UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

NAYRON BRITO ROCHA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA UTILIZANDO AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

VITÓRIA DA CONQUISTA – BA
2014

NAYRON BRITO ROCHA

Uma proposta de ensino de geometria não-euclidiana utilizando ambiente de geometria dinâmica

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César dos Reis

Vitória da Conquista – BA

2014

N574p Rocha, Nayron Brito.
Uma proposta de ensino de geometria não-euclidiana utilizando ambiente de geometria dinâmica / Nayron Brito Rocha, 2014.
89f.: il.; algumas col.
Orientador (a): Júlio César dos Reis.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia / Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional, Vitória da Conquista, 2014.
Referências: f. 88-89.
1. Geometria não-euclidiana. 2. Geometria hiperbólica. I. Reis, Júlio César dos. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia / Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III.T.
CDD: 516.154

Elinei Carvalho Santana – CRB – 5/1026

Bibliotecária – UESB – *Campus* Vitória da Conquista/BA

NAYRON BRITO ROCHA

Uma proposta de ensino de geometria não-euclidiana utilizando ambiente de geometria dinâmica

Aprovada por:

Prof. Dr. Júlio César dos Reis
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
(Orientador e Presidente)

Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo
Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS

Prof. Dr. Roberto Hugo Melo dos Santos
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – IFBA

Vitória da Conquista/BA, 12 de maio de 2014.

A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.

(Albert Einstein)

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter me concedido saúde e força para concluir mais uma etapa importante da minha vida.

A minha esposa Fernanda pelo amor, paciência e compreensão nos momentos em que tive que me dedicar exclusivamente às atividades do mestrado.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UESB, em especial, ao professor Júlio César dos Reis por ter aceitado me orientar nesta empreitada.

Enfim, gostaria de agradecer a todos que torceram por mim, parentes, amigos, colegas do Profmat e colegas do IF Baiano.

Resumo

Este trabalho tem como finalidade auxiliar no processo ensino aprendizagem de Geometria, em particular de Geometria Não-Euclidiana. Ele apresenta uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica, utilizando o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. A proposta apresentada é composta por três partes, sendo a primeira a apresentação do Modelo do Disco de Poincaré, que foi o modelo escolhido para se trabalhar a Geometria Hiperbólica. Na segunda parte são apresentadas as construções geométricas necessárias para criação de ferramentas, no GeoGebra, que compõem o "Menu Hiperbólico". A terceira e última parte é composta por 5 (cinco) atividades de familiarização com o Modelo do Disco de Poincaré, que devem ser desenvolvidas utilizando-se o "Menu Hiperbólico" criado no GeoGebra.

Palavras-chave: Geometria Não-Euclidiana; Geometria Hiperbólica; Disco de Poincaré.

Abstract

This work is intended as an aid in the teaching learning geometry, in particular the Non-Euclidean Geometry. It proposes a teaching hyperbolic geometry, using the dynamic geometry software GeoGebra. The proposal consists of three parts, the first being the presentation of the Poincaré disk model, which was chosen to work with hyperbolic geometry model. In the second part geometric constructions needed to create tools in GeoGebra, which make up the "Hyperbolic Menu" is displayed. The third and final part consists of familiarization for five (5) activities with the Poincaré disk model, which should be developed using the "Hyperbolic Menu" created in GeoGebra.

Keywords: Non-Euclidean Geometry; Hyperbolic Geometry; Poincaré Disk Model.

Lista de Figuras

Figura 1.1: Tela de trabalho do GeoGebra 18
Figura 1.2: Barra de ferramentas do GeoGebra 19
Figura 1.3: Sub-ícones da barra de ferramentas do GeoGebra 19
Figura 1.4: Criar uma nova ferramenta no GeoGebra 21
Figura 1.5: Construção do triângulo equilátero no GeoGebra 22
Figura 1.6: Propriedades para editar os objetos 22
Figura 1.7: Construção do triângulo equilátero editada 23
Figura 1.8: Janela para criar nova ferramenta 23
Figura 1.9: Janela Objetos Finais 24
Figura 1.10: Janela Objetos Iniciais 24
Figura 1.11: Janela Nome e Ícone 25
Figura 1.12: Ícone alterado 25
Figura 1.13: Barra de ferramentas com nova ferramenta 25
Figura 2.1: Postulado 5, se $\alpha + \beta < \pi$, então r_1 e r_2 se encontram 27
Figura 2.2: Ptolomeu (gravura do século XVI) 29
Figura 2.3: Proclus 30
Figura 2.4: Nasiredin 30
Figura 2.5: John Wallis 31
Figura 2.6: Saccheri 32
Figura 2.7: Página da obra Euclides Ab Omni Naevo Vindicatus 32
Figura 2.8: Quadrilátero de Saccheri 33
Figura 2.9: Lambert 34
Figura 2.10: Legendre 35
Figura 2.11: Gauss 37
Figura 2.12: Bolyai 38
Figura 2.13: Lobachevsky 39
Figura 2.14: Riemann 40
Figura 2.15: Pseudoesfera 41
Figura 2.16: Beltrami 41
Figura 2.17: Klein 42
Figura 2.18: Modelo de Klein 43
Figura 2.19: Poincaré 43
Figura 2.20: Modelo do Disco de Poincaré 44
Figura 2.21: Modelo do Semiplano de Poincaré 44

Figura 3.1: Potência de ponto. 46
Figura 3.2: Generalização da potência de ponto 47
Figura 3.3: Inverso de um ponto 47
Figura 3.4: Inverso de *P* exterior à circunferência 48
Figura 3.5: Inverso de *P* interior à circunferência 49
Figura 3.6: Circunferências ortogonais 49
Figura 3.7: Apoio à Proposição 1.2 50
Figura 3.8: Apoio à Proposição 1.2 50
Figura 3.9: Apoio à Proposição 1.3 51
Figura 3.10: Os pontos do plano hiperbólico 52
Figura 3.11: Reta hiperbólica AB como arco ortogonal e como diâmetro do Disco 53
Figura 3.12: Ângulo entre retas hiperbólicas 53
Figura 3.13: Distância hiperbólica entre dois pontos 54
Figura 3.14: Retas Paralelas AB e CD 55
Figura 3.15: Retas hiperbólicas AB e CD paralelas limite 55
Figura 3.16: Retas Paralelas Limite 56
Figura 4.1: Disco 58
Figura 4.2: Janela para criar ferramenta Disco 59
Figura 4.3: Objetos Finais ferramenta Disco 59
Figura 4.4: Objetos Iniciais ferramenta Disco 60
Figura 4.5: Nome e Ícone ferramenta Disco 60
Figura 4.6: Ícone alterado ferramenta Disco 61
Figura 4.7: Barra de ferramentas com ferramenta Disco 61
Figura 4.8: h_reta 62
Figura 4.9: h_reta (pontos no horizonte) 63
Figura 4.10: h_semirreta 64
Figura 4.11: h_ponto médio 65
Figura 4.12: h_segmento 66
Figura 4.13: h_reta perpendicular (por ponto fora da h_reta) 67
Figura 4.14: h_reta perpendicular (por ponto na h_reta) 68
Figura 4.15: h_reta paralela 69
Figura 4.16: h_mediatriz 70
Figura 4.17: h_círculo 71
Figura 4.18: h_distância 72
Figura 4.19: h_ângulo 73
Figura 4.20: h_triângulo equilátero 74
Figura 4.21: h_quadrado 75

Figura 4.22: h_bissetriz 77
Figura 5.1: Retas hiperbólicas passando pelo ponto *C* 79
Figura 5.2: Reta hiperbólica passando pelos pontos *C* e *D* 79
Figura 5.3: Reta hiperbólica como diâmetro do "Disco" 79
Figura 5.4: Retas hiperbólicas passando por *E* 80
Figura 5.5: Reta perpendicular passando por *P* 80
Figura 5.6: Reta perpendicular passando por *P* 81
Figura 5.7: Retas h_2 e h_3 perpendiculares a reta h_1 81
Figura 5.8: Retas h_2 e h_3 paralelas a reta h_1 82
Figura 5.9: Medida do ângulo hiperbólico $C\hat{D}E$ 82
Figura 5.10: Ângulos opostos pelo vértice 83
Figura 5.11: Duas retas paralelas *CD* e *EF*, e a reta h_1 perpendicular somente a reta *CD* 83
Figura 5.12: Círculos hiperbólicos 84
Figura 5.13: Círculos hiperbólicos c_1 e c_2 de mesmo raio 84
Figura 5.14: Círculo hiperbólico de centro *D* passando por *C* 85
Figura 5.15: Triângulo equilátero hiperbólico 85
Figura 5.16: Triângulo hiperbólico isósceles 86

Sumário

APRESENTAÇÃO 14

1. AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA 17

2. RESUMO HISTÓRICO 26
   - 2.1. A Geometria de Euclides 26
   - 2.2. Tentativas de demonstrar o Postulado das Paralelas 28
     - 2.2.1. Claudius Ptolomeu 28
     - 2.2.2. Proclus Diadochus 29
     - 2.2.3. Nasir al-Din al-Tusi (Nasiredin) 30
     - 2.2.4. John Wallis 31
     - 2.2.5. Giovanni Girolamo Saccheri 31
     - 2.2.6. Johann Heinrich Lambert 34
     - 2.2.7. Adrien Marie Legendre 34
   - 2.3. O surgimento das Geometrias Não-Euclidianas 35
     - 2.3.1. Johann Carl Friedrich Gauss 36
     - 2.3.2. János Bolyai 37
     - 2.3.3. Nikolai Ivanovich Lobachevsky 38
     - 2.3.4. Georg Friedrich Bernhard Riemann 39
   - 2.4. Modelos Geométricos 40
     - 2.4.1. Eugenio Beltrami 41
     - 2.4.2. Felix Christian Klein 42
     - 2.4.3. Jules Henri Poincaré 43

3. UM MODELO PARA A GEOMETRIA HIPERBÓLICA 45
   - 3.1. Alguns conceitos euclidianos 45
     - 3.1.1. Potência de ponto 46
     - 3.1.2. Inverso de um ponto 47
     - 3.1.3. Circunferências ortogonais 49
   - 3.2. Modelo do Disco de Poincaré 52
     - 3.2.1. Retas Hiperbólicas 53
     - 3.2.2. Ângulos Hiperbólicos 53
     - 3.2.3. Distância Hiperbólica 54
     - 3.2.4. Retas Paralelas 55
     - 3.2.5. Retas Paralelas Limite 55

4. CRIANDO O MENU HIPERBÓLICO 57
4.1. Ferramenta: Disco 58
4.2. Ferramenta: h_reta 61
4.3. Ferramenta: h_reta (pontos no horizonte) 63
4.4. Ferramenta: h_semirreta 64
4.5. Ferramenta: h_ponto médio 65
4.6. Ferramenta: h_segmento 66
4.7. Ferramenta: h_reta perpendicular (por ponto fora da h_reta) 67
4.8. Ferramenta: h_reta perpendicular (por ponto na h_reta) 68
4.9. Ferramenta: h_reta paralela 69
4.10. Ferramenta: h_mediatriz 70
4.11. Ferramenta: h_círculo 71
4.12. Ferramenta: h_distância 72
4.13. Ferramenta: h_ângulo 73
4.14. Ferramenta: h_triângulo equilátero 74
4.15. Ferramenta: h_quadrado 75
4.16. Ferramenta: h_bissetriz 76
5. ATIVIDADES USANDO O MENU HIPERBÓLICO 78
CONSIDERAÇÕES FINAIS 87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 88

Apresentação

O Profmat apresentou duas opções de modalidades para elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), as quais poderão ser utilizadas na elaboração das dissertações. São elas: Modalidade 1 - Elaboração de proposta de atividades educacionais; Modalidade 2 - Aplicação de atividade em sala de aula e avaliação de resultados.

Para a elaboração desta dissertação foi escolhida a primeira opção sugerida (Modalidade 1) e a partir daí construiu-se uma proposta de ensino a ser disponibilizada aos professores de matemática, que poderá ser aplicada para alunos tanto do Ensino Básico quanto do Ensino Superior.

Para entender como se deu o processo de construção desta proposta, segue, nos próximos parágrafos, um relato de como se chegou a escolha do tema central deste trabalho que é o ensino de Geometria Não-Euclidiana, mais especificamente, o ensino de Geometria Hiperbólica.

As geometrias não-euclidianas foram escolhidas por terem se tornado um tema em evidência atualmente. Elas são citadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), nas orientações para o Ensino Fundamental, que as consideram de grande importância para as mudanças de paradigmas na matemática. De acordo com os PCNs para o Ensino Fundamental, uma

> mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (BRASIL, 1998, p.25).

Essas geometrias estão presentes também na nova versão das Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE), apresentadas pela Secretaria de Educação do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008). Nesta nova versão das DCE, na parte destinada ao ensino de Matemática, foram incluídos como conteúdo estruturantes para o Ensino Fundamental e Médio as Geometrias Não-Euclidianas.

Para o ensino Fundamental e Médio, o Conteúdo Estruturante *Geometrias* se desdobra nos seguintes conteúdos:

- geometria plana
- geometria espacial
- geometria analítica
- noções básicas de geometria não-euclidiana. (PARANÁ, 2008, p. 55)

Segundo o documento do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008), a inserção dessas geometrias no currículo são justificadas sob o argumento de que as disciplinas da educação básica devem conter em seus conteúdos estruturantes aqueles que as identificam como conhecimento histórico e também com o objetivo de ampliar o conhecimentos dos alunos sobre as geometrias. Tal documento sugere que a Geometria Hiperbólica seja abordada no Ensino Médio e apresenta, sem a pretensão de impedir possíveis outros trabalhos, o que espera que seja abordado pelo professor em sala de aula.

O ensino de Geometria Não-Euclidiana é tema também de várias pesquisas relacionadas a formação de professores, nas quais se destacam Bonete (2000), Martos (2002), Pataki (2003), Cabariti (2004) e Cavichiolo (2011). Todas estas pesquisas trazem como principais resultados que: o conhecimentos básico de outras geometrias podem colaborar na compreensão da Geometria Euclidiana; o professor de matemática que tem conhecimento das Geometrias Não-Euclidianas terá mais ferramentas para ensinar Geometria Euclidiana.

Baseado nesses resultados decidiu-se por criar uma proposta de ensino, em ambiente de geometria dinâmica, a ser disponibilizada aos professores, que, ao ser aplicada em sala de aula, busca desenvolver nos alunos noções de Geometria Hiperbólica que contribua na compreensão e ampliação de conceitos da Geometria Euclidiana.

Portanto, a proposta de ensino elaborada tem como objetivo principal contribuir com o ensino aprendizagem de Geometria, pois sabemos a importância que este ensino tem na formação do indivíduo. Lorenzato (1995) diz que o conhecimento de Geometria possibilita uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da Matemática.

E além disso, resolveu-se também utilizar um *software* de geometria dinâmica para auxiliar na elaboração das atividade. Mais especificamente o *software* GeoGebra.

A escolha de um programa de geometria dinâmica se justifica pelo fato que, segundo Gravina (2012), este tipo de *software* permite realizar construções de figuras geométricas a partir das propriedades que a definem, e manipular estas construções através da movimentação dos pontos que estão na figura.

A decisão por utilizar o GeoGebra se deu pelo fato dele ser um "*software* livre", ou seja, não depende de aquisição de licença para sua utilização, o que é muito importante, pois ele poderá ser instalado em computadores pessoais e nos computadores dos laboratórios das instituições de ensino.

Nessa perspectiva, este trabalho está estruturado em cinco capítulos, conforme resumo a seguir.

No capítulo 1 são apresentados os ambientes de geometria dinâmica, o que são e como surgiram. Em particular é apresentado o *software* GeoGebra, suas principais ferramentas e possibilidades de utilização.

No capítulo 2 é feito um resumo histórico sobre o surgimento das geometrias não-euclidianas, destacando os principais pesquisadores que durante mais de dois mil anos se debruçaram sobre o problema de demonstrar o "Postulado das Paralelas" ou seja, o Quinto Postulado de Euclides.

Os capítulo 3, 4 e 5 tratam diretamente da proposta de ensino de Geometria Não-Euclidiana, sendo que no capítulo 3 é apresentado o Modelo do Disco de Poincaré, que foi o modelo escolhido para se trabalhar a Geometria Hiperbólica. Já no capítulo 4 são apresentadas as construções geométricas necessárias para a construção das ferramentas que compõem o Menu Hiperbólico, no GeoGebra, que servirão para aplicação das atividades propostas no capítulo 5.

Capítulo 1

Ambientes de Geometria Dinâmica

Os ambientes de geometria dinâmica, segundo Gravina (2001), são programas de computador que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades. Nesses programas os alunos podem modelar, analisar simulações, fazer experimentos, conjecturar, etc.

O termo geometria dinâmica foi inicialmente usado por Nick Jakiw e Steve Rasmussem, da empresa *Key Curriculum Press*[1], com o objetivo de diferenciar este tipo de *software* dos demais *softwares* geométricos. Portanto, a geometria dinâmica não pode ser confundida como sendo uma "nova geometria".

Os primeiros programas de computador usados para geometria dinâmica foram o Cabri Géomètre (em 1988) e o Geometer´s Sketchpad (em 1989). Esses programas agem como se fossem réguas e compassos virtuais (eletrônicos). Hoje existem vários outros programas de geometria dinâmica, que se diferem por sua estrutura ou valor comercial, alguns desses programas são mais completos e vão além da geometria, podendo ser classificados como Matemática Dinâmica.

Dentre os novos programas de geometria dinâmica, existe um que vem se destacando e sua utilização sendo bastante difundida no meio acadêmico, que é o *software* GeoGebra[2]. Este *software* foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter, no ano de 2002, e é de distribuição gratuita.

O GeoGebra propicia ao professor/aluno trabalhar com conteúdos de Geometria, Álgebra e Cálculo. Com ele é possível fazer construções de pontos, retas, circunferências ou círculos, segmentos, vetores, gráficos de funções, entre muitos outros recursos, e mudá-los posteriormente. Ele também possui a janela de álgebra e a janela geométrica, equações e coordenadas também podem ser inseridas diretamente no campo de entrada. As construções feitas no GeoGebra são dinâmicas

---

[1] Empresa criadora do programa de geometria dinâmica Geometer's Sketchpad.

[2] O *software* GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica gratuito. Ele está disponível para *download* no site: http://www.geogebra.org. Neste site também poderá ser encontrado tutoriais de utilização do *software*.

e interativas, o que faz do software um excelente laboratório de aprendizagem de Geometria.

O GeoGebra é um programa bastante intuitivo e autoexplicativo, adequado a usuários com conhecimentos avançados em informática ou para iniciantes, sendo que o conhecimento matemático é o ponto fundamental de sua utilização. Por ser um *software* livre há colaboração de vários programadores, inclusive brasileiros os quais disponibilizaram uma versão totalmente em português, o que facilita muito sua utilização em nosso país.

A janela apresentada abaixo é a tela de trabalho do GeoGebra, onde podem ser observados, na parte superior, os botões das ferramentas disponíveis. Desta forma o trabalho é desenvolvido apenas com o uso do mouse, usando assim o aspecto geométrico do programa. Na parte inferior temos a janela de Entrada, neste caso os comandos são dados via teclado, desta forma podem-se definir variáveis, equações, limites e outras tantas funções matemática, ou seja, a parte algébrica do software, um diferencial importante, visto que, pode-se desta maneira, representar o mesmo ente matemático de duas formas, a geométrica e a algébrica.

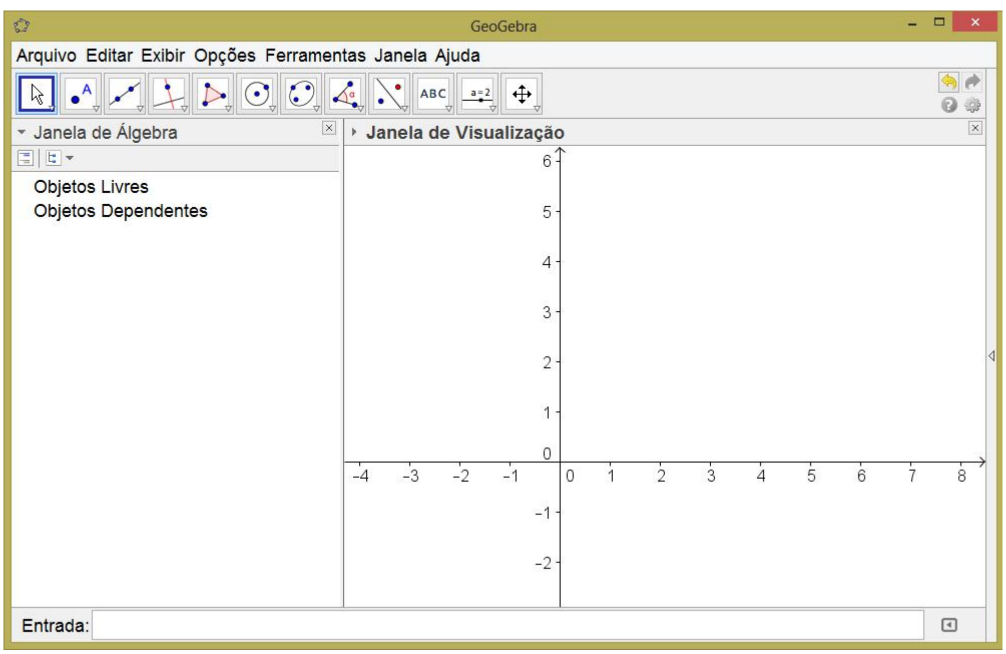


Figura 1.1: Tela de trabalho do GeoGebra

O GeoGebra tem inúmeras ferramentas que possibilitam fácil produção de figuras por parte de professores e alunos, criação de *applet* para rodar na internet, execução de sequências didáticas para conteúdos de Matemática. Através das ferramentas de construção, na barra de ferramentas, é possível realizar construções desejadas na área de trabalho com o mouse, junto às construções as coordenadas e equações correspondentes são mostradas na janela de álgebra.

A barra de ferramentas inicial é composta de 12 ícones (ferramentas necessárias às construções) cada um deles é indicado por um quadradinho com uma figura, e cada ícone deste é composto de outros sub-ícones relacionados com a função inicialmente descrita na figura abaixo:

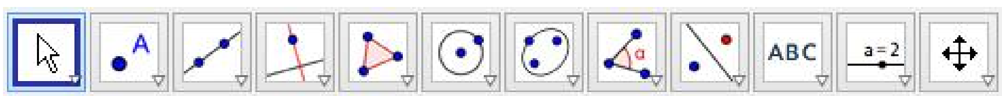


Figura 1.2: Barra de ferramentas do GeoGebra

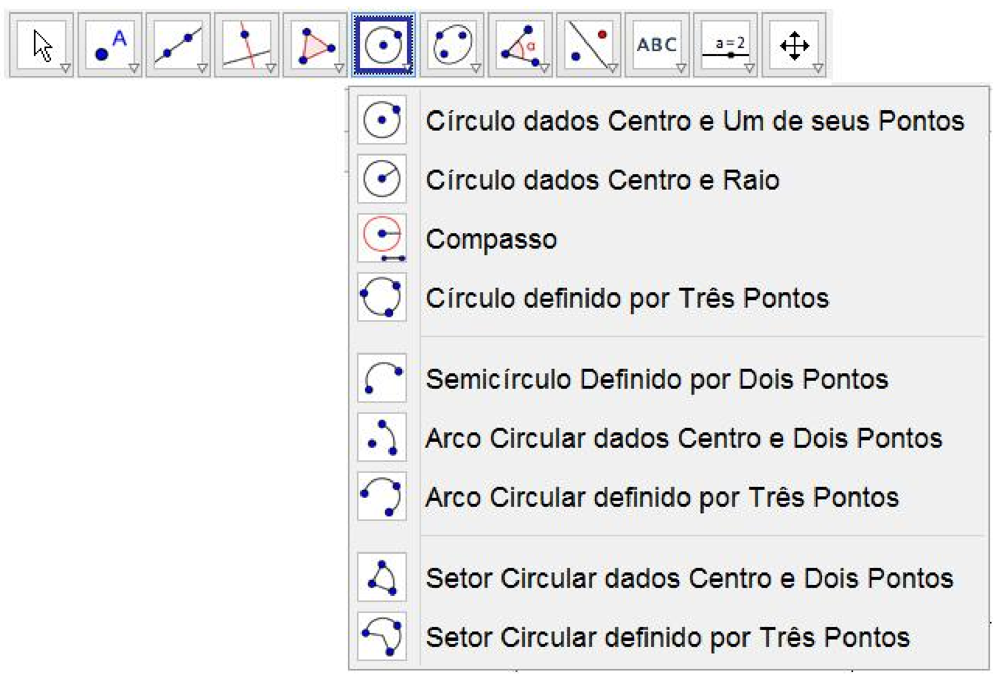
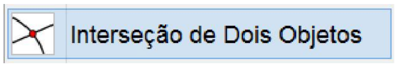


Figura 1.3: Sub-ícones da barra de ferramentas do GeoGebra

Segue abaixo a descrição das principais ferramentas do GeoGebra utilizadas neste trabalho:

- selecionando essa ferramenta e pressionando o botão esquerdo do mouse sobre o objeto é possível arrastá-lo por toda a janela geométrica.

- selecionando esta ferramenta e clicando na janela geométrica cria-se um novo ponto.

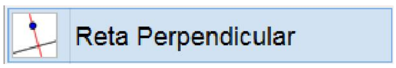


- o ponto de interseção entre dois objetos pode ser criado selecionando os objetos, dessa forma todas as interseções existentes são marcadas.

- clique em dois pontos ou em um segmento para obter seu ponto médio.

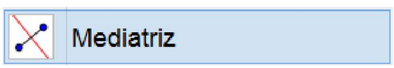
- marcando-se dois pontos, traça-se a reta definida por eles.

- marcando-se dois pontos, determina-se as extremidades do segmento a ser traçado.

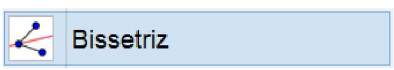


- clicando em uma reta (segmento ou semirreta) e em um ponto constrói-se uma reta perpendicular à reta considerada, passando pelo referido ponto.

- clicando em uma reta e em um ponto fora dela constrói-se um reta paralela à reta considerada, passando pelo referido ponto.

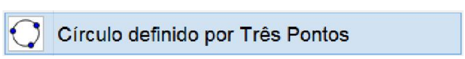


- clicando nas extremidades de um segmento de reta, constrói-se uma reta perpendicular a este passando pelo seu ponto médio.

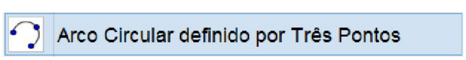


- clicando sobre duas retas concorrentes, já traçadas, constrói-se as bissetrizes dos ângulos determinados por elas. Ou ainda, clicando nos pontos que determinam um ângulo.

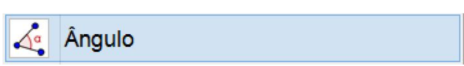
- marcando um ponto A e um ponto B, traça-se o círculo com centro A, passando por B.



- marcando três pontos não-colineares, traça-se o círculo que passa por eles.

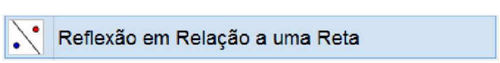


- marcando três pontos não-colineares, traça-se o arco que passa por eles.

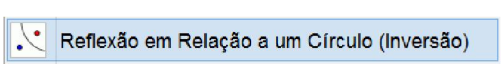


- com essa ferramenta traça-se ângulos: entre três pontos; entre dois segmentos; entre duas retas (ou semirretas); interior de um polígono.

- essa ferramenta fornece, na janela álgebra, a distância entre dois pontos; duas linhas; ou um ponto e uma linha. Fornece também o perímetro de um polígono ou o comprimento de uma circunferência.



- essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a uma reta.



- essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a um círculo.

Para a realização deste trabalho, além das ferramentas listadas acima, será utilizada uma opção muito interessante do GeoGebra que é a possiblidade de criar novas ferramentas que serão fixadas como um novo item no menu de ferramentas existentes.

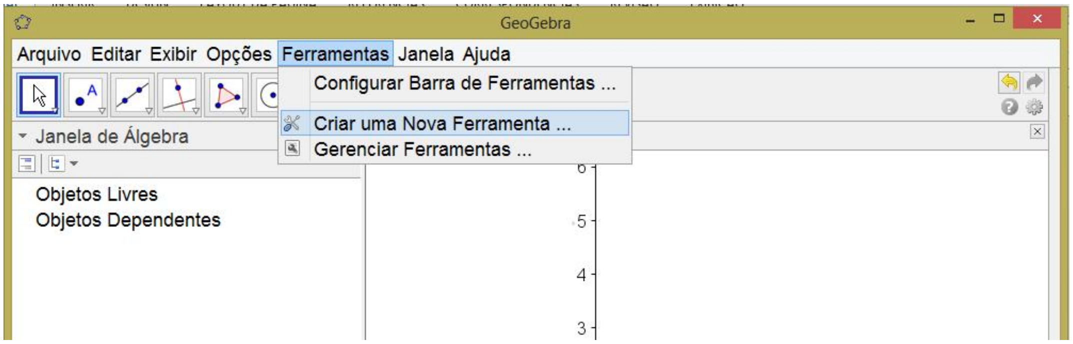


Figura 1.4: Criar uma nova ferramenta no GeoGebra

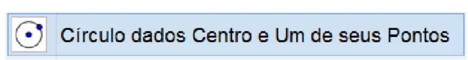
Segue abaixo instruções de como criar novas ferramentas no GeoGebra, através de construções existentes. Para descrever o processo utilizou-se como exemplo a criação de uma ferramenta que constrói triângulos equiláteros, dados dois de seus vértices.

O primeiro passo é determinar a construção geométrica, no *software* GeoGebra, de como se constrói triângulos equiláteros dados dois de seus vértices.

Segue os passos da construção:

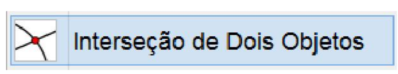
- Na barra de ferramentas clique em 

e em seguida crie o segmento *AB*;

- Clique na ferramenta 

e em seguida crie o círculo de centro em *A* passando por *B*;

- Repetindo o processo anterior crie o círculo de centro em *B* passando por *A*;

- Clique na ferramenta 

e em seguida clique nos círculos criados. Serão criados os pontos *C* e *D*, pontos de interseção dos círculos;

- Utilizando a ferramenta 

ligue os pontos *A* e *B* ao ponto *C*, definindo assim os segmentos *AC* e *BC*, que determinam o triângulo *ABC*.

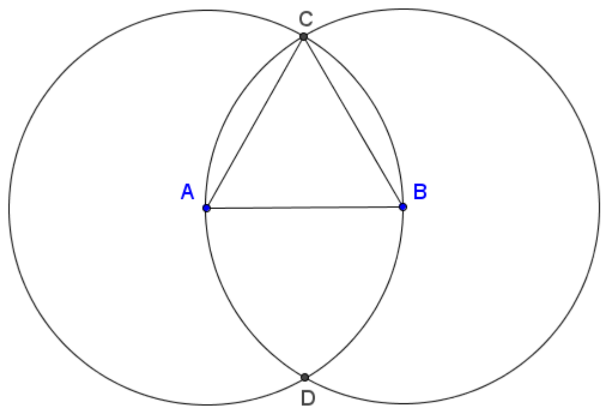


Figura 1.5: Construção do triângulo equilátero no GeoGebra

Após a construção poderá ser realizada a edição da figura utilizando a opção propriedades. Lá poderão ser alterados a cor do objeto, espessura, estilo de linha, etc.

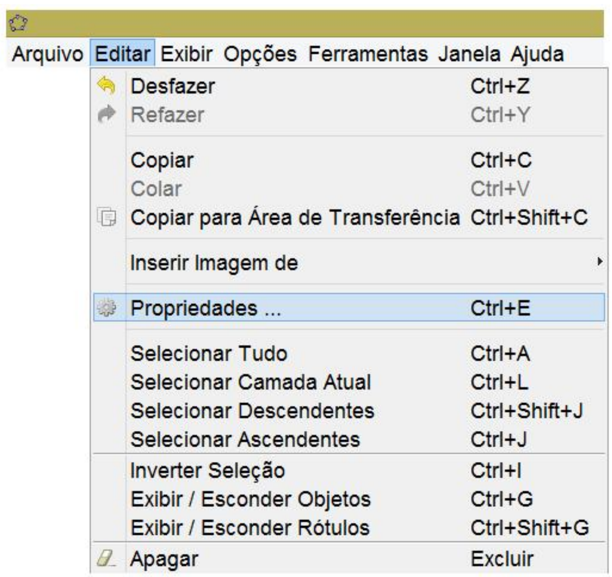


Figura 1.6: Propriedades para editar os objetos

Segue abaixo imagem da construção do triângulo equilátero após edição. Foram alteradas a espessura dos segmentos que representam os lados do triângulo, bem como sua cor (para vermelho). O estilo das linhas dos círculos foram alteradas para pontilhado.

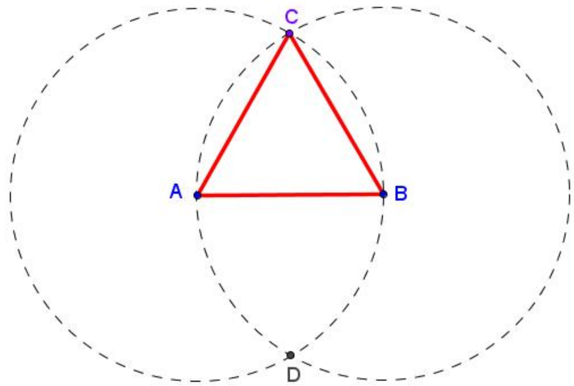


Figura 1.7: Construção do triângulo equilátero editada

Uma vez realizada a construção geométrica, o próximo passo é a criação da ferramenta no GeoGebra.

- Clique em *Ferramentas* e selecione a opção *Criar uma Nova Ferramenta* (conforme Figura 1.4). Abrirá a seguinte janela:

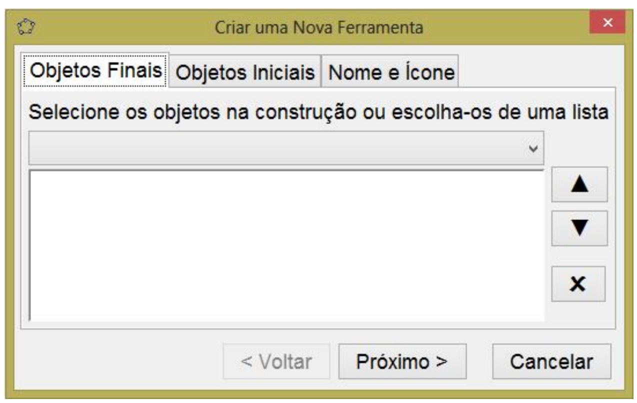


Figura 1.8: Janela para criar nova ferramenta

- Na opção *Objetos Finais* selecione os segmentos *AB*, *AC* e *BC*, bem como o ponto *C* (este grupo de objetos determinará um triângulo equilátero dados dois de seus vértices que neste caso são os pontos A e B);

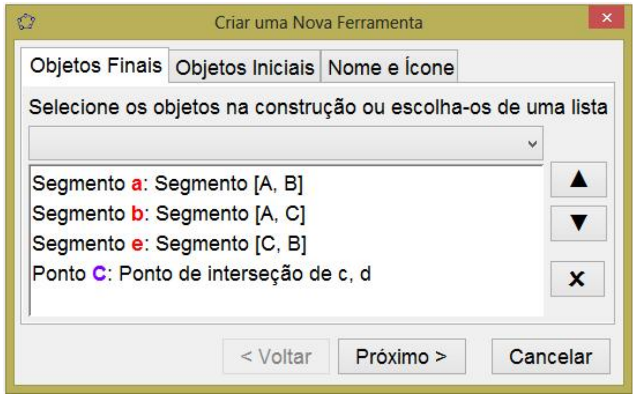


Figura 1.9: Janela Objetos Finais

- Na opção *Objetos Iniciais* selecione os pontos A e B que definem dois dos vértices do triângulo equilátero.

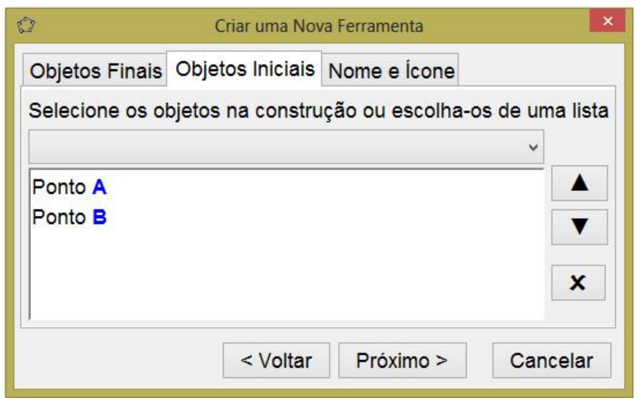


Figura 1.10: Janela Objetos Iniciais

- Na opção *Nome e Ícone*, no espaço destinado ao *Nome da ferramenta* escreva: **Triângulo equilátero**; no espaço *Nome do comando*: **Triânguloequilátero**; no espaço *Ajuda da ferramenta*: **Triângulo equilátero dados dois de seus vértices** (neste espaço é definido os passos para construção do triângulo equilátero).

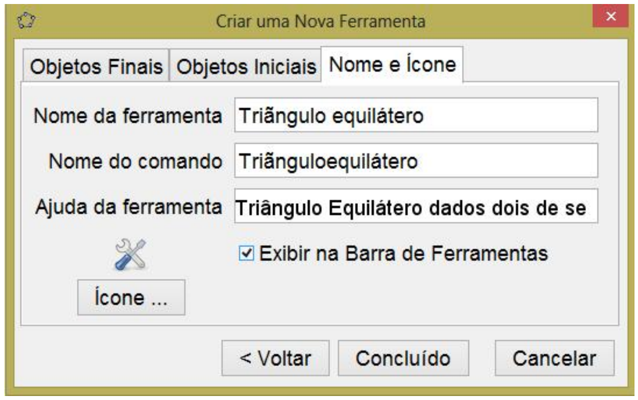
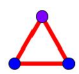


Figura 1.11: Janela Nome e Ícone

- Na opção *Ícone*, poderá ser utilizada qualquer imagem de formato suportado pelo programa (JPG, PNG, GIF e BMP). No caso desta ferramenta foi criada, no programa *Paint* (do Windows), uma imagem que representa um triângulo e essa imagem utilizada na ferramenta. 

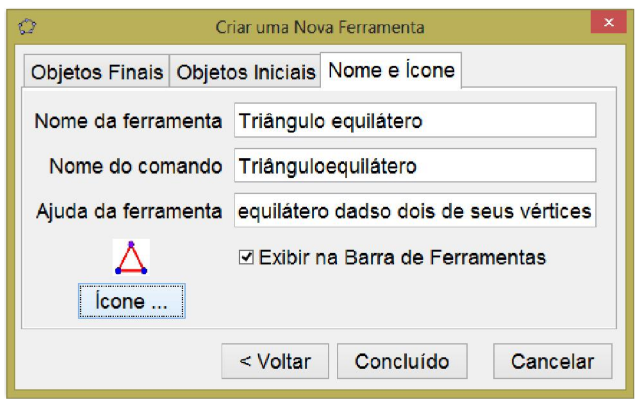


Figura 1.12: Ícone alterado

- Clique em *Concluído* que a nova ferramenta aparecerá na barra de ferramentas.

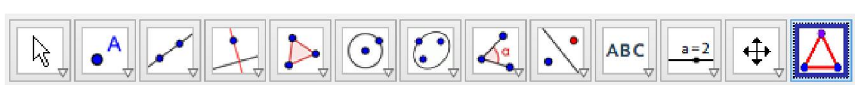


Figura 1.13: Barra de ferramentas com nova ferramenta

Este processo de criação de novas ferramentas será utilizado durante todo o capítulo 4, onde apresentaremos as construções geométricas necessárias pra criação das ferramentas que compõem o Menu Hiperbólico.

Capítulo 2

Resumo Histórico

Neste capítulo apresentaremos um breve resumo histórico sobre o surgimento das geometrias não-euclidianas, pois acreditamos que o entendimento do contexto histórico, tanto do surgimento, quanto da construção de tais geometrias, é de grande importância, mas pouco valorizado.

2.1. A Geometria de Euclides

Não se sabe muito sobre a vida e a personalidade de Euclides. O pouco que se conhece sobre ele é que foi o matemático grego responsável pela compilação de praticamente toda a matemática desenvolvida até sua época em uma monumental obra de 13 volumes chamada de *Os Elementos*, por volta de 300 a.C.

Euclides escreveu *Os Elementos* baseando-se em todo o conhecimento adquirido pela escola grega da época. Ele foi o primeiro a apresentar, de maneira sistemática, a Matemática como ciência dedutiva, isto significa que toda afirmação deve ser deduzida logicamente de outras afirmações mais simples, e assim sucessivamente. É claro que no começo dessa cadeia devem existir algumas afirmações não demonstradas, que Euclides chamou de postulados (aquilo que se pode). Euclides procurou escolher como postulados afirmações que, por sua simplicidade, seriam aceitas por qualquer pessoa de bom senso e que eram, em um certo sentido, evidentes por si mesmas.

No Livro I da obra *Os Elementos*, Euclides enuncia vinte e três definições, cinco postulados e algumas noções comuns ou axiomas[3]. Os axiomas e postulados de Euclides foram assim formulados:

Axiomas (ou noções comuns):

1. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
2. Se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais.

[3] As noções comuns são proposições lógicas não geométricas que Euclides considerou serem de senso comum, ao contrário dos postulados que são específicos à Geometria.

3. Se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais.
4. Coisa que coincidem uma com a outra são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Postulados:

1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos à vontade.
2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.
3. Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado.

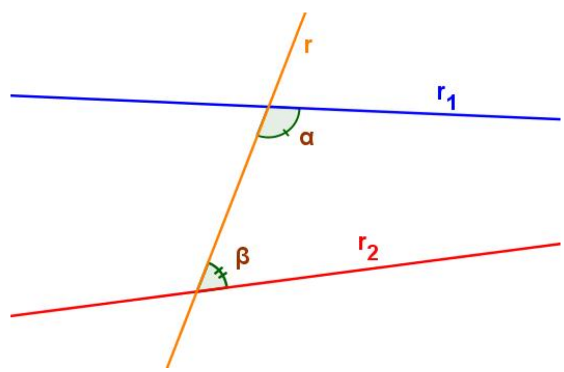


Figura 2.1: Postulado 5, se $\alpha + \beta < \pi$, então r_1 e r_2 se encontram

Por cerca de dois mil anos a Geometria de Euclides foi considerada como a única geometria possível. A obra *Os Elementos* era inquestionável. Tão famosa que, depois da Bíblia, é o livro de maior número de edições.

Matemáticos debatiam a ideia de que se existisse a possibilidade apenas de uma única geometria, certos postulados seriam teoremas e dentro desse raciocínio, renomados matemáticos tentaram provar o quinto postulado, pois não viam simplicidade em seu enunciado. Segundo Carmo (1987) até mesmo Euclides deve ter considerado o quinto postulado como pouco evidente, pois retardou em utilizá-lo na prova de suas proposições.

Existem várias formas equivalentes do Postulado 5, das quais a mais famosa é atribuída a *Playfair* (que em 1795 publicou uma edição de *Os Elementos* de Euclides) e que se enuncia da maneira seguinte:

Por um ponto p fora de uma reta dada r passa não mais que uma paralela a r.

O quinto postulado ficou conhecido como o “Postulado das Paralelas” e, durante vários séculos, geômetras de todas as origens tentaram demonstrá-lo a partir dos outros postulados. Porque para eles não se tratava de um postulado, mas sim de um teorema. Acreditavam que seria possível demonstrá-lo usando os primeiro quatro postulados e um conjunto de definições. Grandes matemáticos tentaram, sem sucesso, a demonstração do quinto postulado, pois a maior parte destas tentativas de demonstração admitiam fatos que ou eram equivalentes a ele, ou não podiam ser demonstrados usando unicamente os outros quatro postulados.

Segundo Barbosa (2002), dentre estes matemáticos destacam-se Ptolomeu (85-165), Proclus (411-485), Nasiredim (1201-1274), Wallis (1616-1703), Sacheri (1667-1733), Lambert (1728-1777) e Legendre (1752-1833).

2.2. Tentativas de demonstrar o Postulado das Paralelas

Para muitos matemáticos o quinto postulado tratava-se, muito provavelmente, não de um verdadeiro postulado, mas sim de um teorema, e como tal deveria ser demonstrado dentro da própria geometria, utilizando-se apenas dos quatro primeiros postulados e o conjunto de definições fixado. Nesta tarefa, a de provar o quinto postulado de Euclides, envolveram-se inúmeros matemáticos durante mais de dois mil anos.

2.2.1. Claudius Ptolomeu

Claudius Ptolomeu nasceu em 85 d.C. no Egito e morreu em 165 d.C. na Alexandria. Foi um eminente matemático e astrônomo que escreveu uma importante obra intitulada *Almagesto*, que introduziu a trigonometria como ferramenta no estudo de astronomia.

Claudius Ptolomeu foi um dos matemáticos que contestaram o quinto postulado de Euclides, propondo uma demonstração de tal postulado a partir dos quatro primeiros. A demonstração proposta por Ptolomeu fazia uso, implicitamente, da vigésima nona proposição do primeiro livro de *Os Elementos* de Euclides, que depende do quinto postulado, isto é, ele usou uma proposição equivalente ao próprio quinto postulado, fazendo portanto um ciclo vicioso.

Figura 2.2: Ptolomeu (gravura do século XVI)

Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3APtolemy_16century.jpg

2.2.2. Proclus Diadochus

Proclus nasceu em 8 de fevereiro de 411 d.C. em Constantinopla (atualmente Istambul, na Turquia) e morreu em 17 de abril de 485 d.C. em Atenas, na Grécia.

Proclus foi um estudioso das obras clássicas gregas e muito do que se sabe da história e da filosofia da Grécia Antiga sobreviveu em seus escritos. Ele escreveu um trabalho sobre a obra de Euclides chamado de “Comentários sobre Euclides” onde, assim como Ptolomeu, critica o Quinto Postulado de Euclides, propondo uma demonstração do mesmo, a partir dos quatro outros postulados. Essa demonstração é baseada na aceitação do fato de que retas paralelas são equidistantes, fato este que é equivalente ao quinto postulado de Euclides.

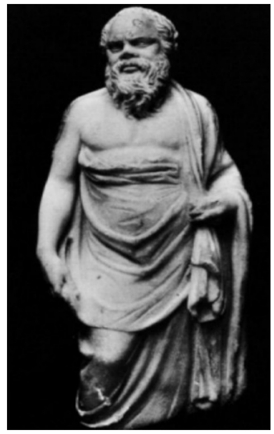


Figura 2.3: Proclus

Fonte: http://www.masseiana.org/proclus_timaeus.htm

2.2.3. Nasir al-Din al-Tusi (Nasiredin)

Nasiredin era árabe e nasceu em 18 de fevereiro de 1201 em Tus na Pérsia (atualmente Irã) e morreu em 26 de junho de 1274 em Kadhimain, Pérsia (próximo a Bagdá, atualmente Iraque).

Assim como Ptolomeu, Nasiredin também estudou astronomia e tentou provar o quinto postulado de Euclides. Para tanto, ele utilizou uma proposição-axioma, que foi tomada sem demonstração devido ao seu caráter de auto evidência. No entanto, essa proposição assumida é um equivalente do quinto postulado de Euclides, cometendo o mesmo erro que Ptolomeu.

Figura 2.4: Nasiredin

Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Al-Tusi_Nasir.jpeg

2.2.4. John Wallis

Wallis nasceu em 23 de novembro de 1616 em Ashford na Inglaterra e morreu em 28 de outubro de 1703 em Oxford na Inglaterra.

John Wallis foi um eminente matemático inglês que escreveu algumas obras sobre secções cônicas, álgebra e aritmética. Uma delas, a saber, *Arithmetica Infinitorum* (Aritmética Infinita) foi utilizada por Isaac Newton em seus estudos. Em suas pesquisas, Wallis também tentou demonstrar o quinto postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros. Para tanto, ele fez uso da existência de triângulos semelhantes e não congruentes, fato este que é equivalente ao próprio quinto postulado.

Figura 2.5: John Wallis

Fonte: http://www.nndb.com/people/599/000087338/

2.2.5. Giovanni Girolamo Saccheri

Saccheri nasceu em 5 de setembro de 1667 em São Remo na Itália e morreu em 25 de outubro de 1733 em Milão, também na Itália.

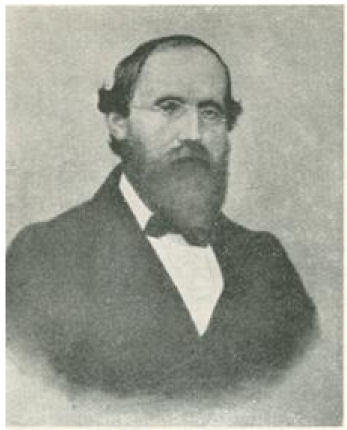
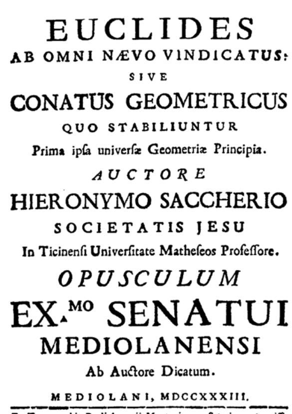


Figura 2.6: Saccheri

Fonte: http://www.evaristogalois.it/saccheri.htm

Saccheri foi um padre jesuíta e estudioso de teologia, filosofia, retórica e matemática. Ele era professor da Universidade Pávia. Em 1733 publicou um livro que foi descoberto somente em 1889. O livro era intitulado *Euclides Ab Omni Naevo Vindicatus* (Euclides Livre de Todas as Máculas) e considerado uma das primeiras obras de geometria não-euclidiana (embora Saccheri não tenha concebido esta obra com este intuito).



EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permissu.*

Figura 2.7: Página da obra Euclides Ab Omni Naevo Vindicatus

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Saccheri_1733_-_Euclide_Ab_Omni_Naevo_Vindicatus.gif

Em sua obra Saccheri tenta, assim como seus antecessores, provar o quinto postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros. A novidade é que, pela primeira vez, o método de redução ao absurdo em demonstrações foi utilizado no problemas das paralelas.

Saccheri supôs a negação do quinto postulado e tentou chegar a uma contradição fazendo uso de um quadrilátero com dois ângulos retos na base e dois lados verticais congruentes (esse quadrilátero mais tarde passou a se chamar Quadrilátero de Saccheri).

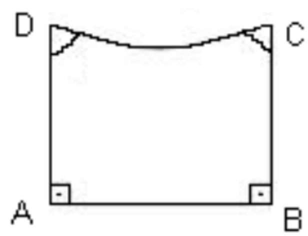


Figura 2.8: Quadrilátero de Saccheri

Como ele sabia que a existência de retângulos e o quinto postulado são equivalentes, a negação assumida conduziu a dois casos, a saber: o caso em que os ângulos congruentes do topo são obtusos e o caso em que são agudos.

Saccheri demonstrou que a hipótese do ângulo obtuso era falsa, assumindo, como Euclides, que a reta é infinita. Entretanto, ao procurar uma contradição para a hipótese do ângulo agudo, ele provou uma série de resultados coerentes com todos os postulados da Geometria Euclidiana, exceto o quinto.

Após ter desenvolvido vários resultados, que hoje são conhecidos teoremas de Geometria Hiperbólica, Saccheri forçou uma contradição admitindo ser impossível a existência de duas retas paralelas assintóticas, ou seja, retas que são paralelas, mas que vão se aproximando à medida que são prolongadas. Essas retas podem ser utilizadas para construção dos chamados triângulos generalizados da Geometria Hiperbólica.

As geometrias não-euclidianas poderiam ter sido descobertas quase um século antes, se Saccheri tivesse suspeitado que não tinha chegado a uma contradição, uma vez que não havia uma contradição para ser encontrada. Saccheri é considerado o precursor de Legendre, Lobachewsky e Riemann (B ARBOSA, 2002).

2.2.6. Johann Heinrich Lambert

Lambert nasceu em 26 de agosto de 1728 em Mulhausen na França e morreu em 25 de setembro de 1777 em Berlim na Alemanha.

Figura 2.9: Lambert

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:JHLambert.jpg

Assim como Saccheri, Lambert também tentou provar o quinto postulado de Euclides por redução ao absurdo. Em seu trabalho *Theorie der Parallellinien* de 1766, via a introdução de um quadrilátero que possui três ângulos retos, conhecido hoje como Quadrilátero de Lambert. Como consequência, ele deduziu uma série de resultados que hoje são conhecidos como teoremas de Geometria Hiperbólica. Talvez seu mais importante resultado nesse trabalho tenha sido a dedução de que a soma dos ângulos internos de um triangulo é inversamente proporcional à sua área, em uma geometria onde não vale o quinto postulado.

2.2.7. Adrien Marie Legendre

Legendre nasceu em 18 de setembro de 1752 em Paris na França e morreu em 10 de janeiro de 1833 no mesmo local.

Legendre escreveu um tratado de geometria intitulado *Eléments de Géométrie* em 1794, que serviu de texto básico no ensino de Geometria durante muitas décadas na Europa. Foi nesse trabalho que ele voltou-se para a questão do problema das paralelas e, assim como seus antecessores, tentou demonstrar o quinto postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros.

Em uma de suas demonstrações, Legendre admitiu a partir de um ponto no interior de um ângulo não degenerado, cuja medida não é superior a 60º, que é possível traçar uma reta que intersecta os dois lados desse ângulo.

Embora pareça evidente, essa proposição é equivalente ao próprio quinto postulado de Euclides e, desta forma, do ponto de vista lógico-dedutivo, assumi-la significa assumir o quinto postulado.

Apesar de Legendre não ter feito progressos na resolução do “Problema das Paralelas”, seu trabalho no campo da Geometria foi magistral do ponto de vista didático e da clareza de raciocínio com que demonstrou teoremas da Geometria Euclidiana.

Figura 2.10: Legendre

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Louis_Legendre.jpg#globalusage

2.3. O surgimento das Geometrias Não-Euclidianas

Depois de diversas tentativas de demonstrar o quinto postulado, foi a negação do mesmo que levou a construção das novas geometrias, tão consistentes como a de Euclides. Existem duas maneiras de negar o quinto postulado. A primeira dá origem a Geometria Hiperbólica, neste caso supomos que por qualquer ponto fora de uma reta, é possível traçar pelo menos duas retas paralelas a esta outra. A segunda culmina na Geometria Elíptica (Esférica), neste caso negamos a existência de retas paralelas.

O surgimento das geometrias não-euclidianas provocou uma mudança na maneira de pensar o espaço e a verdade matemática. Essa mudança permitiu que se abrisse espaço para o estudo de outras geometrias.

Matemáticos como Gauss (1777-1855), Bolyai (1802-1860), Lobaschevsky (1792-1856) e Riemann (1826-1866) lançaram as bases das geometrias não-euclidianas, que são logicamente aceitas assim como a Euclidiana.

2.3.1. Johann Carl Friedrich Gauss

Gauss foi um dos maiores matemáticos que já existiram e possui contribuições em diversas áreas dessa ciência. Nasceu em 30 de abril de 1777 em Brunswick na Alemanha e morreu em 23 de fevereiro de 1855 em Gottingen, também na Alemanha.

Gauss tomou conhecimento logo cedo, por volta dos quinze anos de idade, do "Problema das Paralelas" e, assim como seus antecessores, de início tentou demonstrar o Quinto Postulado a partir dos quatro primeiros. No entanto, logo convenceu-se que tal demonstração não era possível.

Embora não haja registro, é possível que Gauss tenha lido os trabalhos de Saccheri, Lambert e Legendre sobre o "Problema das Paralelas" e tomado conhecimento dos vários teoremas de Geometria Não-Euclidiana constantes nesses trabalhos.

Mesmo não tendo publicado nada sobre esse assunto sabe-se, por meio de numerosas correspondências que Gauss mantinha com diversos matemáticos da época, que ele desenvolveu uma série de resultados de Geometria Hiperbólica e, certamente, foi o primeiro matemático a reconhecer a existência de uma geometria consistente diferente da Euclidiana.

Talvez a não publicação de tais resultados tenha sido motivada pelo receio de não aceitação de uma geometria diferente da clássica e da contestação da filosofia de Kant, adotada pela igreja, que coloca o universo como euclidiano.

O termo "não-euclidiana" foi usado pela primeira vez por Gauss. Em 1824, em carta enviada a F. A. Taurinos, declara que "se supusermos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180º (o que equivale a considerar uma das negações do Quinto Postulado), é possível desenvolver uma longa série de resultados não contraditórios que constituem uma Geometria Não-Euclidiana".

Figura 2.11: Gauss

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

2.3.2. János Bolyai

Bolyai nasceu em 15 de dezembro de 1802 em Kolozsvár na Hungria (hoje é uma cidade da Romênia) e morreu em 27 de janeiro de 1860 em Marosvásárhely na Hungria (hoje, também é Romênia).

O húngaro János Bolyai é filho de um amigo de Gauss, chamado Farkas Bolyai (1775-1856) que tentou demonstrar o Quinto Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros. Talvez, por isso, János tenha tentado logo cedo resolver o “Problema das Paralelas”.

Assim como Gauss, o jovem János logo convenceu-se da impossibilidade de tal demonstração e passou a admitir e a desenvolver diversos resultados de Geometria Hiperbólica. János publicou, em latim, o fruto de seu trabalho sob o título “Ciência do Espaço Absoluto” (fazia parte, como apêndice, de um livro de seu pai, intitulado *Tentamen*).

Figura 2.12: Bolyai

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:JanosBolyai.jpg

2.3.3. Nikolai Ivanovich Lobachevsky

Lobachevsky nasceu em 01 de dezembro de 1792 em Nizhny na Rússia e morreu em 24 de fevereiro de 1856 em Kazan, também na Rússia.

Assim como seus antecessores, Lobachevsky tentou demonstrar o quinto postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros e logo se convenceu da impossibilidade desse feito. A partir de então, passou a reconhecer a existência e a desenvolver, de forma independente, resultados de uma nova geometria, a Geometria Hiperbólica, diferente da Euclidiana, denominada por ele de *pangeometria* ou *geometria imaginária*.

Em 1826 Lobachevsky chegou a proferir palestras sobre a existência de geometrias não-euclidianas na Universidade de Kazan onde foi professor e reitor. Mas foi em 1829 que publicou um trabalho, em russo, sobre suas descobertas mas quase que completamente ignorado pela comunidade científica russa e completamente ignorado no resto do mundo.

Entretanto, cronologicamente, trata-se da primeira publicação de uma geometria cujo autor admite ser não euclidiana.

Em busca de reconhecimento de seu trabalho, Lobachevsky publicou uma versão em alemão em 1840, intitulada “Pesquisa Geométrica Sobre a Teoria das Paralelas”, chegando às mãos de Gauss, que ficou mais uma vez surpreso com o fato de Lobachevsky, de modo totalmente diferente dos seus, chegando a afirmar em correspondência para um amigo astrônomo de nome Schumacher que o livro de Lobachevsky continha uma exposição admirável de toda a teoria de Geometria Hiperbólica.

Figura 2.13: Lobachevsky

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Nikolay_Ivanovich_Lobachevsky.jpeg

2.3.4. Georg Friedrich Bernhard Riemann

Riemann nasceu em 17 de setembro de 1826 em Breselenz na Alemanha e morreu em 20 de julho de 1866 em Selasca na Itália, vítima de tuberculose.

Riemann generalizou as geometrias não-euclidianas por meio do conceito de curvatura e fundamentou a Geometria Elíptica, que pode ser obtida, do ponto de vista axiomático, da negação do Quinto Postulado de Euclides que conduz à não existência de retas paralelas e à substituição do Segundo Postulado de Euclides por postulados que permitem que uma reta seja finita.

Com isso, a geometria sobre uma esfera, que sob certas restrições serve de modelo para a Geometria Elíptica, desvinculou-se como parte da Geometria Euclidiana Espacial e passou a ter vida própria.

O trabalho de Riemann sobre geometria está muito além da simples generalização das três geometrias de espaço homogêneo (curvatura gaussiana constante). Ele introduziu as hoje chamadas Geometrias Riemannianas que podem, inclusive, não ser homogêneas e que foram, posteriormente, utilizadas na Teoria da Relatividade de Albert Einstein em 1906.

Figura 2.14: Riemann

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg

2.4. Modelos Geométricos

O advento das geometrias não-euclidianas evidenciou que a visão de que a geometria como um modo de descrever e entender o espaço precisava ser reformulada. Quase que imediatamente após a criação de outras geometrias, perguntava-se se o mundo era regido pelas leis da Geometria Euclidiana ou pela de Lobachevsky.

Lobachevsky havia chamado sua geometria de *imaginária* pelo fato de não possuir recursos para visualizá-la. As ideias iniciais sobre a geometria que criou mostraram que era possível estudar geometria mesmo não sendo possível construir as figuras que eram seus objetos de estudo. Assim, a geometria se mostrou totalmente independente de representações, ou seja, a geometria passou a ser entendida como uma estrutura lógica, um sistema axiomático inventado arbitrariamente pelo homem.

Foram desenvolvidos pelo menos três modelos consistentes[4] para a geometria de Lobachevsky. O primeiro modelo para a geometria Hiperbólica foi desenvolvido por Eugenio Beltrami (1835-1900), a pseudoesfera. Um outro modelo foi criado pelo matemático Feliz Klein (1849-1925) e mais dois modelos pelo matemático Henry Poincaré (1854-1912).

[4] Um modelo é dito consistente quando a interpretação dada aos conceitos primitivos não leva a uma contradição, ver Terdiman (1989).

2.4.1. Eugenio Beltrami

Beltrami nasceu em 16 de novembro de 1835 em Cremona no Império Austríaco (atualmente, Itália) e morreu em 18 de fevereiro de 1900 em Roma, na Itália.

Em 1868, Beltrami publicou um trabalho em que demonstrava que, dependendo do que se considera como uma reta e como um plano, era possível interpretar a geometria de Bolyai e Lobachevsky. Ele foi o primeiro a introduzir um tal modelo para a Geometria Hiperbólica chamado de pseudoesfera. Tal modelo faz uso da superfície de revolução da curva denominada tratriz em torno de sua assíntota.

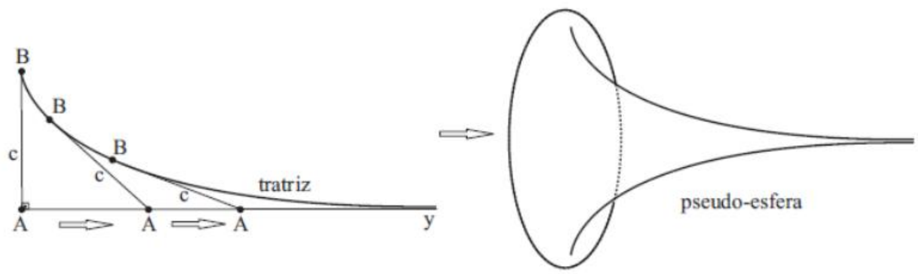


Figura 2.15: Pseudoesfera

O modelo de Beltrami, no entanto, se mostrou insuficiente para todas as representações, além de ser de difícil construção.

Figura 2.16: Beltrami

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Beltrami.jpg

2.4.2. Felix Christian Klein

Klein nasceu em 25 de abril de 1849 em Düsseldorf na Prússia (hoje, Alemanha) e morreu em 22 de junho de 1925 em Göttingen na Alemanha.

Felix Klein foi um eminente geômetra que publicou em 1871 dois artigos sobre a chamada Geometria Não-Euclidiana, onde introduziu um modelo para a Geometria Hiperbólica (Modelo do Disco de Klein). Esse modelo consiste em um círculo euclidiano considerando apenas sua região interior. As retas são identificadas como as cordas deste círculo. Como dois pontos distintos de um círculo determinam um única corda, desta forma temos que dois pontos neste plano determinam um única reta hiperbólica.

Figura 2.17: Klein

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Felix_Christian_Klein.jpg

Sabe-se que duas cordas distintas se interceptam, no máximo, em um ponto interior do círculo, portanto temos que duas retas hiperbólicas se interceptam no máximo em um ponto. Nesse modelo têm-se infinitas retas paralelas a uma dada reta passando por um dado ponto.

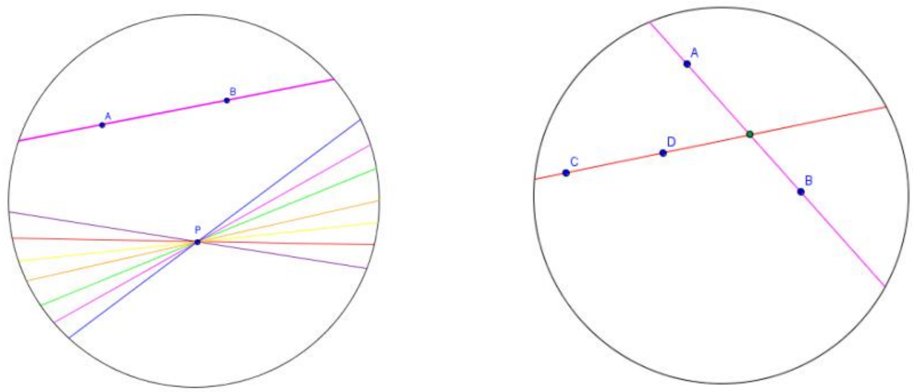


Figura 2.18: Modelo de Klein

2.4.3. Jules Henri Poincaré

Poincaré nasceu em 29 de abril de 1854 em Nancy na França e morreu em 17 julho de 1912 em Paris, também na França.

Poincaré é um dos maiores matemáticos de todos os tempos e é considerado o último universalista em matemática, ou seja, uma pessoa que detinha conhecimento profundo de todas as áreas da matemática.

Figura 2.19: Poincaré

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:JH_Poincare.jpg

No final do século XIX Poincaré introduziu dois modelos euclidianos para a Geometria Hiperbólica e são chamados de modelo do disco e modelo do semiplano.

O Modelo do Disco de Poincaré difere do modelo de Klein no que diz respeito às retas. Neste modelo as retas são arcos de círculo perpendiculares ao círculo do modelo, cujo interior representa o plano hiperbólico. No capítulo 3 será desenvolvido o Modelo Euclidiano do Disco de Poincaré.

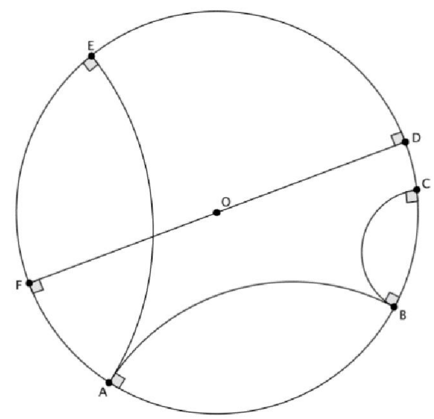


Figura 2.20: Modelo do Disco de Poincaré

O Modelo do Semiplano de Poincaré é quase idêntico ao Modelo do Disco de Poincaré. Nele o plano hiperbólico é um semiplano euclidiano aberto, descontando-se sua reta limite. As retas são os semicírculos que são ortogonais à reta limite, ou as retas perpendiculares à mesma.

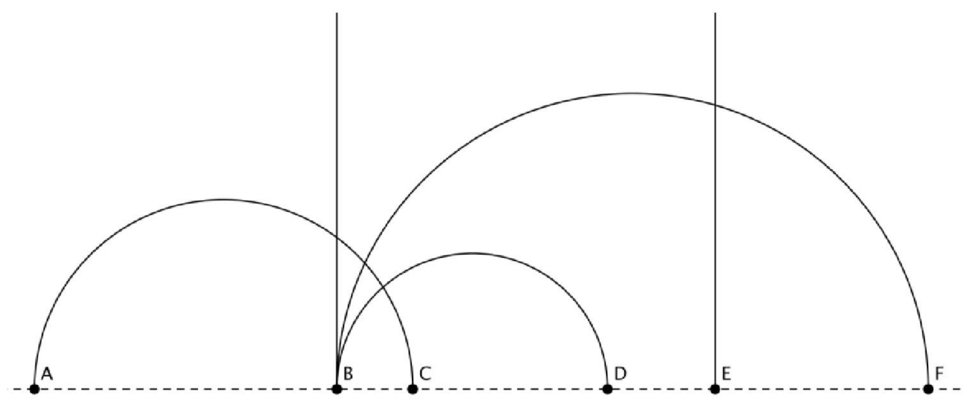


Figura 2.21: Modelo do Semiplano de Poincaré

Capítulo 3

Um modelo para a Geometria Hiperbólica

A necessidade de visualizar um espaço onde seria possível outras geometrias, que negasse o quinto postulado, deu origem à criação dos modelos para as geometrias não euclidianas.

Um modelo para um determinado sistema axiomático é uma interpretação dada aos conceitos primitivos de modo que os axiomas sejam todos propriedades verdadeiras.

Exemplo de um modelo: o plano euclidiano tal qual o consideramos é um modelo para o sistema axiomático de Hilbert[5] pois nele é possível representar ponto e reta de tal modo que os axiomas de Hilbert passam a ser aceitos como verdadeiros.

Enquanto a Geometria Euclidiana foi desenvolvida a partir de uma percepção visual e tátil e axiomatizada depois, a Geometria Hiperbólica foi desenvolvida a partir de sua axiomatização e posteriormente foram desenvolvidos os modelos matemáticos para sua percepção visual e tátil.

Sendo assim, neste capítulo estudaremos o plano hiperbólico representado pelo modelo do Disco de Poincaré, para isto revisaremos alguns conceitos da Geometria Euclidiana necessários à construção desse modelo e realizaremos algumas construções geométricas.

3.1. Alguns conceitos euclidianos

Nesta seção apresentamos alguns conceitos da Geometria Euclidiana, necessários para à compreensão da construção do modelo do Disco de Poincaré. Para um melhor aprofundamento sobre as definições e proposições apresentadas consultar Terdiman (1989).

---

[5] No final do século XIX, David Hilbert (1862-1943) apresentou sua obra, *Fundamentos de Geometria*, onde fez um estudo de *Os Elementos* de Euclides e elaborou um conjunto completo de axiomas da Geometria Euclidiana, corrigindo as imperfeições dos axiomas de Euclides.

3.1.1. Potência de ponto

Proposição 3.1. *Dado um ponto P, exterior ou interior a uma circunferência δ, P $\notin \delta$, se duas retas por P intersectam δ em pares de pontos (A,B) e (C,D), respectivamente, então:*

$$PA.PB = PC.PD$$

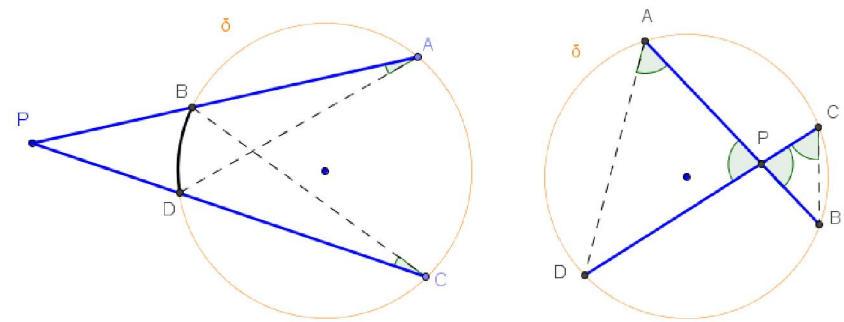


Figura 3.1: Potência de ponto.

Demonstração. *Assumindo, sem demonstrar, a Proposição*[6]*, consideremos os triângulos PAD e PCB (Figura 3.1). O ângulo $\hat{P}$ é comum ou oposto pelo vértice nesses triângulos. Sendo, também, Â = $\hat{C}$, visto que subentendem o mesmo arco, temos que tais triângulos são semelhantes. Logo,*

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

Definição 3.1. *O produto PA.PB = PC.PD é chamado de* **potência de** *P em relação a circunferência δ.*

Uma generalização do 1º caso: seja o ponto P fora do círculo δ e T o ponto de tangência de uma das duas retas tangentes a δ passando por P, então PT² é igual à potência do ponto P em relação a δ. Como os triângulos PAT e PTB são semelhantes, P é comum e BÂT = B$\hat{T}$P (medem metade do arco menor $\widehat{BT}$), pelo caso AA (ângulo-ângulo) de semelhança de triângulos, temos:

[6] Na Geometria Euclidiana, ângulos inscritos que subentendem um mesmo arco em uma circunferência possuem mesma medida.

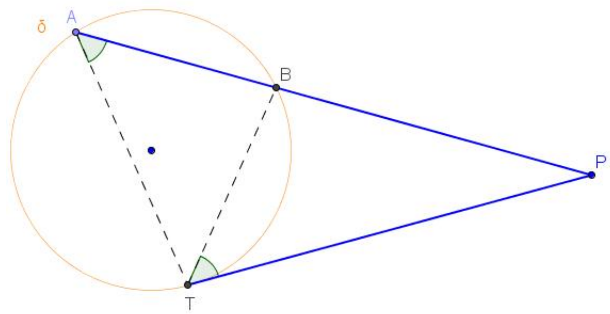


Figura 3.2: Generalização da potência de ponto

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow PA.PB = (PT)^2$$

3.1.2. Inverso de um ponto

Definição 3.2. *Seja δ uma circunferência de raio r e centro O. Para cada ponto P do plano, P distinto de O, o* ***inverso de*** *P em relação à δ é o único ponto P' na semirreta OP tal que*

$$OP.OP' = r^2$$

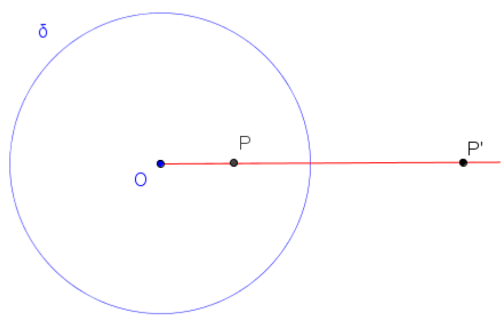


Figura 3.3: Inverso de um ponto

As seguintes propriedades de inversão, são imediatas, a partir de sua definição:

- *P' = P se, e somente se, P $\in \delta$;*
- *Se P $\in$ int δ, então P' $\in$ ext δ;*
- *Se P $\in$ ext δ, então P' $\in$ int δ.*

Com o auxílio do GeoGebra, mostraremos como realizar a construção do inverso de um ponto, para os seguintes casos:

P exterior à circunferência δ

Dados a circunferência δ de centro *O* e raio *r* e o ponto *P* externo à circunferência δ, façamos:

i) Tracemos a semirreta OP;

ii) Passando por O construamos a perpendicular à semirreta OP determinando os pontos A e B de interseção dessa perpendicular com a circunferência δ;

iii) Tracemos a semirreta AP determinando o ponto C de interseção dessa semirreta com a circunferência δ;

iv) Tracemos a semirreta BC determinando o ponto P' de interseção da semirreta BC com a semirreta OP, inverso de P.

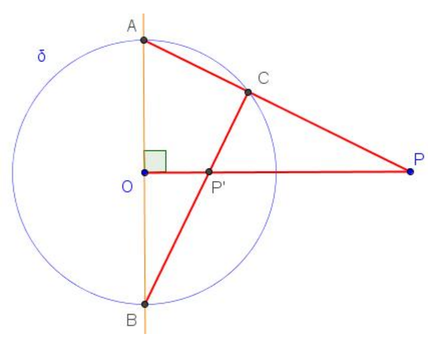


Figura 3.4: Inverso de *P* exterior à circunferência

Observamos que os triângulos *OPA* e *OBP'* são semelhantes, seus ângulos internos são côngruos. Logo

$$\frac{OA}{OP'} = \frac{OP}{OB} \Rightarrow OA.OB = OP.OP' \Rightarrow OP.OP' = r^2.$$

P interior à circunferência δ

Dados a circunferência δ de centro *O* e raio *r* e o ponto *P*, distinto de *O*, interior à circunferência δ façamos:

i) Tracemos a semirreta OP;

ii) Passando por P construamos a perpendicular à semirreta OP e obtemos um ponto T de interseção dessa perpendicular com a circunferência δ;

iii) Tracemos o raio OT;

iv) Construamos a tangente à δ por T e obtemos o ponto P' de interseção com a semirreta OP, inverso de P.

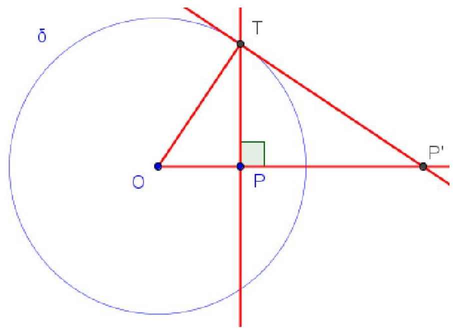


Figura 3.5: Inverso de *P* interior à circunferência

Observamos que os triângulos OPT e OTP' são semelhantes, logo

$$\frac{OT}{OP'} = \frac{OP}{OT} \Rightarrow (OT)^2 = OP.OP' \Rightarrow OP.OP' = r^2.$$

3.1.3. Circunferências ortogonais

Definição 3.3. *Duas circunferências, δ e λ, são* ***ortogonais*** *quando seus raios são perpendiculares em cada ponto de interseção de δ com λ.*

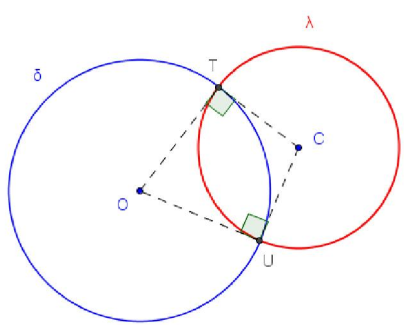


Figura 3.6: Circunferências ortogonais

Na proposição abaixo veremos que por um ponto *P* Interior a uma circunferência δ de centro *O*, $P \neq O$, passam infinitas circunferências ortogonais à δ, e todas contém o ponto *P'* inverso de *P*.

Proposição 3.2. *Sejam P um ponto do plano e δ uma circunferência de centro O e raio r, $P \notin \delta$ e $P \neq O$. Uma circunferência λ passando por P corta δ ortogonalmente se, e somente se, λ passa por P', ponto inverso de P em relação à δ.*

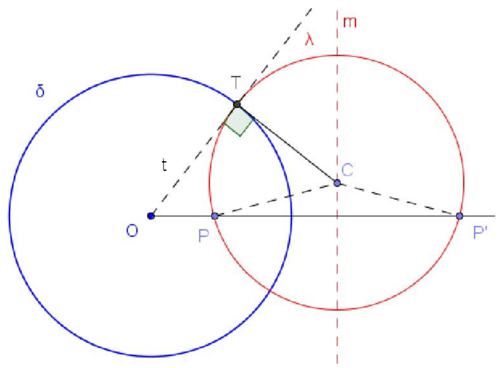


Figura 3.7: Apoio à Proposição 1.2

Demonstração

<u>Prova da condição necessária</u> - Suponhamos que a circunferência λ corte ortogonalmente a circunferência δ nos pontos T e U, então as tangentes à λ em T e U se encontram em O, e O está fora de λ. A semirreta OP corta a circunferência λ no ponto Q, e temos

$$OP.OQ = OT^2 = r^2 \Longrightarrow Q = P' inverso\ de\ P\ em\ relação\ a\ \delta.$$

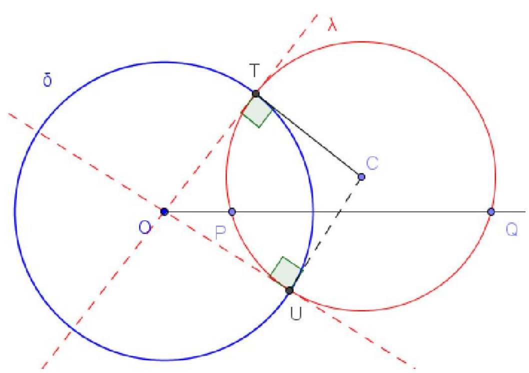


Figura 3.8: Apoio à Proposição 1.2

<u>Prova da condição suficiente</u> – Suponhamos P' inverso de P em relação à circunferência δ, P e P' pertencem a uma mesma circunferência λ, então o centro C desta circunferência pertence à mediatriz m de PP'. Como o ponto O é externo a λ, P ≠ O, existe T $\in \lambda$ ponto de tangência da reta que passa por O à circunferência λ.

$$OT^2 = OP.OP' = r^2 \Longrightarrow T \in \delta.$$

Logo δ é ortogonal a λ.

A proposição abaixo nos afirma que dados dois pontos *P* e *Q* internos à uma circunferência δ, de centro *O* e raio *r*, *P ≠ O* e *Q ≠ O*, existe uma única circunferência ortogonal a δ que contém os pontos *P*, *P'*, *Q* e *Q'* satisfazendo a igualdade *OP.OP' = OQ.OQ'.*

Proposição 3.3. *Sejam P e Q pontos internos à uma circunferência δ de centro O e raio r, P e Q distintos de O. Se P' e Q' são pontos inversos, respectivamente de P e Q, em relação à circunferência δ, então os pontos P, Q, P' e Q' pertencem a uma única circunferência (chamaremos esta de λ).*

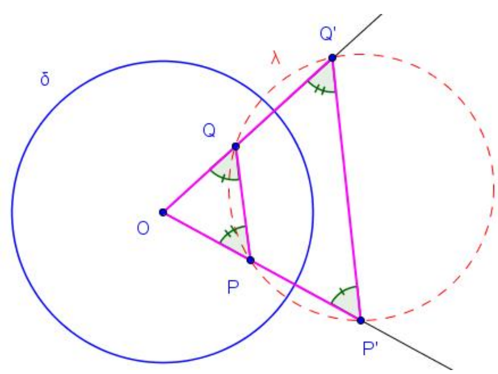


Figura 3.9: Apoio à Proposição 1.3

Demonstração. *Se P' e Q' são os pontos inversos de P e Q, respectivamente, em relação à circunferência δ, então*

$$r^2 = OP.OP' = OQ.OQ'$$

ou seja,

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$$

logo, os triângulos OQP e OP'Q' são semelhantes, então o quadrilátero PQQ'P' tem ângulos opostos suplementares e isto implica que o quadrilátero é inscritível[7].

3.2. Modelo do Disco de Poincaré

O francês Jules Henri Poincaré (1864 - 1912) criou um modelo para a Geometria Hiperbólica axiomática (o plano hiperbólico), desenvolvido entre os anos de 1882 e 1887. Poincaré criou o seu modelo baseado na Geometria Euclidiana, representando os pontos do plano hiperbólico no interior de uma circunferência euclidiana, ou seja, se O é o centro de uma circunferência euclidiana qualquer δ e OR um de seus raios , o plano hiperbólico é constituído por todos os pontos $P \in \delta$ tais que $OP < OR$ (observe que, por definição, a circunferência não pertence ao plano hiperbólico e que os pontos são pontos no sentido habitual que estão em um plano). Os pontos que pertencem à circunferência são denominados pontos ideais e a circunferência é dita horizonte hiperbólico. Este modelo ficou conhecido como **Disco de Poincaré**.

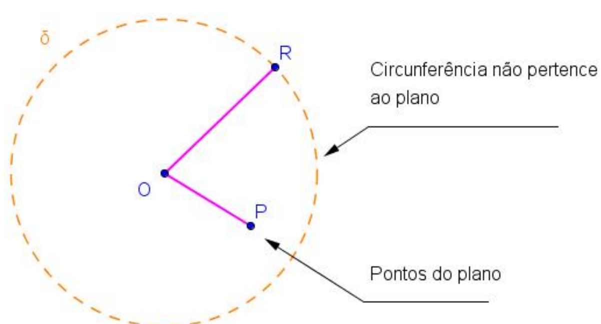


Figura 3.10: Os pontos do plano hiperbólico

[7] Um quadrilátero é inscritível em um círculo se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.

3.2.1. Retas Hiperbólicas

No Disco de Poincaré as retas são chamadas de retas hiperbólicas e estas são todos os arcos de circunferências ortogonais[8] ao Disco[9] e todas as cordas que passam pelo centro dele (diâmetros do Disco) sem os extremos.

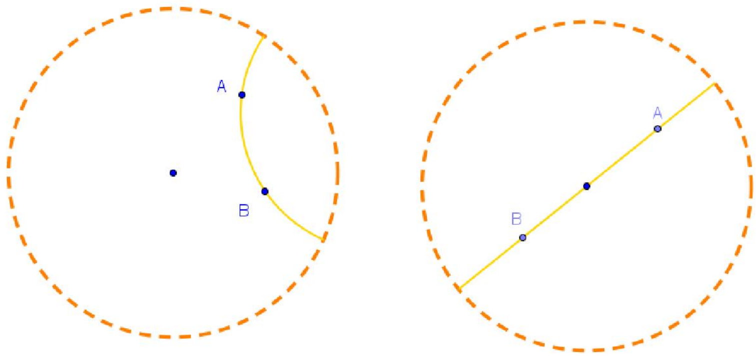


Figura 3.11: Reta hiperbólica AB como arco ortogonal e como diâmetro do Disco

3.2.2. Ângulos Hiperbólicos

Se duas retas hiperbólicas se interceptam num ponto P, a medida do ângulo formado entre elas é, por definição, a medida do menor ângulo formado pelas semirretas euclidianas tangentes aos arcos (retas hiperbólicas) em P.

Portanto, no Disco de Poincaré os ângulos, entre as tangentes, são medidos como no modelo euclidiano, utilizando-se as retas (euclidianas) tangentes aos arcos (retas hiperbólicas).

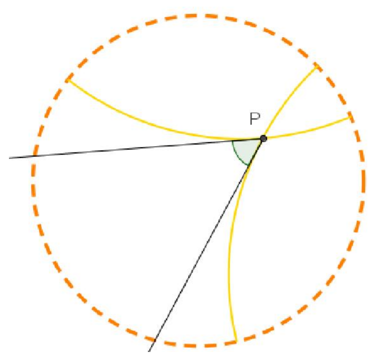


Figura 3.12: Ângulo entre retas hiperbólicas

[8] Ver definição de circunferências ortogonais na seção 1.1.3

[9] Deste ponto em diante sempre que mencionarmos a palavra Disco, esta se refere ao modelo Disco de Poincaré

3.2.3. Distância Hiperbólica

A distância entre dois pontos no Disco de Poincaré é dada pela seguinte definição:

Definição 3.4. *Sejam A e B pontos do plano hiperbólico (Disco de Poincaré), e sejam C e D os pontos ideais da reta hiperbólica que passa por A e B (extremos da reta AB pertencentes ao horizonte hiperbólico). Definimos a distância hiperbólica d(A,B) (sendo AC, AD, BC e BD comprimentos euclidianos) por:*

$$d(A,B) = \left| ln\left(\frac{AD.BC}{AC.BD}\right) \right|$$

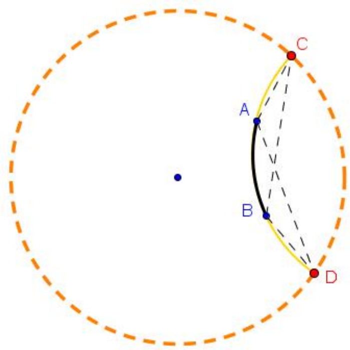


Figura 3.13: Distância hiperbólica entre dois pontos

Poincaré usou esta métrica para construir um espaço ilimitado (plano hiperbólico), em um espaço limitado com a métrica euclidiana (circunferência euclidiana). A métrica desenvolvida por Poincaré permite que quando os pontos A e B se aproximam dos pontos ideais o valor das medidas AC e BD diminuem, consequentemente o logaritmando aumenta, assim, depois da aplicação da função logarítmica a função distância tende ao infinito. Ao aproximar os pontos A e B, um do outro, o valor das medidas AD e BC diminuem, o que ocasiona, depois da aplicação da função logarítmica uma distância que tende a zero.

Ao utilizarmos a métrica desenvolvida por Poincaré, obtemos que a distância entre dois pontos quaisquer, quando estes estiverem próximos do horizonte, tenderá ao infinito. Isso acontece porque as retas hiperbólicas, assim como as retas euclidianas, devem ser ilimitadas.

3.2.4. Retas Paralelas

No modelo do Disco de Poincaré, duas retas são paralelas se e somente se elas não tiverem ponto em comum.

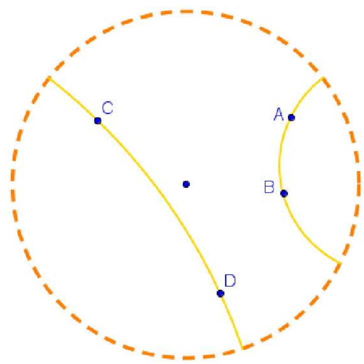


Figura 3.14: Retas Paralelas AB e CD

3.2.5. Retas Paralelas Limite

Dadas duas retas hiperbólicas AB e CD, a reta AB é chamada de reta paralela limite da reta CD, se ela tiver um ponto ideal em comum com a reta CD.

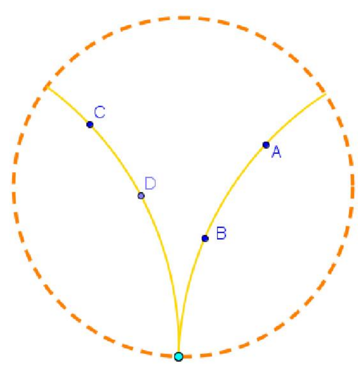


Figura 3.15: Retas hiperbólicas AB e CD paralelas limite

Dada uma reta hiperbólica AB e um ponto P fora dela, existem duas retas paralelas limite que separam as demais retas hiperbólicas passando por P em duas classes: as retas secantes (que interceptam AB) e as retas não secantes (que não interceptam AB).

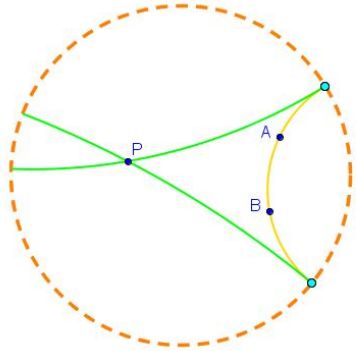


Figura 3.16: Retas Paralelas Limite

As definições dos outros elementos utilizados neste trabalho (bissetriz, mediatriz, ponto médio, etc.) são análogas às da Geometria Euclidiana. Diferenciam somente os triângulos no que diz respeito à soma dos ângulos internos. Na Geometria Hiperbólica a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180º.

Capítulo 4

Criando o Menu Hiperbólico

Com a finalidade de se utilizar o *software* GeoGebra no estudo da Geometria Hiperbólica, através do Modelo do Disco de Poincaré, neste capítulo serão apresentada as construções geométricas necessárias para criação de 16 (dezesseis) novas ferramentas[10] no GeoGebra.

Essas construções geométricas[11] serão disponibilizadas ao professor, com o objetivo de que ele mesmo possa construir, no GeoGebra, as ferramentas hiperbólicas necessárias para o desenvolvimento da Geometria Hiperbólica. Com isso o professor poderá conhecer melhor os principais objetos geométricos do modelo do Disco de Poincaré.

As novas ferramentas criadas servirão para a realização das atividades, propostas no próximo capítulo, relacionadas a introdução da teoria necessária para o desenvolvimento da Geometria Hiperbólica.

O conjunto dessas novas ferramentas formará um novo menu para o GeoGebra e este novo menu será chamado de “Menu Hiperbólico”. Com esse novo menu o aluno deverá desenvolver as atividades propostas, explorando assim as relações entre a Geometria Hiperbólica e a Geometria Euclidiana.

A primeira ferramenta a ser criada será o próprio Disco de Poincaré, que neste caso será chamado somente de “Disco”. Todas as outras ferramentas a serem criadas terão o “Disco” como base, pois toda a Geometria Hiperbólica é desenvolvida nele. Os nomes das ferramentas do “Menu Hiperbólico” serão sempre iniciados pela letra “h” (exemplo h_reta).

Nas próximas páginas apresentaremos as construções geométricas que definirão cada ferramenta a ser criada, bem como os passo, que determinam a criação da ferramenta.

---

[10] Para criação de novas ferramentas no GeoGebra ver Capítulo 1.
[11] Construções Geométricas seguindo modelo criado por Trias (2012).

4.1. Ferramenta: Disco

O primeiro procedimento para criação da ferramenta *Disco* é a construção da figura geométrica, no GeoGebra, que determinará a ferramenta. Segue os passos da construção:

Definição: Disco de Poincaré dados dois pontos

Dados: Os pontos *A* e *B*

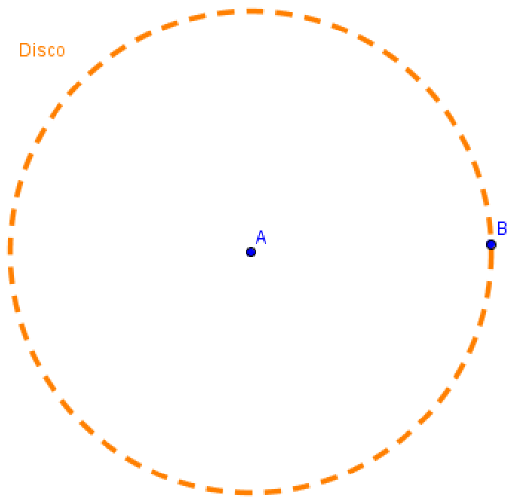
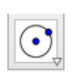
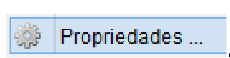


Figura 4.1: Disco

Construção geométrica:

1. No GeoGebra, clique na ferramenta  *Novo Ponto* e crie os pontos *A* e *B*;
2. Com a ferramenta  *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos* construa o círculo *c* de centro *A* passando por *B*;
3. Clique com o botão direito do mouse sobre a circunferência criada e selecione a opção 

. Altere a cor, o estilo (para pontilhado) e a espessura da circunferência para que fique com a aparência da figura acima.
4. Obs.: Nas próximas construções geométricas serão suprimidas as informações de quais ferramentas deverão ser utilizadas bem como as etapas de edição das propriedades do objeto criado. Se o leitor tiver

alguma dúvida de qual ferramenta usar, por exemplo, para criar uma reta, basta consultar o capítulo 1.

A segunda etapa é o procedimento de criação da ferramenta no GeoGebra.

Criando a ferramenta:

1. Clique em *Ferramentas* e selecione a opção *Criar uma Nova Ferramenta*. Abrirá a seguinte janela:

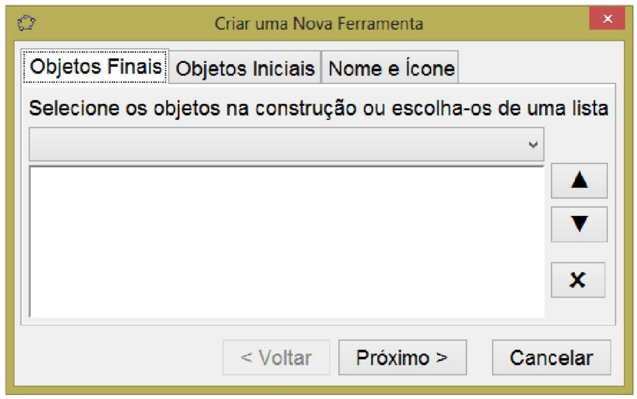


Figura 4.2: Janela para criar ferramenta Disco

2. Na opção *Objetos Finais* selecione a circunferência *c* construída;

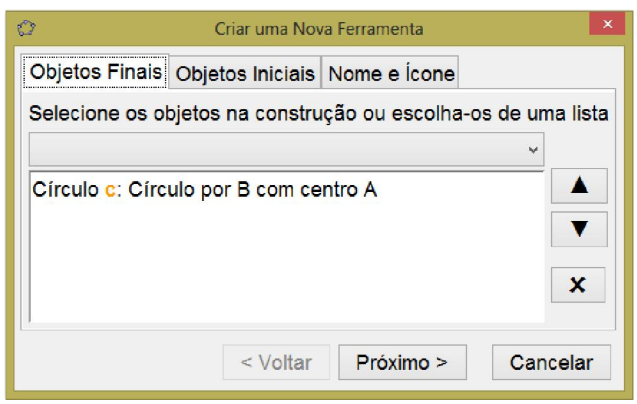


Figura 4.3: Objetos Finais ferramenta Disco

3. Na opção *Objetos Iniciais* selecione os pontos *A* e *B*.

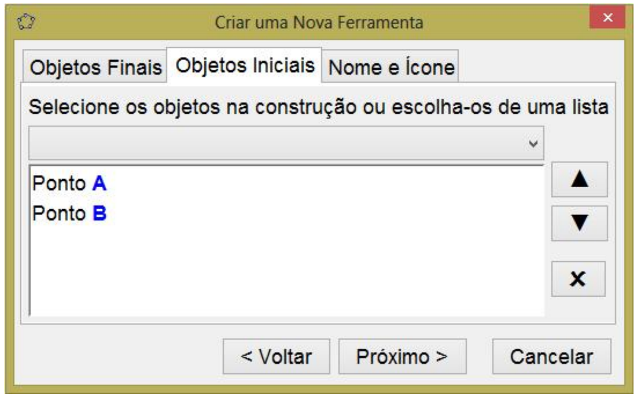


Figura 4.4: Objetos Iniciais ferramenta Disco

4. Na opção *Nome e Ícone*, no espaço destinado ao *Nome da ferramenta* escreva: **Disco**; no espaço *Nome do comando*: **Disco**; no espaço *Ajuda da ferramenta*: **Disco de Poincaré dados dois pontos**.

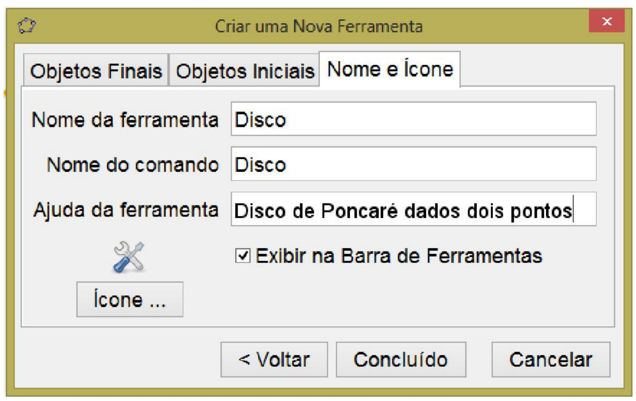
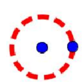


Figura 4.5: Nome e Ícone ferramenta Disco

5. Na opção *Ícone*, será utilizada a seguinte imagem criada no programa *Paint* (do Windows), 

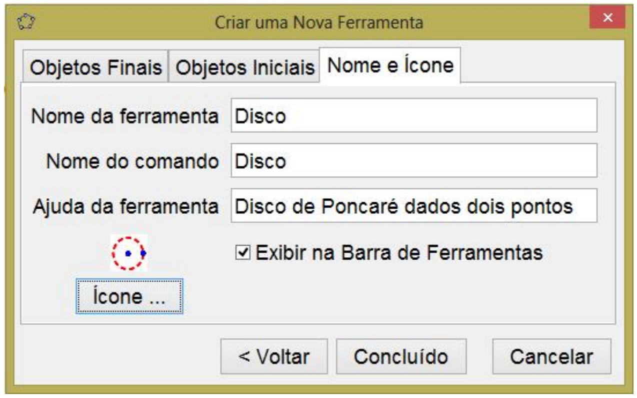


Figura 4.6: Ícone alterado ferramenta Disco

6. Clique em *Concluído* que a nova ferramenta aparecerá na barra de ferramentas.

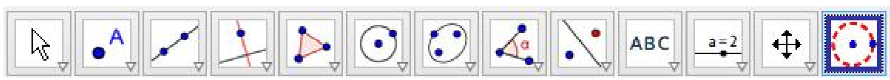


Figura 4.7: Barra de ferramentas com ferramenta Disco

7. Obs.: Na criação das próximas ferramentas este procedimento será suprimido, uma vez que é o mesmo para todas as criações de novas ferramentas. Serão apresentados somente os objetos iniciais e finais, necessários à criação.

4.2. Ferramenta: h_reta

Definição: Reta hiperbólica que passa por dois pontos dados

Dados: O *Disco* e os pontos *C* e *D*

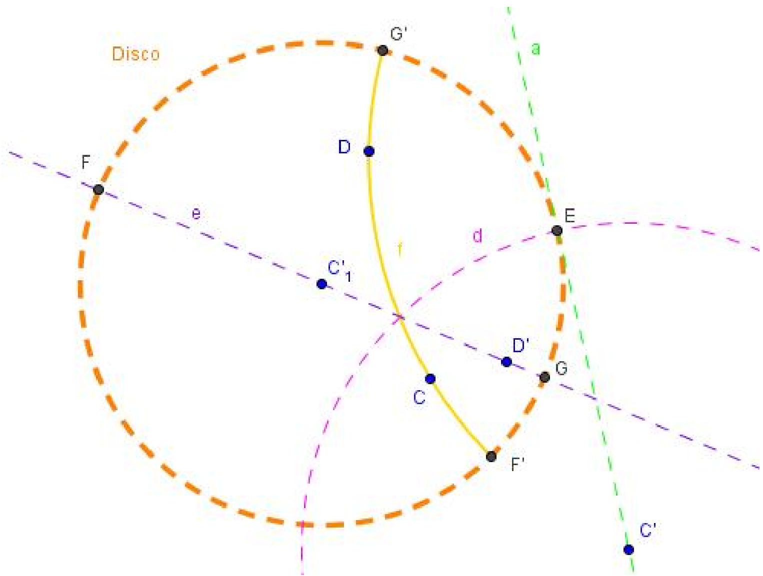


Figura 4.8: h_reta

1. Crie os pontos *C* e *D* no interior do *Disco*, *C* ≠ *(0,0)*, origem do sistema (se *C* = (0,0) a reta hiperbólica por *C* e *D* seria diretamente a reta euclidiana que passa por *C* e *D*);
2. Ache o ponto *C'*, inverso de *C* em relação ao *Disco*;
3. Passando por *C'*, traçamos a reta *a* tangente ao *Disco*;
4. Marque o ponto *E*, interseção da reta *a* com o *Disco*;
5. Construa o círculo *d* de centro *C'* que passa por *E*;
6. Ache os pontos C'_1 e *D'*, inversos, respectivamente, de *C* e *D* em relação ao círculo *d*;
7. Construa a reta *e* que passa por C'_1 e *D'*;
8. Marque os pontos *F* e *G*, interseção de *e* com o *Disco*;
9. Ache os pontos *F'* e *G'*, inverso, respectivamente, de *F* e *G* em relação a *d*;
10. Finalmente, construa o arco *f* que passa pelos pontos *F'*, *C* e *G'*, que representa a reta hiperbólica buscada.

Criando a ferramenta
Objetos iniciais: o *Disco* e os pontos *C* e *D*
Objetos finais: o arco *f*

4.3. Ferramenta: h_reta (pontos no horizonte)

Definição: Reta hiperbólica com pontos no horizonte

Dados: O *Disco* e os pontos *C* e *D*

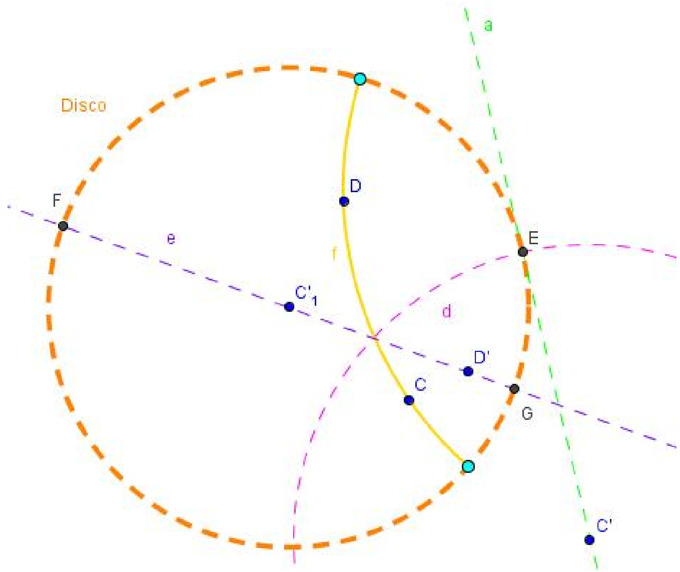


Figura 4.9: h_reta (pontos no horizonte)

1. Siga todos os passos para criação de uma *h_reta*;
2. Clique com o botão direito do mouse e desmarque a opção *Exibir Rótulo* nos pontos *F’* e *G’*;
3. O arco *f* e os pontos *F’* e *G’* são, respectivamente, a reta e os pontos no horizonte buscados.

Criando a ferramenta
Objetos iniciais: o *Disco* e os pontos *C* e *D*
Objetos finais: o arco *f* e os pontos ideais *F’* e *G’*

4.4. Ferramenta: h_semirreta

Definição: Semirreta hiperbólica que passa por dois pontos dados

Dados: O *Disco* e os pontos *C* e *D*

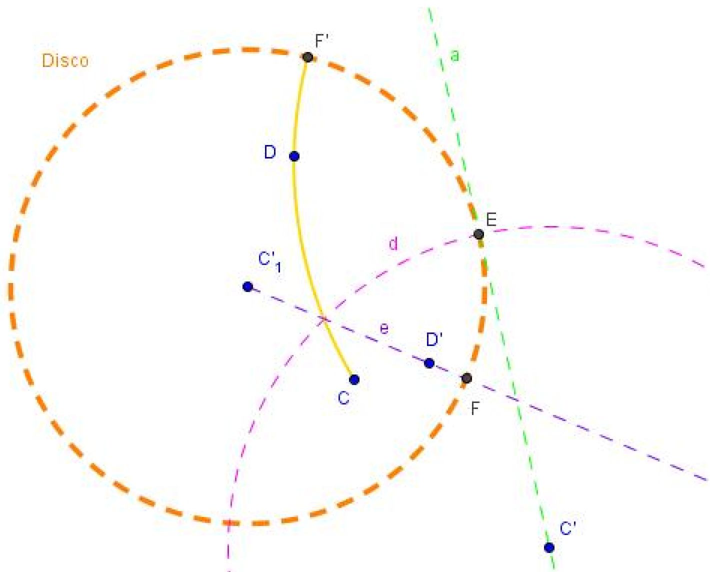


Figura 4.10: h_semirreta

1. Crie os pontos *C* e *D* no interior do *Disco*, *C* ≠ (0,0), origem do sistema;
2. Ache o ponto *C’*, inverso de *C* em relação ao *Disco*;
3. Passando por *C’*, traçamos a reta *a* tangente ao *Disco*;
4. Marque o ponto *E*, interseção da reta *a* com o *Disco*;
5. Construa o círculo *d* de centro *C’* que passa por *E*;
6. Ache os pontos C'_1 e *D’*, inversos, respectivamente, de *C* e *D* em relação ao círculo *d*;
7. Construa a semirreta *e* com origem em C'_1 e que passa por *D’*;
8. Marque o ponto *F*, interseção de *e* com o *Disco*;
9. Ache o ponto *F’*, inverso de *F* em relação a *d*;
10. Finalmente, construa o arco *f* que inicia no ponto *C* e passa pelos pontos *D* e *F’*, este representa a semirreta hiperbólica buscada.

Criando a ferramenta

Objetos iniciais: o *Disco* e os pontos *C* e *D*

Objetos finais: o arco *f*

4.5. Ferramenta: h_ponto médio

Definição: Ponto médio entre dois pontos no plano hiperbólico

Dados: O *Disco* e os pontos *C* e *D*

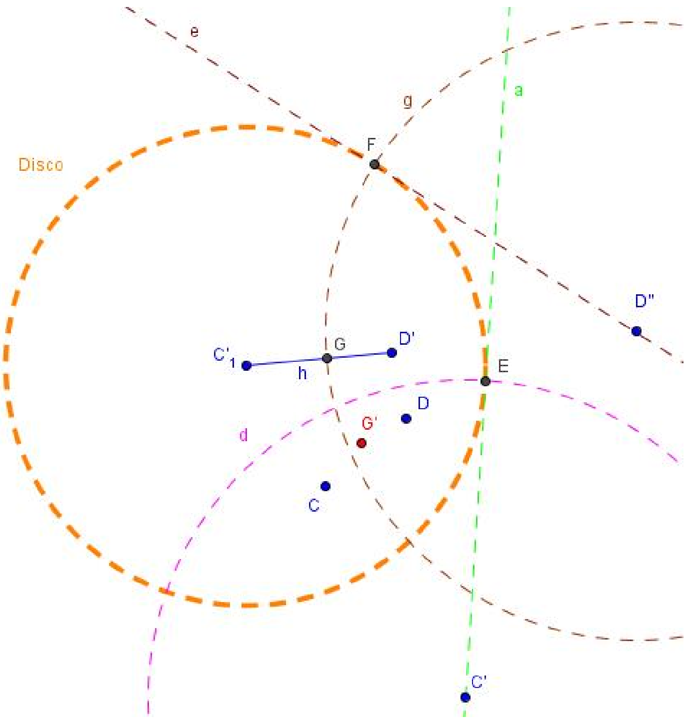


Figura 4.11: h_ponto médio

1. Crie os pontos *C* e *D* no interior do *Disco*, *C* ≠ (0,0), origem do sistema;
2. Ache o ponto *C'*, inverso de *C* em relação ao *Disco*;
3. Passando por *C'*, traçamos a reta *a* tangente ao *Disco*;
4. Marque o ponto *E*, interseção da reta *a* com o *Disco*;
5. Construa o círculo *d* de centro *C'* que passa por *E*;
6. Ache os pontos C'_1 e *D'*, inversos, respectivamente, de *C* e *D* em relação ao círculo *d*;
7. Encontre o ponto *D''*, inverso de *D'* em relação ao *Disco*;
8. Passando por *D''*, traçamos a reta *e* tangente ao *Disco*;
9. Marque o ponto *F*, interseção da reta *e* com o *Disco*;
10. Construa o círculo *g* de centro *D''* que passa por *F*;
11. Trace o segmento *h* que liga C'_1 a *D'*;
12. Marque o ponto *G*, interseção do segmento *h* com o círculo *g*;

13. Finalmente, encontre o ponto *G'* inverso de *G* em relação ao círculo *d*, que determina o ponto médio entre os pontos *C* e *D*.

Criando a ferramenta

Objetos iniciais: o *Disco* e os pontos *C* e *D*

Objetos finais: o ponto *G'*

4.6. Ferramenta: h_segmento

Definição: Segmento de reta hiperbólico compreendido entre dois pontos

Dados: O *Disco* e os pontos *C* e *D*

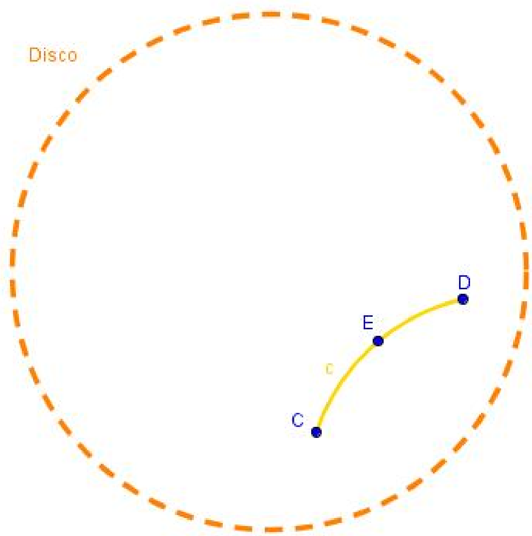


Figura 4.12: h_segmento

1. Usando a ferramenta *h_ponto médio*, determina-se o ponto *E*, ponto médio entre os pontos *C* e *D*;
2. Construa o arco *c* passando pelos pontos *C*, *E* e *D*, que determina o segmento hiperbólico *CD*.

Criando a ferramenta

Objetos iniciais: o *Disco* e os pontos *C* e *D*

Objetos finais: o arco *c*

4.7. Ferramenta: h_reta perpendicular (por ponto fora da h_reta)

Definição: Reta hiperbólica perpendicular a uma reta hiperbólica dada, passando por ponto fora da mesma

Dados: O *Disco*, a reta hiperbólica *CD* e o ponto *E* externo a reta *CD*

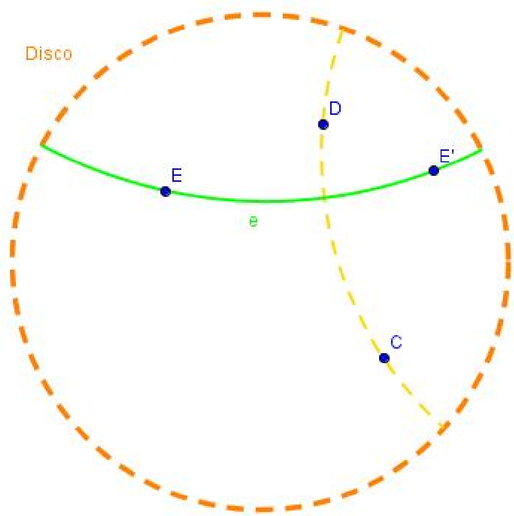


Figura 4.13: h_reta perpendicular (por ponto fora da h_reta)

1. Ache o ponto *E'*, inverso do ponto *E* em relação a reta hiperbólica *CD*;
2. Usando a ferramenta *h_reta* construa a reta hiperbólica *e* passando por *E* e *E'*, esta determina a reta perpendicular a *CD* passando por *E*.

Criando a ferramenta

Objetos iniciais: O *Disco*, a reta hiperbólica *CD* e o ponto *E*

Objetos finais: a reta hiperbólica *e*

4.8. Ferramenta: h_reta perpendicular (por ponto na h_reta)

Definição: Reta hiperbólica perpendicular a uma reta hiperbólica dada, passando por ponto na mesma

Dados: O *Disco*, a reta hiperbólica *CD* e o ponto *E* sobre a reta *CD*

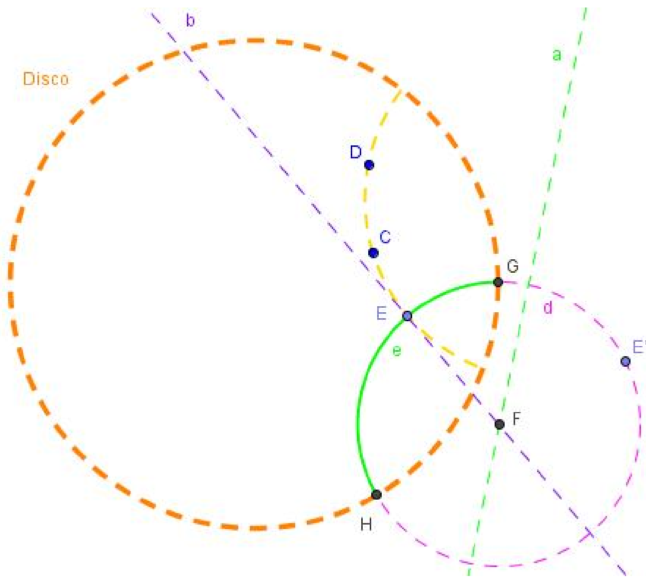


Figura 4.14: h_reta perpendicular (por ponto na h_reta)

1. Ache o ponto *E'*, inverso do ponto *E* em relação ao *Disco*;
2. Construa a mediatriz *a* (euclidiana) entre os pontos *E* e *E'*;
3. Trace a reta *b* tangente a reta hiperbólica *CD* em *E*;
4. Marque o ponto *F* interseção da mediatriz *a* com a tangente *b*;
5. Construa o círculo *d* com centro em *F* e passando por *E*;
6. Encontre os pontos *G* e *H*, interseção do *Disco* com o círculo *d*;
7. Finalmente, construa o arco *e* passando pelos pontos *G*, *E* e *H*, que representa a reta hiperbólica perpendicular buscada.

Criando a ferramenta

Objetos iniciais: O *Disco*, a reta hiperbólica *CD* e o ponto *E*

Objetos finais: a reta hiperbólica *e*

4.9. Ferramenta: h_reta paralela

Definição: Constrói as duas retas hiperbólicas paralelas a uma reta hiperbólica dada, passando por ponto fora da mesma

Dados: O *Disco*, a reta hiperbólica *CD*, o ponto *E* externo a reta *CD*

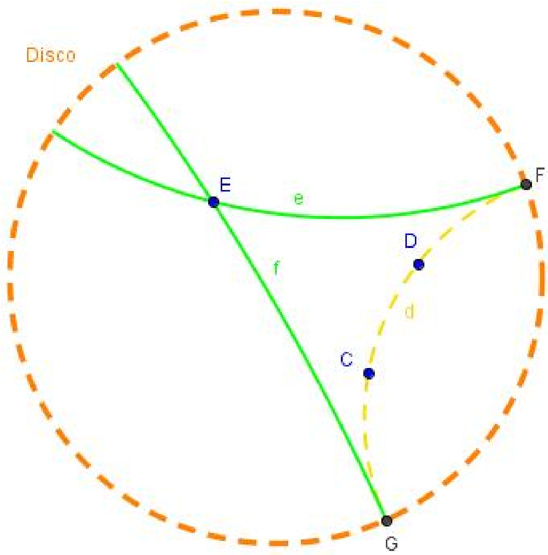


Figura 4.15: h_reta paralela

1. Encontre os pontos *F* e *G*, interseção da reta hiperbólica *CD* com o *Disco*;
2. Usando a ferramenta *h_reta* construa as retas hiperbólicas *e* e *f*, que passam, respectivamente, por *E* e *F* e por *E* e *G*. As retas *e* e *f* representam as retas hiperbólicas paralelas a reta *CD* passando por *E*.

Criando a ferramenta
Objetos iniciais: O *Disco*, o reta hiperbólica *CD* e o ponto *E*
Objetos finais: as retas hiperbólicas *f* e *g*

4.10. Ferramenta: h_mediatriz

Definição: Constrói a reta hiperbólica perpendicular ao segmento determinado por dois pontos, passando pelo seu ponto médio

Dados: O *Disco* e os pontos *C* e *D*

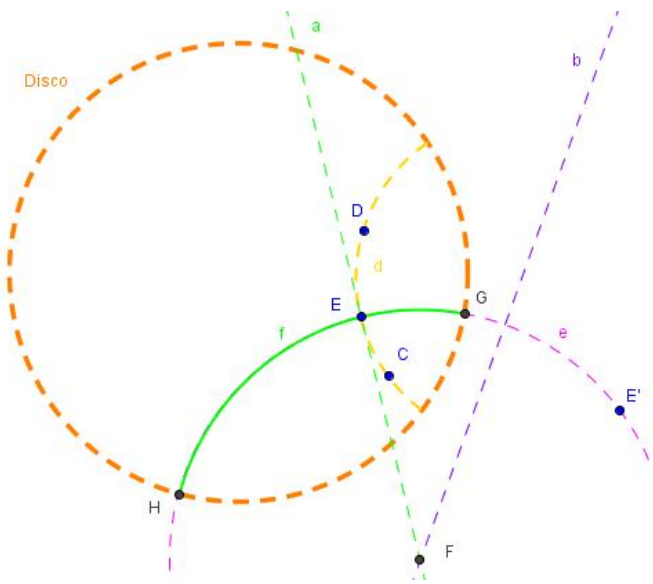


Figura 4.16: h_mediatriz

1. Crie a reta hiperbólica *d* passando pelos pontos *C* e *D* (usando a ferramenta *h_reta*);
2. Utilizando a ferramenta *h_ponto médio* encontre o ponto E, ponto médio entre os pontos *C* e *D*;
3. Construa a reta *a* tangente a reta *CD* passando por *E*;
4. Ache o ponto *E'*, inverso de *E* em relação ao *Disco*;
5. Trace a reta *b*, reta mediatriz (euclidiana) entre os pontos *E* e *E'*;
6. Encontre o ponto *F*, interseção da reta tangente *a* com a mediatriz *b*;
7. Construa o círculo *e* de centro *F* passando por *E*;
8. Encontre os pontos *G* e *H*, interseção do círculo *e* com o *Disco*;
9. Finalmente, construa o arco *f* passando pelos pontos *G*, *E* e *H*, que representa a reta hiperbólica mediatriz buscada.

Criando a ferramenta
Objetos iniciais: O *Disco* e os pontos *C* e *D*
Objetos finais: a reta hiperbólica *f*

4.11. Ferramenta: h_círculo

Definição: Constrói o lugar geométrico dos pontos que equidistam hiperbolicamente de um ponto chamado centro. Resumindo, constrói o círculo hiperbólico dados o centro e um de seus pontos

Dados: O Disco, e os pontos C (centro do círculo) e D (ponto sobre a circunferência)

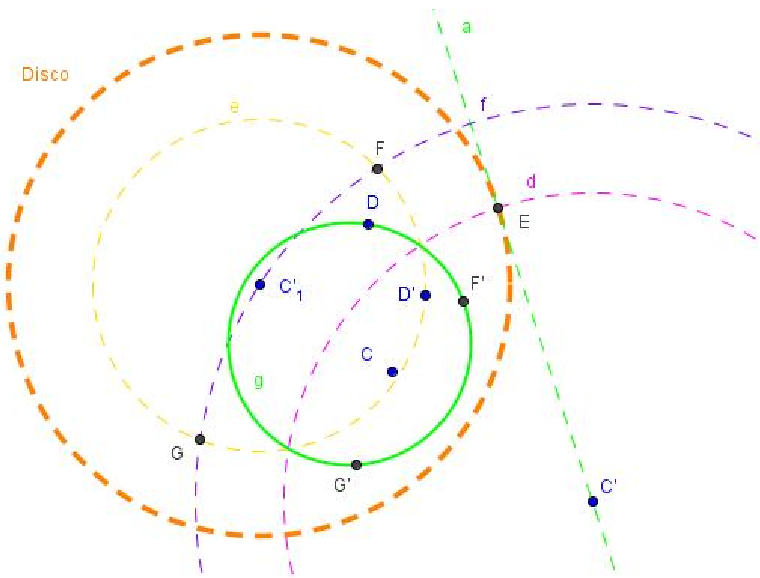


Figura 4.17: h_círculo

1. Crie os pontos *C* e *D* no interior do *Disco*, *C* ≠ *(0,0)* origem do sistema;
2. Ache o ponto *C'*, inverso de *C* em relação ao *Disco*;
3. Passando por *C'*, traçamos as reta *a* e *b* tangentes ao *Disco*;
4. Marque o ponto *E*, interseção da reta *a* como o *Disco*;
5. Construa o círculo *d* de centro *C'* que passa por *E*;
6. Ache os pontos C'_1 e *D'*, inversos, respectivamente, de *C* e *D* em relação ao círculo *d*;
7. Construa o círculo *e* com centro em C'_1 e que passa por *D'*;
8. Construa o círculo *f* com centro em *C'* e que passa por C'_1;
9. Marque os pontos *F* e *G*, interseção do círculo *e* com o círculo *f*;
10. Ache os pontos *F'* e *G'*, inverso, respectivamente, de *F* e *G* em relação a *d*;
11. Finalmente, construa o círculo *g* que passa pelos pontos *D*, *F'* e *G'*, que representa o círculo hiperbólico buscada.

Criando a ferramenta

Objetos iniciais: o *Disco* e os pontos *C* e *D*

Objetos finais: o círculo *g*

4.12. Ferramenta: h_distância

Definição: Distância hiperbólica entre dois pontos

Dados: O *Disco*, e os pontos *C* e *D*

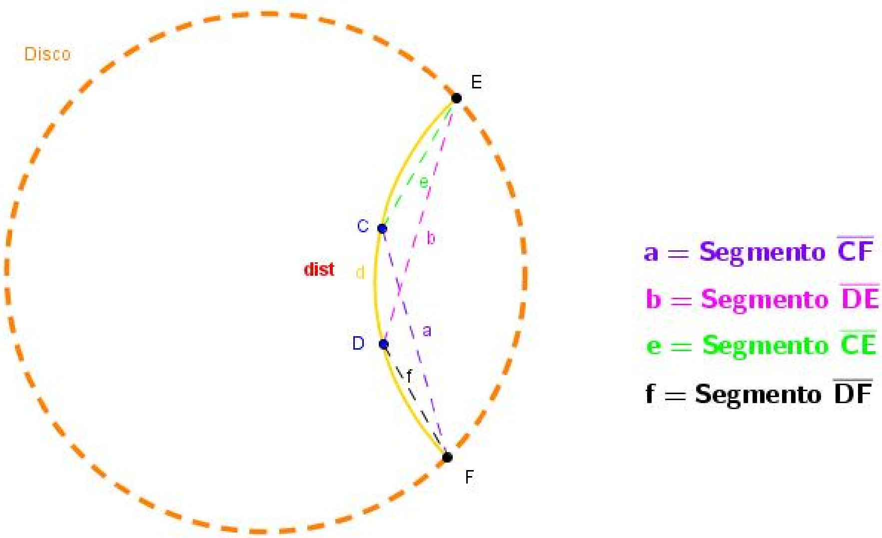


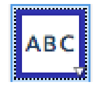
Figura 4.18: h_distância

1. Crie os pontos *C* e *D* no interior do *Disco*;
2. Crie a reta hiperbólica *f*, utilizando a ferramenta *h_reta (pontos no horizonte*), passando pelos pontos *C* e *D*;
3. Serão criados os pontos ideais *E* e *F*;
4. Trace os segmentos (euclidianos) *a*, *b*, *e* e *f*;
5. No *menu de entrada* digite a seguinte expressão:

dist = abs(ln((Comprimento[a]*Comprimento[b])/(Comprimento[e]*Comprimento[f])))

Esta expressão equivale a seguinte:

$$d(C,D) = \left| ln\left(\frac{CF.DE}{CE.DF}\right) \right|$$

6. Finalmente, utilizando a ferramenta *inserir texto*  crie um texto clicando sobre o número *dist* na *Janela de Álgebra* e em seguida clique em *ok*. O texto criado representa a distância hiperbólica entre os pontos *C* e *D*.

Criando a ferramenta
Objetos iniciais: o *Disco* e os pontos *C* e *D*
Objetos finais: o texto criado

4.13. Ferramenta: h_ângulo

Definição: Determina a medida do ângulo formado por três pontos do plano hiperbólico

Dados: O *Disco*, e os pontos *C*, *D* e *E* (sendo *D* o vértice)

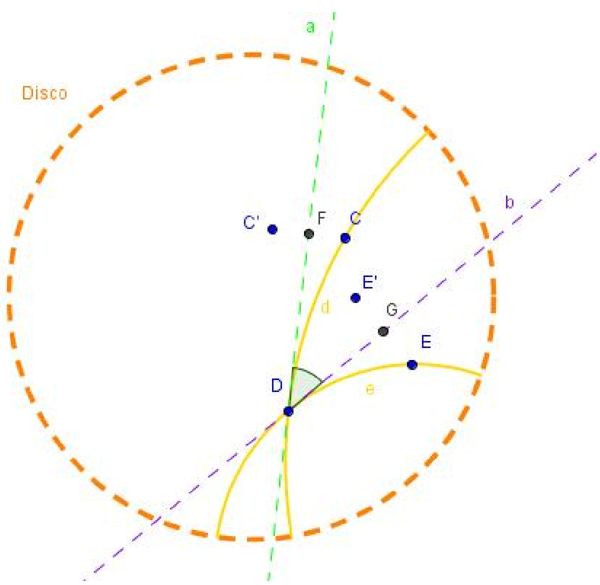


Figura 4.19: h_ângulo

1. Dados os pontos *C*, *D* e *E*, construa as retas hiperbólicas *d* = *CD* e *e* = *DE*;
2. Passando pelo ponto *D* traçamos as reta *a* e *b* tangentes, respectivamente, às retas hiperbólicas *d* e *e*;

3. Ache os pontos *C'* e *E'*, respectivamente, reflexões dos pontos *C* e *E* em relação às retas *a* e *b*;
4. Marque os pontos *F* e *G*, pontos médios (euclidianos), respectivamente, entre os pontos *C* e *C'* e *E* e *E'*;
5. Determine o ângulo *α* entre os pontos *G*, *D* e *F*, que representa o ângulo buscado.

Criando a ferramenta
Objetos iniciais: o *Disco* e os pontos *C*, *D* e *E* (sendo *D* e vértice)
Objetos finais: o ângulo *α*

4.14. Ferramenta: h_triângulo equilátero

Definição: Constrói um polígono hiperbólico de três lados iguais e três ângulos também iguais, a partir de dois de seus vértices

Dados: O *Disco*, e os pontos *C* e *D* (representam dois vértices do polígono)

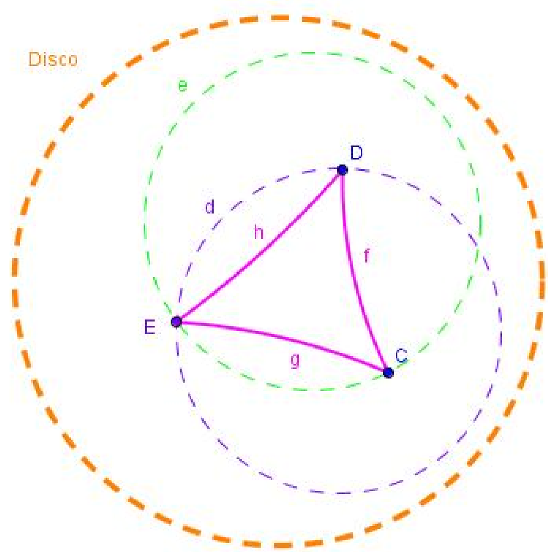


Figura 4.20: h_triângulo equilátero

1. Dados os pontos *C* e *D*, construa o círculo hiperbólico *d* de centro em *C* passando por *D* (utiliza-se a ferramenta *h_círculo*);
2. De forma análoga ao item anterior, construa o círculo hiperbólico *e* de centro em *D* passando por *C*;

3. Ache o ponto *E*, ponto de interseção entre os círculos hiperbólicos *d* e *e*;
4. Trace as semirretas hiperbólicas (usando a ferramenta *h_semirreta*) *f* = *CD*, *g* = *CE* e *h* = *DE*;
5. O triângulo hiperbólico de vértices *C*, *D* e *E* e lados *f*, *g* e *h* é o triângulo equilátero buscado.

Criando a ferramenta
Objetos iniciais: o *Disco* e os pontos *C* e *D*
Objetos finais: o ponto *E* e os lados *f*, *g* e *h*

4.15. Ferramenta: h_quadrado

Definição: Constrói um polígono hiperbólico com quatro lados iguais e quatro ângulos também iguais, a partir de dois de seus vértices

Dados: O *Disco*, e os pontos *C* e *D* (representam dois vértices do polígono)

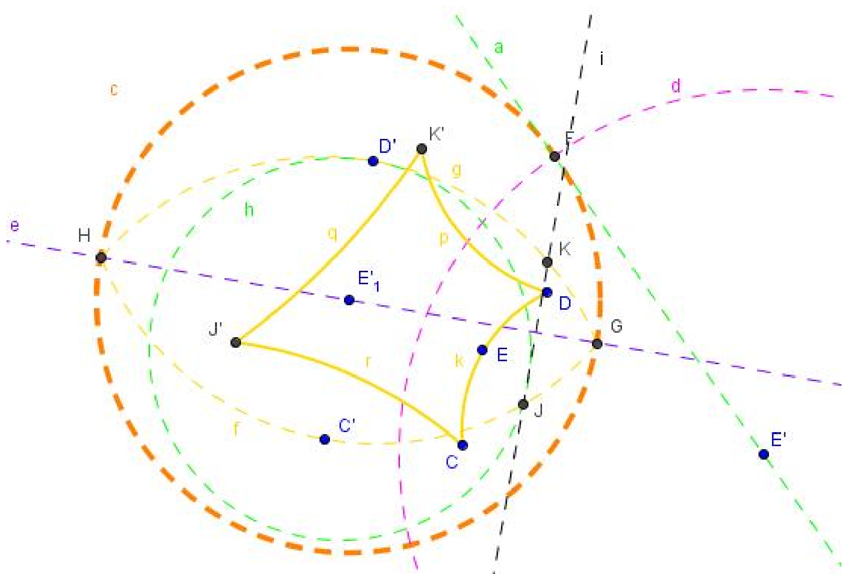


Figura 4.21: h_quadrado

1. Dados os pontos *C* e *D*, encontre o ponto médio hiperbólico *E* (utilizando a ferramenta *h_ponto médio*) entre os pontos *C* e *D*;
2. Ache o ponto *E'*, inverso de *E* em relação ao *Disco*;
3. Passando por *E'*, traçamos as reta *a* e *b* tangentes ao *Disco*;

4. Marque o ponto *F*, interseção da reta *a* como o *Disco*;
5. Construa o círculo *d* de centro *E'* que passa por *F*;
6. Ache os pontos *C'*, *D'* e *E'*$_1$ inversos, respectivamente, de *C*, *D* e *E* em relação ao círculo *d*;
7. Trace a reta *e* mediatriz (euclidiana) entre os pontos *C'* e *D'*;
8. Marque os pontos *G* e *H*, interseção da mediatriz *e* com o *Disco*;
9. Construa os arcos *f* que passa pelos pontos *G*, *C'* e *H* e *g* que passa pelos pontos *G*, *D'* e *H*;
10. Trace o círculo hiperbólico *h* (utilizando a ferramenta *h_círculo*) de centro *C'* passando por *D'*;
11. Seja *J* o ponto de interseção entre o arco *f* e o círculo hiperbólico *h* mais próximo do ponto *G*;
12. Seja *i* a reta perpendicular a mediatriz *e* que passa por *J*;
13. Marque o ponto *K*, interseção da reta *i* com o arco *g*;
14. Ache os pontos *J'* e *K'*, inversos, respectivamente, dos pontos *J* e *K* em relação ao círculo *d*;
15. Finalmente, trace os segmentos hiperbólicos (utilizando a ferramenta *h_segmento*) *k* = *CD*, *p* = *DK'*, *q* = *K'J'* e *r* = *J'C*, que representam o quadrado hiperbólico buscado.

<u>Criando a ferramenta</u>
Objetos iniciais: o *Disco* e os pontos *C* e *D*
Objetos finais: os pontos *K'* e *J'* e os lados *k*, *p*, *q* e *r*

4.16. Ferramenta: h_bissetriz

Definição: Constrói o lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes e, por consequência, divide um ângulo em dois ângulos congruentes

Dados: O *Disco* e as retas hiperbólicas *CD* e *CE*, concorrentes em *C*

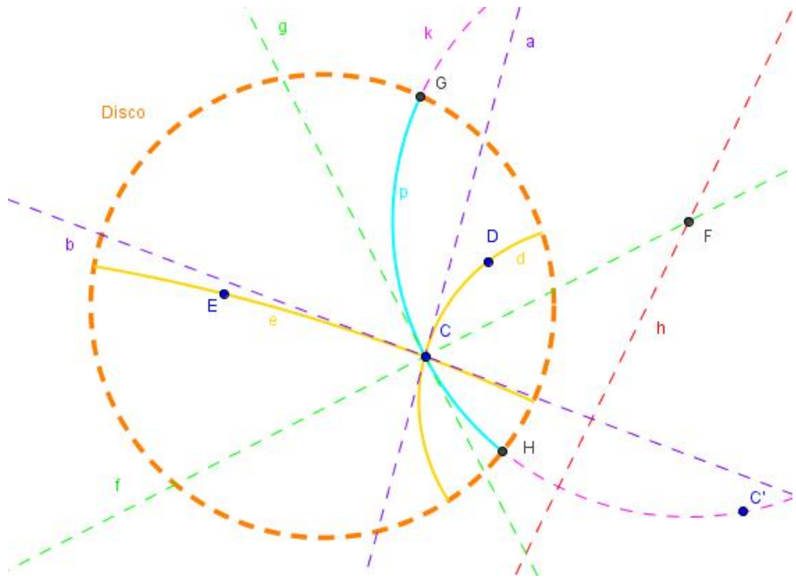


Figura 4.22: h_bissetriz

1. Dados os pontos *C*, *D* e *E*, construa as retas hiperbólicas *d* = *CD* e *e* = *CE* (usando a ferramenta *h_reta*);
2. Passando pelo ponto *C* traçamos as reta *a* e *b* tangentes, respectivamente, às retas hiperbólicas *d* e *e*;
3. Usando a ferramenta bissetriz (euclidiana) encontre as retas *f* e *g*, bissetrizes entre as retas tangentes *a* e *b*;
4. Ache o ponto *C'*, inverso de *C* em relação ao *Disco*;
5. Trace a reta *h*, reta mediatriz (euclidiana) entre os pontos *C* e *C'*;
6. Encontre o ponto *F*, interseção da reta bissetriz *f* com a mediatriz *h*;
7. Construa o círculo *k* de centro *F* passando por *C*;
8. Encontre os pontos *G* e *H*, interseção do círculo *k* com o *Disco*;
9. Finalmente, construa o arco *p* passando pelos pontos *G*, *C* e *H*, que representa a reta hiperbólica bissetriz buscada.

Criando a ferramenta
Objetos iniciais: O *Disco* e os pontos *D*, *C* e *E*
Objetos finais: a reta hiperbólica *p*

Capítulo 5

Atividades usando o Menu Hiperbólico

Com o objetivo de se utilizar o “Menu Hiperbólico”, criado no GeoGebra, seguem algumas atividades de exploração da Geometria Hiperbólica no Modelo do Disco de Poincaré.

As atividades foram criadas com a finalidade de que o aluno possa se habituar ao novo modelo de geometria, e relacioná-lo com o modelo euclidiano. Estas atividades não têm o objetivo de exigir dos alunos demonstrações formais no campo da Geometria Hiperbólica, são voltadas para realização do primeiro contato deles com uma das geometrias não-euclidianas.

Estas atividades tem como objetivo realizar a familiarização do aluno com o Modelo do Disco de Poincaré, através do “Menu Hiperbólico” construído no GeoGebra.

A primeira etapa antes de realizar qualquer atividade é, utilizando a ferramenta *Disco*, no GeoGebra, criar o “Disco de Poincaré”. Pois, é no interior deste disco que se desenvolve a Geometria Hiperbólica. Além disso, sempre que se utilizar qualquer ferramenta do “Menu Hiperbólico”, deve-se primeiro selecionar o “Disco” criado para que a ferramenta determine o plano com o qual está vinculado.

Atividade 1

As questões que seguem estão relacionadas ao conceito de reta na Geometria Hiperbólica, bem como a comprovação visual de que o Quinto Postulado da Geometria Euclidiana não é válido nesta nova geometria. O aluno deverá utilizar a ferramenta *h_reta* do “Menu Hiperbólico”.

a) Dado um ponto C no “Disco” quantas h_retas passam por ele? (*O aluno observará que assim como na Geometria Euclidiana, na Geometria Hiperbólica, por um ponto passam infinitas retas – Figura 5.1*);

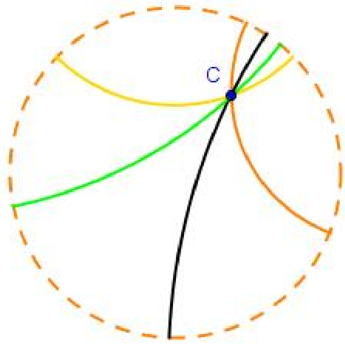


Figura 5.1: Retas hiperbólicas passando pelo ponto *C*

b) Dados dois pontos C e D do “Disco” quantas h_retas passam por eles? (*O aluno verificará que por dois pontos, na Geometria Hiperbólica, passa somente uma reta. Ele poderá movimentar um dos pontos e observar quando é que uma reta hiperbólica se parece com uma reta euclidiana – Figuras 5.2 e 5.3*);

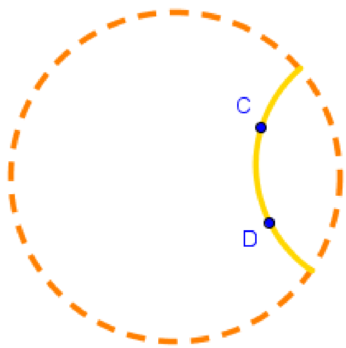


Figura 5.2: Reta hiperbólica passando pelos pontos *C* e *D*

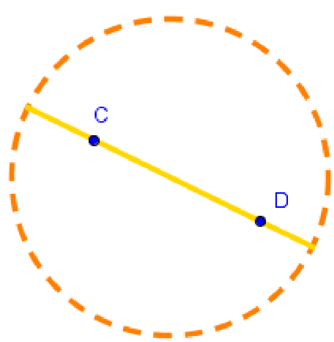


Figura 5.3: Reta hiperbólica como diâmetro do “Disco”

c) Dada uma reta hiperbólica *CD* e um ponto *E*, não pertencente a *CD*, verifique quantas retas hiperbólicas passam por *E* e não interceptam a reta *CD*. (*O aluno* *observará que o Postulado das Paralelas ou Quinto Postulado de Euclides não é válido na Geometria Hiperbólica, pois por um ponto fora da reta passam infinitas retas paralelas – Figura 5.4*);

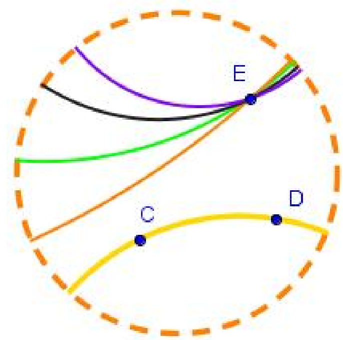


Figura 5.4: Retas hiperbólicas passando por *E*

Atividade 2

Esta atividade tem como objetivo verificar a relação entre retas secantes, retas paralelas e retas perpendiculares no plano hiperbólico. O aluno deverá utilizar a ferramenta *h_reta perpendicular*.

a) Dada uma reta hiperbólica e um ponto *P* sobre ela, quantas retas perpendiculares a esta reta, passando por este ponto, podem ser traçadas? Será utilizada a ferramenta *h_reta perpendicular (por ponto sobre a h_reta)*. (*Observa-se que a reta perpendicular é única – Figura 5.5*).

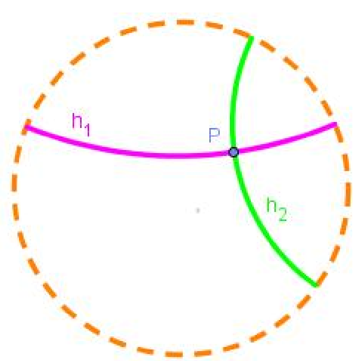


Figura 5.5: Reta perpendicular passando por *P*

b) Dada uma reta hiperbólica e um ponto *P* fora desta reta, quantas retas perpendiculares a esta reta, passando por este ponto, podem ser traçadas?

Será utilizada a ferramenta *h_reta perpendicular (por ponto fora da h_reta)*. (*A mesma observação do item a) – Figura 5.6*).

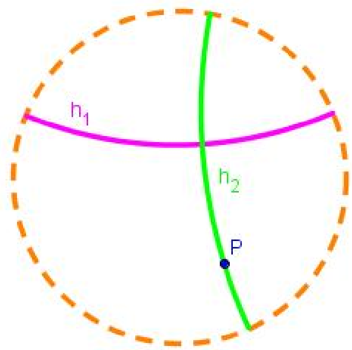


Figura 5.6: Reta perpendicular passando por *P*

c) Dada um reta hiperbólica CD (h_1), trace as retas h_2 e h_3 perpendiculares a reta h_1. Qual a posição entre as retas h_2 e h_3? (*O aluno observará que assim como na Geometria Euclidiana, as retas h_2 e h_3 são paralelas entre si – Figura 5.7*).

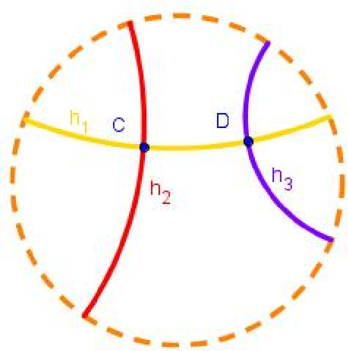


Figura 5.7: Retas h_2 e h_3 perpendiculares a reta h_1

d) Dada uma reta h_1, utilizando a ferramenta h_reta trace as retas h_2 e h_3 paralelas a reta h_1. As retas h_2 e h_3 são paralelas entre si? (*O aluno perceberá que na Geometria Hiperbólica se duas retas são paralelas a uma terceira, não significa que serão paralelas entre si – Figura 5.8*).

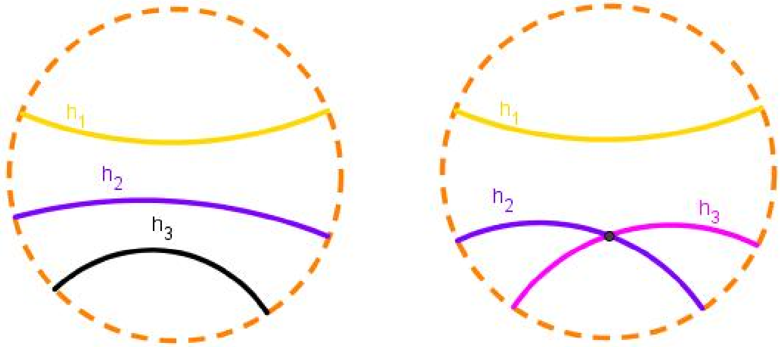


Figura 5.8: Retas h_2 e h_3 paralelas a reta h_1

Atividade 3

Nesta atividade o aluno irá se familiarizar com o conceito de ângulo na Geometria Hiperbólica. O aluno deverá utilizar a ferramenta *h_ângulo*.

a) Dados os pontos *C*, *D* e *E,* no "Disco", trace as h_retas *CD* e *DE*. Com a ferramenta *h_ângulo* trace o ângulo hiperbólico $C\widehat{D}E$. Movimente o vértice D do ângulo e observe a variação da medida do ângulo. Quando a medida do ângulo se aproxima de 0º? Quando a medida do ângulo se aproxima de 180º? (*O aluno observará que conforme o vértice D se aproxima do horizonte hiperbólico, a medida do ângulo vai tendendo a zero – Figura 5.9*).

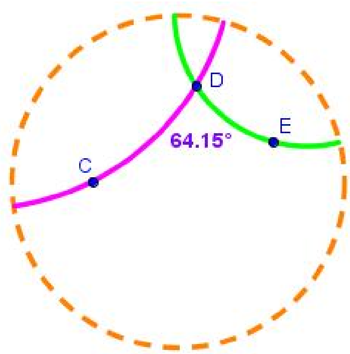


Figura 5.9: Medida do ângulo hiperbólico $C\widehat{D}E$

b) Dadas duas retas hiperbólicas, *CD* e *EF*, que se interceptam num ponto *G*, verifique como se comportam os pares de ângulos opostos pelo vértice *G*. (*O aluno observará que, assim como na Geometria Euclidiana, os ângulos opostos pelo vértice são congruentes – Figura 5.10*).

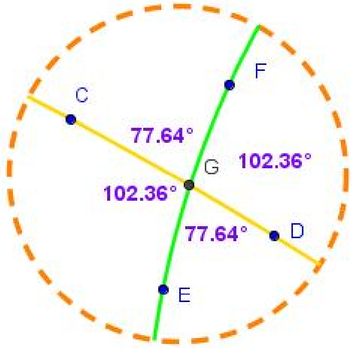


Figura 5.10: Ângulos opostos pelo vértice

c) Dadas duas retas hiperbólicas paralelas *CD* e *EF* e um ponto *G* sobre a reta *CD*, trace a reta h_1 perpendicular à reta *CD* passando por *G*. Qual o ângulo hiperbólico formado entre as retas h_1 e *CD*? A reta h_1 será, como na Geometria Euclidiana, perpendicular também a reta *EF*? (*Verifique o ângulo hiperbólico formado entre as retas h_1 e EF – Figura 5.11*).

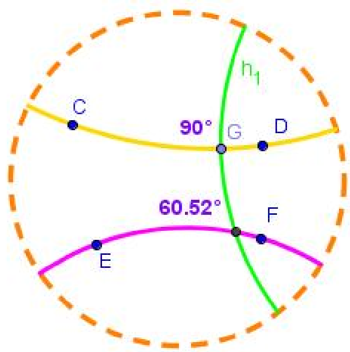


Figura 5.11: Duas retas paralelas *CD* e *EF*, e a reta h_1 perpendicular somente a reta *CD*

Atividade 4

Nesta atividade o aluno terá contato com círculo e distância no plano hiperbólico. As ferramentas utilizadas são *h_distância* e *h_círculo*.

a) Dados os pontos *C* e *D* do "Disco" construa os círculos de centro em *C* passando por *D* e de centro *D* passando por *C*. Movimentando os pontos *C* e *D* qual o comportamento dos círculos criados? (*O alunos observará que ao mover os pontos os círculos passam a aparentar tamanhos diferentes – Figura 5.12*).

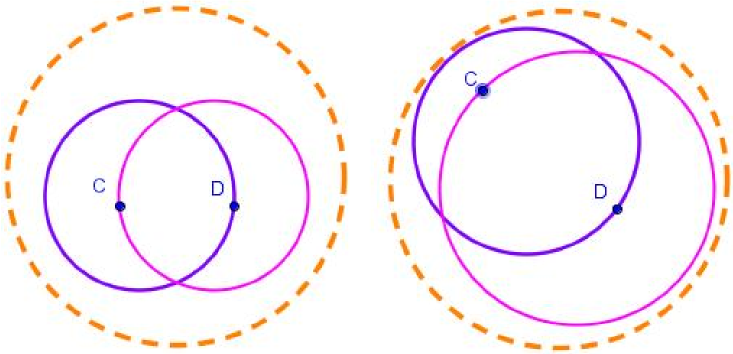


Figura 5.12: Círculos hiperbólicos

b) Utilizando as construções dos círculos *c_1* e *c_2* do item anterior, marque sobre eles os pontos *E* e *F*, respectivamente. Os círculos *c_1* e *c_2* possuem o mesmo raio? (*Apesar das aparências, o aluno notará que, assim como nas construções euclidianas, os dois círculos possuem o mesmo raio – Figura 5.13*).

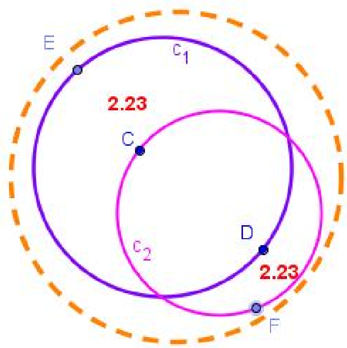


Figura 5.13: Círculos hiperbólicos *c_1* e *c_2* de mesmo raio

c) Dados os pontos *C* e *D*, crie um círculo de centro em *D* passando por *C*. Determine a distância hiperbólica de *C* até *D*. Se for criado um ponto *E* qualquer sobre a circunferência do círculo, qual será a medida do centro *D* até ele? (*Apesar das aparências, o aluno notará que os pontos da circunferência do círculo no plano hiperbólico estão a mesma distância constante do centro do círculo – Figura 5.14*).

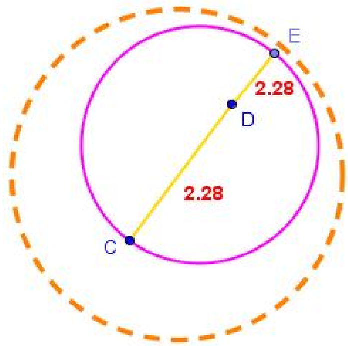


Figura 5.14: Círculo hiperbólico de centro *D* passando por *C*

Atividade 5

Esta atividade é voltada para a apresentação do triângulo no plano hiperbólico.

a) Dados os pontos *C* e *D* do “Disco” construa os círculos de centro em *C* passando por *D* e de centro *D* passando por *C*. Encontre o ponto *E* interseção entre os dois círculos. Trace os segmentos hiperbólicos *CD*, *CE* e *DE*. O triângulo formado é equilátero? (*O aluno observará que, assim como na Geometria Euclidiana, o procedimento para construção de triângulo equilátero funciona no plano hiperbólico, bastando verificar a medida dos lados e dos ângulos do triângulo criado – Figura 5.15*).

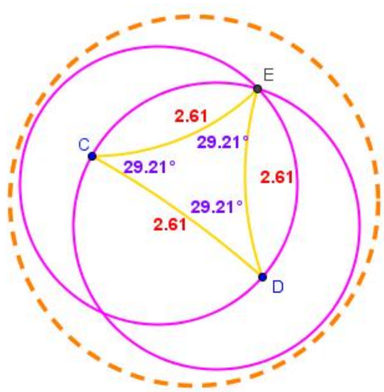


Figura 5.15: Triângulo equilátero hiperbólico

b) Usando os procedimentos de construção euclidiana do triângulo isósceles, tente construí-lo no plano hiperbólico e verifique se é válido neste plano. (*O aluno poderá construir o triângulo através do raio do círculo hiperbólico ou a partir da mediatriz hiperbólica de um segmento que será a base do triângulo,* *ao final observará que o procedimento de construção também é válido no plano hiperbólico*).

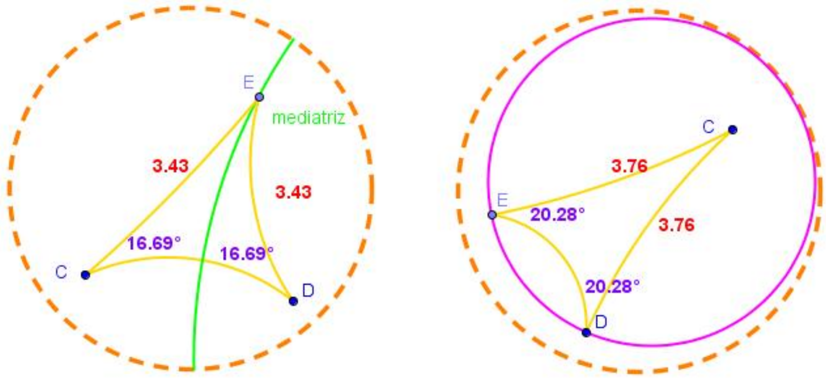


Figura 5.16: Triângulo hiperbólico isósceles

Considerações Finais

Espera-se que a proposta de ensino de Geometria Hiperbólica, apresentada neste trabalho, possa contribuir no processo ensino aprendizagem desta geometria não-euclidiana.

As atividades apresentadas no capítulo 5 foram elaboradas de maneira que possam ser aplicadas pelo professor do Ensino Básico, com o objetivo de introduzir os conceitos de Geometria Hiperbólica naquele nível de ensino.

Apesar deste trabalho não ter sido aplicado em sala de aula, acredita-se que o “Menu Hiperbólico” proposto, possa ser utilizado por professores do Ensino Superior na apresentação da Geometria Hiperbólica. O professores poderão, com o auxílio das ferramentas criadas no GeoGebra, desenvolver novas atividades que atenda a este nível de ensino.

É sabido ainda que existem poucas pesquisas envolvendo o ensino de geometrias não-euclidianas, com isso espera-se que este trabalho possa incentivar outros alunos do Profmat a realizarem pesquisas nessa área, podendo até utilizar esta proposta de ensino em sala de aula de maneira a identificar se poderá realmente alcançar os objetivos almejados, que é o ensino aprendizagem satisfatório de geometria.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: SBM, 1995.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Hiperbólica*. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

BONETE, I. P. *As geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura*: algumas experiências. Dissertação de Mestrado, UNICENTRO/UNICAMP, Guarapuava, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília, DF, 1998.

CABARITI, E. *Geometria Hiperbólica*: uma proposta didática em ambiente informatizado. Dissertação de Mestrado, PUC, São Paulo, 2004.

CARMO, M. P. Geometrias Não-Euclidianas. *Matemática Universitária*, Rio de Janeiro, n. 6, p. 25-48, 1987.

CAVICHIOLO, C. V*. Geometrias Não-Euclidianas na formação inicial do professor de matemática*: o que dizem os formadores. Dissertação de Mestrado, UFPR, Curitiba, 2011.

COUTINHO, L. *Convite às geometrias não-euclidianas*. Rio de Janeiro: L. Coutinho, 1989.

GRAVINA, M. A. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. Tese de Doutorado, UFRG, Porto Alegre/RS, 2001.

GRAVINA, M. A. et al. *Matemática, Mídias Digitais e Didática*: tripé para formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

GREENBERG, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*: Development and History. New York: W. H. Freeman and Company, 1990.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista* – SBEM, Florianópolis/SC, n. 4, p. 3-13, 1995.

LOVIS, K. A. *Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um ambiente de Geometria Dinâmica:* o que pensam e o que sabem os professores. Dissertação de Mestrado, UEM, Maringá, 2009.

MARTOS, Z. G. *O trabalho pedagógico envolvendo geometrias não-euclidianas no Ensino Fundamental*. Zetetiké, v. 10, n. 17/18, p. 43-79, jan./dez. 2002.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica*: Matemática. Curitiba: SEE/PR, 2008.

PATAKI, I. *Geometria Esférica para a formação de professores*: uma proposta interdisciplinar. Dissertação de Mestrado, PUC, São Paulo, 2003.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2008.

ROCHA, L. F. C. *Introdução a Geometria Hiperbólica Plana.* 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, 1987.

SANTOS, T. S. *A inclusão das geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica*. Dissertação de Mestrado, UEM, Maringá, 2009.

SILVA, K. B. R. *Noções de geometrias não euclidianas*: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais. Curitiba: CRV, 2011.

STAIB, A. *Geometria Hiperbólica*: uma proposta para o desenvolvimento de atividades utilizando o software livre NonEuclid. Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas/SP, 2010.

TERDIMAN, E. W. *A Geometria Hiperbólica e sua consistência*. Dissertação de Mestrado, PUC, São Paulo, 1989.

TRIAS, U. R. *Herramientas hiperbólicas y proyectivas en GeoGebra*. Dissertação de Mestrado, UNICAN, Cantabria/Espanha, 2012. Disponível em: <http://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/578/Ujue%20Rodriguez%20Trias.pdf?sequence=1>.

WIKIPÉDIA. Desenvolvido pela Wikimedia Foundation. Apresenta conteúdo enciclopédico. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Wikip%C3%A9dia&oldid=15762238>.