# Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

DEPARTAMENTO DE QUÍMICA E EXATAS - DQE

Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT


---

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

# Ladrilhamento no Plano: Uma Proposta de Atividade para o Ensino Médio

por


**Lázaro Souza Santos**

Mestrado Profissionalizante em Matemática - Vitória da Conquista - BA

**Orientador: Prof. Dr. Júlio César dos Reis**



Vitória da Conquista - BA, 2014.

**Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia**

DEPARTAMENTO DE QUÍMICA E EXATAS - DQE

Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

**Lázaro Souza Santos**

# Ladrilhamento no Plano: Uma Proposta de Atividade para o Ensino Médio

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Júlio César dos Reis**

Vitória da Conquista - BA, 2014.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ELINEI CARVALHO SANTANA - CRB 5/1026
BIBLIOTECA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
UESB - CAMPUS VITÓRIA DA CONQUISTA-BA

S236l Santos, Lázaro Souza.
Ladrilhamento no plano: uma proposta de atividade para o ensino médio / Lázaro Souza Santos, 2014.
66.: il.; algumas color.
Orientador (a): Júlio César dos Reis.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Vitória da Conquista, 2014.
Referências: f. 63-64.
1. Geometria – Ensino médio. 2. Ladrilhamento no plano (Matemática) – Estudo e ensino. I. Reis, Júlio César dos. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 510

**Dissertação de Mestrado defendida em 12 de maio de 2014 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Júlio César dos Reis

(Presidente)

Roberto Hugo Melo dos Santos

Ademakson Souza Araújo

# DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho aos meus pais Valdívio e Cleuza, à minha esposa Flávia, aos meus irmãos Verônica e Charles, aos meus filhos Júlia e Daniel, aos meus sobrinhos Matheus, Bruna e Arthur e aos meus irmãos de coração Moreno Figueiredo e Alan Souza. Enfim, dedico à minha Família.*

# AGRADECIMENTOS

**Meus sinceros agradecimentos:**

- À Deus sempre presente em minha vida, me protegendo e me dando forças pra seguir em frente. Toda honra e toda glória ao Senhor.

- À Nossa Senhora Aparecida pela sua proteção e intercessão junto a Jesus.

- Aos meus pais, Valdívio e Cleuza, exemplos de dedicação e luta, sempre trabalhando para oferecer a mim e aos meus irmãos todas as condições de estudo. Amo vocês.

- À minha esposa Flávia pelo amor, pela dedicação, pelo incentivo nos momentos difíceis, pelas revisões de texto e pelas dicas na construção deste trabalho.

- À minha irmã Verônica pelas orações e ao meu irmão Charles pelas revisões de texto e pelas dicas na construção deste trabalho, tenho muito orgulho dos dois.

- Aos meus filhos, Júlia e Daniel e aos meus sobrinhos Matheus, Bruna e Arthur, vocês me impulsionam a querer sempre mais e a servir de exemplo.

- Aos meus irmãos de coração Moreno e Alan, aos meus tios e tias, cunhados, sogros, enfim toda minha família que sempre torceram pelo meu sucesso.

- Aos meus chefes pelas liberações para as aulas.

- Ao Professor Júlio César dos Reis pela orientação nessa dissertação. E aos demais professores da UESB que fazem parte do programa PROFMAT pela socialização do conhecimento.

- Aos meus amigos da turma de 2012 pelas discussões, pela construção do conhecimento, pelo companheirismo e pela amizade construída, em especial agradeço as colegas Adriza e Daniela, o exemplo, a dedicação e o apoio de vocês foram fundamentais para o sucesso da turma. Sem esquecer dos meus companheiros de estrada Cleber e Iran, por baixo 15000 km, entre idas e vindas, obrigado pelas conversas, resenhas e estudos de última hora.

- À SBM pela iniciativa e coragem na elaboração de um Mestrado a nível Nacional e à Capes pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

# RESUMO

O Ladrilhamento ou Mosaico consiste em revestir um determinado plano com estruturas geométricas, ladrilhos, de maneira que não sobrem espaços vazios e nenhuma estrutura sobreponha às outras. Sabendo das dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos matemáticos e que a matemática não deve ser trabalhada de maneira compartimentalizada, o ladrilhamento do plano pode se configurar uma importante estratégia de ensino, visto que conceitos geométricos e conceitos algébricos podem ser relacionados. Dentro deste contexto, como poderemos relacionar os conceitos geométricos, utilizando o ladrilhamento, com conceitos algébricos trabalhados no Ensino Médio? Sendo assim, este estudo tem por objetivo apresentar uma proposta de atividade educacional voltada para alunos do Ensino Médio relacionando a geometria com os conteúdos algébricos que fazem parte da grade curricular do Ensino Médio tendo como eixo norteador o Ladrilhamento no Plano. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, exploratória realizada por meio da revisão de literatura utilizando o descritor geometria nas seguintes bases de dados: Boletim de Educação Matemática - BOLEMA e Revista de Educação Matemática - ZETETIKÉ. Utilizamos o descritor desafio geométrico na seguinte base de dados: Banco Indutor de Trabalhos - BIT do PROFMAT e utilizamos o descritor pavimentações na seguinte base de dados: Biblioteca digital da Universidade Estadual Paulista - UNESP. Analisamos também as Publicações do Ministério da Educação - MEC, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e da biblioteca do núcleo de educação a distância da UNEB - Universidade do Estado da Bahia. Como critério de inclusão foram selecionadas produções científicas a partir do ano de 2000 e que abordaram

o eixo temático ladrilhamento no plano. Encontramos 210 produções cientificas e destas somente 13 adequaram-se ao critério de inclusão. A proposta de atividades foi subdividida em cinco atividades: Ladrilhamento com Polígonos Regulares, Ladrilhamento com Polígonos Semirregulares, Completando Quadrados com Ladrilhamento, O Quadrado da Soma de Dois Termos através do Ladrilhamento e O Ladrilhamento e o Teorema de Pitágoras. Ao final deste trabalho foi possível identificar que existe a possibilidade de relacionar conceitos geométricos com conceitos algébricos. Através do ladrilhamento do plano podemos abordar conteúdos algébricos, tais como: expressões algébricas, equação do 1º grau, resolução de equações do 2º grau e o teorema de Pitágoras.
Palavras-Chave: Ladrilhamento, Geometria, Álgebra.

# ABSTRACT

Tiling or Mosaic consists in coating a specific geometric plane with geometric structures, tiles, so as to avoid empty spaces and no structure overlaps on another. Knowing the students' difficulties in understanding mathematical concepts and that mathematics should not be taught in a compartmentalized manner, tiling the plane can imply an important teaching strategy, since geometric concepts and algebraic concepts can be related. Within this context, how can we relate the geometric concepts using tiling with the algebraic concepts taught in high school? Thus, this study aims to present a proposal for an educational activity focused on high school students relating geometry with algebraic contents that are part of the high school curriculum and has as guideline Tiling the Plane. It is a qualitative, exploratory research accomplished through literature review using the descriptor "geometry" in the following databases: Boletim de Educação Matemática - BOLEMA and Revista de Educação Matemática - ZETETIKÉ. We used the descriptor "geometric challenge" in the following database: Banco Indutor de Trabalhos - BIT of the PROFMAT and used the descriptor "tessellations" in the following database: Biblioteca digital da Universidade Estadual Paulista - UNESP. We also analyzed the publications of the Ministry of Education - MEC, of the Brazilian Mathematical Society - SBM and of the distance education nucleus library of the UNEB - Universidade do Estado da Bahia. As inclusion criteria were selected scientific productions starting from the year 2000 which addressed the thematic axis of tiling the plane. We found 210 scientific productions and of those only 13 achieved the inclusion criteria. The proposed activities were divided into five activities: Tiling with Regular Poly-

gons, Tiling with Semi Regular Polygons, Completing Squares with Tiling, The Square of the Sum of Two terms through Tiling and Tiling and the Pythagorean Theorem. At the end of this work it was identified that there is a possibility to relate geometric concepts with algebraic concepts. Through tiling the plane we can approach algebraic content, such as: algebraic expressions, 1st degree equation, solving 2nd degree equations and the theorem of Pythagoras.
Keywords: Tiling, Geometry, Algebra.

# LISTA DE FIGURAS

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

O mundo moderno definiu como principal função social da escola garantir, às novas gerações, a apropriação do conhecimento científico que historicamente vem sendo produzido e acumulado pela humanidade. A Matemática tem um papel central na formação do Homem, pois é a ciência que propicia o desenvolvimento do raciocínio lógico, e seus axiomas e postulados são verdades eternas, que representam o mundo ideal e a própria racionalidade humana.

Numa modernidade mais recente, que valoriza a sociedade e sua história, a Matemática é enfatizada, na escola, pela sua relevância social, e seu domínio é considerado fundamental para a vivência social do cidadão e pela sua aplicabilidade. Os conteúdos matemáticos são construções de homens e mulheres vivendo em sociedade, na busca da compreensão do mundo e da vida. Cremos ser importante, sobretudo para os educadores, uma reflexão crítica acerca da contextualização dos conceitos, da pluralização de significados e da aproximação da matemática com o cotidiano do aluno.

Conforme determina os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's, quando explica os objetivos do Ensino Médio:

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento

> de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico. (BRASIL, 2000, p. 6)

Uma parte da Matemática bastante relevante e presente no cotidiano das pessoas é a Geometria, sua origem se confunde com a necessidade do homem de efetuar medições comparando distâncias e dimensões de corpos. As contribuições da Geometria para a humanidade são bastante significativas, pois através dela entendemos melhor o mundo que nos cerca, cheio de diferentes formas no espaço. O mais ilustre estudioso dessa área foi Euclides, sua obra mais famosa foi o livro Os Elementos onde ele enumera uma lista de axiomas e postulados que serviram de alicerce para a construção da Geometria Euclidiana que servirá de base na constituição deste estudo.

A Geometria Euclidiana estabelece regras claras para o estudo das propriedades das figuras planas e sólidas que podem ser observadas nos planos de duas ou de três dimensões. O que está de acordo com Barbosa (2012, p. 14):

> Geometria, como qualquer sistema dedutivo, é muito parecida com um jogo: partimos com certos conjuntos de elementos(pontos, retas, planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas que dizem respeito às relações que satisfazem estes elementos, os quais são chamados de axiomas. O objetivo final deste jogo é o de determinar as propriedades das figuras planas e dos sólidos no espaço.

Toda Geometria Euclidiana está embasada em cinco axiomas, e através destes axiomas foram construídos todos os teoremas e conceitos geométricos que são utilizados até os dias de hoje. Conceitos geométricos sobre polígonos, soma de ângulos internos e externos de polígonos regulares e a combinação de padrões podem ser abordados quando analisamos o Ladrilhamento do Plano.

Além da Geometria outro ramo da matemática muito importante é a Álgebra, pois com ela podemos generalizar estruturas matemáticas, estudar processos para resolução de problemas e expressar a variação de grandezas. O desenvolvimento do pensamento algébrico acompanhou a evolução do ser humano, através dele o Homem conseguiu, mesmo que de maneira indireta, entender e estudar várias situações, que vão desde problemas práticos ligados às necessidades cotidianas até os fenômenos da natureza, estabelecendo regras bem definidas no estudo de diferentes grandezas. Por isso, o ensino da Álgebra de maneira significativa é de extrema importância para os alunos, contudo a abstração que está presente no pensamento algébrico e a complexidade de encontrar ligações diretas com situações do cotidiano dificultam o entendimento e fazem da Álgebra uma área bastante temida pelos alunos.

Sendo assim, acreditamos que uma solução para diminuir a aversão, que porventura possa existir, em relação à Álgebra passa obrigatoriamente por uma inovação metodológica por parte dos professores, a utilização dos conceitos geométricos, através do ladrilhamento do plano, pode representar uma importante estratégia para o ensino da Álgebra, pois poderíamos trabalhar conceitos abstratos através de materiais concretos.

O Ladrilhamento ou Mosaico consiste em revestir um determinado plano com estruturas geométricas, ladrilhos, de maneira que não sobrem espaços vazios e nenhuma estrutura sobreponha às outras. Desde as antigas civilizações, cerca de 4000 a.C., que o homem utiliza pedras para cobrir pisos, cria desenhos em paredes e pinturas com figuras variadas com o simples objetivo de revestir um plano ou apenas decorá-lo. Existem mosaicos que são considerados verdadeiras obras de arte, presente nos antigos palácios e mesquitas em pisos, paredes e até mesmo no teto. Nos dias de hoje podemos verificar a presença do ladrilhamento nas mais diversas formas e em várias situações: calçadas, estamparias de tecidos, cerâmicas, pinturas, pisos e até no empilhamento de objetos iguais.

Sabendo das dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos matemáticos e que a matemática não deve ser trabalhada de maneira compartimentalizada, acreditamos que o ladrilhamento do plano pode se configurar uma importante estratégia de ensino, visto que poderemos relacionar conceitos geométricos e conceitos algébricos, o que está de acordo com um dos objetivos do ensino de Matemática no nível médio, definidos pelos PCN's, revelando este ensino deve "estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento".

Dentro deste contexto, como poderemos relacionar os conceitos geométricos, utilizando o ladrilhamento, com conceitos algébricos trabalhados no Ensino Médio? Sendo assim, este estudo tem por objetivo apresentar uma proposta de atividade educacional voltada para alunos do Ensino Médio relacionando a geometria com os conteúdos algébricos que fazem parte da grade curricular do Ensino Médio tendo como eixo norteador o Ladrilhamento no Plano.

No primeiro capítulo introduziremos todos os conceitos básicos que serão utilizados neste estudo, falaremos sobre Geometria Plana e Ladrilhamento no Plano. No segundo capítulo apresentaremos o referencial teórico que vai embasar este trabalho. No terceiro capítulo explicaremos a Metodologia de Pesquisa. A proposta de atividade educacional será incluída no quarto capítulo. E finalizaremos este trabalho no quinto capítulo com a apresentação das considerações finais.

# CAPÍTULO 1

# CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentaremos os conceitos de Geometria Plana, de Ladrilhamento do Plano e alguns Conceitos Algébricos que serão utilizados na elaboração da proposta educacional.

## 1.1 Geometria Plana

Todas as definições apresentadas em seguida fazem parte dos Livros Geometria Euclidiana Plana de Barbosa, (2012) e Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana de Muniz Neto, (2012) e do Módulo Geometria Plana de Jesus, (2009).

**Definição 1.1.1** Um ângulo é uma figura plana formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas são os lados do ângulo e a origem comum é o seu vértice.

**Definição 1.1.2** Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

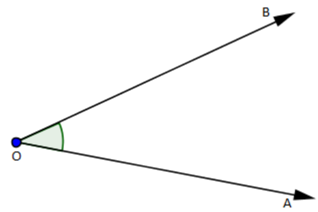



Figura 1.1: Ângulo

Existem diferentes unidades de medida de ângulos, porém as mais utilizadas são: grau, radiano e grado. Neste estudo iremos utilizar a medida mais usual, que é o Grau representado pelo símbolo º. Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero.

**Definição 1.1.3** Um polígono é uma figura formada por uma sequência de segmentos $\overline{A_1A_2}$,
$\overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$, que satisfazem as seguintes propriedades:
(i)Dois segmentos com uma extremidade comum estão contidos em retas distintas;
(ii)Se dois destes segmentos se interceptam, o fazem somente em uma das extremidades.

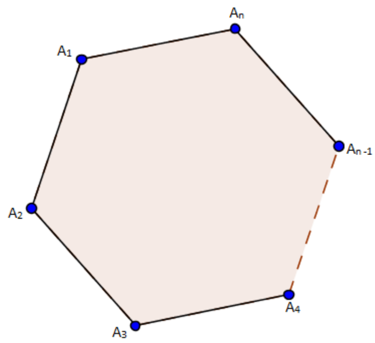



Figura 1.2: Polígono

Os polígonos são classificados de diferentes maneiras, quanto à sua convexidade, quanto a congruência de seus lados e quanto ao número de lados, o polígono da figura 1.2 é chamado de n-ágono em referência a seu número de lados. Um polígono é convexo se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contem os seus lados, caso não atenda essa condição recebe o nome de côncavo.

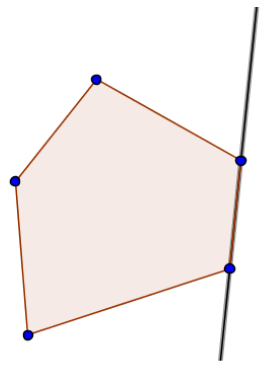


Figura 1.3: Polígono Convexo

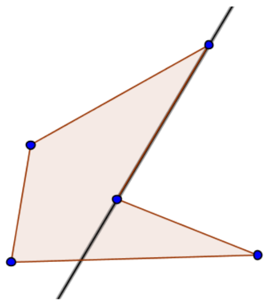


Figura 1.4: Polígono Côncavo

Os polígonos convexos recebem nomes especiais de acordo com seu número de lados e a quantidade de ângulos internos. A seguir apresentaremos uma tabela com a classificação dos polígonos com até 10 lados.

Título: Classificação dos Polígonos Convexos

| Número de Lados | Nome do Polígono |
|---|---|
| 3 | triângulo |
| 4 | quadrado |
| 5 | pentágono |
| 6 | hexágono |
| 7 | heptágono |
| 8 | octágono |
| 9 | nonágono |
| 10 | decágono |

Fonte: Barbosa, 2012.

Tabela 1.1

**Definição 1.1.4** Diremos que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$; diremos que dois ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são conguentes se eles tem a mesma medida.

Os polígonos também podem ser classificados como regulares ou irregulares, os polígonos são regulares quando atendem as seguintes condições: (i) todos os lados são congruentes entre si, (ii) todos os ângulos são congruentes entre si. Caso não atenda essas condições ele é classificado como polígono irregular. Dois exemplos de polígonos regulares são os triângulos equiláteros e os quadrados.

**Teorema 1.1.1** A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

A demonstração pode ser encontrada (Barbosa, 2012), capítulo 6.

**Corolário 1.1.1**
a) A soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90º.
b) Cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60º.
c) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º.

**Definição 1.1.5** Uma diagonal de um polígono é qualquer um dos segmentos $\overline{A_iA_j}$ que não seja um lado do mesmo.

**Proposição 1.1.1** Todo n-ágono convexo possui exatamente $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

A demonstração pode ser encontrada (Muniz Neto, 2012), capítulo 1.

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, podemos encontrar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer, para isso devemos determinar a quantidade de triângulos que compõe cada polígono.

**Proposição 1.1.2** A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $S_n = (n - 2).180º$.

A demonstração pode ser encontrada (Jesus, 2009), capítulo 7.

Título: Soma dos Ângulos Internos de alguns Polígonos

| Polígono | Número de Lados | $S_n = (n-2).180º$ |
|---|---|---|
| triângulo | 3 | 180º |
| quadrado | 4 | 360º |
| pentágono | 5 | 540º |

Fonte: Jesus, 2009.

## 1.2 Ladrilhamento no Plano

O Ladrilhamento consiste em cobrir todas as partes de um plano com polígonos, de maneira que não sobrem espaços vazios e nenhum polígono sobreponha o outro. Sabendo que um plano é ilimitado em todas as direções, consideraremos apenas uma parte finita dele para ladrilhar, com isso podemos recobri-lo de várias formas.

**Definição 1.2.1** Aos vértices dos polígonos chamamos de nós da pavimentação.

Porém conforme Barbosa (1993, p. 4):

> Observamos, no entanto, que um polígono pode ter mais nós na sua fronteira que o seu próprio número de vértices.

Na figura abaixo o polígono(2) tem 8 nós na sua fronteira e apenas 5 vértices, enquanto os outros apresentam o mesmo número de nós que de vértices.

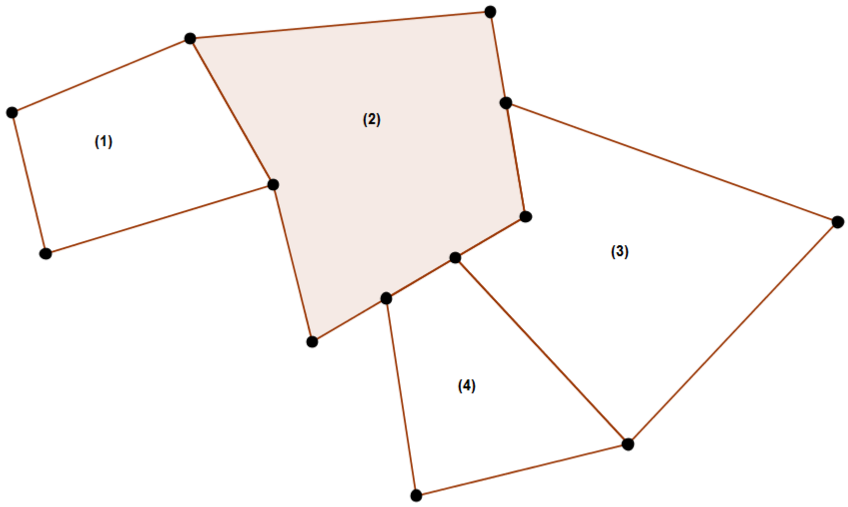



Figura 1.5: Vértices de um Ladrilhamento

**Definição 1.2.2** Os segmentos de retas que tem por extremos dois nós consecutivos de um mesmo lado de polígono chamamos de arestas.

**Definição 1.2.3** Em um ladrilhamento regular ou semirregular, a soma dos vários ângulos que se posicionam em torno de cada vértice ou nó é o ângulo de uma volta completa, ou seja, $360^o$.

Neste estudo, consideraremos o ladrilhamento regular ou semirregular apenas do tipo lado-a-lado, que é o ladrilhamento onde a interseção entre dois ladrilhos é sempre um lado inteiro do polígono.

Todas as definições que serão apresentadas a seguir fazem parte do Livro Descobrindo Padrões em Mosaicos de Barbosa, (1993) e do Módulo Desafio Geométrico de Dias e Sampaio, (2010).

### 1.2.1 Ladrilhamento Regular

**Definição 1.2.1.1** Ao polígono que possui por vértices os pontos médios dos lados que concorrem num mesmo nó chamamos de figura-vértice.

**Definição 1.2.1.2** Um padrão de pavimentação é padrão regular se, e só se, as figuras-vértice do padrão são polígonos regulares.

**Definição 1.2.1.3** Quando todos os vértices de um ladrilhamento são de um mesmo tipo, temos um ladrilhamento regular. Neste caso, diremos que o padrão do ladrilhamento é o tipo de cada um de seus vértices.

Apresentaremos a seguir uma tabela que informa a medida dos ângulos internos de alguns polígonos regulares. Com essas informações podemos definir os polígonos que podem pavimentar um plano de maneira regular.

Título: Medida dos Ângulos Internos de alguns Polígonos Regulares

| Polígono | Número de Lados | $\alpha_n = \frac{(n-2).180^o}{n}$ |
|---|---|---|
| triângulo | 3 | $60^o$ |
| quadrado | 4 | $90^o$ |
| pentágono | 5 | $108^o$ |
| hexágono | 6 | $120^o$ |
| heptágono | 7 | $\approx 128,57^o$ |
| octágono | 8 | $135^o$ |
| eneágono | 9 | $140^o$ |
| decágono | 10 | $144^o$ |

Fonte: Dias e Sampaio, 2010.

Tabela 1.2

Sendo assim, para ladrilharmos um plano com polígonos de um mesmo tipo devemos observar que a soma dos ângulos em torno de cada vértice é $360^o$, portanto apenas três tipos de polígonos podem pavimentar de forma regular um plano. O triângulo, o quadrado e o hexágono.

Ladrilhamento de padrão (3,3,3,3,3,3), ou seja, em torno de cada vértice temos 6 triângulos equiláteros.

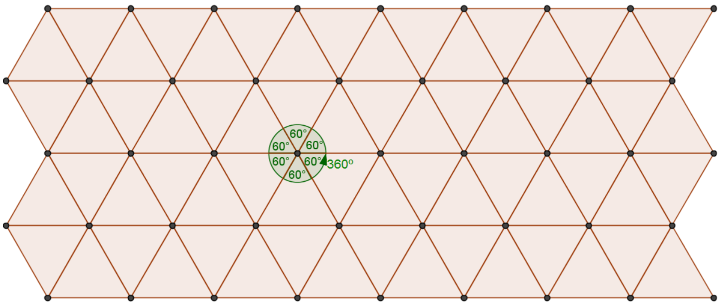



Figura 1.6: Ladrilhamento com Triângulos

Ladrilhamento de padrão (4,4,4,4), ou seja, em torno de cada vértice temos 4 quadrados.

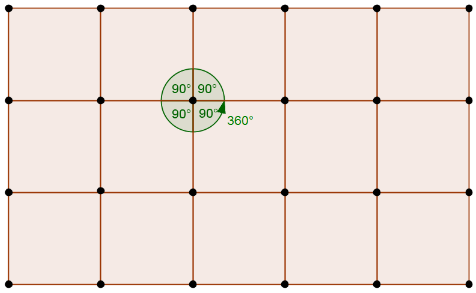



Figura 1.7: Ladrilhamento com Quadrados

Ladrilhamento de padrão (6,6,6), ou seja, em torno de cada vértice temos 3 hexágonos regulares.

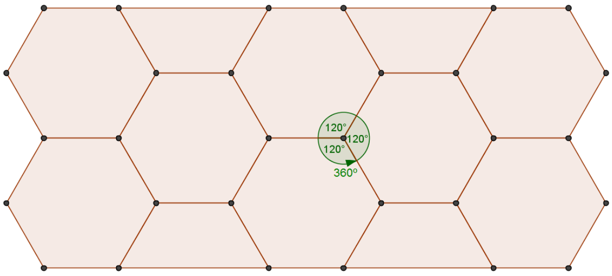



Figura 1.8: Ladrilhamento com Hexágonos

### 1.2.2 Ladrilhamento Semirregular

Existem pavimentações do plano que podem ser feitas utilizando mais de um tipo de polígonos regulares, essa forma de pavimentação recebe o nome de Ladrilhamento Semirregular.

**Proposição 1.2.2.1** Em torno de cada vértice de um ladrilhamento regular ou semirregular teremos sempre, no mínimo, três polígonos e, no máximo, seis.

Conforme Barbosa (1993, p. 27):

> Seja k o número de polígonos regulares ao redor de um ponto. Sendo $60^o$ o menor ângulo interno de um polígono regular, então o maior valor de k é dado

por $\frac{360^o}{60^o} = 6$, que corresponde a 6 triângulos equiláteros; por outro lado, $k > 2$; portanto resulta o intervalo de restrição para o inteiro k: $3 \leq k \leq 6$.

Já vimos anteriormente que as pavimentações dos tipos (3,3,3,3,3,3), (4,4,4,4) e (6,6,6) correspondem respectivamente a pavimentações regulares construídas com triângulos, quadrados e hexágonos. Entretanto, existem outras combinações possíveis utilizando polígonos distintos.

Dias e Sampaio 2010, em seu Módulo Desafio Geométrico, fazem um estudo sobre as possíveis formas de ladrilhamento e subdivide em apenas quatro tipos de ladrilhamento possíveis, considerando o número de polígonos ao redor de um vértice, que ele classificou como: (k,l,m) pavimentações com três polígonos ao redor do vértice, (k,l,m,n) pavimentações com quatro polígonos ao redor do vértice, (k,l,m,n,p) pavimentações com cinco polígonos ao redor do vértice e (k,l,m,n,p,q) pavimentações com seis polígonos ao redor do vértice.

Considerando o padrão (k,l,m,n,p,q) só existe uma possibilidade de pavimentação do plano que é o ladrilhamento regular formado por seis triângulos equiláteros. Este é o padrão mais simples de ser analisado, pois conforme definição 1.2.3 a soma dos ângulos ao redor de cada vértice deve ser igual a 360°, portanto com seis polígonos ao redor de cada vértice só o triângulo equilátero atende esta condição.

Dias e Sampaio, 2010, apresenta as definições a seguir para ladrilhamentos semirregulares dos tipos (k,l,m), (k,l,m,n) e (k,l,m,n,p).

**Proposição 1.2.2.2** Se um ladrilhamento tem um padrão (k,l,m), e um dos valores k, l ou m é ímpar, os outros dois valores são iguais. Podemos nesse caso supor que k é um inteiro ímpar e concluiremos que l = m.

**Demonstração:** Consideremos um $k$-ágono regular, em um ladrilhamento de padrão (k,l,m), sendo $k$ um número ímpar e $k \geqslant 3$. Enumeremos os $k$ vértices consecutivos do $k$-ágono regular como sendo $A_1, A_2, ..., A_k$.
Vamos agora supor que temos um $l$-ágono colado ao lado $A_1A_2$. Teremos, então, um $m$-ágono colado ao lado $A_2A_3$, um $l$-ágono colado ao lado $A_3A_4$, e assim por diante.

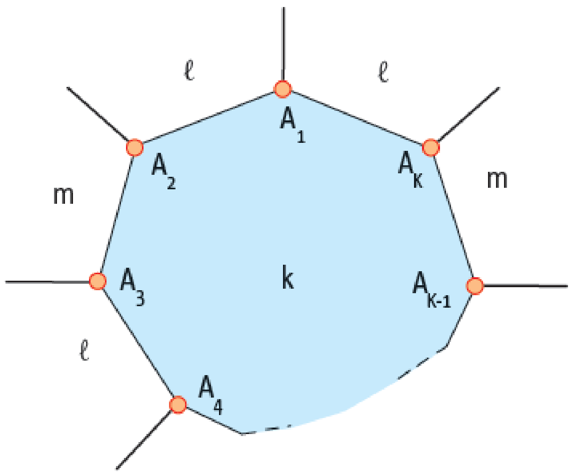



Figura 1.9: Representação de um ladrilhamento de padrão (k,l,m), onde k representa todos os polígonos formados por um número ímpar de lados.

Em outras palavras, sendo o valor de k ímpar, teremos a seguinte tabela de lados consecutivos do k-ágono e correspondentes tipos de ladrilhos colados a esses k lados:

| $A_1A_2$ | $A_2A_3$ | $A_3A_4$ | ... | $A_{k-1}A_k$ | $A_kA_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $l$-ágono | $m$-ágono | $l$-ágono | ... | $m$-ágono | $l$-ágono |

Assim sendo, o vértice $A_1$ deverá ser do tipo (k,l,l). Como o ladrilhamento é de padrão (k,l,m), então, lembrando que numa pavimentação regular ou semirregular se dermos uma volta, no sentido horário ou anti-horário, em torno de qualquer vértice, encontraremos sempre os mesmos tipos de polígonos regulares, e a sequência cíclica em que esses polígonos aparecem será sempre a mesma, concluímos que, necessariamente, l = m.

**Proposição 1.2.2.3** Existe um único ladrilhamento, de padrão (k,l,m), quando k = 3, que é o ladrilhamento de padrão (3,12,12).

A demonstração pode ser encontrada (Dias e Sampaio, 2010), capítulo 2.

**Proposição 1.2.2.4** Quando k é um número ímpar e $k \geqslant 5$ , não existe nenhum ladrilhamento semirregular do plano de padrão (k,l,m).

A demonstração pode ser encontrada (Dias e Sampaio, 2010), capítulo 2.

Conforme Dias e Sampaio (2010, p. 66):

> Existem dois padrões de ladrilhamento semirregulares, com três polígonos em torno de cada vértice, que fazem uso de quadrados. São os ladrilhamentos de padrões (4,6,12) e (4,8,8). (...) Não existe nenhum ladrilhamento com padrão da forma (k,l,m), com k, l , e m todos pares, que não faça uso de quadrados e nem de hexágonos regulares.

Ladrilhamento semirregular de padrão (4,8,8), ou seja, em torno de cada vértice temos um quadrado e dois octágonos regulares.

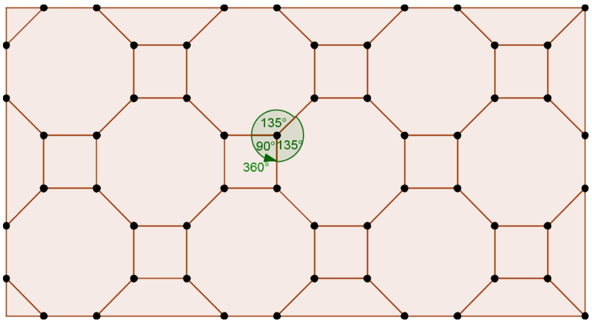



Figura 1.10: Ladrilhamento com Quadrados e Octágonos

Para o estudo do ladrilhamento semirregular de padrão (k,l,m,n), Dias, 2010, divide em dois casos: ladrilhamentos de padrão (k,l,m,n) que possuem triângulos equiláteros e ladrilhamentos de padrão (k,l,m,n) que não fazem uso de triângulos equiláteros.

**Proposição 1.2.2.5** Se um ladrilhamento tem um padrão (3,l,m,n), então l = n, ou seja, o ladrilhamento tem um padrão da forma (3,n,m,n). Assim, não existe nenhum ladrilhamento de padrão (3,l,m,n) quando $l \neq n$.

A demonstração pode ser encontrada (Dias e Sampaio, 2010), capítulo 2.

Assim, os ladrilhamentos semirregulares que possuem padrão da forma (3,l,m,n) são (3,4,6,4) e (3,6,3,6). O único tipo de ladrilhamento de padrão (k,l,m,n) que não possui triângulos equiláteros é da forma (4,4,4,4) que é um ladrilhamento regular.

A figura a seguir representa um ladrilhamento semirregular de padrão (3,4,6,4), ou seja, em torno de cada vértice temos um triângulo, dois quadrados e um hexágono regular.

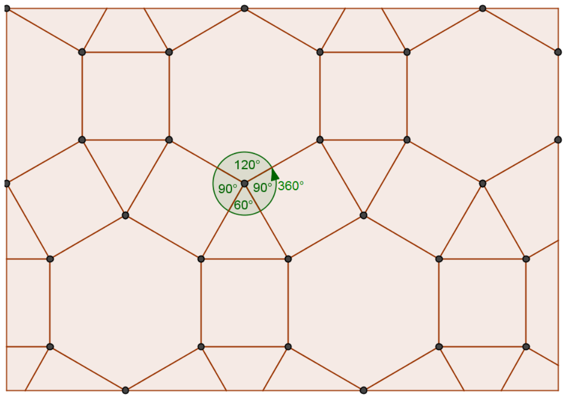



Figura 1.11: Ladrilhamento com Triângulos, Quadrados e Hexágonos

Para os ladrilhamentos semirregulares do tipo (k,l,m,n,p), Dias e Sampaio, 2010, apresenta as proposições a seguir.

**Proposição 1.2.2.6** Não existe ladrilhamento de padrão (k,l,m,n,p) que não faça uso de triângulos equiláteros, como não existem ladrilhamentos desse padrão com apenas um ou dois triângulos equiláteros em torno de cada vértice.

A demonstração pode ser encontrada (Dias e Sampaio, 2010), capítulo 2.

**Proposição 1.2.2.7** Se um ladrilhamento tem um padrão (k,l,m,n,p), ele deverá ter um dos seguintes dois padrões: (3,3,m,n,3) e (3,l,3,3,l).

A demonstração pode ser encontrada (Dias e Sampaio, 2010), capítulo 2.

Os únicos ladrilhamentos semirregulares com cinco polígonos em torno de cada vértice são os de padrões (3,3,4,4,3), (3,3,3,6,3) e (3,4,3,3,4).

Por fim, para ladrilharmos o plano com mais de um tipo de polígonos, ou seja, ladrilharmos de forma semirregular só existem oito combinações possíveis, que são: (3,12,12), (4,6,12), (4,8,8), (3,4,6,4), (3,6,3,6), (3,3,4,4,3), (3,3,3,6,3) e (3,4,3,3,4)

### 1.2.3 Ladrilhamento Irregular

**Paralelogramos**

**Definição 1.2.3.11** Um paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos, gozando de várias propriedades, por exemplo:

1. Os lados opostos são congruentes.
2. Os ângulos opostos são congruentes.
3. Os ângulos são dois a dois suplementares.

Segundo Barbosa (1993), os paralelogramos podem ladrilhar o plano com uma infinidade de formas diferentes, podem ser pavimentações do tipo lado-lado, onde a soma em torno cada vértice é igual a 360º e também não lado-a-lado já que em geral os paralelogramos podem ser deslocados por faixas(translações) em duas direções.

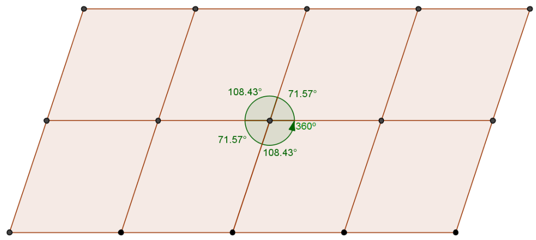



Figura 1.12: Pavimentação com Paralelogramos Lado-a-Lado

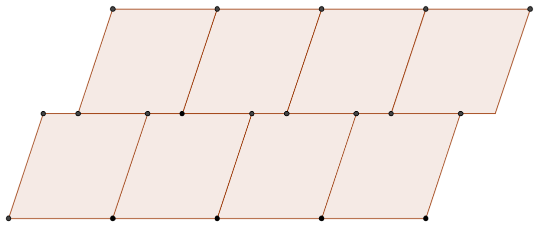


Figura 1.13: Pavimentação com Paralelogramos não Lado-a-Lado

**Triângulos**

**Proposição 1.2.3.11** Um triângulo, seja escaleno, seja isósceles, pavimenta o plano lado-a-lado e por faixas.

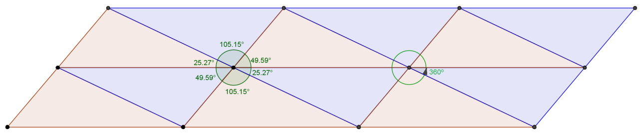


Figura 1.14: Pavimentação com Triângulos Lado-a-Lado

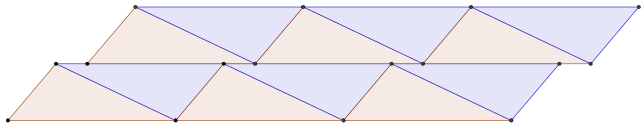


Figura 1.15: Pavimentação com Triângulos não Lado-a-Lado

**Trapézios**

**Proposição 1.2.3.12** O trapézio pavimenta o plano por faixas e também lado-a-lado, fazendo simetrias reflexionais sucessivas em relação a cada nova reta paralela.

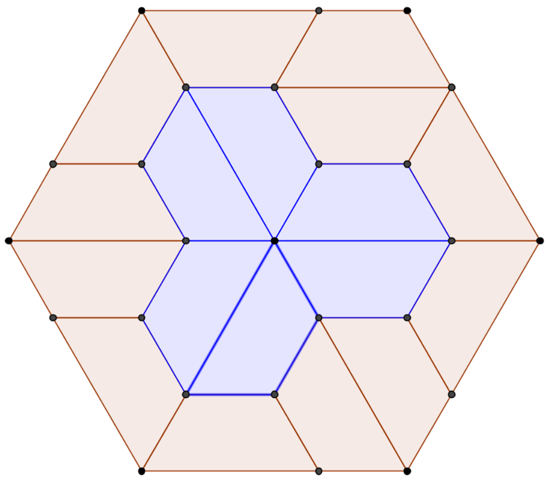


Figura 1.16: Ladrilhamento com Trapézios

Em resumo, Barbosa (1993), apresenta em seu livro Descobrindo Padrões em Mosaicos, no capítulo 6, uma série de possíveis ladrilhamentos para polígonos irregulares, além dos citados anteriormente, ele descreve a pavimentação para Pentágonos, Hexágonos e para Quadriláteros (Côncavos ou Convexos) e ao final do capítulo apresenta as seguintes definições:

**Proposição 1.2.3.13** Se o polígono é qualquer com o número de lados n = 3, ou n = 4 (convexo ou côncavo) então pavimenta o plano.

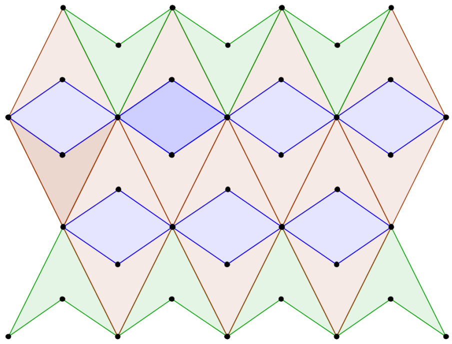


Figura 1.17: Ladrilhamento com Polígonos Côncavos e Convexos

**Proposição 1.2.3.14** Se o polígono tem número de lados n = 5 ou n = 6, então pavimenta o plano em casos especiais.

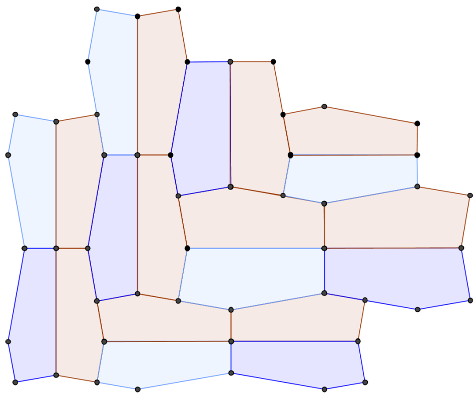


Figura 1.18: Ladrilhamento de Marjore Rice

**Proposição 1.2.3.15** Se o polígono é convexo e a pavimentação é lado-a-lado, então o número de lados é $n \leq 6$.

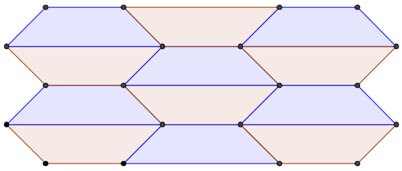


Figura 1.19: Ladrilhamento com Trapézios Lado-a-Lado

## 1.3 Conceitos Algébricos

A seguir apresentaremos os conceitos algébricos que serão abordados na proposta de atividade educacional através do ladrilhamento do plano.

**Definição 1.3.1** Equações Algébricas: São as equações em que as incógnitas são submetidas apenas às chamadas operações algébricas, ou seja, soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação, utilizando letras e números.

**Definição 1.3.2** Soma do Quadrado Perfeito: O desenvolvimento da expressão $(a+b)^2$, resulta no quadrado da primeira parcela $a^2$, somando com o dobro do produto das duas parcelas, 2ab, somado com o quadrado da segunda parcela $b^2$.

**Definição 1.3.3** Equação do 2º grau é toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a,\ b\ e\ c \in \Re$, com $a \neq 0$.

Uma Equação do 2º grau pode ser resolvida através do método de completar quadrado, que consiste em forçar o aparecimento de um quadrado perfeito na equação para que ela seja resolvida de maneira mais prática sem a necessidade da aplicação direta da fórmula de Bhaskara, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

**Teorema de Pitágoras:** Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

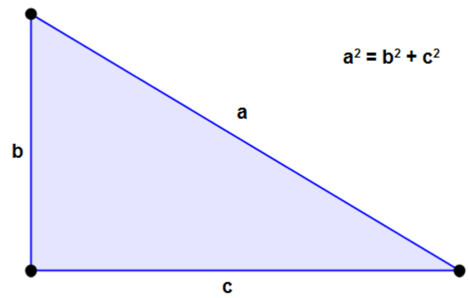



Figura 1.20: Triângulo Retângulo

# CAPÍTULO 2

# FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

## 2.1 Geometria

A geometria está presente na vida do homem há muito tempo, desde quando o homem sentiu a necessidade de efetuar medidas, calcular distâncias e dimensões de corpos. As antigas civilizações já detinham alguns conhecimentos geométricos, conforme Barbosa (2012) "Egípcios, Assírios e Babilônios já conheciam as principais figuras geométricas e a noção de ângulo que usavam nas medidas de área e na Astronomia". Com o passar do tempo foi necessário à criação de leis e regras para sistematização de todo conhecimento geométrico.

Euclides de Alexandria, em 300 a.C., inspirado em todo conhecimento matemático já existente, escreveu o livro Os Elementos, onde dentre outros temas, sistematizou a Geometria, sua obra está sustentada em cinco verdades óbvias e incontestáveis, cinco axiomas, formando os pilares da geometria que chamamos de Geometria Plana.

> A maior parte do desenvolvimento da Geometria resultou dos estudos feitos, através de muitos séculos, para construir-se um corpo de doutrina lógica que correlacionasse os dados geométricos obtidos da observação e medida.(...)Do material acumulado Euclides compilou os seus "Elementos", um dos mais notáveis livros já escritos.(BARBOSA, 2012, p.33)

Através de suas regras bem definidas, com seus postulados e axiomas, a Geometria Euclidiana se estabeleceu ao longo do tempo tornando-se a principal e mais popular fonte para a interpretação e estudo do plano e do espaço. Conforme Santos (2006, p. 17):

> Passados muitos séculos, o modelo euclidiano conservou-se como principal referencial para o ensino escolar da geometria, de forma a privilegiar as formalizações e abstrações em detrimento dos aspectos intuitivos e do movimento que leva à constituição dos conceitos geométricos.

Com isso, o ensino da Geometria contribui para a formação do aluno, de forma que ele se torne autônomo e crítico, que saiba interpretar o mundo que o cerca de maneira racional e lógica. Conforme Os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio - PCN's, (BRASIL, 2000, p. 44), quando apontam que "as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca."

Porém, vários estudos que abordam a geometria destacam que ela vem sendo deixada de lado ou trabalhada de maneira insatisfatória, conforme Afini e Souza (2013, p. 2): "A Geometria se constituiu como a base da matemática e, assim como a história não tem sido abordada adequadamente no ensino básico de forma a desenvolver o pensamento espacial, estimular a intuição, percepção, leitura e representação do mundo e de conceitos matemáticos". (AFINI e SOUZA, 2013),(FERREIRA, SOARES e LIMA, 2009) e (PROENÇA e PIROLA, 2009) justificam esse problema com a falta de domínio do conteúdo, pelos professores, para conduzir um ensino de qualidade em geometria, pela ausência de referências sólidas no livro didático e até mesmo por deficiências na formação acadêmica destes profissionais. Segundo Proença e Pirola (2009, p. 14) "Os professores, frequentemente, sentem-se desconfortáveis para ministrar aulas de geometria e, na maioria das vezes, preferem muito trabalhar com a álgebra, em detrimento desse assunto."

Os PCN's, (BRASIL, 2000, p. 44), orientam que:

> O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas

> não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

Santos (2006, p. 18), em seu estudo, defende "à necessidade de se resgatar o ensino da geometria, devido, principalmente, à sua importância para o desenvolvimento do estudante e de seu pensamento lógico.(...) Revela-se importante a inclusão da geometria no currículo escolar em diferentes níveis de ensino, por meio de recursos que não se limitem à memorização de técnicas e definições, mas que valorizem as vivências dos alunos. "

Com isso, fica evidenciado que para o professor utilizar dos conceitos geométricos no Ensino Médio, ele deve fazer um trabalho diferente do que vem sendo feito, os conteúdos matemáticos devem ser abordados de forma que estabeleçam conexões com a Geometria, conforme PCN's, (BRASIL, 2000, p. 43):

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Murari (2011, p. 189), aponta em seu estudo as dificuldades que o professor pode enfrentar quando busca uma mudança na sua prática.

> Aprender a ensinar de maneiras diferentes pode não ser tão simples para os professores. A mudança em sua prática é um processo que exige mudanças de comportamento como, por exemplo, ser de novo aprendiz, desenvolver novas compreensões dos conteúdos ensinados e estar engajado em um grupo de pessoas que tenham, também, o objetivo de repensar ou mudar suas práticas. Desse modo, ao aproveitar circunstâncias adequadas e favoráveis para aprender a ensinar de uma

> nova maneira, poderá observar tais experiências e perceber as implicações que resultam dessa aprendizagem, bem como avaliar continuamente e criticamente sua prática.

Mesmo com todas as dificuldades apontadas, Murari defende que é plenamente possível que o professor melhore sua prática, buscando novos e eficazes métodos de ensino. Ele cita a utilização de materiais manipuláveis como forma aprimorar o processo de ensino e aprendizagem, estabelecendo uma conexão entre os materiais concretos e os conceitos matemáticos abstratos. Porém, alerta que o professor precisa ter cuidado, pois os materiais utilizados e as situações trabalhadas devem ter sentido para o aluno.

Sendo assim, acreditamos que a geometria pode se configurar uma importante ferramenta de ensino dos conceitos matemáticos, conforme Pereira e Aquino (2011, p. 1 e 2):

> A concepção da construção do conhecimento matemático é passível de ser constituída através de relações entre seus conceitos, podendo propiciar ao aluno uma experiência extremamente enriquecedora. As ideias relacionadas à geometria podem ser facilitadoras para a compreensão de conceitos ligados à Álgebra e Aritmética ou vice-e-versa. Além disso, a permeabilidade da Matemática a outros campos científicos ou áreas de conhecimento vem contribuindo para solução de seus problemas. Se devidamente apresentada, pode estimular no aluno a adoção de uma postura de investigação, curiosidade, criatividade e crítica.

Dentro deste contexto, acreditamos que os conceitos geométricos que envolvem a pavimentação de um plano ou ladrilhamento podem ser utilizados para estabelecer uma conexão entre a Geometria e a Álgebra e com isso, tornar mais significativo o ensino e aprendizagem da matemática no Ensino Médio.

## 2.2 O Ladrilhamento no Ensino da Matemática

A utilização do ladrilhamento como estratégia de ensino dos conceitos matemáticos já vem sendo foco de estudo há um certo tempo, vários trabalhos já foram publicados abordando este tema como (NAGAMINE, ANDRADE e NEVES, 2013),(AFINI e SOUZA, 2013) e (MURARI, 2011).

Em seu estudo Nagamine, Andrade e Neves (2013, p. 2) propõem uma investigação interdisciplinar relacionando a arte e a geometria através do ladrilhamento. "Dessa forma, podemos repensar maneiras de abordar junto aos alunos os conceitos tão essenciais para o ensino e aprendizagem da Matemática, e para que eles possam visualizar e compreender melhor o mundo que os cerca."

Afini e Souza (2013), apresentam em seu trabalho uma proposta diferenciada para o ensino de geometria, estabelecendo uma relação com a história da matemática e alguns conceitos matemáticos, através de aulas que exploram a pavimentação de planos e construção de mosaicos utilizando textos, materiais manipuláveis e programas de computador. Os autores justificam a utilização dos mosaicos da seguinte forma:

> A arte dos mosaicos é praticada há muito tempo por civilizações mais antigas e está presente no cotidiano dos alunos em diferentes contextos, seja nas pavimentações de calçadas e pisos, peças de decorações, colmeias, objetos e janelas de algumas igrejas. Um tipo especial de mosaico é o vitral que se originou nos claustros árabes, tendo aparecido na Europa a partir do século VII. Pelo fato dos mosaicos estarem intimamente relacionados com o ensino de geometria, devido aos conceitos matemáticos intrínsecos em sua construção, esta temática foi desenvolvida com ênfase em pavimentações do plano. (AFINE e SOUZA, p. 5, 2013).

O estudo de Santos (2011), retrata um pouco da história da geometria, apresenta uma série de estudos sobre uso da pavimentação do plano como uma metodologia diferenciada, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, para trabalhar os conceitos geométricos.

A autora discute a utilização de materiais manipuláveis como estratégia de ensino que pode deixar as aulas mais dinâmicas e pode atrair a atenção do aluno. Porém alerta que:

> Outro fator a se considerar, no uso de recursos concretos, é que os materiais e sua manipulação permitem aos alunos o contato e a exploração de suas características durante as atividades de aprendizagem, porém esse processo não deve limitar-se a uma simples atividade lúdica. O uso superficial dos materiais restringe as possibilidades de se ultrapassar seus aspectos mais imediatos, de forma que, em se tratando do ensino de geometria, o risco pode ser a sua possível limitação a um nível puramente empírico. (SANTOS, 2011, p. 24)

Concordamos com a autora sobre o cuidado na utilização de materiais manipuláveis, pois as aulas de matemática necessitam de significado, os alunos precisam perceber a importância do estudo da matemática para o seu desenvolvimento social e intelectual, mesmo durante uma aula de caráter mais lúdico.

Santos (2011), também relata um pouco sobre a visualização de pavimentação em caleidoscópio, pavimentação de penrose por Kites e Darts, onde relaciona o segmento áureo e a razão áurea, o pentágono regular e a razão áurea e as peças das pavimentações de Penrose. Além disso, aborda a vida e obra de Mauritus Cornelis Escher, artista Holandês, cujos trabalhos artísticos, reconhecidos mundialmente, envolvem a pavimentação do plano através de figuras criadas de polígonos regulares ou não, utilizando a simetria, a rotação e a translação, mostrando que a matemática também pode ser estudada através da arte, com os mosaicos artísticos.

Murari (2011), motivado pelas dificuldades do ensino da Matemática nos dias atuais, conforme os resultados do sistema de avaliação externa da Educação Brasileira, por meio de indicadores como SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica e ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, defende em seu artigo uma mudança na prática do professor, com a inclusão de softwares matemáticos e a utilização de materiais manipuláveis como forma de aprimorar as aulas e torná-las mais significativas para os alunos. Dentre os materiais manipuláveis, Murari (2011, p. 200) sugere um kit de polígonos.

> O kit de polígonos é um conjunto de polígonos regulares (triângulos, quadrados, hexágonos, octógonos, decágonos, dodecágonos etc.) confeccionados em papel resistente, todos com a mesma medida de lado e com cores distintas em suas faces, que servem para descobrir quais arranjos de polígonos colocados de modo adjacente podem dar origem a uma pavimentação; é um bom recurso para se estudar polígonos, ângulos internos e pavimentações.

Todos os estudos apresentados anteriormente indicam que o ladrilhamento pode ser utilizado como ferramenta para facilitar o ensino da Matemática, em particular, da Geometria. Contudo, através da geometria podemos tornar mais concretos os conceitos matemáticos que envolvem as propriedades algébricas. Conforme Pereira e Aquino (2011, p. 1).

> A concepção da construção do conhecimento matemático é passível de ser constituída através de relações entre seus conceitos, podendo propiciar ao aluno uma experiência extremamente enriquecedora. As ideias relacionadas à geometria podem ser facilitadoras para a compreensão de conceitos ligados à Álgebra e Aritmética ou vice-e-versa. Além disso, a permeabilidade da Matemática a outros campos científicos ou áreas de conhecimento vem contribuindo para solução de seus problemas. Se devidamente apresentada, pode estimular no aluno a adoção de uma postura de investigação, curiosidade, criatividade e crítica.

Isto significa que podemos trabalhar os conceitos algébricos utilizando a geometria, através do ladrilhamento, fazendo com que assuntos muitas vezes abstratos sejam trabalhados de uma maneira diferente da tradicional, de forma que o estudante perceba e entenda esses conceitos com a ajuda dos materiais manipuláveis na medida em que for construindo os mosaicos.

# CAPÍTULO 3

# METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos os procedimentos metodológicos adotados para a revisão literária das produções científicas que serviram de base na construção deste estudo, tais como as bases de dados utilizadas e os critérios de inclusão.

Pesquisa qualitativa, exploratória realizada por meio da revisão de literatura utilizando o descritor geometria nas seguintes bases de dados: Boletim de Educação Matemática - BOLEMA e Revista de Educação Matemática - ZETETIKÉ. Utilizamos o descritor desafio geométrico na seguinte base de dados: Banco Indutor de Trabalhos - BIT do PROFMAT e utilizamos o descritor pavimentações na seguinte base de dados: Biblioteca digital da Universidade Estadual Paulista - UNESP. Analisamos também as Publicações do Ministério da Educação - MEC, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e da biblioteca do núcleo de educação a distância da UNEB - Universidade do Estado da Bahia. Como critério de inclusão foram selecionadas produções científicas a partir do ano de 2000 e que abordaram o eixo temático ladrilhamento no plano.

> O qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências, como, por exemplo, da vermelhidão do vermelho etc. Entende-se que a noção do rigor não seria aplicável a dados qualitativos, uma vez que a

> eles faltaria precisão e objetividade, dificultando ou impossibilitando aplicação de quantificadores. (BORBA et al, 2004, p.104).

Encontramos 210 produções cientificas e destas somente 13 adequaram-se ao critério de inclusão. As treze produções foram 03 artigos; 03 livros; 02 módulos de ensino; 02 publicações em anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, 01 publicação na Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM; 01 dissertação de mestrado da UNESP e os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio.

Os documentos selecionados foram submetidos à análise documental onde foi possível evidenciar conceitos sobre a geometria plana, regras para o ladrilhamento, atividades de formação continuada para professores do ensino médio e discussões sobre o processo ensino aprendizagem da aplicação da geometria no ensino médio. Todos estes documentos contribuíram para a definição da proposta de atividades educacionais com o eixo temático ladrilhamento no plano.

> A pesquisa documental analisa materiais que não receberam tratamento analítico ou que podem ser elaborados de acordo objetivos da pesquisa. (GIL, 2008)

Título: PRODUÇÕES CIENTÍFICAS IDENTIFICADAS NA REVISÃO DE LITERATURA

| Produção Científica | Ano Publicação | Base de Dados |
|---|---|---|
| Artigo: Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática | 2011 | Bolema |
| Artigo: Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio na identificação de atributos definidores de polígono | 2009 | Zetetiké |
| Artigo: Construindo e Expondo Mosaicos com o Auxílio do Software Tess | 2013 | SBM |
| Anais: A compreensão de conceitos geométricos utilizando o ladrilhamento | 2013 | ENEM |
| Anais: Mosaicos, pavimentações do plano e o ensino da geometria | 2013 | ENEM |
| Anais: Isometrias no plano e mosaico: a matemática na arte | 2011 | CIAEM |
| Dissertação: Pavimentações do Plano: Um Estudo com Professores de Matemática e Arte | 2006 | UNESP |
| Livro: Explorando o Ensino da Matemática | 2004 | MEC |
| Livro: Descobrindo Padrões em Mosaicos | 1993 | Ed. Atual |
| Livro: Geometria Euclidiana Plana | 2012 | SBM |
| Módulo: Geometria Plana | 2009 | UNEB |
| Módulo: Desafio Geométrico: Módulo I | 2010 | BIT |
| Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio | 2000 | MEC |

Fonte: Arquivo da Pesquisa.

Tabela 3.1

# CAPÍTULO 4

# PROPOSTAS DE ATIVIDADES

O papel do professor é extremamente importante no que diz respeito ao ensino da Matemática, na busca de estratégias para dinamizar as aulas, desafiando e estimulando os alunos, permitindo que eles façam da aprendizagem um processo interessante, divertido, e, consequentemente, diminuindo a aversão pela disciplina. Por isso, o professor deve sempre fortalecer a relação entre a teoria e a prática.

As propostas que serão apresentadas buscam aproximar a Geometria e a Álgebra através do ladrilhamento do plano, justamente com o objetivo de trabalhar conceitos abstratos com materiais concretos. Essas propostas são indicadas para alunos do 1º ano do Ensino Médio, pois segundo os PCN's (2000, p. 41) "(..) Aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático."

Para que os alunos aprendam com uma maior facilidade e as propostas sejam eficazes, no que diz respeito à aprendizagem, alguns prerrequisitos são necessários:

• Conhecimentos básicos da geometria plana, tais como: Definição de ângulos e polígonos, cálculo de área de polígonos, congruência de polígonos.

• Resolução de expressões algébricas.
• Equação do 1º grau.
• Equação do 2º grau.

No início das atividades, deverão ser formados grupos de no máximo cinco alunos, cada atividade terá duração de duas aulas de 50 minutos, o professor deverá agir como mediador, propondo discussões a respeito do tema de cada atividade, porém sempre conduzindo as discussões para que o objetivo de cada atividade seja alcançado. Os recursos materiais necessários para o desenvolvimento das atividades são: Kits com polígonos regulares e irregulares de variados tamanhos, folhas de papel ofício, data show e Notebook.

As dificuldades que poderemos encontrar no desenvolvimento das atividades são: Falta de domínio dos prerrequisitos por parte dos alunos, Falta de domínio dos conteúdos geométrico por parte dos professores, Ausência de recursos tecnológicos no ambiente escolar e Dificuldades na aquisição dos materiais concretos: polígonos regulares e irregulares de diferentes tamanhos.

A Proposta de atividade está subdividida em cinco atividades educacionais: Ladrilhamento com Polígonos Regulares, Ladrilhamento com Polígonos Semirregulares, Completando Quadrados com Ladrilhamento, O Quadrado da Soma de Dois Termos através do Ladrilhamento e O Ladrilhamento e o Teorema de Pitágoras.

Atividade 1: Ladrilhamento com Polígonos Regulares, com esta atividade apresentaremos os conceitos do ladrilhamento regular do plano para os alunos, bem como as regras para este tipo de pavimentação, com isso, abordaremos os conceitos de congruência de polígonos, relacionaremos o cálculo dos ângulos internos de polígonos regulares com o seu número de lados e relacionaremos também a soma dos ângulos ao redor de cada vértice com a possibilidade da pavimentação de acordo com as regras estabelecidas. Os estudos de Barbosa (1993), Dias e Sampaio (2010), e Santos (2006), apresentam detalhadamente a pavimentação regular do plano.

Após a sedimentação desses conceitos, os alunos serão orientados a encontrar uma relação algébrica entre a possibilidade de pavimentação regular e o número de lados de cada polígono, Dias e Sampaio (2010), em seu Módulo Desafio Geométrico, demonstram a relação algébrica entre o número de lados e os ângulos internos dos polígonos regulares, entre a soma dos ângulos ao redor de cada vértice do ladrilhamento e a possibilidade da pavimentação regular. Assim com base nesse estudo, verificamos que essa atividade pode relacionar a geometria com a álgebra.

A Atividade 2: Ladrilhamento com Polígonos Semirregulares, segue a mesma linha da Atividade 1, com base nos estudos de Barbosa (1993), Dias e Sampaio (2010) e Santos (2006), ampliamos o conceito de ladrilhamento, pois, neste caso, é permitida a combinação de polígonos regulares diferentes, sendo assim, o número de relações algébricas que definem a possibilidade de pavimentação do plano é maior, conforme estudos de Dias e Sampaio (2010), portanto, a generalização, através das relações algébricas, para verificar a possibilidade de ladrilhamento torna-se imprescindível, demonstrando para o aluno a importância da álgebra.

Analisando os estudos de Afini e Souza(2013), de Ferreira, Soares e Lima (2009), de Murari (2011) e de Proença e Pirola (2009), verificamos que todos destacam a importância do resgate e da ampliação do ensino da Geometria na Educação Básica, e apontam que o compromisso do professor é essencial neste resgate, além da sua capacitação para um ensino de qualidade, os autores defendem também que a metodologia de ensino deve ser mais atraente, e que os conceitos geométricos devem ser trabalhados de forma contextualizada, com isso Afini e Souza, (2013), Murari,(2011) e Proença e Pirola (2009), sugerem a utilização de materiais manipuláveis.

Entendemos que o ladrilhamento do plano se encaixa bem neste contexto, pois tem forte ligação com a Geometria e pode ser trabalhado com materiais manipuláveis, porém nosso pensamento com a Atividade 3: Completando Quadrados com Ladrilhamento, a Atividade 4: O Quadrado da Soma de Dois Termos através do Ladrilhamento e a Atividade 5: O Ladrilhamento e o Teorema de Pitágoras, foi de abordar a geometria como estratégia de ensino de conceitos algébricos, pois conforme Aquino e Pereira, (2011, p. 2), "ideias relacionadas à geometria podem ser facilitadoras para a compreensão de conceitos ligados à Álgebra e Aritmética ou vice-e-versa".

## 4.1 Atividade 1: Ladrilhamento com Polígonos Regulares

1) No início da atividade os alunos terão uma breve explanação sobre polígonos regulares, ângulos internos e sobre o plano, logo após serão formados grupos de no máximo cinco componentes.

2) Cada grupo irá receber um kit com cinco tipos de polígonos regulares e cinco folhas de papel ofício, de forma que em cada kit tenha pelo menos um tipo de polígono que possa ladrilhar o plano: triângulos, retângulos ou hexágonos.

3) Os alunos serão orientados a tentar recobrir a folha de papel ofício, de acordo com as regras:
a)Cada aluno de cada grupo deverá escolher um tipo de polígono disponível em cada kit.
b)Toda a folha de papel deve ser recoberta apenas com o tipo de polígono escolhido e não pode sobrar espaços entre eles.
c)A interseção entre dois polígonos deve ser sempre um lado ou um vértice.
d)Não pode haver sobreposição de polígonos.
e)É permitido que alguma parte do polígono ultrapasse os limites da folha de papel.

4) Terminado o item 3 cada grupo receberá uma tabela com os valores dos ângulos internos de todos o polígonos disponíveis no kit e os alunos responderão as seguintes perguntas:

a) Foi possível revestir (Ladrilhar) a folha de papel (Plano) com todos os polígonos disponíveis?

b) Com quais tipos de polígonos foi possível revestir a folha de papel?

c) Qual o valor dos ângulos internos desses polígonos?

d) Como poderemos relacionar o número de lados dos polígonos regulares com seus ângulos internos?

e) Calcule a soma dos ângulos em torno de cada vértice em que o ladrilhamento foi possível. Existe alguma relação entre esses valores?

f) Justifique porque alguns polígonos não podem ladrilhar o plano de forma regular.

g) Será que existe uma forma algébrica de verificar se um determinado polígono reveste o plano, de acordo com as regras estabelecidas? Justifique.

Ao final desta atividade o aluno deverá compreender os conceitos de polígonos regulares, ladrilhamento do plano, tipos de polígonos regulares que ladrilham o plano. Com a ajuda do professor os alunos devem concluir que existe uma relação algébrica entre o número de lados do polígono regular e seus ângulos internos: $\alpha_n = \dfrac{(n-2).180^o}{n}$, onde $\alpha_n$ é a medida do ângulo interno e n o número de lados do polígono.

Por fim, sabendo que a soma dos ângulos em torno de cada vértice do ladrilhamento é igual a 360º, ou seja, $\alpha_n + \alpha_n + ... + \alpha_n = 360^o \Rightarrow k.\alpha_n = 360^o$, $k \in N$, os alunos devem conjecturar a relação algébrica, $k = \dfrac{2n}{n-2}$, com n, $k \in N$, e n $\geqslant$ 3, onde k representa o número de polígonos em torno de cada vértice do ladrilhamento e n o número de lados do polígono, estabelecendo assim uma relação entre a possibilidade do ladrilhamento regular do plano e o número de lados do polígono utilizado.

## 4.2 Atividade 2: Ladrilhamento com Polígonos Semirregulares

1) No início da atividade os alunos terão uma breve explanação sobre Ladrilhamento Semirregular do Plano, sobre a quantidade máxima e mínima possível de polígonos em torno de cada vértice e após isso, serão formados grupos de no máximo cinco componentes.

2) Cada grupo irá receber um kit com vários tipos de polígonos regulares, uma tabela com os valores dos ângulos internos destes polígonos e cinco folhas de papel ofício.

3) Neste primeiro momento os alunos serão orientados a tentar recobrir a folha de papel ofício, de acordo com as regras:
a)Cada aluno de cada grupo deverá escolher pelo menos dois tipos de polígonos distintos para revestir a folha de papel, de forma que ao redor de cada vértice tenha no mínimo 3 e no máximo 6 polígonos.
b)Toda a folha de papel deve ser recoberta e não pode sobrar espaços entre os polígonos.
c)A interseção entre dois polígonos deve ser sempre um lado ou um vértice.
d)Não pode haver sobreposição de polígonos.
e)É permitido que alguma parte do polígono ultrapasse os limites da folha de papel.

4) Terminado o item 3 os alunos responderão as seguintes perguntas:

a) Foi possível revestir (Ladrilhar) a folha de papel (Plano) utilizando três polígonos ao redor do vértice de acordo com as regras estabelecidas? Se possível qual foi a combinação encontrada?

b) Foi possível revestir a folha de papel utilizando quatro polígonos ao redor do vértice de acordo com as regras estabelecidas? Se possível qual foi a combinação encontrada?

c) Foi possível revestir a folha de papel utilizando cinco polígonos ao redor do vértice de acordo com as regras estabelecidas? Se possível qual foi a combinação encontrada?

d) Foi possível revestir a folha de papel utilizando seis polígonos ao redor do vértice de acordo com as regras estabelecidas? Se possível qual foi a combinação encontrada?

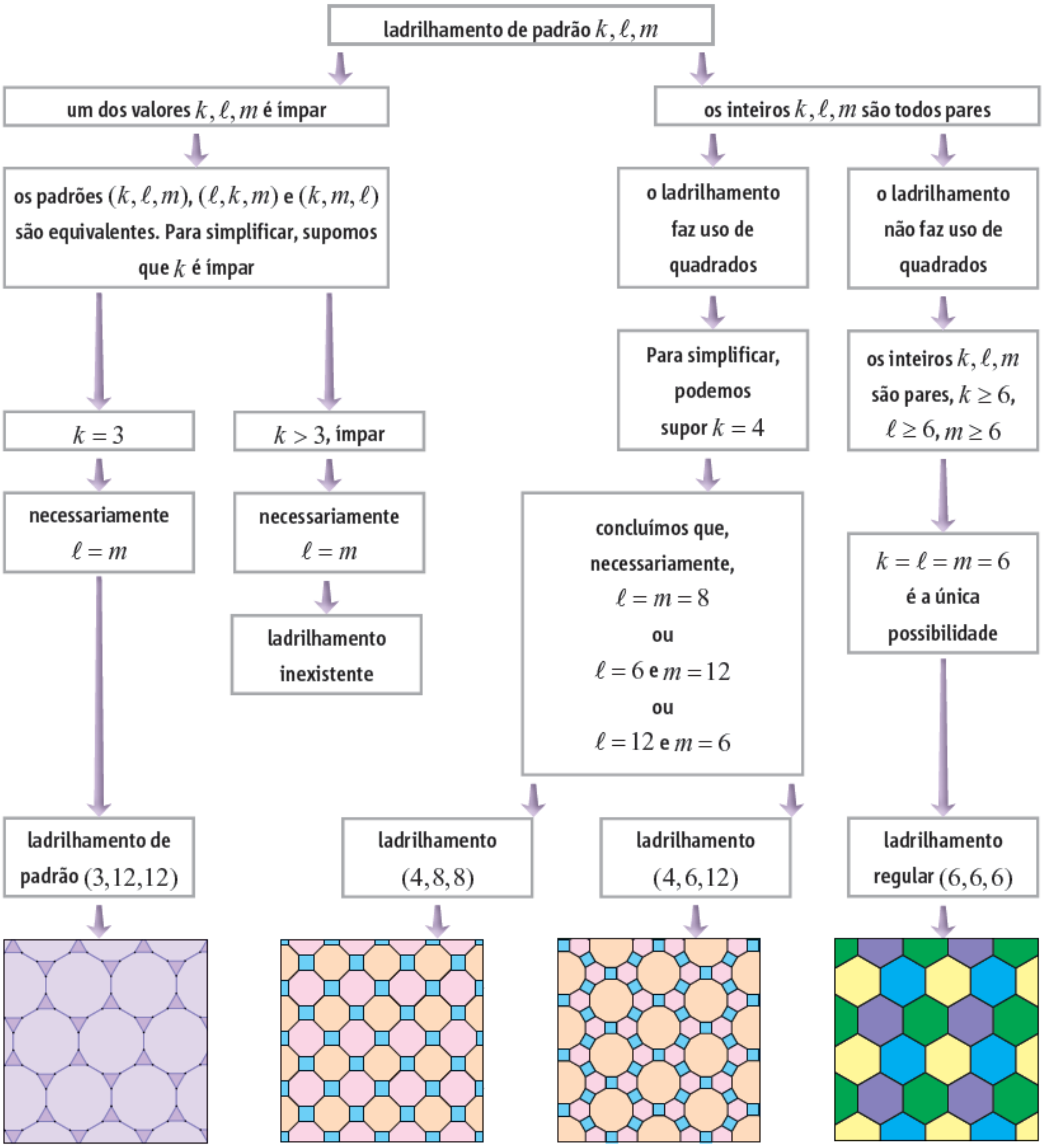
5) Em um segundo momento será aberta uma discussão entre os grupos abordando as seguintes questões:

a) As combinações encontradas representam todas as combinações possíveis?

b) Quais as variáveis que podemos relacionar em busca de uma generalização de combinações possíveis?

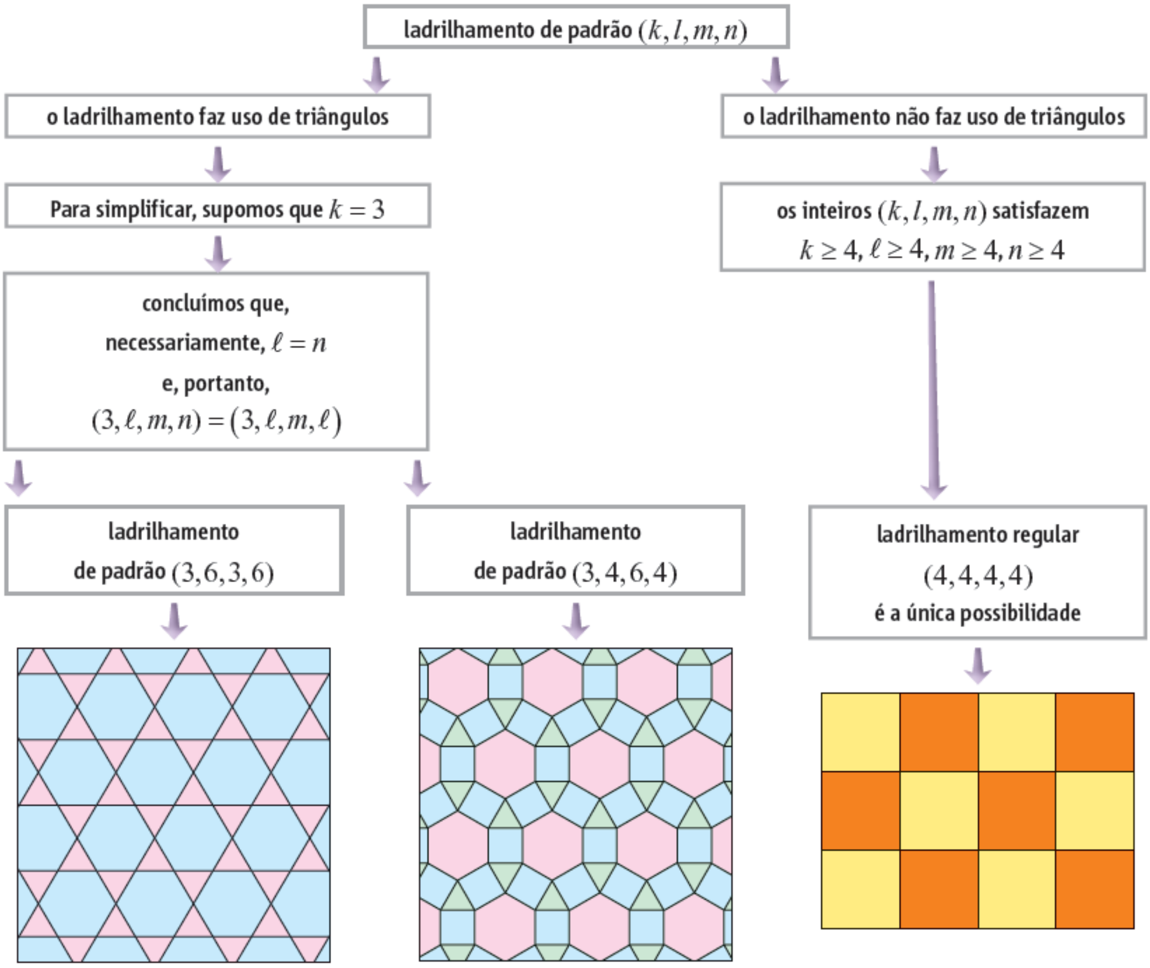
6)Após os questionamentos e as discussões entre os grupos serão apresentadas, passo a passo, as relações algébricas que definem todos os padrões semirregulares possíveis.

a) Para o padrão com três polígonos em torno do vértice temos:



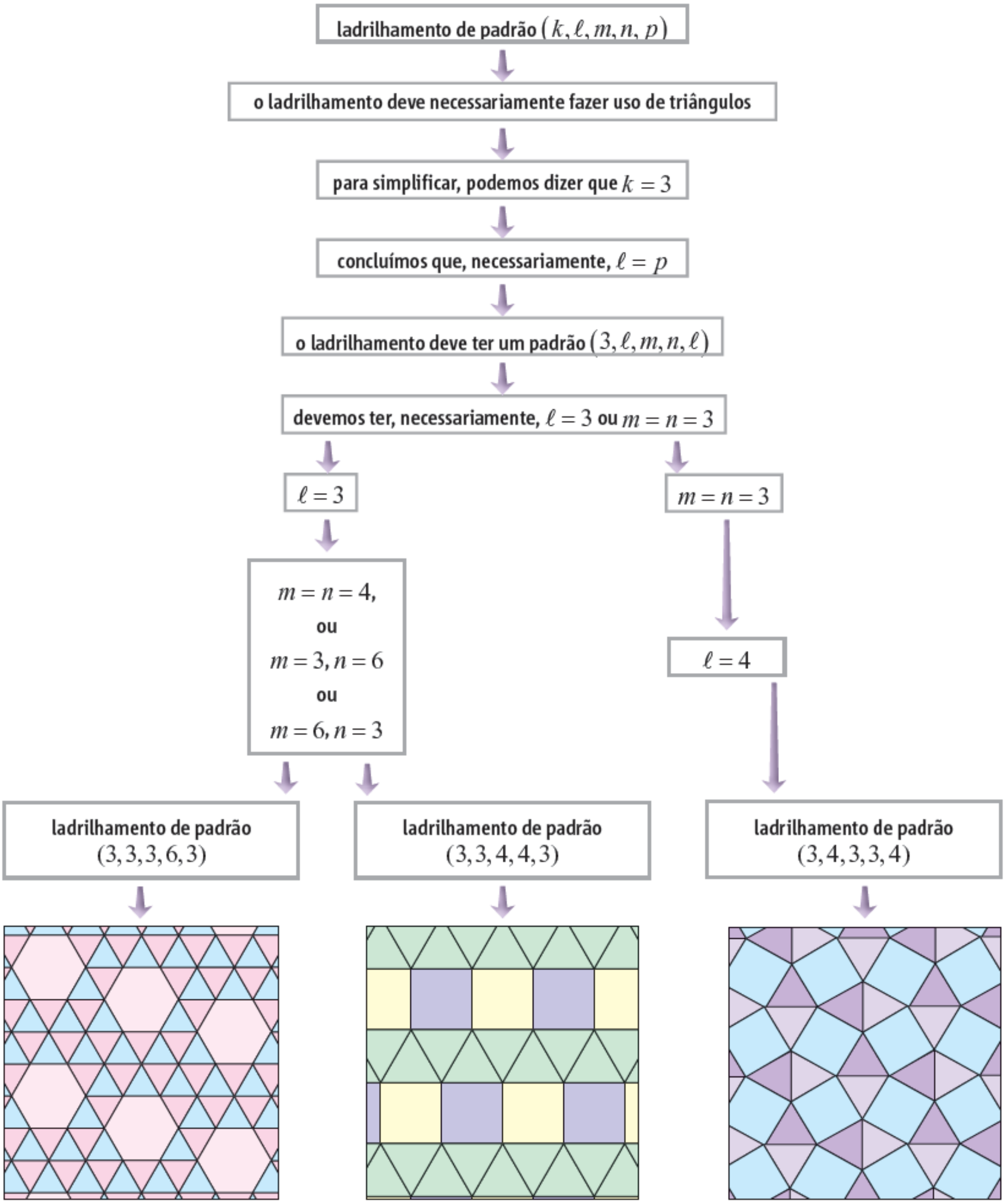

Fonte: Dias e Sampaio, 2010

b) Para o padrão com quatro polígonos em torno do vértice temos:




Fonte: Dias e Sampaio, 2010

c) Para o padrão com cinco polígonos em torno do vértice temos:




Fonte: Dias e Sampaio, 2010

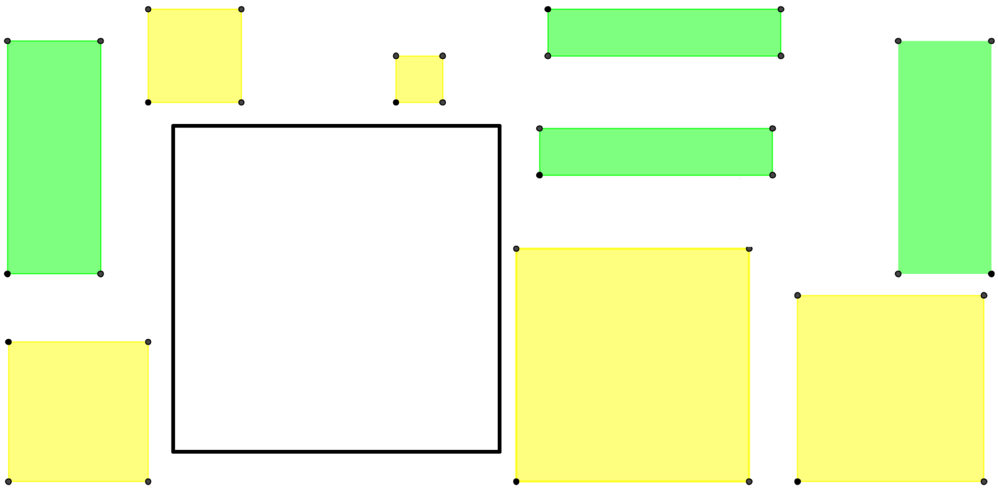
d) Para o padrão com seis polígonos em torno do vértice só existe a possibilidade de ladrilhamento regular.

Ao final desta atividade o aluno deverá compreender os conceitos relacionados ao ladrilhamento semirregular e a importância da Álgebra na generalização das combinações dos polígonos.

## 4.3 Atividade 3: O Quadrado da Soma de Dois Termos através do Ladrilhamento

1) No início da atividade os alunos terão uma breve explanação sobre Produtos Notáveis e sobre a sua funcionalidade, já que é uma ferramenta para facilitar os cálculos e reduzir o tempo na resolução de problemas. Em particular, daremos um maior destaque para o quadrado da soma de dois termos.

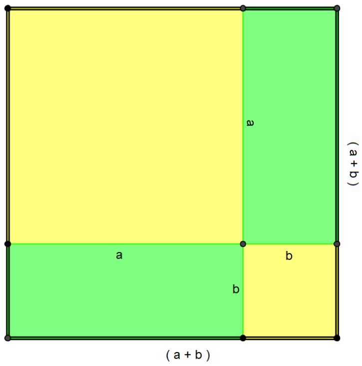
2) Os alunos receberão uma folha de ofício no formato de um quadrado e vários polígonos na forma de quadrados e retângulos, conforme ilustração abaixo.



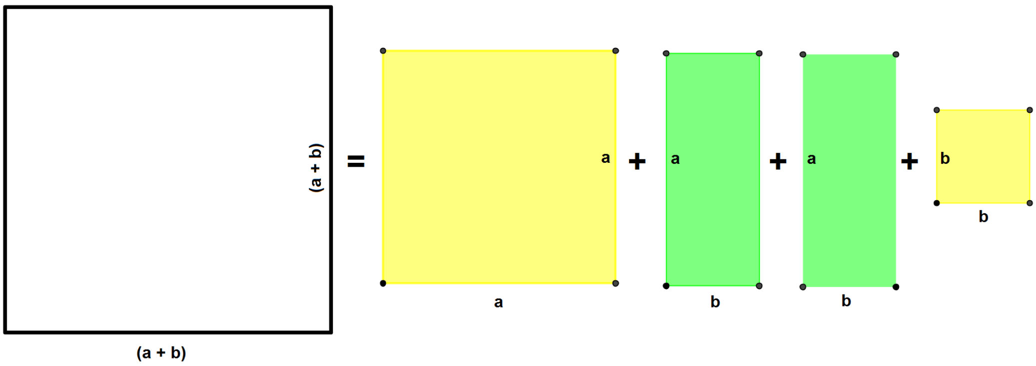
3) Os alunos serão orientados a revestir a folha de ofício, seguindo as regras:
a)Toda a folha de papel deve ser recoberta e não pode sobrar espaços entre os polígonos.
b)A interseção entre dois polígonos deve ser sempre um lado ou um vértice.
c)Não pode haver sobreposição de polígonos.
d)Não é permitido que alguma parte do polígono ultrapasse os limites da folha de papel.

4) Depois que os alunos conseguirem pavimentar a folha de ofício, com a única combinação possível, eles serão orientados a utilizar variáveis para representar os valores referentes aos

lados dos polígonos. De forma que cheguem a seguinte conclusão:




5) Os alunos serão orientados a buscar uma relação entre a área pavimentada da folha com as áreas dos polígonos utilizados na pavimentação




6) Por fim, os alunos farão uma comparação do resultado encontrado no item 5 com a relação algébrica do quadrado da soma de dois termos: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ao final desta atividade o aluno deverá entender a relação algébrica do quadrado da soma de dois termos através da geometria, utilizando os conceitos de área e ladrilhamento como elementos facilitadores do processo aprendizagem.

## 4.4 Atividade 4: Completando Quadrados com Ladrilhamento

Na atividade anterior os conceitos referentes ao quadrado perfeito e a sua representação algébrica, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, foram trabalhados através da geometria, com a ajuda do ladrilhamento, nesta atividade os alunos trabalharão com o método de completar quadrado, que representa uma maneira mais simples de resolver equações do segundo grau.

1) No início da aula os alunos serão relembrados da atividade anterior, da relação algébrica do quadrado perfeito, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, e que o método de completar quadrado, representado através do ladrilhamento do plano, facilitará a resolução de equações do segundo grau.

2) Nesta atividade os alunos resolverão apenas uma equação do segundo grau como exemplo.

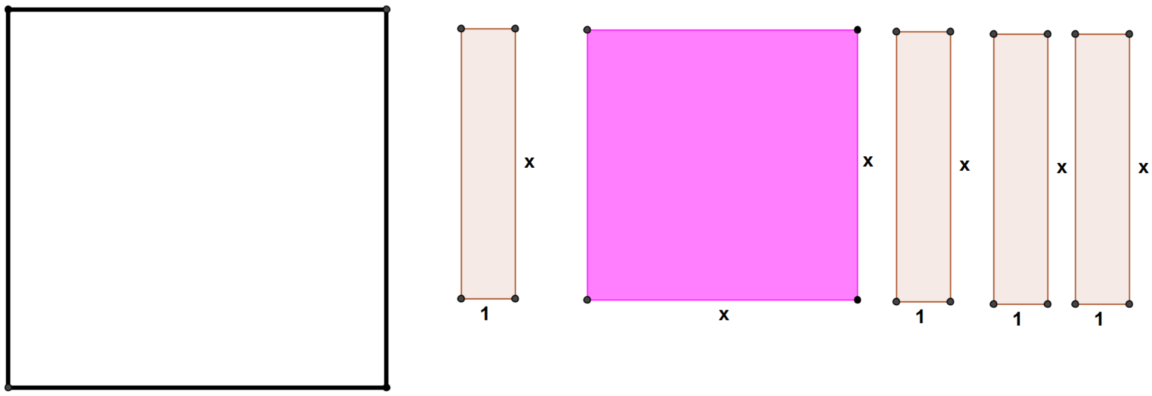
3) Resolva a equação $x^2 + 4x = 5$, de acordo com os passos a seguir:

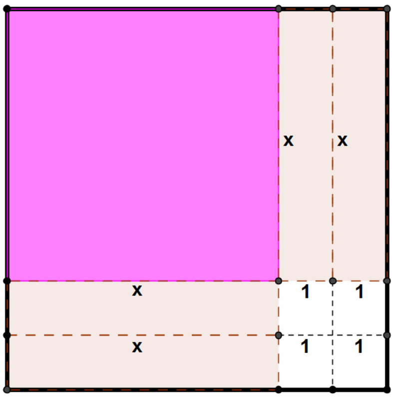
a) Verifique se $x^2 + 4x$ é um quadrado perfeito.

b) Ladrilhe o quadrado abaixo com os polígonos disponíveis, de modo que:
O quadrado todo deve ser recoberto e não pode sobrar espaços entre os polígonos.
A interseção entre dois polígonos deve ser sempre um lado ou um vértice.
Não pode haver sobreposição de polígonos.
Não é permitido que alguma parte do polígono ultrapasse os limites da folha de papel.
c) Foi possível ladrilhar o quadrado de acordo com as regras estabelecidas?

d) Observe que os polígonos disponíveis para ladrilhar o quadrado, no item b, representam geometricamente e expressão $x^2 + 4x$.

e) Veja a seguir uma maneira possível de incluir todos os polígonos disponíveis no quadrado.




f) Observe que para completar o ladrilhamento do quadrado está faltando justamente outro quadrado de lado 2.

g) O quadrado de lado 2 é a representação geométrica de $2^2$, com isso acrescentando $2^2$ a expressão $x^2 + 4x$, teremos o quadrado perfeito $x^2 + 4x + 2^2 = (x + 2)^2$ .

h) Assim, para resolver a equação $x^2 + 4x = 5$, de uma maneira mais simples, complete o quadrado perfeito no primeiro termo, acrescentando 4 aos dois termos da igualdade, $x^2 + 4x + 4 = 5 + 4 \Rightarrow (x + 2)^2 = 9$.

i) Resolva agora a equação $(x + 2)^2 = 9$.

## 4.5 Atividade 5: O Ladrilhamento e o Teorema de Pitágoras

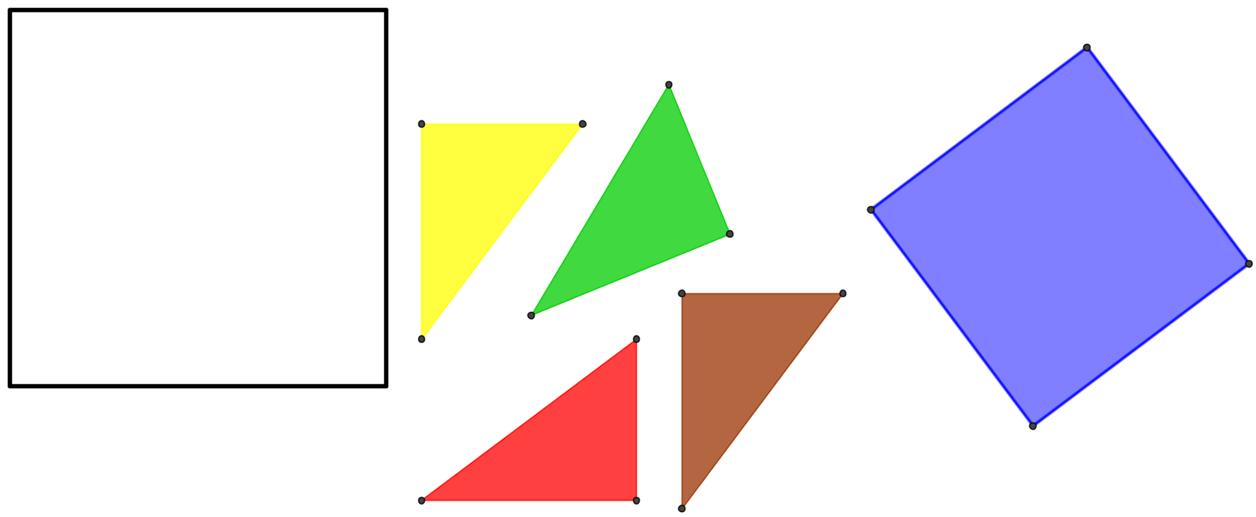
1) No início da atividade os alunos deverão ladrilhar o quadrado abaixo com os polígonos disponíveis, de modo que:

a) O quadrado todo deve ser recoberto e não pode sobrar espaços entre os polígonos.

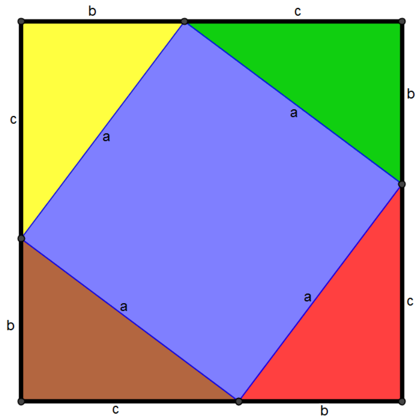
b) A interseção entre dois polígonos deve ser sempre um lado ou um vértice.

c) Não pode haver sobreposição de polígonos.

d) Não é permitido que alguma parte do polígono ultrapasse os limites da folha de papel.



2) Depois que os alunos conseguirem pavimentar o quadrado, com a única combinação possível, eles serão orientados a utilizar variáveis para representar os valores referentes aos lados dos polígonos. De forma que cheguem a seguinte conclusão:




3) Em seguida os alunos serão questionados a respeito dos polígonos utilizados para ladrilhar o plano:

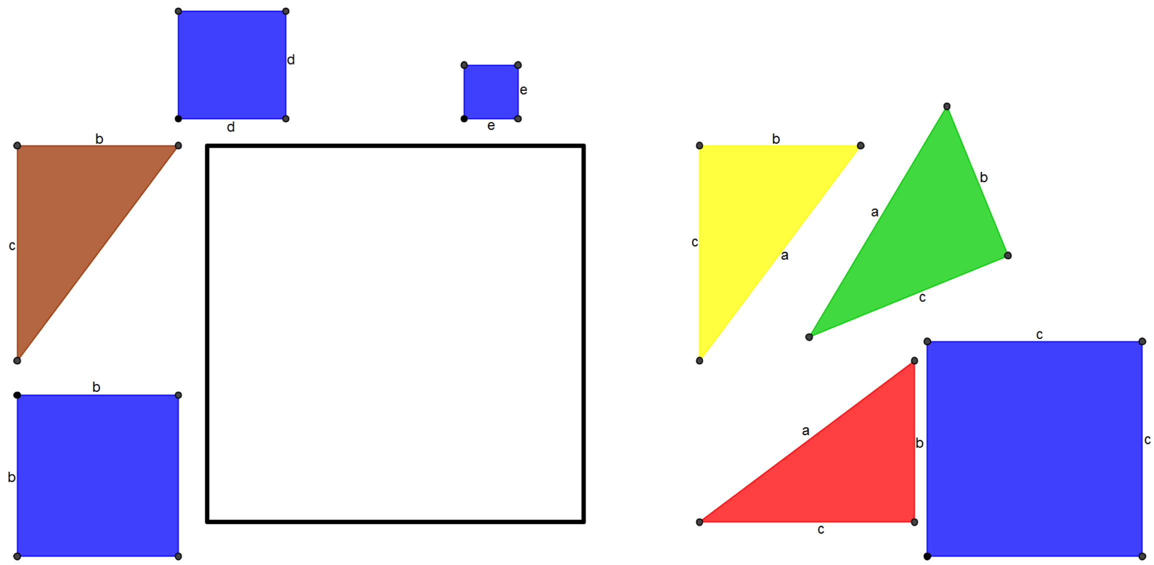
a) Quais os polígonos utilizados para ladrilhar o plano?

b) Classifique os triângulos quanto a seus ângulos internos?

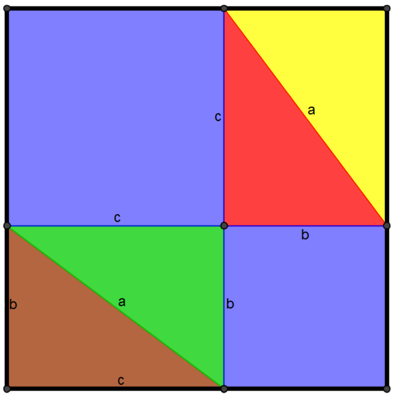
c) Compare os triângulos utilizados e verifique se são iguais.

d) Estabeleça uma relação entre os triângulos e o quadrado utilizado no ladrilhamento.

4) Os alunos serão orientados a ladrilhar novamente o quadrado de acordo com o item 1, mantendo apenas os triângulos, com os polígonos disponíveis abaixo:



5) Depois que os alunos conseguirem pavimentar o quadrado, com a única combinação possível, eles serão orientados a utilizar variáveis para representar os valores referentes aos lados dos polígonos. De forma que cheguem a seguinte conclusão:




6) Em seguida será aberta uma discussão entre os grupos abordando as seguintes questões:
a) Qual a relação existente entre os lados dos triângulos e os quadrados utilizados no ladrilhamento do item 5?
b) Qual a relação existente entre o quadrado utilizado no ladrilhamento do item 1 e os quadrados utilizados no ladrilhamento do item 5?
c) Estabeleça uma relação entre os lados dos triângulos e dos quadrados utilizados no ladrilhamento no item 1 e no item 5.

7) Por fim, os alunos serão orientados a concluir que o quadrado de tamanho referente ao lado "a"é igual a soma dos quadrados de tamanhos referente ao lado "b"e ao lado "c"dos triângulos. O que chamamos de Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

# CAPÍTULO 5

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final deste trabalho foi possível identificar que existe a possibilidade de relacionar conceitos geométricos com conceitos algébricos. Através do ladrilhamento do plano podemos abordar conteúdos algébricos, tais como: expressões algébricas, equação do 1º grau, resolução de equações do 2º grau e o teorema de Pitágoras.

Percebemos, durante nossa pesquisa, que os autores defendem uma maior abordagem da Geometria no Ensino Médio e, comungando desse mesmo pensamento, produzimos uma proposta de atividade educacional que visa trabalhar os conceitos algébricos de uma maneira mais significativa, utilizando a geometria através do ladrilhamento do plano, com isso atingimos o objetivo deste estudo que foi o de apresentar uma proposta de atividade educacional voltada para alunos do Ensino Médio relacionando a geometria com os conteúdos algébricos que fazem parte da grade curricular do Ensino Médio tendo como eixo norteador o Ladrilhamento no Plano.

O ladrilhamento do plano, possibilita também a inserção de materiais manipuláveis nas aulas de matemática, acreditamos que esses materiais permitem que conceitos abstratos possam ser trabalhados de forma mais significativa e agradável para os alunos, contribuindo para que a aprendizagem, dessa disciplina tão temida, seja mais eficaz.

A proposta de atividades foi subdividida em cinco atividades: Atividade 1 - Ladrilhamento com Polígonos Regulares, Atividade 2 - Ladrilhamento com Polígonos Semirregulares, Atividade 3 - Completando Quadrados com Ladrilhamento, Atividade 4 - O Quadrado da Soma de Dois Termos através do Ladrilhamento e a Atividade 5 - O Ladrilhamento e o Teorema de Pitágoras.

Temos consciência que essas propostas precisam ser aplicadas para comprovar sua eficiência, mas acreditamos que elas são eficazes, pois essas atividades fogem do padrão tradicional, tão comum nas aulas de matemática, e além disso, o ladrilhamento pode ser trabalhado conjuntamente com outras disciplinas, como nas Artes Visuais através dos mosaicos artísticos, na Biologia com a diferenciação do agrupamento das células , na Geografia com a cartografia e na História através da evolução dos registros artísticos do Homem.

Sendo assim, esperamos que estas propostas possam contribuir para o ensino tanto da Geometria quanto da Álgebra, contudo é importante a continuação deste estudo, no que diz respeito à aplicação destas atividades em sala de aula, para que elas possam ser aprimoradas a partir dos resultados obtidos, e devolvidas para a comunidade escolar sob forma de um artigo.

Por fim, existem outros tipos de pavimentação do plano que podem ser explorados como estratégia de ensino na construção de uma metodologia diferenciada para ensino da Matemática, e ficam como sugestão para futuros estudos, tais como a pavimentação através de Poliminós, que é o ladrilhamento construído com quadrados congruentes combinados pelo menos por um lado, e a Quadratura do Quadrado, que é o ladrilhamento de um quadrado usando ladrilhos quadrados todos de tamanhos diferentes.

# BIBLIOGRAFIA

[1] AFINI, Dais Capucho; SOUZA, José Carlos Júnior. Mosaicos, pavimentações do plano e o ensino da geometria. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba, 2013.

[2] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. $11^{a}$ ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[3] BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo padrões em mosaicos**. $4^{a}$ed. São Paulo: Atual, 1993.

[4] BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola; GARNICA, Antônio Vicente Marafioti; SILVA, Franklin Leopoldo e. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

[6] DIAS, Cláudio Carlos; SAMPAIO, João Carlos Vieira. **Desafio geométrico: módulo I**. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2010.

[7] FERREIRA, Emília Barra; SOARES, Adriana Benevides; LIMA, Josefino Cabral. As Demonstrações no Ensino da Geometria: discussões sobre a formação de professores

através do uso de novas tecnologias. **Bolema**. Rio Claro (SP). Ano 22, nº 34, 186 2009, p. 185 a 208.

[8] GIL, Antônio C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ªed. São Paulo: Atlas, 2008.

[9] JESUS, Adelmo Ribeiro. **Geometria plana - curso de licenciatura em matemática**. Salvador: UNEB/EAD, 2009.

[10] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[11] MURARI, Claudemir. Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. **Bolema**. Rio Claro (SP). v. 25, n. 41, p. 187-211, dez. 2011.

[12] NAGAMINE, Camila Macedo Lima; ANDRADE, Ueslei Hiure da Silva; NEVES, Andrade Liliane Xavier. A compreensão de conceitos geométricos utilizando o ladrilhamento. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba, 2013.

[13] PEREIRA, Pedro Carlos; AQUINO, Renato Machado. Isometrias no plano e mosaico: a matemática na arte. **XIII CIAEM - XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife. 2011.

[14] PROENÇA, Marcelo Carlos de; PIROLA, Nelson Antônio. Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio na identificação de atributos definidores de polígono. **ZETETIKÉ**. Cempem. FE. Unicamp. v. 17, n. 31. jan/jun – 2009.

[15] SANTOS, Marli Regina dos. **Pavimentações do plano: um estudo com professores de matemática e arte**. 2006. 177 p. Dissertação (Mestrado Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro (SP), 2006.