1,9416
4	Banho	2,5	1,5451
5	Sala	3,0902	5,0
6	Cozinha	4,0	2,4721
7	Quarto	4,0	2,4721

Tabela 3 – Dimensões dos cômodos. Fonte: Autor

Razão entre comprimento e largura				
2,5	÷	1,5451	=	1,618018251245874
4,0	÷	2,4721	=	1,618057521944905
1,2	÷	1,9416	=	1,618083333333333
2,5	÷	1,5451	=	1,618018251245874
3,0902	÷	5,0	=	1,618018251245874
4,0	÷	2,4721	=	1,618057521944905
4,0	÷	2,4721	=	1,618057521944905

Tabela 4 – Razão entre comprimento e largura. Fonte: Autor

6.3 APLICABILIDADE NA NATUREZA

6.3.1 **Girassóis**

Nos girassóis, a presença da razão áurea se dá no número de pétalas e na forma como as sementes se dispõem no centro da flor:

- O número de pétalas encontradas na flor geralmente corresponde a um algarismo pertencente à sequência de Fibonacci;

- As sementes se organizam formando dois grupos de espirais, sendo um direcionado para a direita e outro para a esquerda (figura 27) de tal maneira que as sementes mantêm a mesma distância entre si e o número de cada um destes grupos de espirais são números consecutivos na sequência de Fibonacci. Acredita-se que tal disposição beneficia a flor otimizando a captação de luz e água.

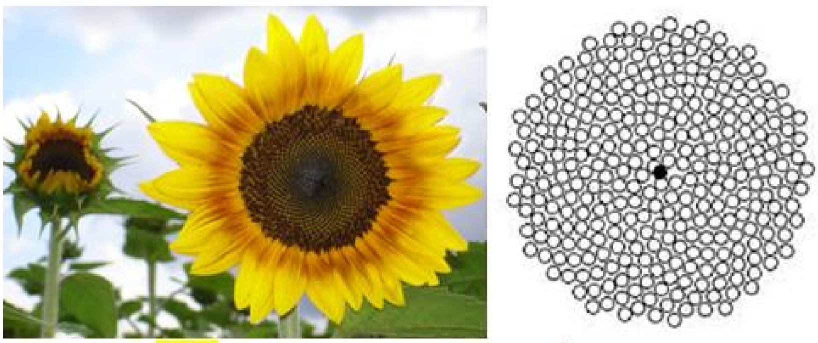

Figura 27 – Flores de girassol e esquema da organização das sementes. Fonte:[21]

6.3.2 Pinhas

Nas pinhas ocorre um fenômeno muito semelhante ao encontrado nos girassóis, porém de forma ainda mais padronizada: as sementes também encontram-se dispostas em grupos de espirais voltados para a direita e para a esquerda, sendo 34 para a direita e 55 para a esquerda (números consecutivos na sequência de Fibonacci).

Um esquema da organização dos espirais encontra-se na figura 28 abaixo.

Figura 28 – Pinhas e esquema dos espirais formados pelas sementes. Fonte:[15]

6.3.3 Crescimento de plantas

Algumas espécies de plantas apresentam um padrão em seu crescimento: ao observarmos a forma como os brotamentos se dispõem, notamos que a soma do número de galhos dispostos na horizontal formam a sequência de Fibonacci. Um exemplo de espécie que apresenta tal comportamento é a *Achillea ptarmic*, ilustrada na figura 29 a seguir, juntamente com um esquema que demonstra o padrão descrito.

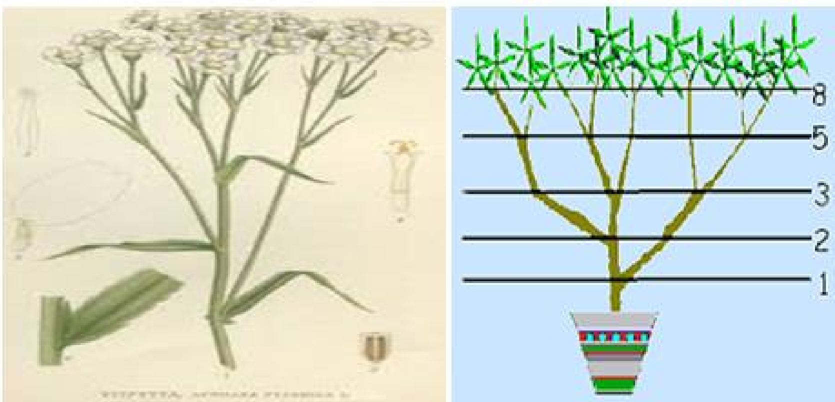

Figura 29 – Ilustração da espécie *Achillea ptarmica* e esquema do padrão de crescimento. Fonte:[24]

6.3.4 Disposição das folhas

Em algumas espécies de plantas, as folhas encontram-se dispostas em formato semelhante à Espiral Áurea. Acredita-se que tal distribuição, assim como no caso do girassol, ocorra em virtude de ser o arranjo que proporciona a melhor absorção de água e luz. É possível encontrar tal padrão em espécies como macieiras, roseiras, carvalho, bromélias. Na figura 30 estão dispostos alguns exemplos bem como a ilustração da espiral a fim de facilitar a comparação.

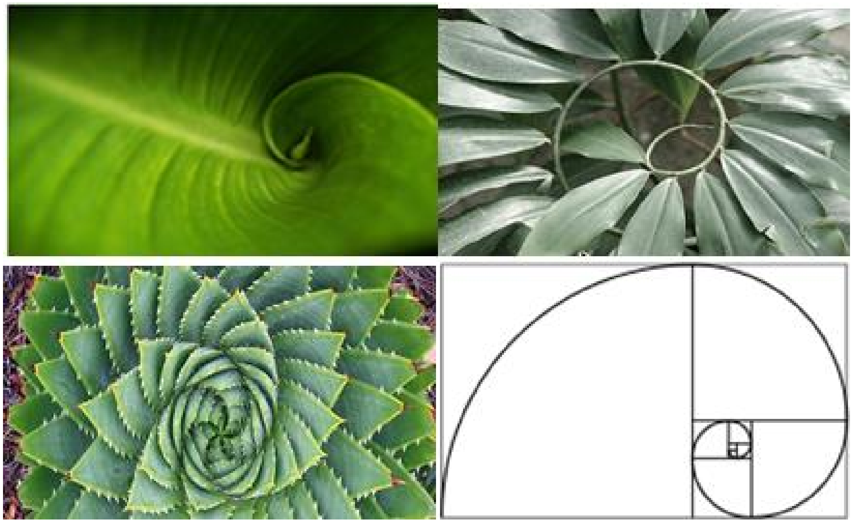

Figura 30 – Exemplos de distribuição de folhas em formato espiral e ilustração da Espiral Áurea. Fonte:[12]

6.4 APLICABILIDADE NOS ANIMAIS

6.4.1 Abelhas

Ao dividirmos o número de abelhas fêmeas (operárias) pelo número de abelhas macho (zangões) em uma colméia, o resultado obtido será o número de ouro.

6.4.2 Crescimento de chifres

O padrão de crescimento de chifres mais comum na natureza, entre animais como carneiros, cabras e antílopes, é o padrão que segue a Espiral Áurea.

Figura 31 – Chifre de carneiro com crescimento de acordo com a Espiral Áurea. Fonte:[28]

6.4.3 **Voo do Falcão Peregrino**

Por possuir os olhos fixos, o falcão peregrino prepara o ataque à sua presa orientando seu voo em formato espiral, de forma que mantenha um contato visual constante com seu alvo. Tal espiral corresponde à Espiral Áurea.

6.5 OUTROS

6.5.1 **Ondas no mar, furacões e galáxias espirais**

Assim como tantos outros elementos na natureza que seguem o formato da Espiral Áurea, alguns fenômenos como as ondas do mar, os furacões e as chamadas galáxias espirais, também se formam seguindo este modelo, conforme mostrado na figura 32 abaixo.

Figura 32 – Formato das ondas do mar; furacão e galáxia espiral. Fonte:[13]

7 ATIVIDADES

Para mostrar aos alunos que a matemática está presente em nosso cotidiano de maneiras diversas e fazer com que despertem ainda mais a curiosidade ampliando seu campo de conhecimento, propõem-se as atividades relacionadas ao corpo humano e natureza.

Com essas atividades busca-se não só aumentar o conhecimento em matemática, mas também mostrar que pode haver interdisciplinaridade com outros campos de conhecimento.

7.1 CORPO HUMANO

7.1.1 Objetivo

Mostrar aos alunos que determinadas medidas do corpo humano estão relacionadas à razão áurea.

7.1.2 Metodologia

Propor que os alunos coletem os dados obtidos em seu próprio corpo e também nos de seus colegas e os insiram conforme as tabelas 5 e 6, nessas tabelas os dados obtidos são verdadeiros e somente o nome dos alunos são fictícios. Para que os alunos obtivessem os dados, foi utilizada como referência a figura 21.

NOME DO ALUNO: JOSÉ DA SILVA				
IDADE: 14 ANOS	SEXO: MASCULINO		ALTURA: 176cm	
PARTE DO CORPO 1		PARTE DO CORPO 2		RAZÃO (1 ÷ 2)
DESCRIÇÃO	MEDIDAS (cm)	DESCRIÇÃO	MEDIDAS (cm)	
12	70	11	43,5	1,60919...
15	55	14	34	1,61764...
3	33	2	20,5	1,60975...

Tabela 5 – Coleta de dados masculino. Fonte: Autor

NOME DO ALUNO: MARIA DAS GRAÇAS				
IDADE: 14 ANOS	SEXO: MASCULINO		ALTURA: 173cm	
PARTE DO CORPO 1		PARTE DO CORPO 2		RAZÃO (1 ÷ 2)
DESCRIÇÃO	MEDIDAS (cm)	DESCRIÇÃO	MEDIDAS (cm)	
12	68	11	42	1,61904...
15	51,5	14	32	1,609375
3	29	2	18	1,61111...

Tabela 6 – Coleta de dados feminino. Fonte: Autor

7.1.3 Conclusão

Como verificamos nas tabelas 5 e 6, determinadas razões entre medidas do corpo humano são relacionadas a razão áurea.

7.2 NATUREZA

7.2.1 Objetivo

Mostrar aos alunos que determinadas plantas, devido à sua estrutura e características, relacionam-se com a razão áurea.

7.2.2 Metodologia

Pesquisar determinadas plantas, como por exemplo o girassol e fazer um estudo sobre seu crescimento (figura33), estrutura e características (figura34).

Figura 33 – Análise do crescimento da planta. Fonte:[32]

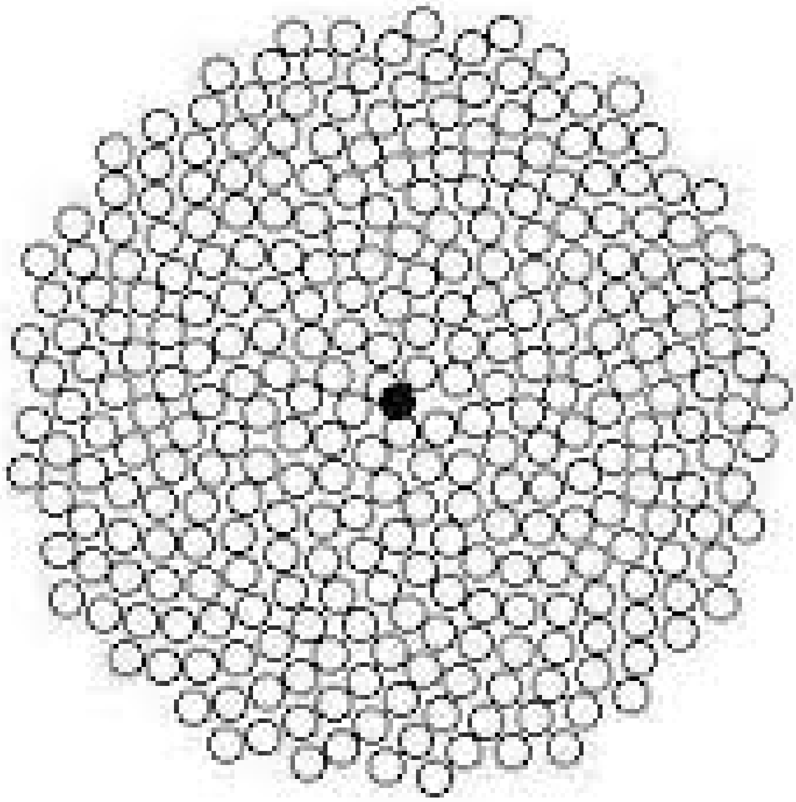

Figura 34 – Estrutura de um girassol. Fonte:[31]

7.2.3 **Conclusão**

Com essa pesquisa, os alunos irão concluir que a matemática está presente em determinadas áreas de conhecimento, de maneiras diferentes.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Seja em meio ao mundo acadêmico ou permeando o cotidiano, o número de ouro desperta mais curiosidade a cada nova descoberta. Entre estudos matemáticos e atribuições divinas, é comum a busca por algo que explique suas tão diversas ocorrências.

A história da razão áurea se funde ao trabalho de Fibonacci: sua famosa sequência e a chamada "Espiral Áurea" embasaram, e ainda embasam, diversos estudos do número de ouro na fauna, flora, na arte e no próprio ser humano. O formato da espiral é recorrente na natureza e os números que compõem a sequência são comumente encontrados seja nas pétalas de uma flor, seja no padrão de crescimento de uma planta.

A famosa razão também interessou outros estudiosos da área, como os Pitagóricos e Euclides. Destaca-se aqui a importância do número como um dos elementos causadores do debate quanto à existência de algarismos com infinitas casas decimais desprovidas de um padrão, debate este que seria o precursor da inestimável descoberta dos números irracionais.

Outro campo de expressão do número áureo é a geometria, com destaque para o retângulo de ouro (base para a construção da "Espiral Áurea"), o pentagrama (formado a partir de um pentágono regular) e o Triângulo isósceles áureo (formado a partir do pentágono regular áureo). O retângulo e o pentágono, encontram-se com frequência na arte e na arquitetura, mostrando o quanto o ideal de beleza é atrelado à presença da razão áurea.

O presente trabalho objetivou, através da exposição de fatos e curiosidades a respeito do número de ouro, elucidar sua importância no mundo científico no decorrer da história e atualmente, além de fomentar o fascínio e o interesse neste e em outros campos da matemática. Temas tão rodeados de mistérios e descobertas surpreendentes são combustíveis do conhecimento e revelam-se instrumentos poderosos para a disseminação da educação.

REFERÊNCIAS

[1] ÁVILA, Geraldo. *Análise Matemática para Licenciatura*. São Paulo: 3ª edição. Editora Edgard Blücher. 2006. ISBN: 8521203950.

[2] ÁVILA, Geraldo. *Retângulo áureo, divisão áurea e sequencia de Fibonacci*. Revista do Professor de Matemática. São Paulo. V.6. 1985.

[3] BARISON, Maria Bernadete. *Geometria Descritiva*. São Paulo: 2ª edição. Editora Edgard Blücher. vol.2 n.10a. 2005.

[4] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: 2ª edição. Editora Edgard Blücher, 1996. ISBN 8521200234.

[5] CARVALHO, J.P. *Um problema de Fibonacci*. Revista do professor de matemática. São Paulo. v.17. p.4-9. 1990.

[6] CRUZ JUNIOR, J. M. *O Número Áureo e sua aplicabilidade*. 2010.

[7] DOCZI, Gyorgy. *O poder dos limites*. Editora Mercuryo. Rio de Janeiro: 2002. ISBN: 8572720219

[8] EVES, Howard. *História da geometria: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. São Paulo: Atual, 1992. v. 3.

[9] http://2.bp.blogspot.com/-ki6NpPvZSWw/UCFnq30AMyI/AAAAAAAAAN0/UVvCROFombw/s1600/golden-face.jpg. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[10] http://3.bp.blogspot.com/_q6yUM_U_F3s/SlpojHxuppI/AAAAAAAABcc/rdhHS58kjxQ/s400/vitruvio.png. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[11] http://algarve-saibamais.blogspot.com/2010_01_01_archive.html. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[12] http://beforeyousleep.wordpress.com/tag/numero-de-ouro/
http://razaoaureaifsc.blogspot.com.br/2012/08/onde-podemos-encontra-la.html
http://biologos.org/blog/design-in-nature-part-3
http://csirouniverseblog.com/2013/08/05/a-fibonacci-minute/. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[13] http://giannileal.blogspot.com.br/2011/03/numero-de-ouro-e-sequencia-de-fibonacci.html
http://csirouniverseblog.com/2013/08/05/a-fibonacci-minute/
http://thegardendiaries.wordpress.com/2013/08/14/magical-sunflowers/. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[14] http://imagenscomtexto.blogspot.com.br/2008/09/girassis-pinhas-e-fibonacci.html. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[15] http://io9.com/5985588/15-uncanny-examples-of-the-golden-ratio-in-nature
http://www.ipodtouchisapro.com/article/news-12750-wallpaper-du-jour-pinecone/. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[16] http://matematicadaelenise.blogspot.com/2009/10/leonardo-da-vinci-e-o-retangulo-aureo.html. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[17] http://mathforum.org/dr.math/faq/fibonacci.squares1.gif. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[18] http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/FibonacciShallowDiags_1000.gif. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[19] http://musicaeadoracao.com.br/recursos/imagens/tecnicos/ matematica/luiz_neto/radio_mao_ouro.gif. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[20] http://musicaeadoracao.com.br/recursos/imagens/tecnicos/ matematica/luiz_neto/divine_propor04.gif. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[21] http://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/agroenergia/arvore/CONT000fj 1om7kf02wyiv802hvm3jaupb6fn.html https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQFthNl vkw7P6nX1SBvoj3mfAz_ggVjnt3cgK1guf_gwDlwt4N09A. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[22] http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/A%20MATEMATICA%20 DA%20ARQUITETURA%20IDEAL.pd. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[23] http://www.guiageo-grecia.com/atenas-fotos.htm. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[24] http://www.ime.unicamp.br/ samuel/Extensao/TeiaSaber/RaphaeGraciele /atividade_fibonacci.pdf. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[25] http://www.mat.uel.br/geometrica/artigos/st-15-tc.pdf. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[26] http://www.mat.uel.br/geometrica/php/dg/dg_4t.php. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[27] http://www.mat.uel.br/geometrica/php/dg/dg_4t.php. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[28] http://www.pinterest.com/pin/157344580703778907/#. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[29] http://www.republicaeditorial.com.br/wp-content/uploads/2010/02/ imagem_artigo_Roberto_Jamal_numero_ouro_Pentagrama.jpg. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[30] http://www.trivago.com.br/chartres-35656/catedraligrejamosteiro /catedral-de-notre-dame-de-chartres-137255/foto-i5561461. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[31] https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQFthNlvkw7P6nX1S Bvoj3mfAz_ggVjnt3cgK1guf_gwDlwt4N09A. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[32] https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQLu60hYizSESYTQ3J9 kuIGxh6JTMAv2IjVowydi-n-fsD9H4vt. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[33] https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQyYY0r_ZxXo5ir6Wv58 ssquz3MEzWX2tgDZAtuQx15a8cN3Huv. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[34] https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Decagonoinscrito.PNG. Acesso em 25 de janeiro de 2014.

[35] LAURO, M.M.A. *A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura.* São Paulo. Exacta, V.3, p.35-48, 2005.

[36] LIVIO, Mario. *Razão Áurea - A História de Fi,um número surpreendente.* São Paulo. Editora Record, 2006. ISBN: 8501066532.