Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Sociedade Brasileira de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Grafos como Ferramenta para o Ensino de Matemática.

problemas, definições, matrizes, divisores, voos e afins.

abordagem para os ensinos fundamental e médio.

Tiago Miranda de Magalhães

Salvador - Bahia
Abril de 2014

Grafos como Ferramenta para o Ensino de Matemática.

problemas, definições, matrizes, divisores, voos e afins.

abordagem para os ensinos fundamental e médio.

Tiago Miranda de Magalhães

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos

Salvador - Bahia

Abril de 2014

Grafos como Ferramenta para o Ensino de Matemática.

problemas, definições, matrizes, divisores, voos e afins.

abordagem para os ensinos fundamental e médio.

Tiago Miranda de Magalhães

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos (Orientador)
Departamento de Matemática
UFBA

Carlos Eduardo N. Bahiano
Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano
Departamento de Matemática
UFBA

José Fernandes Andrade
Prof. Dr. José Fernandes Silva Andrade
Departamento de Matemática
UFBA

FICHA CATALOGRÁFICA

Magalhães, Tiago Miranda de

Grafos como Ferramenta de Ensino de Matemática

Tiago Miranda de Magalhães – Salvador / Bahia, 2014.

100 f. : il.

Orientador: Evandro Carlos Ferreira dos Santos

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT.

1. Grafos. 2. Matrizes. 3. Matriz de Adjacência.

I. Título. II. Universidade Federal da Bahia.

CDU: 51

"O saber a gente aprende com os mestres e os livros.

A sabedoria, se aprende é com a vida e com os humildes."

Cora Coralina

dedico à minha amada esposa pela coragem e
confiança de enfrentar a longa jornada da vida ao meu lado,
que sem conter esforços: me ilumina, me guia e me segue em cada passo,
cada gesto, cada pensamento, cada atitude, todas as conquistas, faço-as dela;
à minha filha, dona da sabedoria de empregar o tempo para as coisas que importam,
pela felicidade linda, pela intensidade rara e pela suavidade singela
com as quais veio ao mundo e que contagia a todos à sua volta;
à minha mãe, guerreira do mundo contemporâneo,
que rege ao seu modo a alegria de sempre querer bem ao próximo;
ao meu pai, herói paciente,
pessoa de maior coração, não há;
ao meu irmão, sensibilidade, atenção, inteligência e fortaleza sem igual;
à minha irmã, símbolo de tudo de bom que o mundo pode ser;
à minha cunhada e meu sobrinho, pela beleza de viver a vida;
aos tios, tias, primos, primas, amigos,
colegas, professores e mestres, obrigado!
à minha sogra, pela colaboração inestimável;
ao meu orientador, pela implicação e condução no trabalho;
ao vô Zé e à vó Regi, exemplos da ancestralidade,
agradeço cada experiência passada em todos os fios dos cabelos brancos
(ou na falta deles);
à vó Noélia, por se possibilitar seguir em frente e
expor ao mundo que há força e vitalidade de sobra nesse sorriso vivo e cheio de luz,
à sua maneira distribui as lições e agora, ao meu modo, digo que sigo aprendendo;
à José Roque Coutinho de Miranda (*in memoriam*),
por tudo,
o qual demonstrou que a saudade só faz aumentar durante a passagem do tempo e
que eu gostaria de dividir previamente a leitura de cada uma dessas palavras.
À todos e todas, com humildade, espero sempre puder me dedicar!

AGRADECIMENTOS

Basta conectar quaisquer dois ou mais vértices para compor arestas de imensa gratidão...

Deus•	Luciana•	Gabriela•	Markito•	Noélia•	Zé Roque•	Tereza•
Família•	Luíza•	Nádia•	Cybele•	Zequinha•	Regina•	Hugo•
Força•	Márcia•	Jorge•	Davi•	Chinho•	Armando•	Flávia•
Confiança•	Adherbal•	Lantyer•	Marcos•	Cacau•	Amanda•	Gustavo•
UFBA•	Ronei•	Paulo•	Soraia•	Rafael•	Beatriz•	Diego•
PROFMAT•	Cléber•	Rafael•	Márcia•	Malu•	Felipe•	Israel•
SBM•	Bruno•	Paula•	Renatinho•	Mércia•	Daniel•	Jônatas•
Evandro•	Adriano•	Mário•	Patrícia•	Renato•	George•	Rodrigo•
Rita•	Marco•	Tatiana•	Leandro•	Perfilino•	Adroaldo•	Uálace•
Zé Nelson•	Maltez•	Valdencastro•	Leo•	Vinícius•	Jonas•	Fé•
Cristiana•	Glória•	Ana•	Joseph•	St Amaro•	Osmar•	Deus•

RESUMO

Nesta dissertação serão apresentadas considerações sobre o trabalho com resolução de problemas e a importância do desenvolvimento de habilidades para tal, corroborando com esse fato será construída a noção ingênua de grafos e matrizes com a culminância nas operações de matrizes (soma, produto por escalar e produto entre matrizes). Será estabelecida uma relação entre grafos e matrizes, as matrizes de adjacência e por fim um sequência de atividades a serem desenvolvidas em sala para a consolidação da proposta.

Palavras – Chave: Grafos, Matrizes, Matrizes de Adjacência.

ABSTRACT

In this dissertation will be presented considerations on working with problem solving and the importance of developing skills for that, to confirm this fact will be built the naive notion of graphs and matrices with the culmination of the matrices basic operations (sum, product and product between matrices), a relationship between graphs and matrices, the adjacency matrices, and finally a sequence of activities to be developed in class to consolidate the proposal.

Keywords: Graphs, Matrix, Adjacency Matrix.

CONTEÚDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

PREÂMBULO

Em momentos históricos distintos, diferentes sociedades evoluíram com o conhecimento matemático de forma a obter os resultados necessários ao seu crescimento. Compreender e atuar no mundo ante aos múltiplos contextos para melhor interferir na realidade é o grande desafio. E partindo da proposta apresentada pelo MEC, que pretende desenvolver um currículo baseado nas competências (capacidades do sujeito para mobilizar recursos visando abordar e resolver uma situação complexa) e nos cinco eixos cognitivos (dominar linguagens, compreender fenômenos, enfrentar situações-problemas, construir argumentação e elaborar propostas) e não no acúmulo de informações é que se constroi a nova forma de ensino/aprendizagem da matemática.

Sendo assim, faz-se necessário um currículo vinculado ao cotidiano, que dê significado ao conhecimento escolar mediante a contextualização, a interdisciplinaridade, evitando a compartimentalização e a pretextualização, e incentivando o raciocínio, a capacidade de aprender e principalmente a criatividade. Nesse contexto deve-se procurar sintetizar o que há de melhor em cada fundamentação teórico-metodológica, por exemplo, se por um lado alguns aspectos da memorização (tão úteis no dia a dia e para a própria matemática ou física/química/biologia) deverão ser utilizadas na medida certa, por outro lado os aspectos peculiares do ensino renovador (contextualizado, lógico, fundamental na solução de problemas científico-tecnológicos) merecem e devem ter destaque especial durante todo momento.

Pede-se, então, firmeza na crença de que a matemática pode e deve ser aprendida com sucesso e prazer. Para tanto, cuidados são necessários na escolha e na organização sequencial dos conteúdos: a gradualidade (que leva os conteúdos dos mais simples aos mais complexos), a logicidade (que propicia a articulação entre os conteúdos), a integração (que cria o interrelacionamento entre a matemática e as demais disciplinas, bem como o dia-a-dia do aluno) e a tecnicidade (que desenvolve a matemática em si mesma). Sendo assim, fica a intenção primordial de educar para a resolução de problemas. Despertando a criatividade para abordagens não-triviais da realidade que cerca a criança / o jovem / o adolescente. Fundando o currículo nos elementos pertinentes ao desenvolvimento do ser social atento para a transformação social.

CONCEPÇÕES

Resolver problemas faz parte da atividade de todos, porém os problemas científicos são nitidamente diferentes dos problemas enfrentados pelo cidadão comum. Uma das razões para esta diferença está fato de que as formas de raciocínio (heurísticas) necessárias para a solução destes diferem muito daquelas comumente evocadas para a solução daqueles. Em outras palavras, o raciocínio científico difere substancialmente do raciocínio de "senso comum". É preciso ser objetivo quanto a essa diferença, os problemas cotidianos terminam onde começa o problema científico.

Destaque para o papel dos modelos (construções ideais para situações imperfeitas) de representação da realidade para o conhecimento científico. Não se trata apenas de conhecer a realidade – o funcionamento das coisas – mas de conhecer o grau de precisão dos modelos dimensionados para interpretá-la ou representá-la – fundamentação das coisas – com devida projeção dos erros e implicação desses no processo de construção do saber.

De modo geral, a *ciência pura* não resolve problemas reais, mas teóricos. Não questiona a realidade, mas seus próprios modelos. Nisso, o conhecimento científico difere consideravelmente do conhecimento pessoal ou cotidiano dos estudantes. O uso de estratégias mais sofisticadas para a solução de problemas exigiria a superação das formas simples ou intuitivas de raciocínio e uma batalha para a transposição do lugar comum.

Afinal, o discurso e a racionalidade na qual se inserem as pesquisas e a tecnologia são aversos à intuição imediata e à intransitividade do "senso comum". É nesse cenário plural que a matemática se insere: Como linguagem universal e estruturante na construção do pensamento científico/tecnológico. Sem ela seria improvável a observação das engrenagens harmônicas da realidade. O despertar do homem para o admirável mundo que o cercava se deu concomitantemente com a fundamentação das estruturas da lógicas presentes na natureza. De modo idempotente, perde-se o uso de uma mera “ferramenta” e ganha-se um conjunto de explicações compatíveis com o nosso universo e diversos outros, os mundos concreto e abstrato.

E assim não basta ensinar/saber matemática, é preciso desenvolver uma forma de pensar matematicamente, analisando os recursos postos na situação, os necessários, os sobressalentes e que aqueles que ancoram toda a situação. E assim, desenvolver uma visão empreendedora no/a estudante. Mesmo que, antes disse, faça-se indispensável o desenvolvimento instrumental de técnicas matemáticas para resolver problemas puros (algoritmos, regras, lemas, teoremas, corolários, ...).

INTRODUÇÃO

Durante as últimas duas décadas foi presenciada a mudança do ensino com o intuito de compreender a evolução da humanidade em prol do bem comum e do avanço da ciência para o ensino meramente informativo e acessório com o objetivo da construção de um arcabouço básico para o cumprimento do vestibular. Esta dissertação visa exatamente abordar diversos conteúdos do ensino médio utilizando estratégias diversificadas, em especial: grafos e matrizes, de modo a desenvolver habilidades fundamentais para o posicionamento científico racional frente a situações reais e o refinamento da intuição direcionada à problemas interessantes de matemática, que com o debate adequado pode ser correspondida com dilemas práticos em quaisquer áreas do conhecimento. O primeiro elemento base para o desenvolvimento do trabalho está nos PCNs [20]

> "Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico."

O que está proposto não consta nos livros-textos adotados (nem nos escritos), exatamente pelo foco atual do ensino geral matemática (e das demais áreas) no vestibular (agora ENEM). Haverá o uso de atividades em combinatória, conjuntos, potenciação, grafos, matrizes e outros elementos da matemática em geral de modo a decompor a tese. Em todo o texto dessa dissertação será desenvolvida a linguagem com problemas de plano de fundo com o intuito de possibilitar uma forma de trabalho (sequência didática) no ensino básico, pois, como ensina POLYA [25]

> " (...) resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado; (...) é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão; (...) é a realização específica da inteligência, e a inteligência é o dom específico do homem . Se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta. Entretanto, a inteligência é essencialmente a habilidade para resolver problemas: problemas do cotidiano, problemas pessoais, problemas sociais, problemas científicos, quebra-cabeças e toda sorte de problemas. O aluno desenvolve sua inteligência usando-a; ele aprende a resolver problemas resolvendo-os (...)"

Durante todo o texto serão propostos problemas que auxiliam nas definições de cada tópico, e também por problemas correlatos que permitam a garantia da compreensão completa, relações intradisciplinares e/ou extrapolações necessárias. Para iniciar destaca-se também fragmento do documento ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO [19]

> "No ensino médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. (...). Um exemplo clássico é problema da pontes de Konisberg, tratado por Euler... Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo (...) situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução... (...) outros exemplos de problemas (...) podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo de uma cidade"

No qual já aparece o termo grafo de modo objetivo e situações práticas para a aplicação desse ente matemático. No fragmento foi exposto o mote combinatória, contudo sem ampliar para os elementos algébricos e geométricos, o que será feito durante essa dissertação para compor a capilaridade deste tema. Segue abaixo resumo do que será abordado em cada um dos próximos capítulos.

No capítulo 1 uma breve explanação acerca do método e da metodologia nos quais essa dissertação pretendeu seguir.

No capítulo 2 será abordada a noção ingênua de grafos com diversos problemas que culminarão na definição formal.

No capítulo 3 apresentação sintética da teoria de matrizes.

No capítulo 4 uma relação entre matrizes e grafos, matriz de adjacência.

No capítulo 5 será apresentada uma sequência didática lúdica para definir matrizes, grafos, matrizes de adjacência e o produto de matrizes com abordagem à uma atividade da UNICAMP.

No capítulo 6 serão feitos mais problemas com abordagem geral de grafos e matrizes.

No capítulo 7 serão feitas às considerações finais.

No capítulo 8 ficaram às atividades que podem ser desenvolvidas em sala.

Por fim, **referência bibliográfica** consultada e **apêndices**.

CAPÍTULO 1

MÉTODO E METODOLOGIA

Os passos a serem dados para essa guinada na forma com a qual as/os jovens aprendem a pensar é “forçá-los” a aprendar a observar. A observação é a melhor das técnicas científicas. É olhando o que está ao redor que se percebe quais os padrões (numéricos, comportamentais, políticos, ...) que ocorrem no mundo. É preciso análisar (em silêncio) primeiro para opinar (muito) depois, respeitando o rigor nos dados corretamente contabilizados, e também a mensuração dos resultados e da atenção aos achismos e opiniões. O segundo momento é o desenvolvimento da disciplina. Não da matemática (ou de qualquer outra), mas da paciência para a comparação de resultados, da revisão dos cálculos, do respeitos às opiniões contrárias e, quando necessário (e quase sempre o é), da volta ao estágio inicial.

O/A estudante precisa desenvolver esses elementos antes de sair da escola, não por ser uma regra acadêmica, mas por se tratar de olhar fora da caixa, i.é. perceber/sentir que ele/ela necessita muito mais de ferramentas e habilidades do que tão somente da compreensão da Matemática. Isto posto, conclui-se: Esse processo é a prática da criação de saberes além do saber disciplinar. Na sequência, é preciso escrever... registrar todas as descobertas, mesmo que singelas do que foi vivenciado. A escrita revela um senso de revisão e aprofundamento dos conceitos envolvidos nas ações realizadas e ter a clareza de como articular num texto noções e conceitos dessa área.

A produção textual permite ao professor um panorama sobre a aprendizagem do grupo e a percepção de como os alunos expressam suas idéias e quais dificuldades eles apresentam no momento do trabalho. A todo momento vivemos situações onde apenas a resolução do problema nos interessa, contudo nem sempre temos a postura de parar de discutir a tentar observar A QUESTÃO sobre um outro ângulo. É isso que está sendo proposto aqui.

A busca por ideias novas, o elixir da criação... com o intuito de seguir em frente, aprimorando os sentidos na expectativa de um pensamento ao mesmo tempo coletivo e independente. A resolução de problemas consiste na forma de ser da matemática e seu próprio caminho para o desenvolvimento. Assim, um problema desenvolve ideias ao ser resolvido, apropriando-se de conhecimentos prévios e da percepção de novos rumos a serem experimentados.

POLYA [25] organizou as etapas do procedimento de resolução e dividindo-as em quatro, a saber: compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, execução de estratégia e revisão da solução. Nessa última nos apegaremos a cada passo dessa longa jornada.

CAPÍTULO 2

GRAFOS, UMA INTRODUÇÃO INGÊNUA.

Uma empresa, com o intuito de economizar, possui apenas um funcionário de limpeza, que a cada turno trabalha em um andar (único) do prédio. A figura 1 representa a planta de cada um dos andares do prédio, os vértices são baias de trabalho e os segmentos são corredores, a parte central são salas de arquivos e outros usos que não têm constante trânsito de pessoas.

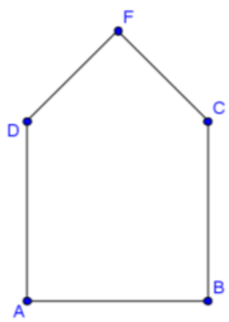


Figura 1: 5 baias

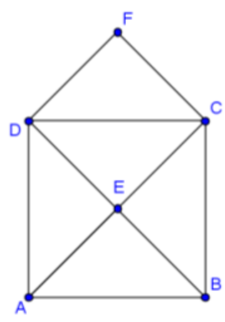


Figura 2: 6 baias

Existem dois objetivos numa situação de economia: dinheiro e tempo. O orçamento encurtado da empresa causou a necessidade da otimização do tempo do funcionário da limpeza. Sendo assim, ele precisa ajustar a limpeza com qualidade e andar o menor trajeto possível para subir ao próximo andar, repetindo o procedimento até o último pavimento. Uma possibilidade de menor tempo é que ele vá ponto a ponto sem passar pelo mesmo segmento duas vezes.

Um caminho possível será:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{C} \to \mathbf{F} \to \mathbf{D} \to \mathbf{A}\ .$$

Situação Sanada.

Depois de um período a quantidade de funcionários aumentou e foi necessário surgir a baia E, conforme figura 2. Sendo assim, um caminho possível será:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{D} \to \mathbf{F} \to \mathbf{C} \to \mathbf{E} \to \mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{C} \to \mathbf{D} \to \mathbf{E} \to \mathbf{B}.$$

Situação Sanada.

A rota curta não indica apenas economia, é possível que o carrinho com os produtos de limpeza não possa passar no corredor após a realização do serviço, logo, uma rota curta implica na limpeza apropriada. As situações expostas contaram com repetição de baias (vértices). A pergunta agora é: e se os vértices não puderem ser repetidos? A matemática ensina que essa parte do problema é basicamente mais difícil de ser respondida. A resposta geral para o primeiro problema será exposta no transcorrer do texto (Conceito: Caminho Eureliano[1]) a resposta para a nova pergunta, como ensina o professor Paulo Cezar de CARVALHO [4] não possui solução trivial e possivelmente não chegaremos a um teorema básico para compor todas as condições satisfatórias do problema (Conceito: Caminho Hamiltoniano[2]).

O professor Samuel JURKIEWICZ [15] motiva de modo interessante o mesmo problema, pensando numa cidade pequena e no caminhão de recolhimento do lixo. No caso, rotas otimizadas evitam o desperdício de recursos públicos. Outro tópico do texto de [15] cita uma das diversões mais frequentes da infância: Você tem que levar água, luz e esgoto para 3 casas de uma cidade, sem alterar o plano no qual os encanamentos serão postos. As fornecedoras de água (A), luz (L) e esgoto (E) permitem que os canos distribuidores sejam flexíveis, a única restrição é quanto ao cruzamento dos canos e/ou à invadisão da região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. Recortando

[1]Em homenagem a Leonard Euler (1707-1783), que uso o argumento dos grafos para resolver um problema interessante citado no anexo A – Pontes de Königsberg, na página 97.

[2]Em homenagem ao matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), que estudou este problema no grafo determinado pelas arestas de um dodecaedro regular.

o texto original: "Encontrar esquemas de ligação que evitem cruzamentos é crucial para baratear os custos de manufatura; quanto menos camadas, mais rápido e rentável se torna o serviço (...)", porém a situação acima não tem solução possível (demonstração na página 99). Voltando à exercícios com solução viável, observa-se um probleminha simples de olimpíada com raciocínio semelhante de caminhos e setas de vínculo.

Problema 1 (Olimpíada Brasileira de Matemática:OBM – 1988)

Encontre uma maneira de se escrever os algarismos de 1 a 9 em sequência (sem repeti-los), de forma que os números determinados por quaisquer dois algarismos consecutivos sejam divisíveis por 7 ou por 13.

[Solução]

O primeiro passo é listar os números de dois dígitos que são múltiplos de:

a) 7: 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98;

b) 13: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91.

Para continuar o problema observe a regra da não repetição de algarismos, logo o 77 sai da lista, e mais, na nova listagem não há números terminados em 7. Daí, devemos iniciar com o 7 (usaremos a linguagem de diagramas e o símbolo ⊗ indica um caminho sem continuação conforme as regras).

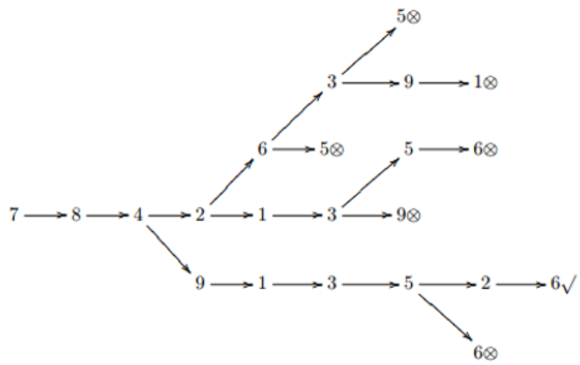


Figura 3: Diagrama de Possibilidades

Assim, observando a figura 3, chega-se a: 784913526.

■

Fica claro que com o crescimento do número de possibilidades faz-se necessário o uso de computadores para completar os problemas mais sofisticados. Sendo assim, em sala de aula é importante ponderar a complexidade das situações-problema. Visto que, além da energia dispensada para resolver cada item, existe uma heterogeneidade salutar no ambiente escolar que exige mais tempo didático para a resolução desse tipo de exercício. Portanto, problemas mais diretos têm retorno mais amplo nos diversos níveis de ensino. Para a melhor compreensão e garantia da aquisição da habilidade em mote, faz-se necessária a repetição do raciocínio em mais exercicios.

Segue mais um problema que ataca a mesma linha de raciocínio.

Problema 2 (OBM 2003 – nível 1 – fase 3)

Considere as sequências de inteiros positivos tais que cada termo mais a soma dos seus algarismos é igual ao termo seguinte. Por exemplo: 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39 é uma seqüência nessas condições. Escreva a maior seqüência cujo último termo é 103 e que satisfaz tais condições.

Observação: maior sequência é aquela com o maior número de termos.

[Solução][3]

Para a sequência terminar em 103, devemos começar pelo fim. Utilizando o diagrama da árvore, teremos:

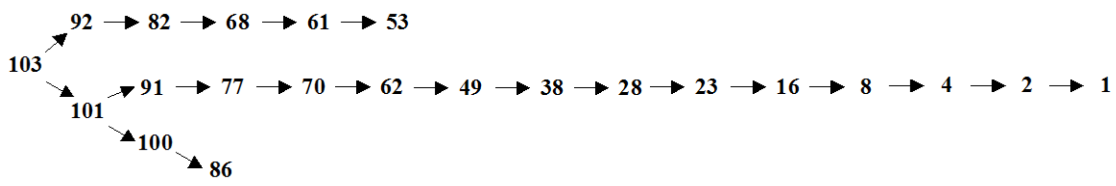


Figura 4: Maior Sequência

Logo a maior sequência é:

$$1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, 62, 70, 77, 91, 101, 103.$$

■

O problema 3 é correlato aos anteriores, o que possibilida a certeza de compreensão para os estudantes mais adiantados e o desenvolvimente da confiança para aqueles que ainda estão num ritmo matemático menos constante.

[3]Retirado de [1].

Problema 3 (Números enfileirados)

[4]*Mostre que:*

a) os números naturais de 1 a 16 podem ser escritos sobre uma reta, de tal modo que a soma de quaisquer dois números vizinhos seja um quadrado perfeito.

b) os números naturais de 1 a 16 ***não*** *podem ser escritos sobre uma circunferência, de tal modo que a soma de quaisquer dois números vizinhos seja um quadrado perfeito.*

[Solução]

Inicialmente pode-se construir um diagrama na busca das possíveis vizinhanças de cada número, por exemplo, as vizinhanças do 1 podem ser o 3, pois $1 + 3 = 4$, ou o 8, $1 + 8 = 9$, ou o 15, $1 + 15 = 16$. A menor soma possível seria $1 + 2 = 3$ e a maior $16+15 = 31$. Com base nisso, vemos os números quadrados perfeitos possíveis de se obter são os que ficam entre os números 3 e 31, ou seja, 4, 9, 16 e 25. Após os devidos cálculos chega-se a figura 5.

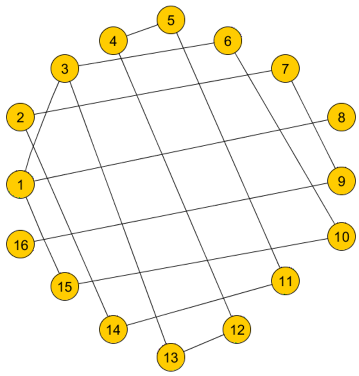


Figura 5: Vizinhança!

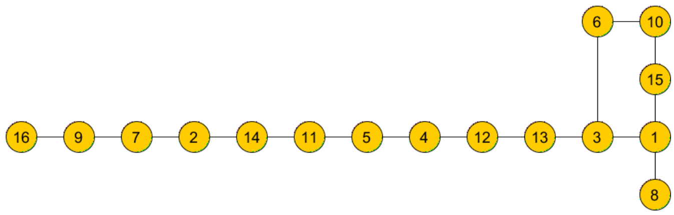


Figura 6: Organizando a vizinhança!

Observa-se então os números das pontas como 8 e 16, pois só há uma soma para cada um deles que resulta num quadrado perfeito, e mais, automaticamente responde-se o item b, pois se não há dois vizinhos para todos os números, não pode-se fechar a circunferência[5]. Sendo assim, organiza-se um novo diagrama (figura 6) e escolhendo dentre as composições pode-se chegar ao exemplo:

16 - 9 - 7 - 2 - 14 - 11 - 5 - 4 - 12 - 13 - 3 - 6 - 10 - 15 - 1 - 8

■

[4]O problema aparece no site dos Clubes de Matemática da OBMEP (http://clubes.obmep.org.br) e no Banco de Questões da OBMEP 2011.

[5]Condição necessária, mas não suficiente.

Poderia ter sido acrescentada a pergunta: Existem dois trios que podem ser retirando do conjunto de modo a construir apenas uma sequência como resposta – mantendo a condição original da soma consecutiva totalizando um quadrado pereito (na verdade duas simétricas) –, quais são esses números? (resposta no rodapé[6].)

Em sala de aula, por mais que o texto do ensino de matemática atual (ou educação matemática) tente expor o contrário, a aquisição dos conteúdos formais se deve basicamente pela repetição, tangido muito como expõe CRATO[7] [6]

> "Um mestre tem o dever de transmitir a seus alunos os conteúdos nos quais se graduou. E, sim, precisa ter objetivos bem claros e definidos sobre o que vai ensinar. É ingênuo achar que o estudante vai descobrir tudo por si mesmo e ao seu ritmo, quando julgar interessante."

No mais, a visão dos conteúdos e muito menos o interesse imediato não garantem o desenvolvimento da(s) habilidade(s) que são necessárias para o posterior pensamento criativo inovador. As etapas desse desenvolvimento (para a sequência da leitura dessa dissertação) também se baseiam em LIMA [17] que entende a estruturação do ensino da matemática em três pilares:

> "(...) o ensino da Matemática deve abranger três componentes fundamentais, que chamaremos de Conceituação, Manipulação e Aplicações. Da dosagem adequada de cada um desses três componentes depende o equilíbrio do processo de aprendizagem, o interesse dos alunos e a capacidade que terão para empregar, futuramente, não apenas as técnicas aprendidas nas aulas, mas sobretudo o discernimento, a clareza das idéias, o hábito de pensar e agir ordenadamente, virtudes que são desenvolvidas quando o ensino respeita o balanceamento dos três componentes básicos. Eles devem ser pensados como um tripé de sustentação: os três são suficientes para assegurar a harmonia do curso e cada um deles é necessário para o seu bom êxito. (...) O professor dedicado deve procurar organizar seu curso de modo a obter o equilíbrio entre os três componentes fundamentais."

[6]São os trios $\{1, 8, 15\}$ ou $\{6, 10, 15\}$.

[7]Nuno Paulo de Sousa Arrobas Crato é um conhecido matemático e estatístico português que com extensa atividade de divulgação científica. Em 21 de Junho de 2011 tomou posse como Ministro da Educação e Ciência de Portugal.

Destaca-se que as duas citações anteriores são de matemáticos com experiências baseadas em prática de ensino, não meramente em textos sem realidade e aplicação locais. Mesmo o conhecimento do primeiro em relação à educação portuguesa se extende (por similaridade) ao Brasil, já o segundo dispensa apresentações. Por fim, o professor tem o papel fundante para a apresentação da matemática de modo íntegro e completo e desenvolver sua sequência didática com cuidado para não continuar a fama histórico de matéria pueril e sem aplicações, em especial, alerta POLYA [25],

> "(...)a Matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso. Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a detestar a Matemática (...). Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la."

É um recorte alarmista, contudo ainda muito comum no Brasil e no restante do mundo. No processo de detabe em sala de aula é importante está atento para o não adestramento dos estudantes, ou seja, ele não pode ser um mero repetidor do que está sendo construído. Se numa aula, após os problemas iniciais há uma dúzia de situações similares, e o conteúdo se fecha aí, o aprendente não se coloca na situação de desenvolvedor. Estudar problemas aparentemente sem conexão com o que foi dialogado é fundamental.

Observando um problema[8] menos direto, pode-se pensar em como usar raciocínio semelhante, repetindo: a sala de aula não pode ser um mapa de repetições. O trabalho com questões similares/parecidades é combustível para despertar o primeiro contato com o conteúdo, quando possível, dialogando com o cotidiano, quando meramente científico, sempre na busca de elementos que qualifiquem a aplicação, mesmo teórica (ou superior) do conteúdo.

A matemática pela matemática também merece destaque, afinal os cursos que evocam essas habilidades já as querem como pré-requisitos. Não adianta tentar "às cega" reinventar a roda. Há elementos já testados e comprovados (pela heurística, não pelo formalismo pedagógico) que indicam a construção do conhecimento, com devidas possibilidades de ampliação e novos desdobramentos que não podem, nem devem ficar de escanteio num planejamento de curso (ou apenas de aula).

[8]Atribuído a antigas olimpíadas russas, problema famoso que consta em quase todos os livros que versam sobre temas olímpicos, como por exemplo em FOMIN [10], SHINE [26] ou KRERLEY [9].

Com a sequência didática pensada antecipadamente, problemas sem contexto, com nível de dificuldade além do grupo de trabalho ou com saltos qualitativos desnecessários, não correm o risco de afetar o desenvolvimento da estrutura do curso, nem o binômio professor/aluno, pois cada docente irá compor de acordo com seu grupo.

Problema 4 (Antigo Problema Russo)

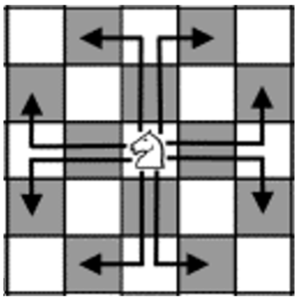


Figura 7: L

O cavalo é uma peça do xadrez que possui o movimento em L constituído pelo movimento de duas casas em uma direção e, logo em seguida, uma casa na direção perpendicular, como ilustrado na figura abaixo. E mais, dois cavalos não podem ocupar a mesma casa do tabuleiro, conforme a figura 7.

É possível que a posição dos cavalos da figura 8, utilizando os momentos típicos do xadrez, disponha-se como a da figura 9?

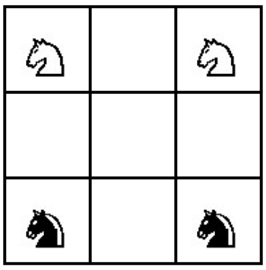


Figura 8: Inicial

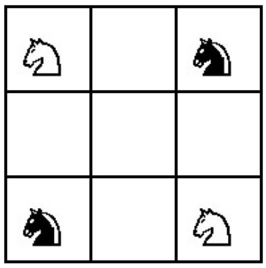


Figura 9: Final

[Solução]

Não está claro como se pode fazer uso de vértices e conexões aqui. Para adaptar o raciocínio é preciso associar cada casa do tabuleiro a um número, como na figura 10. Daí, o tabuleiro vira um mapa com as cidades 1, 2, ... e 9, onde as estradas que as conectam são construídas conforme o movimento do cavalo no tabuleiro de xadrez, ficando com a figura 11.

Para finalizar o problema é necessário visualizar os cavalos no tabuleiro como na figura 12. O objetivo está ilustrado na figura 13, contudo não há como os cavalos trocarem de posição no tabuleiro, visto que um bloqueia o outro (sem capturar) e não há como

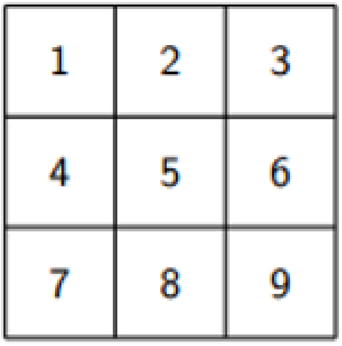


Figura 10: Casas

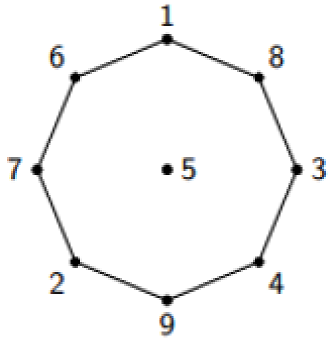


Figura 11: Arestas

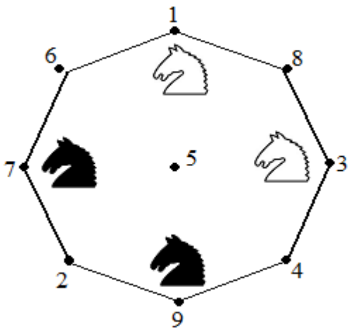


Figura 12: Início

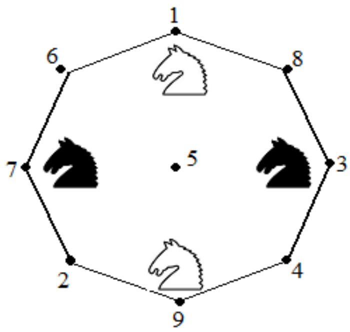


Figura 13: Fim

cavalos de cores opostas ocuparem a mesma casa sem que haja a captura de um deles. Logo, a disposição é impossível.

■

Em sala, com o modelo atual (vestibulesco), o mote é direto para os exercícios básicos (fixação), alguns itens mais elaborados e depois o aprofundamento. No entanto, para o que está sendo proposto pede-se uma ampliação desse modelo – sem superposição, nem descarte – a proposta requer um refinamento da sequência didática contemplando: os jogos; as novas abordagens; novos temas e introdução de outros elementos fora da ementa dos processos seletivos triviais – ao encontro dos problemas que recaem no raciocínio lógico, pois como citado por DANTE em [7]:

> "É preciso desenvolver no aluno a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela."

Importante destacar que a ludicidade em jogos – sejam os de tabuleiro, construção, mas, em especial, nos de computador, celular e videogame – faz-se essencial ferramenta aliada ao desenvolvimento de habilidades matemáticas o que remete a GRANDO citando o grande Paulo Freire em [13]:

> “ O homem é mais tempo jovem que qualquer outro animal. "O jogo é típico de juventude. Sendo assim, nenhum animal é mais dotado para o jogo que o homem. (...) Do ponto de vista pedagógico, portanto, vemos claramente que há uma pedagogia subjacente à nossa como o mundo que tem no jogo seu ponto de referencia. É pelo jogo que construímos nossas condições fundamentais de vida. É por meio do jogo que construímos nossas habilidades e capacidades mais tipicamente humanas: a habilidade de imaginar e a imaginação (...). Joga-se, no fundo por necessidade.”

Para formar de modo completo a habilidade de contagem de movimentos no tabuleiro, que pode e deve ser extendida para a contagem no espaço, destaca-se o problema 5, que enumera uma possibilidade de situação a ser abordada imediatamente após o problema 2, eles exigem habilidades correlatas e colaboram para tornar indivíduos mais aptos com a formação matemática.

Problema 5 (OBM Fase 2 – Nível 2 – 2012)

João gosta de verificar propriedades do jogo de xadrez em um tabuleiro 5×5. Num de seus experimentos, João coloca um cavalo na casa inferior esquerda do tabuleiro 5×5. Qual o número mínimo de movimentos do cavalo para que ele possa chegar a qualquer casa do tabuleiro 5×5?

[Solução]

Na figura 14, os números representam o mínimo de movimentos que o cavalo deve fazer para chegar na respectiva casa. Logo, o mínimo de movimentos para alcançar qualquer casa do tabuleiro é 04.

■

Conduzir a sequência didática dessa maneira possibilita que o estudante perceba que temas simples podem gerar diversos problemas, como por exemplo, no xadrez. Em tempos nos quais se fala tanto em interdisciplinaridade (sem o sucesso desejado) é salutar

2	3	2	3	4
3	2	3	2	3
2	1	4	3	2
3	4	1	2	3
	3	2	3	2

Figura 14: Mínimo

destacar a intradisciplinaridade[9] , ou seja, um problema explorado por diversos conceitos da disciplina, gerando novas questões e desencadeando a pesquisa matemática em torno do tema inicial. Sendo assim, o debate estabelecido anteriormente conclui que todos os itens anteriores são exemplos da aplicação dos grafos. Logo, cabe agora uma definição formal.

Essa introdução longa dos grafos sem uma conceituação estruturada é um dos ensinamentos e FOMIN [10], é importante a compreesensão que os grafos podem ser desenhados de diversos maneiras e suas aplicações são tão vastas quanto[10].

Definição 1 *Um grafo*[11] *consiste em certo número de pontos do espaço (A,B,C,...) chamados de vértices e em segmentos (ou arcos) chamados de arestas, de forma que:*

a. as extremidades de cada aresta são vértices (um ou dois) do grafo;

b. duas arestas distintas ou são disjuntas ou possuem somente extremidade(s) comum(ns).

PITOMBEIRA em [24] enumera alguns exemplos do que são grafos (figura 15) e do que não o são (figura 16).

Segundo SANTOS [12], o termo grafo surgiu por volta de 1884, pela contração da expressão *notação gráfica (graphical notation, em inglês)*, criada pelo químico E. Frankland e adotada por outro químico, A. Crum Browm. Existem aplicações da teoria dos

[9]As áreas do conhecimento não são blocos, eles podem a qualquer tempo ser subdivididas em subdisciplinas de estudo. Essas podem (e devem) dialogar e esses links construídos é que definem o conceito de **intradisciplinaridade**.

[10]Em algum momento deverá ser dada a culminânia desse debate para o isomorfismo de grafos, conceito que não será tema desta dissertação.

[11]No material grafo terá o sentido de grafo simples (não orientado), salvo quando citação contrária.

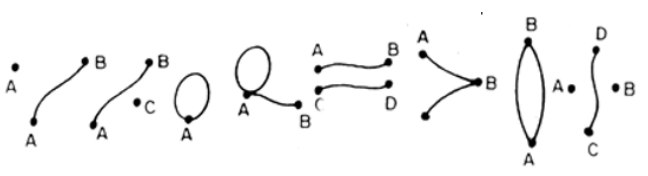


Figura 15: Exemplos do que são Grafos e do que...

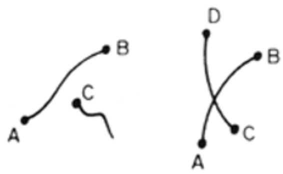


Figura 16: ...não são!

grafos na modelagem de problemas provenientes da química, entre eles o modelo de “Isômeros Químicos”.

A utilização imediata dos grafos, observando os ensinamentos do professor ARAÚJO [3] , pode ser feita no problema da otimização da viagem (problema 6), conhecido como problema do Caixeiro-Viajante. Há variações desse exercício, todas abordando opções de viagem e valores (dinheiro, tempo, quantidade de desvios, pedágios, etc) de cada trecho (aresta) da viagem. É possível, em alguns casos, alterar o ponto de saída com o intuito de minimizar custos. Uma série de elementos devem ser valorados (moradia, serviço de transporte, tempo, disponibilidade, etc) para o planejamento adequado. Para a tomada de decisão é fundamental a consciência de que nem sempre o senso comum prevalecerá, a análise dos grafos, em todas as suas variações, é imperativa.

Observando o problema 6, é possível entender diretamente a aplicação do que foi citado quanto aos vértices e à minimização dos custos.

Problema 6 (Problema do Caixeiro-Viajante)

Um caixeiro trabalha em Coimbra.

E toda semana viaja de carro para trabalhar em Lisboa, Évora e Viana do Castelo.

Existem muitas escolhas possíveis no sentido de visitar as cidades e regressar a Coimbra.

De que modo tem-se o caminho que minimize a distância necessária a percorrer?

(Observe as informações na figura 17[12]*)*

[12]Imagem: http://www.mat.uc.pt/ alma/escolas/pontes/ em 24/10/2013 às 11:16h.

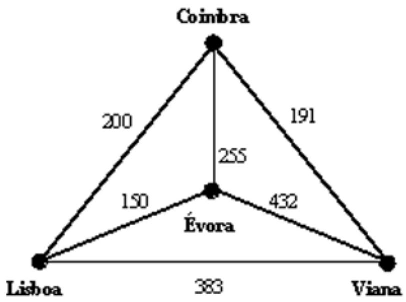


Figura 17: Cidades de trabalho

[Solução]

Um programa simples e útil que pode ser levado para sala de aula é o "Grafos[13]". O programa "Grafos" gerou, após análise, a rota mínima (em verde), figura 18, que foi:

$$\mathbf{1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1}$$

com uma distância total = 949 unidades.

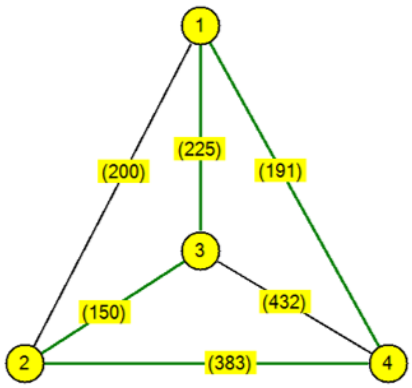


Figura 18: Percurso

■

Em sala cabe a construção do grafo completo para constatação do resultado. É importante destacar que o quando os problemas crescem em complexidade, o uso dos computadores é indispensável. Só para aguçar a curiosidade, tem-se nesse mapa de custos algo interessante, pois para ir de 3 a 4 é menos custoso fazer uma escala em 1, analisando apenas o quesito custo. Fato salutar para expor minimamente a gama de elementos a serem ponderados numa análise.

[13] Grafos – versão 1.3.5 (2012) VILLALOBOS [29].

Para a compreensão do conceito e da utilidade dos grafos podemos propor uma sequência didática com quatro jogos de computador conforme a atividade 8.1. De modo que nos três primeiros poderemos compor os grafos de modo prático, tanto para as soluções específicas, quanto para compor o caso geral, isto é, o mapa completo de cada ação possível nos jogos e no último será estudada uma situação similar ao Problema do Caixeiro-Viajante.

É importante separar os problemas pelos tipos, como ensina o professor CARVALHO [4], quando destaca um mapa de um país fictício (figura 19)[14] .

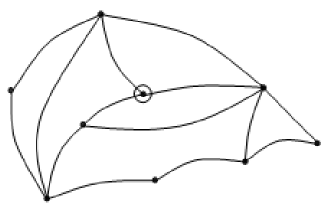


Figura 19: País Fictício

> "1. Um funcionário, encarregado de verificar, periodicamente, o estado das estradas, deseja planejar a sua rota de inspeção. Idealmente, esta rota deveria se iniciar na capital e percorrer cada estrada exatamente uma vez, voltando, então, ao ponto de partida. Existe tal rota?
>
> 2. Um representante de vendas de uma companhia deseja planejar uma rota na qual ele visite cada cidade exatamente uma vez, voltando ao ponto de partida. Existe tal rota?
>
> Há vários pontos em comum entre os dois problemas. Por exemplo: em ambos se deseja verificar a existência de um circuito (ou ciclo) no grafo determinado pelo mapa (um grafo é um par (V, A), em que V é o conjunto de vértices do grafo, e A é um conjunto de pares de vértices – os arcos do grafo). No primeiro problema, este circuito deve incluir exatamente uma vez cada arco do grafo. No segundo problema, o circuito deve incluir exatamente uma vez cada vértice do grafo. Embora os dois problemas sejam aparentemente semelhantes, há algumas diferenças fundamentais entre eles."

[14]Figura retirada de [4].

Definição 2 *Um Caminho Euleriano em um grafo visita cada aresta apenas uma vez. Destaque também para o Circuito Euleriano que é um caminho Euleriano que começa e termina no mesmo vértice.*

Definição 3 *Em um grafo, o "**grau de um vértice i** (v_i)" é o número de extremidades de arestas ou arcos que se apoiam (incidem) naquele vértice. Símbolo: $d(v_i)$.*

Euler provou que uma condição suficiente para a existência de circuitos eulerianos é de que todos os vértices tenham grau par, e afirmou, sem prova de que grafos conexos com todos os vértices pares têm um circuito Euleriano. A primeira prova completa desta última afirmação foi publicada em 1873 por Carl Hierholzer. Há, ainda, grafos com caminhos Eulerianos se houver 2 vértices de grau ímpar. Nesse caso, ao se acrescentar uma aresta ligando estes dois vértices, o novo grafo passa a ser Euleriano (teorema 1).

Definição 4 *Uma grafo conexo é aquele que 2 quaisquer de seus vértices podem ser ligados por um caminho contido no grafo.*

Teorema 1 ***(Euler-Hierholzer)*** *Um grafo G conexo possui caminho euleriano se e somente se ele tem exatamente zero ou dois vértices de grau ímpar.*

[Demonstração[15]] Seja G um grafo conexo, com 0 ou 2 vértices ímpares. Seja $\mathcal{C}$ um caminho unicursal em G começando (se houver) num vértice de ordem ímpar ou em qualquer vértice no caso contrário. Tomemos $\mathcal{C}$ com o maior número possível de vértices entre todos os caminhos que têm o mesmo início que $\mathcal{C}$.

O vértice final de $\mathcal{C}$ coincidirá com o inicial, se não houver vértices de ordem ímpar, ou com o outro vértice de ordem ímpar, no caso contrário. Se $\mathcal{C}$ não percorrer todo o grafo G, tomemos um vértice v fora de $\mathcal{C}$ e, a partir dele, um caminho que o ligue a um vértice w em $\mathcal{C}$ e que não tenha arestas em comum com $\mathcal{C}$. O vértice v tem ordem par. Logo, percorrendo, a partir de w, este segundo caminho, podemos prolongá-lo além de v e, continuando sempre a partir dele, sem percorrer nenhuma aresta de $\mathcal{C}$, poderemos sempre seguir em frente e só pararemos quando retornarmos ao vértice w. Aí prosseguiremos na antiga rota $\mathcal{C}$ e teremos um caminho unicursal começando no mesmo vértice que $\mathcal{C}$, porém com um número maior de arestas que $\mathcal{C}$. Uma contradição, que demonstra o teorema 1.

■

[15] Adaptado de LIMA [16].

É importante destacar que o tema "grafos" já começou também é ser tema vestibulesco, aqui deve-se tomar o cuidado mais uma vez de não explorá-lo apenas por ser um tópico de uma ementa (ou uma cobrança mesmo fora desta). Afinal, caso isso aconteça entramos num círculo vicioso e essa dissertação perde o sentido.

A abordagem deve continuar sendo pelo viés das habilidades, afinal, aquele que possui o arcabouço técnico-prático do conteúdo poderá trabalhá-lo independentemente da forma que precise ser cobrado, seja numa prova, ou numa situação concreta (caso prático), um bom exemplo virá na atividade 8.6 que explica o caminho para localizar os problemas sobre grafos que vêm caindo na OBMEP[16].

Insistindo no tema, a abordagem não deve ser feita em função de cair em olimpíadas, na verdade, a incidência em provas olímpicas indica como o tema é interessante. Para materias mais completos sobre grafos e outros tantos conteúdos de matemática há o programa dos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo – POTI[17].

Teorema 2 ***(Básico)*** *Em um grafo, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas. Em símbolos: no grafo (V, A),*

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2\,|A|$$

($|X|$denota o número de elementos do conjunto X.)

[Demonstração]

De cada vértice v saem $d(v)$ arestas. Assim, se somarmos os graus de todos os vértices, obtemos o número de arestas multiplicado por dois, pois contamos cada aresta duas vezes (lembre-se de que cada aresta está associada a dois vértices).

■

Problema 7 *Apertos de Mão*[18] . . . .

Antes da reunião de um comitê, alguns de seus dez membros trocaram apertos de mão.

É possível que os números de apertos de mão tenham sido, em alguma ordem, iguais a 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7 e 8?

[16]Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

[17]Site do programa: poti.impa.br.

[18]Problema retirado de CAMINHA [22].

[Solução]

Se os membros forem pensados como vértices de um grafo, e os apertos de mão como arestas que o conectam vértices adjacentes teremos um número ímpar de arestas, o que fere o teorema 2.

■

Problema 8 *Candidato Fajuto*[19] ....

Na cidade de Muritiba há 7 telefones. Um candidato a prefeito prometeu que ampliaria a rede de telefonia de modo que cada um dos 7 telefones seja conectado diretamente a exatamente 5 outros.

É possível que ele cumpra essa promessa?

[Solução]

Se imaginarmos um grafo onde os vértices são os telefones e as arestas, as conexões, teríamos que o grau de cada vértice seria 5. Contando o número de conexões entre dois telefones (ou seja, o número de arestas do grafo).

Como de cada telefone sairiam 5 conexões, teríamos a princípio $5.7 = 35$ conexões; mas contamos cada conexão duas vezes, uma vez em cada um dos dois telefones a que ele está conectado. Assim, deveríamos ter na verdade $35/2$ conexões, o que seria um absurdo.

Assim, o candidato não pode cumprir sua promessa (não vote nele!).

■

Problema 9 *Problemas com o número de arestas* ....

Verificar se cada uma das listas seguintes pode representar os graus dos vértices de um grafo (simples) e no caso afirmativo, explique como representar um grafo com as condições dadas.

a) { 3 ; 3 ; 2 ; 2 ; 2 ; 1 }

b) { 6 ; 6 ; 6 ; 4 ; 4 ; 2 ; 2 }

c) { 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 5 ; 4 ; 2 ; 1 }

d) {6 ; 6 ; 6 ; 4 ; 4 ; 3 ; 3 }

[Solução]

a) não pode representar os graus dos vértices de um grafo, uma vez que o número de vértices de grau ímpar tem que ser par e nesta sequência temos 3 valores ímpares.

[19] Adaptado de SHINE [26].

b) também não pode representar os graus dos vértices de um grafo simples; para justificar isso basta ver que se assim o fosse, cada um dos vértices de grau 6 teria que ser adjacente a todos os outros vértices; logo todos os vértices teriam grau maior ou igual a 3.

c) poderíamos usar a mesma lógica de "b", mas em vez disso, vamos usar o seguinte raciocínio: se a sequência é a representação dos graus de um grafo simples, ao se retirar um vértice com arestas para todos os demais, teríamos $\{ 5 ; 5 ; 5 ; 4 ; 3 ; 1 ; 1 \}$, o mesmo pensamento segue e fica-se com o se $\{ 4 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1 ; 0 \}$ e agora a ideia utilizada em b) aplica-se claramente: cada um dos dois vértices de grau 4 teria que ser adjacente a cada um dos outros três vértices de grau positivo, e portanto não poderia haver vértices de grau 1.

d) Finalmente, a última sequência é a sequência de graus de um grafo simples: ligamos os três vértices de grau 6 entre si e a cada um dos outros quatro vértices e finalmente escolhemos dois destes para serem adjacentes um do outro.

■

Problema 10 *Esse veio de Banco de Problemas da 7ª OBM* ....

Apenas cinco casais participaram de uma reunião. Após os cumprimentos, João pergunta a cada um dos outros nove participantes: "Quantos apertos de mão você deu?" e obtém todas as nove respostas possíveis: 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8. Qual foi a resposta da esposa de João?

(Obs$_1$.: obviamente ninguém apertou a mão do próprio cônjuge.)

(Obs$_2$.: a solução fica como exercício!)

Problema 11 *Estradas* ....

Em um certo reino, existem 100 cidades, e quatro estradas partem de cada cidade. Quantas estradas existem no reino?

[Solução]

Aplicação imediata do teorema 2. Cidades serão vértices e as estradas serão as arestas $\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 4 \cdot 100 = 2\,|A| \Rightarrow A = 200$

■

Aplicações interessantes do teorema 2, situações lúdicas, técnicas e ampliadas, com o detalhe para a existência dos grafos após análise dos graus de cada vértice, não bastando apenas a sequência de graus pares.

Problema 12 *As estradas da Tiagolândia, ou: Tiago no problema do "PECI"* [20] ......

Tiagolândia é um pequeno país que possui 10 cidades e 37 estradas. Cada estrada une exatamente duas cidades. Duas cidades são ligadas por no máximo uma estrada. Prove que é possível viajar entre duas cidade quaisquer de Tiagolândia, percorrendo uma ou mais estradas.

[Solução]

Observe que, do enunciado, como há 37 estradas, a soma dos graus de todos os vértices é 74. Sejam d_1, d_2, d_3, ... , d_{10} os números das estradas que saem da cada cidade (C_i, com $i \epsilon \{1, 2, 3, ..., 10\}$) (já ordenados de modo não decrescente).

Logo,

$$d_1 + d_2 + d_3 + ... + d_{10} = 74$$

Agora, alguma cidade deve ter mais do que 7 estradas, pois se fosse o contrário, a soma não chegaria a 74. Seja $d_{10} \geq 8$:

Se $d_{10} = 9$, o problema acabou pois d_{10} estaria ligado a todas as cidades, conforme figura 20.

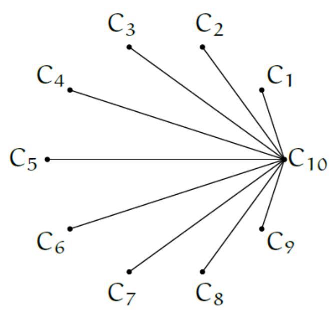


Figura 20: Tiagolândia

Se $d_{10} = 8$, então existe uma cidade C_2 que não está ligada diretamente a C_{10}.

É possível viajar entre quaisquer duas cidades diferentes de C_2 passando por C_{10}?

Será que C_2 pode ser uma cidade isolada?

[20]Programa Especial para Competições Internacionais, problema localizado no fórum fechado.

Se este fosse o caso, existiriam no máximo $9 \cdot 8 \div 2 = 36$ estradas em Tiagolândia, o que contradiz a hipótese do problema , a figura 21 ilustra um possível exemplo.

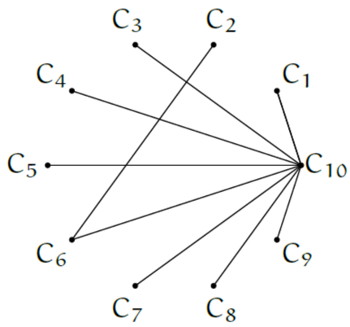


Figura 21: Tiagoconexões

■

Problema 13 *Cortando estradas* ....

Em uma ilha plana existem 11 cidades numeradas de 1 a 11. Estradas retas ligam 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4, ..., 10 a 11 e 11 a 1. É possível que uma reta corte todas as estradas?

[Solução] Suponha que sim. Escolha um dos semi-planos determinados pela reta e chame-o de "esquerdo"(o outro semi-plano será chamado de "direito"). Suponha ainda, sem perda de generalidade, que a cidade 1 está do lado esquerdo. Como a reta corta 1-2, 2 está do lado direito. Como a reta 2-3, 3 está do lado esquerdo. E assim sucessivamente, prova-se que 11 está do lado esquerdo. Mas então a estrada 1-11 está toda do lado esquerdo, absurdo!

Logo, não é possível!

■

Apenas como recorte, observam-se os problemas 14 e 15 para que seja apreciado como a depender da abordagem direta a beleza do tópico pode ser ou não explorada. Para esses problemas não haverá solução comentada. Acrescenta-se que, para o problema 15, das três soluções da prova da UNESP (encontradas na internet) relativas ao item, nenhuma explica os motivos que desenvolvem a solução correta do problema, apenas indicam na resposta certa o caminho eureliano (passeio de Euler) que o problema procurou em cada item. Esse fato corrobora com JURKIEWICZ [14]

> “Ao longo do tempo cristalizou-se (...) a tendência a uma pedagogia de "falsa construção de soluções próprias". Para isso contribuiu a uniformização dos currículos, o aviltamento da profissão de professor e a industrialização do segmento de material didático. Os livros de matemática diferem hoje muito pouco uns dos outros, não só nos conteúdos como na forma de apresentação pedagógica: pequenos fragmentos de conteúdo são apresentados de forma estritamente propedêutica, seguidos de exercícios cuja resposta única resulta de um processo único cuja solução se encontra nas últimas páginas. (...) A contrapartida, que sentimos de forma insofismável, é o comportamento correspondente do corpo discente; os alunos procuram saber o que responder e não qual o significado de um problema, o que é uma solução e qual o valor da elaboração de um processo de obtenção e avaliação de uma (entre muitas) respostas.”

Problema 14 *Como utilizar a beleza dos grafos corretamente* . . . .

Em cada um dos dezesseis círculos da figura 22 está um estudante. Um total de 3360 moedas são distribuídas dentre os 16 estudantes. Em um certo instante cada estudante dá todas as suas moedas dividindo-as igualmente entre cada um de seus vizinhos. Após o intercâmbio de moedas, cada estudante ficou com o mesmo número de moedas que tinha no início.

Determine o número de moedas que o estudante do círculo central tinha originalmente.

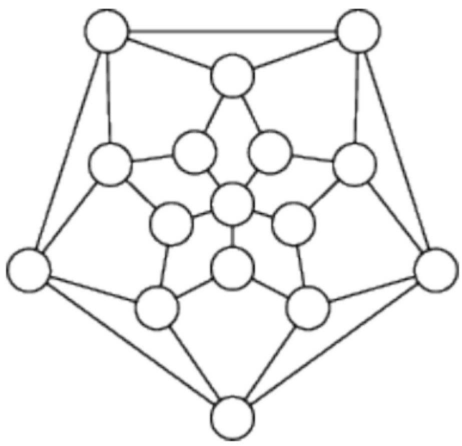


Figura 22: Dividindo moedas

Problema 15 *UNESP*[21] *– 2012*[22] ....

A figura 23 é um grafo cujos vértices A e C possuem ordem 3 (o vértice A é o apoio de um arco cujas extremidades coincidem) e os demais vértices possuem ordem 2. Um grafo admite um "passeio de Euler" se existir um caminho do qual façam parte todas as arestas ou arcos desse grafo, sendo possível desenhá-lo sem tirar o lápis do papel e passando-o uma única vez em cada aresta ou arco. Na figura 23 é possível fazer um "passeio de Euler" partindo-se apenas dos vértices A ou C. Um possível "passeio" pode ser representado pela sequência de vértices dada por: AABCDEFC.

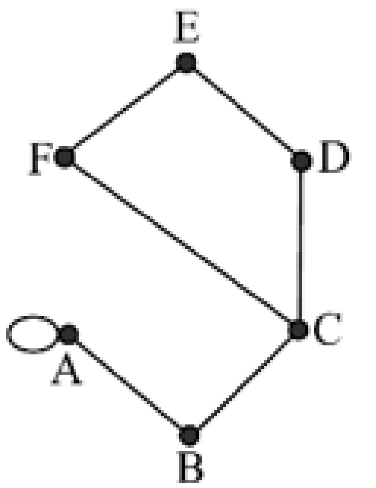


Figura 23: Grafo

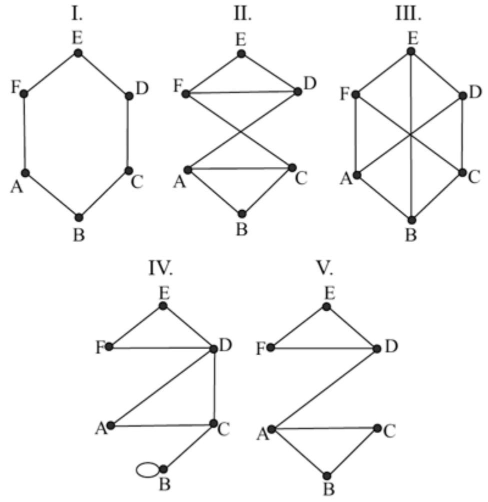


Figura 24: Grafos para análise

Considerando os grafos da figura 24, quais são os que admitem um "passeio de Euler"?

....[23]

[21]Universidade Estadual Paulista.

[22]Com adaptações no enunciado.

[23]Gabarito do problema 15: I, IV e V.

CAPÍTULO 3

MATRIZES, EM POUCAS PALAVRAS.

No capítulo 2 desenvolveu-se a introdução às linguagem e representação dos grafos a partir dos exemplos práticos, contudo as matrizes possuem estrutura mais direta, que dispensa introdução ludicizada.

Definição 5 *Matrizes são apresentadas como tabelas com entradas de linhas e colunas. Uma matriz é escrita com letra maiúscula e dois índices, isto é:* $A_{i\times j}$ *que é a matriz A com i linhas e j colunas, por exemplo,* $A_{3\times 2}$ *é a representação de uma matriz com 3 linhas e 2 colunas.*

Quando $i = j$ *temos uma matriz quadrada, isto é:*

- $A_{1\times 1}$ *possui 1 linha e 1 coluna, e diz-se que ela tem ordem 1;*
- $A_{2\times 2}$ *possui 2 linhas e 2 colunas, e diz-se que ela tem ordem 2;*
- $A_{3\times 3}$ *possui 3 linhas e 3 colunas, e diz-se que ela tem ordem 3; etc.*

Em regra, os números (ou letras) presentes numa matriz são os elementos que são representados por letra minúscula do alfabeto latino: a_{11} é o elemento da linha 1 e coluna 1, a_{23} é o elemento da linha 2 e coluna 3, a_{ij} é o elemento da linha i e coluna j . O problema 3 ilustra ludicamente essa parte teórica.

Problema 16 *UNESP – 2002*. . . . .

Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3 , e três tipos de produtos, P_1, P_2 e P_3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j , i, j = 1, 2, 3.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{L}_1 & \mathrm{L}_2 & \mathrm{L}_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

Analisando a matriz, podemos afirmar que

a) a quantidade de produtos do tipo P_2 vendidos pela loja L_1 é 11.

b) a quantidade de produtos do tipo P_1 vendidos pela loja L_3 é 30.

c) a soma dos produtos[24] do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.

d) a soma dos produtos do tipo P_i vendidos pelas lojas L_i , $i = 1, 2, 3$, é 52.

e) a soma dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

[Solução]

Na letra (a) o número de produtos do tipo P_2 vendidos pela loja L_1 está representado pelo elemento $\mathrm{a}_{22} = 10$.

Para (b), o número de produtos do tipo P_1 vendidos pela loja L_3 é $\mathrm{a}_{13} = 20$.

Em (c), a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 equivale a
$\mathrm{a}_{31} + a_{32} + a_{33} = 39$.

(d) a soma das quantidades de produtos é a soma de todos os elementos da matriz, isto é, 141.

Por fim, (e) soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 entende-se por $\mathrm{a}_{11} + a_{12} = 30 + 15 = 45$. É a resposta, letra (e).

■

Para compor uma proposta didática com o tema acima temos por exemplo os problemas da atividade 8.9 (página 92), neles ocorre a apresentação didática das matrizes e suas operações através da criptografia. Outra proposta se faz pelo diálogo entre grafos e matrizes de modo prático, o que será tema do capítulo 4, a partir da página 53.

[24]No sentido de soma da quantidade dos produtos.

Definição 6 *Uma matriz quadrada que possui todos os elementos da diagonal principal iguais a* 1*(isto é, se* $i = j$ *então* $a_{ij} = 1$*) e os demais termos iguais a* 0 *é denominada de identidade, representada pela letra* I*.*

Problema 17 *UFG Fase 1 – 1995 – adaptada* ....

Após uma prova de 4 questões aplicada a 4 alunos, o professor construiu uma matriz (A) onde cada linha corresponde a um aluno e cada coluna às questões da prova, colocou 0 (zero) se o aluno errou a questão e 1 (um) se acertou. Com base nesse enunciado podemos afirmar:

(a) Se cada aluno acertou apenas 1 questão a matriz pode ser a matriz identidade se as questões acertadas são distintas;

(b) Se $A_{4\times 4}$ *onde* $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i \geqslant j \\ 0 \text{ se } i < j \end{cases}$, então um aluno acertou todas as questões.

[Solução]

Para (a) observando a proposição destaca-se a expressão "pode ser", o que implica uma construção possível. Para tal, basta que o primeiro aluno acerte a questão 1, o segunda a 2, o terceiro a 3, e o quarto a 4, daí teremos a identidade (no caso geral, uma matriz qualquer de permutação[25] serve, esse tópico não estará nessa dissertação).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para (b) observando a matriz resultante é possível perceber que o estudante 4 acertou todas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

[25]Uma matriz de permutação é uma matriz quadrada com apenas dígitos 1 e 0 (binária), o algarismo 1 aparece exatamente uma vez em cada lingua e em cada coluna. Ela pode gerar uma permutação dos elementos de um vetor ou entre linhas ou colunas.

É importante destacar o ano no qual o problema 17 foi aplicado, 1995, o que expõe que a ludicidade em matemática não é um mote recente, contudo, a pasteurização do vestibular e o ensino da matemática de modo inócuo (a matemática direta, a matemática pura) descontruiu, ao longo dos anos, exercícios como esse. O restante do item abordava ainda elementos também interessantes como os determinantes e as potências de matrizes, que ainda não tiveram espaço nessa dissertação e, na sequência didática aqui construída, não seriam adequados ao momento de maturidade dos estudantes.

O trabalho com matrizes tende a ser repetitivo, o que possui importância mas gera falta de estímulo para a aprendizagem por parte dos estudantes, sendo assim, faz-se necessária a variação da linguagem dos problemas e a abordagem diversa com contextos intradisciplinares. O trabalho contínuo de retomada das habilitadades matemáticas (ensino em espiral[26], destaque para [18] que aborda essa e outras metáforas de trabalhos mais abrangentes que o ensino linear dos conteúdos) é salutar para que, quando o avanço ocorrer para áreas mais áridas, ser possível dialogar com itens mais lúdicos e que foquem em elementos mais comuns no cotidiano.

Para exemplificar o argumento, segue:

Problema 18 *ESCS[27] – 2009 – adaptada* . . . .
Mariana construiu a tabela abaixo (figura 1) com 60 linhas e 60 colunas, preenchendo uma casa com o número 2 (quando o número da linha divide o número da coluna) e, com o número 1 (em caso contrário). Assim, por exemplo, a casa da linha 3 e da coluna 6 foi preenchida com 2, porque 3 divide 6; já a casa na linha 4 e da coluna 5 foi preenchida com 1.
Nessas condições, na tabela completa, qual a soma dos números da coluna 48?

[26]O ensino em espiral é uma metáfora que contrapõe-se em relação ao ensino linear, que, em muitos casos, não transpõe o arcabouço mínimo que sustenta cada conteúdo, como por exemplo, ensinar função afim sem fazer uma inserção adequada das progressões aritméticas e quando possível correlacionar aos casos de proporcionalidade (no básico, regra de 3) ou ainda, pensar em combinatória apenas como arranjos vs combinações, ou ensinar grafos sem fazer exemplos com o uso de paridade (e vice-versa), dentro outros.

[27]ESCS: Escola Superior de Ciências da Saúde.

	1	2	3	4	5	6	....	59	60
1	2	2	2	2	2	2	....	2	2
2	1	2	1	2	1	2	....	1	2
3	1	1	2	1	1	2	....	1	2
4	1	1	1	2	1	1	....	1	2
5	1	1	1	1	2	1	....	1	2
6									
.									
.									
.									
.									
59									
60	1	1	1	1	1	1	....	1	2

Tabela 1: Matriz Um Dois

[Solução]

A coluna 48 terá o número 2 em cada linha rotulada com os divisores de 48.

Após a fatoração temos que $48 = 2^4{\cdot}3^1$ e aplicando o processo para obtenção da quantidade de divisores (atividades 8.3 e 8.4) temos que 48 possui 10 divisores positivos, daí em dez linhas da matriz há o número 2, e nas outras cinquenta há o número 1. Fazendo a soma $10{\cdot}2 + 50{\cdot}1 = 20 + 50 = 70$.

■

Duas das atividades propostas (atividades 8.3 e 8.4) são exatamente a aplicação dos grafos, chamados "árvores" (o mesmo utilizado para resolver o problema 1) para calcular a quantidade dos divisores inteiros positivos de um número e também quais são eles. O problema 18 foi motivado a partir de uma matriz, mas sua resolução teve pouco do assunto específico, exatamente o preconiza o ensino em espiral. Nesse momento não se pode desperdiçar uma questão tão bem construída, novas perguntas caberiam, por exemplo:

a) Qual número sempre se repetirá na primeira linha dessa matriz?

b) Com que padrão ocorre a distribuição dos números 1 e 2 na segunda linha?

c) Na coluna 1, o elemento 2 aparece na linha 1, algum outro será igual a 2?

d) Quantos números 2 irão aparecer nas colunas rotuladas com números primos?

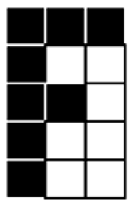
Todas com a solicitação de justificativa prática e/ou teórica de cada resposta.

Até aqui é o suficiente para o desenvolvimento do trabalho. No decorrer do capítulo 5 serão apresentadas brevemente as operações com matrizes (soma, subtração, multiplicação por escalar e produto de matrizes) de modo lúdico.

Uma outra aplicação para matrizes é na computação gráfica, segue o problema para ilustrá-la.

Problema 19 *Universidade Salvador – 2011* ....

As imagens vistas em uma página na Internet, assim como fotos tiradas com máquinas digitais, podem ser representadas usando-se matrizes. Uma imagem, em preto e branco, pode ser representada por uma matriz cujos termos são os números 0 e 1, especificando a cor do pixel: 0 indica a cor preta e 1, a cor branca.



$$(a_{ij})_{5\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 25: Imagem e Matriz

Considerando-se a figura 25 e sua representação matricial, qual a representação da matriz B tal que $(b_{ij}) = (a_{(6-j)i})$ *?*

[Solução]

O primeiro passo e construir teoricamente a matriz B.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} = a_{51} & b_{12} = a_{41} & b_{13} = a_{31} & b_{14} = a_{21} & b_{15} = a_{11} \\ b_{21} = a_{52} & b_{22} = a_{42} & b_{23} = a_{32} & b_{24} = a_{22} & b_{25} = a_{12} \\ b_{31} = a_{53} & b_{32} = a_{43} & b_{33} = a_{33} & b_{34} = a_{23} & b_{35} = a_{13} \end{pmatrix}$$

Fazendo as substituições, temos:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Resultante.

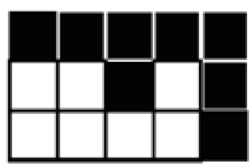


Figura 26: Imagem Resultante.

■

CAPÍTULO 4

GRAFOS E MATRIZES: MATRIZES DE ADJACÊNCIA!

Faz-se necessária agora uma pausa para dialogar grafos com matrizes. A relação tão próxima entre esses dois tópicos é salutar e observa-se pela construção das correspondências entre os vértices e as arestas.

Definição 7 *Dado um grafo*[28] *G com n vértices, a matriz de adjacência $A_{n\times n}$ é definida por:*

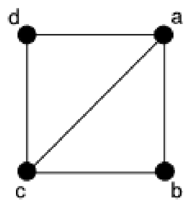
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{se o vértice } i \textit{ está conectado ao vértice } j \\ 0 & \textit{se o vértice } i \textit{ não está conectado ao vértice } j \end{cases}$$

O vértice i estar conectado ao vérice j equivale a existir uma aresta (direcionada ou não) entre i e j.

Definição 8 *Laço é tipo de aresta que conecta um vértice a ele mesmo. Na figura 28 todos os vértices possuem laços. Importante destacar na contagem do grau do vértice com laço, esse deve ser contado duas vezes, em função da incidência (chegada) e correspondência (saída).*

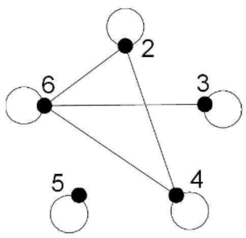
Para melhor compreensão das definições 7 e 8 tem-se os seguintes exemplos:

[28]Destaque para a situação do grafo direcionado, que não foi citado durante o trabalho e também terá a mesma leitura que o grafo simples para a lógica de construção da matriz de adjacência. E mais, no caso do multigrafo, ao invés de unicamente o 1, o elemento que vai representar a conexão entre os vértices i e j será a quantidade de arestas que têm extremidades em ambos ao mesmo tempo, isto é, o número de arestas (v_i, v_j).



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 27: Grafo e Matriz de Adjacência 1



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 28: Grafo e Matriz de Adjacência 2

Para praticar essa definição tem-se a atividade 8.7 (página 88), com grafos retirados de PICADO [23]. Esse é o estopim de um ramo chamado Teoria Espectral dos Grafos que não será explorado nesta dissertação, apenas as representações das matrizes de adjacência. Observe a problema 20 para um primeiro contato.

Problema 20 *UFLA*[29] *MG – 2008*...

Matrizes são arranjos retangulares de números e possuem inúmeras utilidades. Considere seis cidades A, B, C, D, E e F; vamos indexar as linhas e colunas de uma matriz 6 × 6 por essas cidades e colocar 1 na posição definida pela linha X e coluna Y, se a cidade X possui uma estrada que a liga diretamente à cidade Y, e vamos colocar 0 (zero), caso X não esteja ligado diretamente por uma estrada à cidade Y.

[29] Universidade Federal de Lavras.

Colocaremos também 1 na diagonal principal.

$$
\begin{array}{c}
A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

Assinale a alternativa INCORRETA.

a) É possível ir, passando por outras cidades, da cidade C até a cidade E.

b) É possível ir, passando por outras cidades, da cidade A até a cidade C.

c) A matriz acima é simétrica.

d) Existem dois caminhos diferentes para ir da cidade A para a cidade D.

[Solução]

a) ☑ Saindo de C só temos:

$$
C \begin{cases}
B \begin{cases}
B & \text{☑} \\
C & \text{☑} \\
D \begin{cases} A & \text{☑} \\ D & \text{☑} \\ F & \text{☑} \end{cases}
\end{cases} \\
C \quad \text{☑}
\end{cases}
$$

b) ⊗ Saindo de A só chega-se a A,D e F.

$$
A \begin{cases}
A & \otimes \\
D \begin{cases} A & \otimes \\ D & \otimes \\ F & \otimes \end{cases} \\
F \begin{cases} A & \otimes \\ D & \otimes \\ F & \otimes \end{cases}
\end{cases}
$$

c) ☑ Sim!

d) ☑ Existe ao menos:

A⟶D e A⟶F⟶D.

(São suficientes!)

Resposta: B

■

As conclusões anteriores poderiam ter sido tiradas sem o desenho do grafo (na verdade, esboço!), apenas com a observação do diagrama, contudo: não se faz matemática apenas por observação, o registro é essencial para não ser traído por uma memorização truncada ou um cálculo mental equivocado. O que remete à uma história com dois estudantes brasileiros na saída de um dia de prova da olimpíada mundial de matemática (IMO) que consta em [2].

"Dois brasileiros da equipe no ônibus, voltando da primeira prova:

– Quais problemas você fez?

– Fiz o 1 e o 2. E você?

– Só o 1 ... espera, acho que saiu o 3!

– ... ah, acho que fiz também!

(nenhum papel foi utilizado nesse diálogo)"

O problema 3 em questão está no rodapé[30]. Para terminar a história, no referido ano, a pontuação dos 6 brasileiros nesse item foi zero! Matemática não se faz sem papel, lápis e os devidos registros (mesmo que, inicialmente, desorganizados).

A sequência didática de uma aula deve, sempre que possível, contemplar outros elementos (músicas, vídeos, poemas, brinquedos, etc). É curioso que no caso das matrizes de adjacência isso seja possível com cenas do filme "Gênio Indomável" (nome original: Good Will Hunting).

No recorte de cena tem-se um dos problemas que durante o filme despertam para a genialidade da personagem. Os itens 1 e 2 no "quadro" podem ser resolvidos com o que já foi exposto neste trabalho.

Problema 21 *Gênio em cena* . . . .

(1) A matriz de adjacência.

(2) A matriz de representa as possibilidades de caminhos com 3 passos.

[30] **(IMO 2001)** Vinte e uma meninas e vinte e um meninos participaram numa competição matemática. Cada participante resolveu no máximo seis problemas.

Para cada menina e cada menino, existe pelo menos um problema que foi resolvido por ambos.

Prove que existe um problema que foi resolvido por pelo menos três meninas e pelo menos três meninos.

Solução em: https://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php/2001_IMO_Problems/Problem_3

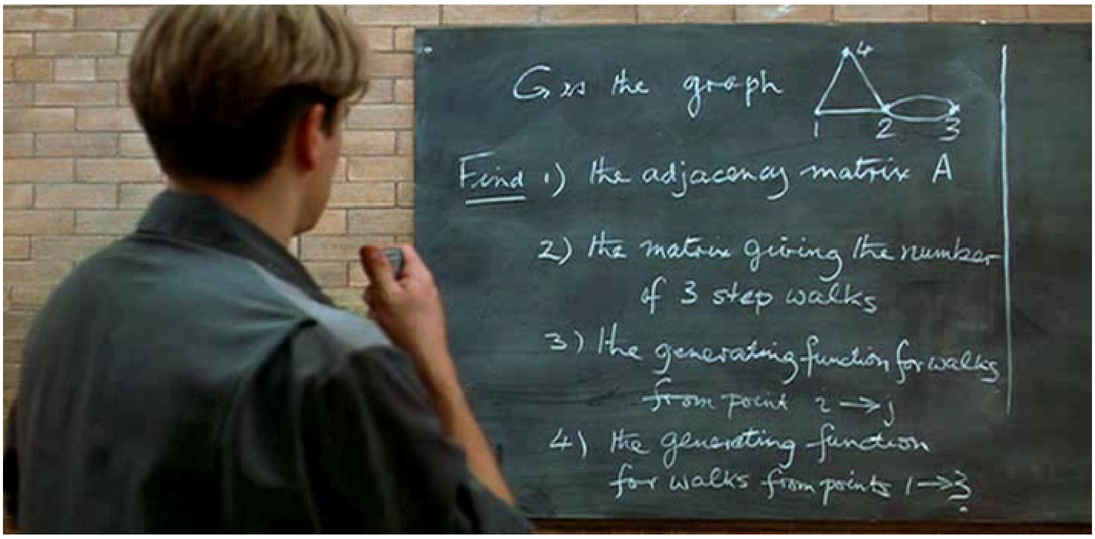


Figura 29: Cena do filme Gênio Indomável

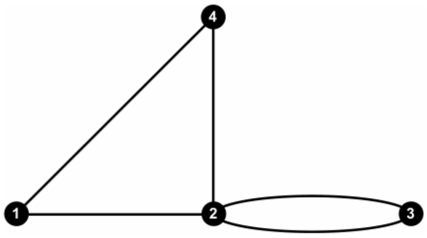
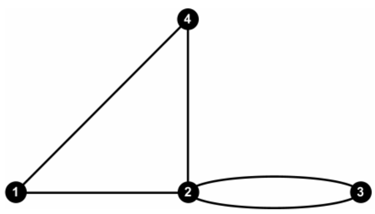


Figura 30: Matriz da Cena

[Solução]

A solução completa dos 4 itens pode ser lida em HORVÁTH [11], segue-se com a solução do item (1), e depois será feita uma pausa para resolver o item (2).



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 31: Resposta do item 1

□

O item (2) aborda uma matriz que representa as possibilidades para 3 passos. Não está claro como fazer esse cálculo, então, em situações como essa, é interessante abordar um problema menor.

Quais as possibilidades de ir de 1 a 1 em dois passos?

São duas (1$\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 1 e 1$\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 1).

Quais as possibilidades de ir de 1 a 2 em dois passos?

Apenas uma (1$\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 2).

Quais as possibilidades de ir de 1 a 3 em dois passos?

São duas (1$\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ $3'$ e 1$\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ $3''$), onde o $3'$ representa o caminho superior e o $3''$ representa o caminho infeior.

Quais as possibilidades de ir de 1 a 4 em dois passos?

Apenas uma (1$\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 4).

É importante observar que a relação construída foi entre a primeira linha da matriz de adjacência (saídas de 1) e cada um das suas colunas (chegadas em 1,2,3 e 4).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tabela 2: Preparando o item 2

Repetindo o processo destacando cada passo. A proposta é uma aborgadem lúdica para a multiplicação de matrizes que deverá depois ser revista na atividade 8.8 da página 89. Esta operação é a mais polêmica entre os estudantes, visto que no ensino médio há a compreensão da operações básicas da matemática como umas das poucas estruturas na qual os estudantes sabem todos os problemas. Ao passo que as matrizes têm sua teoria apresentada, quase todos os estudantes se saem bem pois até a sexta ou sétima aula nada de não trivial é apresentado.

Os alunos entendem o que é uma matriz, como construí-la a partir da lei de formação, como localizar os termos, a igualdade, a soma de matrizes, a subtração e o produto por escalar. Faz-se uma imensidão de problemas com essas operações básicas e normalmente uma atividade avaliativa. Tudo isso é extremamente natural.

Contudo, na aula de apresentação da multiplicação de matrizes volta-se a perdê-los, afinal, além de um algoritmo longo e com necessidade grande de atenção acrescenta-se uma gama de observações da qualidade do que são matrizes comutáveis, que normalmente $A \cdot B \neq B \cdot A$ (uma das únicas supostas crenças matemáticas juvenis), e coisas afins.

Aproveitando o ensejo, pode-se definir formalmente o produto de matrizes como:

Definição 9 *O produto de duas matrizes é definido somente quando o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz.*

Se A é uma matriz m-por-n ($A_{m\times n}$) e B é uma matriz n-por-p ($B_{n\times p}$), então seu produto é uma matriz m-por-p definida como AB (ou por $A \cdot B$). No produto, cada elemento é constituído por é dado por

$$(ab)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

para cada par i e j com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq p$.

Como exemplo[31]*, a figura 32 mostra como calcular os elementos (1,2) e (3,3) de AB se A é uma matriz 4×2, e B é uma matriz 2×3. :*

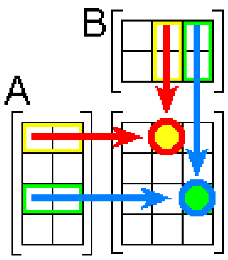


Figura 32: AxB

Elementos de cada matriz são postos aos pares na direção das setas; cada par é multiplicado e os produtos são somados.
A posição do número resultante em AB corresponde ao da seta e coluna que foi considerada.

$(AB)_{12} = \sum_{r=1}^{2} a_{1r}b_{r2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$

$(\mathrm{AB})_{33} = \sum_{r=1}^{2} a_{3r}b_{r3} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23}$

Retomando:

Quais as possibilidades de ir de 1 a 1 em dois passos?

Saindo de 1: linha 1 $\rightarrow$ Chegando em 1: coluna 1

O elemento $a_{11} = 0$, então a relação de a_{11} e a_{11} é nula, ou seja: não se chega a 1 a partir de 1, com 2 passos, pois 1 não tem laço.

O elemento $a_{12} = 1$, ou seja, há uma aresta de 1 para 2, e de 2 há uma aresta também para 1. Logo, existe a sequência com 2 passos passando por 2, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

O elemento $a_{13} = 0$, ou seja, não há uma aresta de 1 para 3, a relação entre de a_{13} e a_{31} é nula, sem passo duplo saindo de 1 e indo para 3 e voltando para 1, relação nula.

[31]Figura: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Matrix_multiplication_diagram.png em 16/01/2014 às 00:50h.

$$\begin{pmatrix} \boxed{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1} \\ 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Tabela 3: Saída e Chegada em 1

O elemento $a_{14} = 1$, ou seja, há uma aresta de 1 para 4, e de 4 há uma aresta também para 1. Logo, existe a sequência com 2 passos, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.

Em resumo, $a_{11} \cdot a_{11} + a_{12} \cdot a_{21} + a_{13} \cdot a_{31} + a_{14} \cdot a_{41} = 2$.

Minimamente, talvez até de modo prematura, é possível iniciar a compreensão (uma motivação) da existência da condição de que o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda.

De volta ao problema, para calcular a matriz com 3 passos, deve-se primeiramente calcular a matriz com 2 passos e depois aplicar o mesmo algoritmo. Para economizar espaço aqui, expõe-se abaixo as matrizes pedidas. A matriz de dois passos pode ser indicada (entendida) como $A \cdot A = A^2$ e a matriz de 3 passos fica $A \cdot A \cdot A = A^3$, de modo forçado, conclui-se que a matriz de n passos será $\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ matrizes } A} = A^n$.

A conclusão acima pode virar um teorema, com demonstração por indução, que não estará nessa dissertação[32].

[Solução]

De volta para resolver o item (2)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tabela 4: Finalizando o item 2

■

[32]Link: http://pt.wikipedia.org/wiki/Matriz_de_adjacencia acessado em 16/01/2014 às 00:53h.

Aqui fica a recomendação de em sala cumprir o raciocínio lúdico em cada linha e no "produto" por cada coluna, de modo a dirimir as dúvidas e dar sentido (mesmo que indireto, quiçá forçado) à esse entrave existente. Depois de 3 ou 4 exemplos cabem perguntas que dispensam o produto geral, tipo: quantas maneiras pode-se sair de 2, fazer um passo (uma escala) e chegar a 3, para o estudante perceber que basta multiplicar a linha 2 pela coluna 3 para concluir o que foi pedido.

Esse problema de contar de quantas maneiras pode-se fazer um determinado caminho é um dos temas mais recorrentes em combinatória, com soluções extremamente intrincadas, contudo, com menos dificuldade de ser executado quando pensado sobre as matrizes de adjacência, afinal, o problema se reduz a calcular a potência de uma matriz.

Para os ensinos fundamental e médio as fórmulas para potência de matrizes são limitadas, para ensino superior cabe o Teorema de Cayley-Hamilton. Para mais sobre o assunto de modo peculiar, consultar SODRÉ [27]. Destaca-se a inspiração para essa situação em TOMEI [28].

Encerrando essa capítulo, duas situações, uma com ligação direta ao tema das matrizes de adjacência[33] e outra aproveitando o ensejo do produto de matrizes e para retomar às figuras digitais como matrizes binárias e também retroalimentar o ensino em espiral seguem os problemas 22 e 23.

Problema 22 *OMCPLP*[34]*, ou: a Olimpíada da Lusofonia mudou de nome – 2012*[35] ...

Uma formiga decide passear sobre o perímetro de um triângulo ABC. A formiga pode começar em qualquer vértice. Sempre que a formiga está num vertice, ela escolhe um dos vértices adjacentes e caminha diretamente (em linha reta) até o vértice escolhido.

a) De quantos modos a formiga pode passear visitando cada vértice exatamente duas vezes?

b) De quantos modos a formiga pode passear visitando cada vérice exatamente três vezes?

Observação: Em cada item, considere que o vértice inicial é visitado.

[33] Problema com nível de dificuldade elevado.

[34] Olimpíada de Matemática da Comunidade de Países de Língua Portuguesa

[35] Respostas: a) 30 modos. b) 174 modos.

Problema 23 *UFF*[36] *RJ – 2006* . . . .

Nos processos de digitalização, imagens podem ser representadas por matrizes cujos elementos são os algarismos 0 e 1. Considere que a matriz linha L = (1 0 1 0 0 1) representa a figura a seguir:

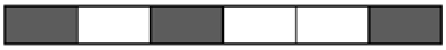


Figura 33: Matriz Linha

onde 1 representa "quadrinho" escuro e 0 representa "quadrinho"branco.

Seja X a matriz linha dada por $X = LM$*, onde M é a matriz* $M = (m_{ij})$ com

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se i + j = 7} \\ 0, \text{ se i + j} \neq 7, 1 \leqslant \text{i} \leqslant 6, 1 \leqslant \text{j} \leqslant 6 \end{cases}$$

Qual a representação em matriz linha da matriz X? [37]

....

[36] Universidade Federal Fluminense.

[37] Resposta: 

CAPÍTULO 5

ESTUDANDO MATRIZES AÉREAS.

O princípio dessa dissertação ensaiou a abordagem das matrizes de equilíbrio de um *Boing 747*. Elemento de estudo extremamente complexo, com funções de recorrência e quantidade razoável de variáveis. Depois disso, chegou à mesa uma proposta de trabalho da UNICAMP [21], que aborda as matrizes de adjacência geradas a partir dos grafos de conexões de voos[38]. O tema se mostrou rico, contudo, uma proposta de trabalho para a educação básica necessitou, após estudos, do desenvolvimento de todos os capítulos anteriores.

Esse capítulo poderia estar numa das atividades do material, do mesmo modo que todos os problemas corridos no texto poderiam ser permutadas com os que constam nas atividades, sem prejuízo. Fica a critério do aplicador a inversão ou não na linha de trabalho.

Um dos destaques da situação estudada está na interatividade que o software participa, mas, caso a escola não disponha de recursos midiáticos, é possível fazer o mesmo com o Geoplano.

Um dos primeiros problemas é:

Problema 24 *Fazer a rota*...

Construir uma malha aérea pequena, mas que ainda assim atenda às exigências de um país, é um grande desafio. Tente montar a menor malha possível para um país com

[38]Link: http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1229/introducao.html acessado em 18/09/2013 às 17h.

aeroportos em oito cidades, e cuja forma seja tal que se possa ir de uma cidade a outra com, no máximo, dois voos.

[Solução]

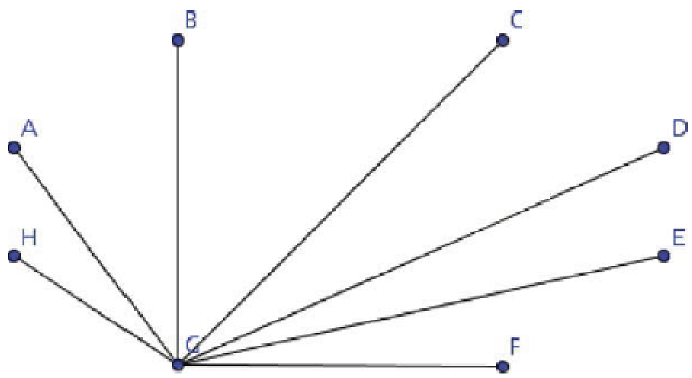


Figura 34: Matriz Aérea 1

■

A situação remete à uma ação consciente de reflexão do aprendente (e também ao problema 12, na página 43). Não é uma situação trivial pois só pode ser cumprida com uma postura proativa. Fazendo um recorte [21].

> "Como essa configuração possui sete voos, ela é a menor configuração possível que permite conectar todos os aeroportos. Observamos ainda que os voos poderiam ser concentrados em qualquer uma das oito cidades, o que resultaria em oito soluções diferentes, mas em algum sentido equivalentes, para o problema."

O diferencial do trabalho desenvolvido em Campinas é que cada problema requer uma habilidade diferente do estudante, e mais, uma postura ativa em cada situação.

Problema 25 *Modificar trajetos* . . . .

Modifique os trajetos de tal modo que cada cidade tenha no máximo quatro voos. Além disso, o número total de voos não pode passar de onze, e é imprescindível que se possa ir de uma cidade a outra com, no máximo, três voos.

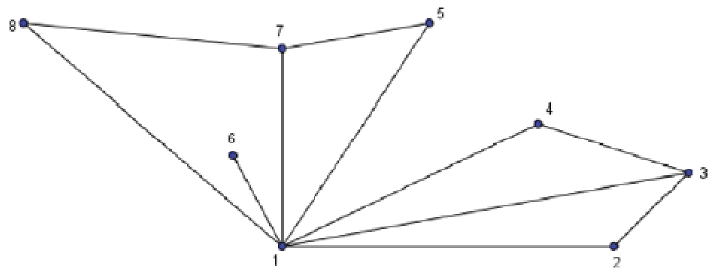


Figura 35: Matriz Aérea 2

[Solução]

O limite de onze voos estabele a não fragmentação excessiva da malha. Essa imposição leva a ter que criar estratégias complexas para resolver o problema. Uma solução envereda por criar dois hubs (cidades que concentram um grande número de voos) conectados entre si.

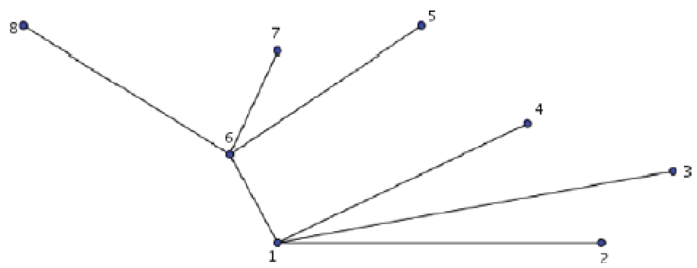


Figura 36: Matriz Aérea 3

■

Problema 26 *Malha aérea*. . . . .

Construa uma malha para o país abaixo de tal modo que todas as cidades estejam conectadas por, no máximo, três voos. Porém, como as cidades 4 e 9, 3 e 8, e 2 e 7 estão muito distantes uma da outra, as viagens entre elas devem ser feitas com, pelo menos, dois voos.

Esses foram alguns exemplos de problemas a serem explorados. Agora, quando pensa-se na prática, e ideal fugir do básico e para isso, tomam-se outra vez as figuras 35 e 36 com novos rótulos.

Aproveitando os ensinamos do capítulo 4, será feita a construção das respectivas matrizes de adjacência. Contudo, é possível estabelecer antes um conceito interessante

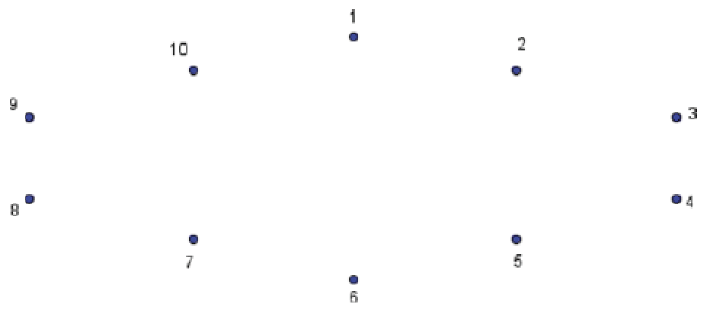


Figura 37: Matriz Aérea 4

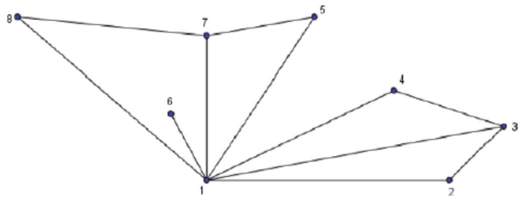


Figura 35: Empresa Alfa α.

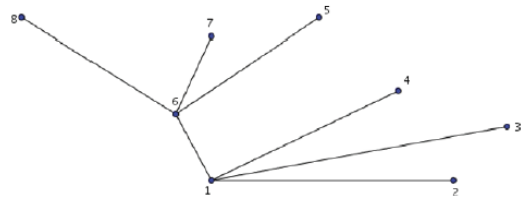


Figura 36: Empresa Beta β.

que vai incidir na importância do aeroporto em 1 para a Empresa Alfa α e dos aeroportos 1 e 6 para a Empresa Beta β.

Definição 10 *Diz-se que um grafo é conexo quando possui um vértice a partir do qual há caminhos para todos os demais.*

Na releitura da figura 35 tem-se a representação de um grafo conexo, contudo se, por exemplo, o vértice 1 for excluído, o grafo passará a ser desconexo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz da Empresa Alfa α.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz da Empresa Beta β.

Nesse momento o professor pode começar a criar situações para estruturar o raciocínio para as operações básicas com matrizes, a saber: soma, diferença e produto por escalar.

Alguns exemplos:

- Se a Empresa Alfa α compra a Empresa Beta β, com quantos voos α ficará?
- Se a Empresa Beta β dobrar todo o seu alcance, como ficará a sua matriz de adjacência?
- Como ficará o grafo após a fusão das empresas criando a Compania AlfaBeta?

Só para citar alguns debates que os estudantes se empolgarão em travar. A atividade da UNICAMP ainda possui uma série de outros tópicos, basta explorá-la para buscar mais ideias.

CAPÍTULO 6

EXTRAPOLAÇÃO.

Esta dissertação ainda tem espaço para algumas extrapolações utilizando situações com grafos, paridade, princípio da casa dos pombos e afins.

De início um debate entre grafos e paridade.

Problema 27 *Triângulo amigo*[39] . . . .

Em uma reunião, há 6 pessoas. Mostre que necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente.

(Admitindo que se a conhece b, então b conhece a).

[Solução] Observando a figura 38 abaixo para ilustrar a situção.

Cada pessoa é representada por um vértice do hexágono. Quando duas pessoas se conhecem, ligam-se os vértices correspondentes por uma segmento ou contínuo ou tracejado. Com esse raciocínio, basta mostrar que necessariamente existe um triângulo formado por linhas contínuas ou um triângulo formado por linhas tracejadas.

Destacando p_1, nele incidem 5 segmentos (arestas), e portanto há pelo menos 3 desses que são contínuos ou pelo menos 3 que são tracejados. Sejam 3 contínuos (o argumento seria análogo no outro caso). Denotemos por p_2, p_3 e p_4 os vértices ligados a p_1 por segmentos contínuos (veja a figura 39). Se algum dos segmentos p_2p_3, p_2p_4 ou p_3p_4 é contínuo, este, juntamente com os que ligam seus extremos a p_1, formam um

[39] Encontrado em CARVALHO [5].

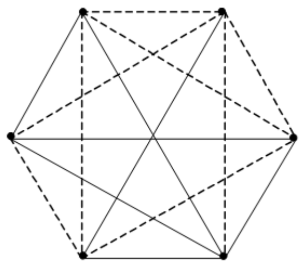


Figura 38: Hexágono

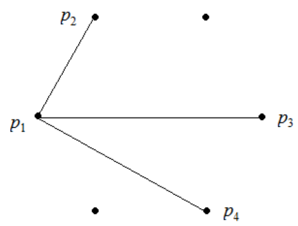


Figura 39: Recorte

triângulo contínuo. Por outro lado, se nenhum deles é contínuo, eles formam um triângulo tracejado, o que completa a demonstração.

■

Problema 28 *Festa animada*[40] . . . .

Prove que numa festa com n pessoas, o número de pessoas que conhecem um número ímpar de outras pessoas na festa á par.

[Solução]

Numere as pessoas de 1 até n e denote por o d_i número de amigos da pessoa i. Imagine que existe um fio entre duas pessoas que se conhecem. Se E denota a quantidade de , temos

$$d_1 + d_2 + ... + d_n = 2E,$$

pois cada fio é contado duas vezes, um para cada ponta. Como o lado direito é par, no lado esquerdo devemos ter uma quantidade par de números ímpares.

■

Problema 29 *Mesmo grau* . . . .

Mostrar que em qualquer grafo existem dois vertices com o mesmo grau

[Solução]

Se G tem n vértices, os graus destes podem tomar n valores: $0 \leqslant d_i \leqslant n-1$.

[40]Encontrado em FEITOSA [8].

No entanto, se algum vértice tiver grau 0, nenhum pode ter grau $n-1$ e vice-versa. Portanto, os graus dos n vértices só podem tomar $n-1$ valores e pelo Princípio da Casa dos Pombos[41], dois deles têm que ter o mesmo valor.

■

Problema 30 *Rioplatense – 1997*. . . . .

Em um grupo de pessoas, sabe-se que cada uma conhece exatamente 101 pessoas do grupo.

(a) É possível que haja exatamente 1997 pessoas no grupo?

(b) É possível que haja exatamente 1998 pessoas no grupo?

Observação: supõe-se que se A conhece B, então B conhece A

[Solução]

Vamos representar as pessoas como vértices de um grafo e ligar dois vértices por uma aresta se as pessoas representadas por estes vértices se conhecem.

Em linguagem de grafos, o problema pergunta em (a) se existe um grafo com 1997 vértices tal que todos possuem grau 101.

Suponhamos que tal grafo exista. A soma dos graus de todos os vértices é então igual a 1997×101. Mas a soma de todos os graus é igual ao dobro do número de arestas. Como 1997×101 é ímpar, tal grafo não pode existir.

(b) Neste caso queremos um grafo com 1998 vértices tal que cada um tem grau 101. O argumento usado em (a) não se aplica, pois a soma de todos os graus é igual a 1998×101 e a quantidade de arestas é então 999×101. Tal grafo existe sim. Considere as pessoas $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_{1997}, P_{1998}$.

Suponha que elas estão ao redor de um círculo nesta ordem e olhando para o centro. Se cada pessoa conhece as 50 pessoas mais próximas à esquerda, as 50 mais próximas à direita e a pessoa que está diametralmente oposta, então cada uma conhecerá exatamente 101 pessoas.

■

[41]PCP: Se n objetos forem colocados em, no máximo, $n-1$ gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos. Formalmente, se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de um outro conjunto B, então uma função de A em B não pode ser injetiva.

Para ilustrar a situação anterior basta utilizar um exemplo com menos pessoas. Segue:

O diagrama abaixo mostra uma situação análoga para 12 pessoas, cada uma conhecendo exatamente 5 outras. Duas à direita, duas à esquerda e a pessoa mais distante.

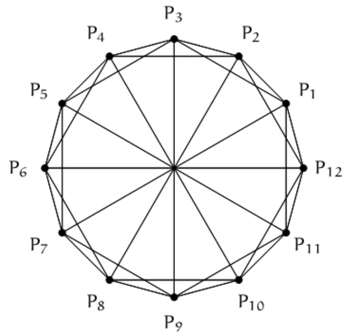


Figura 40: Amizade

Problema 31 *Amizade II* . . . .

Cada um dentre os 102 estudantes em uma escola é amigo de pelo menos outros 68 estudantes. Prove que existem quatro estudantes que possuem o mesmo número de amigos.

[Solução]

O grau de cada vértice pertence ao conjunto A = { 68 , 69 , ... , 101} de 34 elementos.

Como existem 102 vértices e 34 possíveis graus, se supusermos que não existem quatro com o mesmo grau, teremos que cada elemento de A está associado à exatamente 3 vértices (pois $102 = 34 \times 3$). Como existem 17 números ímpares no conjunto A, o número de vértices de grau ímpar do nosso grafo será $17 \cdot 3$ que é um número ímpar, absurdo. Portanto, deverão existir quatro vértices com o mesmo grau, ou seja, quatro estudantes com a mesma quantidade de amigos.

■

Problema 32 *Dominó*. . . . .

Apenas com as pedras 0-1, 0-3, 0-6, 1-1, 1-2, 1-4, 2-3, 3-3, 3-4, 3-6, 4-4, 4-5, 4-6 e 5-6 de um dominó, é possível dispô-las sequencialmente da forma usual em tal jogo?

[Solução] Basta estruturar um grafo com os vértices marcando o total de pontos de cada meio dominó e as arestas serão representadas pelas conexões, donde percebe-se nas figuras 41 e 42.

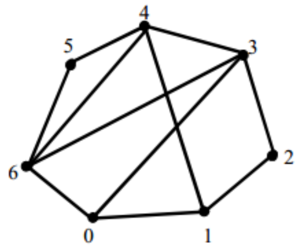


Figura 41: Dominós

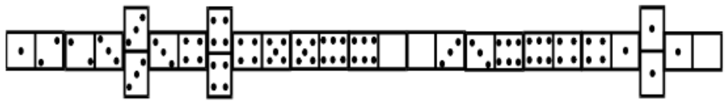


Figura 42: Sequência de dominós

O grafo figura 41 possui algum percurso que passe por todas as arestas sem repetição de nenhuma? Mas tal grafo possui só os vértices 0 e 1 com grau ímpar! Ainda pelo resultado do teorema 2, portanto, este grafo admite tal percurso (desde que se inicie em 0 e termine em 1 ou vice-versa).

■

Problema 33 *United States of America Mathematical Olympiad 1989* . . . .

Um torneio de xadrez reúne 20 jogadores. Foram jogadas 14 partidas, com cada jogador jogando pelo menos uma vez. Prove que nesse campeonato deve haver um conjunto de 6 jogos com 12 jogadores diferentes.

[Solução] Vamos montar um grafo G com 20 vťertices a 14 arestas, onde os vťertices representam os jogadores e as arestas os jogos. Como cada jogador jogou pelo menos uma vez, cada vértice do grafo tem pelo menos grau 1. Agora, usando o teorema 2 temos que a soma dos graus dos vértices é 28.

Daí, pelo PCP, devem existir pelo menos 12 vértices com grau exatamente 1.

Esses 12 vértices representam os 12 jogadores solicitados pelo problema.

■

Problema 34 *Tabuleiro 3×3 com um dose da paridade na "Hungria de 1998"*[42]........

Considere um tabuleiro 3×3 com elementos inteiros e nem todos com a mesma paridade[43]*. Repete-se a mesma operação: simultaneamente substitui-se cada elemento pela soma dos seus vizinhos*[44]*. Independentemente da posição inicial, pergunta-se:*

(a) Será sempre possível obter um tabuleiro com todos os elementos pares?

(b) Será sempre possível obter um tabuleiro com todos os elementos ímpares?

[Solução] Observando o tabuleiro como uma matriz e considerando todas as operações "módulo 2"[45], obtém-se:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b+d & a+c+e & b+f \\ a+e+g & b+d+f+h & c+e+i \\ d+h & g+e+i & f+h \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} c+g & b+h & a+i \\ f+d & 0 & d+f \\ a+i & b+h & c+g \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b+h+f+d & c+g+a+i & b+h+d+f \\ c+g+a+i & 0 & a+i+c+g \\ f+d+b+h & a+i+c+g & b+h+d+f \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para (a), independentemente dos elementos do tabuleiro, em 4 operações todos os elementos se tornam pares.

Para (b), observe os elementos da diagonal principal após a primeira sequência de operações ($b+d$, $h+f$, $b+d+h+f$) e perceba que deles ao menos um é par. Logo nunca se obtém um tabuleiro com todos ímpares.

∎

[42] Problema e solução encontrados em [31].

[43] Dizemos que dois números inteiros têm mesma paridade, quando são ambos pares ou ambos ímpares. Assim, podemos dizer que a soma de dois números inteiros é par se, e somente se, eles têm mesma paridade, definição retirada de WAGNER [30].

[44] Vizinhos são aqueles que compartilham uma aresta.

[45] Dois naturais são congruentes módulo 2 quando deixam o mesmo resto na divisão por 2.

Problema 35 *Os Duendes invadiram o Cone Sul.* . . . .

Em Terra Brasilis existem n casas onde vivem n duendes, cada um em uma casa. Existem estradas de mão única de tal modo que:

- *cada estrada liga duas casas;*
- *em cada casa começa exatamente uma estrada;*
- *em cada casa termina exatamente uma estrada.*

Todos os dias, a partir do dia 1, cada duende sai da casa onde está e chega à casa vizinha. Uma lenda de Terra Brasilis diz que, quando todos os duendes regressarem à posição original, o mundo acabará.

(a) Demonstre que o mundo acabará.

(b) Se n = 98, demonstre que é possível que os duendes construam e orientem as estradas de modo que o mundo não se acabe antes de 300.000 anos.

[Solução]

(a) Numere os duendes de 1 a n e seja *f(i)* o vizinho do duende número i. A função f é claramente uma bijeção. Em algum momento cada duende retornará a sua casa pois a seqüência *f (i)*, *f (f (i))*, *f (f (f (i)))*, ... assume um número finito de valores, donde existirão inteiros positivos $r < s$ tais que $f_s\,(i) \ = f_r\,(i)$, portanto $f_s \circ f_r\,(i) = i$ (pois f é bijetora). Seja $g(i)$ o menor inteiro positivo tal que o duende i retorna à sua casa depois de $g(i)$ dias. Depois de $mmc(g(1),\ g\ (2),...,g(n))$ dias, todos os duendes retornarão à posição original e o mundo acabará.

(b) Divida os 98 duendes em 8 ciclos de tamanhos 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 $(98 = 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23)$. Os duendes retornarão à posição inicial depois de $3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 = 111546435 > 366 \times 300.000$. Alternativamente, podemos dividir os duendes em ciclos de tamanhos 3, 8, 9, 5, 7, 11, 13, 19 e 23, e eles retornarão à posição original em

$$mmc(3,8,9,5,7,11,13,19,23) = 8\times\ 9\times\ 5\times 7\times\ 11\times\ 13\times\ 19\times\ 23 = 157.477.320$$

■

Problema 36 *Tabuleiro em Maio*[46] *de 2004* . . . .

Em cada casa de um tabuleiro de 5×5 estťa escrito 1 ou –1. Em cada passo troca-se o número de cada uma das 25 casas pelo resultado da multiplicação dos números de todas as suas casas vizinhas. Inicialmente se tem o tabuleiro da figura 43. Mostre como fica o tabuleiro ao final de 2004 passos.

1	1	−1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Figura 43: 1 ou –1

[Solução] Quando não se tem ideia de como será a solução de uma questão, pode-se obter vários indícios fazendo alguns casos menores e buscando observar algum padrão. Ao achá-lo, basta analisar em que situação cairá o número 2004. Esse fica como exercício!

■

[46] Problema retirado da Olimpíada de Maio de 2004.

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando se fala em algum tópico de matemática que não é recorrente nos editais dos vestibulares comuns, a primeira coisa que se pensa é no risco de ensinar algo que o estudante não será testado pelos exames oficiais. Contudo, essa é uma ideia ultrapassada. Boa parte dos tópicos mais interessantes da matemática não constam nas ementas dos processos seletivos não olímpicos.

Grafo é um deles e as matrizes (juntamente com os determinantes) que já estiveram como uma das mais queridas, hoje, estão relegadas ao segundo plano. A responsabilidade por esse fato está no ensino mecânico e pueril que não vangloria o processo criativo como um dos motes da escola contemporânea.

No mais, as atividades corroboraram para robustecer a argumentação desenvolvida durante o texto, unindo ludicidade e formalismo em questões comuns e, ao mesmo tempo, desafiadoras, de modo que as habilidades fundamentais para a sequência de uma educação numérica, garantam-se. Por fim, ressalta-se a educação voltada para a resolução de problemas, sem os quais a matemática perderia todo o sentido.

CAPÍTULO 8

ATIVIDADES.

Essas atividades compõe um dos requisitos básicas para a dissertação do PROFMAT. Todas são acompanhadas das devidas instruções e métodos de aplicação na educação básica, com indicação de ano(s)/série(s) adequadas e com as devidas soluções quando forem o caso.

8.1 Jogos para aprender a desenhar grafos.

[Referência na Dissertação] Capítulos 2 e 6.

[Ano/Série] Essa é uma atividade para qualquer ano do Fundamental 2 e/ou para as séries iniciais do Ensino Médio.

[Tempo Pedagógico] O tempo será ajustado para o respectivo ciclo de aplicação da atividade, a saber: para o Fundamental 2, a teoria inicial deve ter 200 min (capítulo 2). A atividade 8.1 deve ter 30 minutos de apresentação completa do jogo 1 e 60 minutos para a turma tirar as conclusões dos demais jogos; para o Ensino Médio, a teoria inicial deve ter 100 min (capítulo 2). A atividade 8.1 deve ter 20 minutos de apresentação completa do jogo 1 e 50 minutos para a turma tirar as conclusões dos demais jogos.

Uma das formas interessantes de introduzir o uso dos grafos é através dos jogos de sequência de ações. Abaixo estão destacados alguns jogos que, a depender dos passos executados, e obedecendo as regras preestabelecidas, chegam ao resultado desejado. O planejado é que todos os jogos sejam apresentados com algum diagrama (não necessariamente grafos triviais) para que haja interação com os desenhos (de raciocínios lógicos) na matemática.

O diagrama facilita para a não repetição do erro. Um erro cometido e entendido como não contínuo ao jogo finaliza um ramo do grafo. É importante também pois segrega os caminhos e executados de modo imperfeito destacando as partes a não serem repetidas. Deixa-se claro que o diagrama pode ser ainda sem uma estrutura formal (ainda sem ser um grafo). O intuito é desenvolver habilidades, só que isso não se vende em caixas, faz-se necessário, um trabalho gradual de desenvolvimento.

Jogo 1 *O Lobo e a Ovelha*

Figura 44: O Lobo e a Ovelha

A figura 44 é referente ao jogo "O Lobo e a Ovelha[47]" cuja regra é:

"o camponês deseja atravessar o rio, mas ele tem que ser cuidadoso para que o lobo não coma a ovelha e para que a ovelha não coma o couve." (texto do site).

Estruturando o diagrama para a lógica do jogo tem-se que:

$$C \leftarrow L \times O$$

$$L \leftarrow O \times C$$

$$O \leftarrow \quad \emptyset \rightarrow \begin{cases} C \leftarrow \quad O \times C \\ L \leftarrow \quad O \rightarrow \quad C \leftarrow \quad \emptyset \rightarrow \quad O \leftarrow \end{cases}$$

Logo, a ovelha deve ir (e o barco volta vazio), depois o lobo e nesse momento a ovelha volta, daí vai a couve e o barco volta vazio para buscar o lobo.

[47]Link: http://rachacuca.com.br/jogos/o-lobo-e-a-ovelha/ em 24/10/2013 às 15:03h.

Nesse momento deve pensar na simplicidade do jogo de modo ao diagrama ficar limpo, para jogos mais elaborados o diagrama ficará extenso, contudo o tempo de resolução será reduzido pois os erros não deverão ser repetidos ao passo que ficam registrados.

O segundo jogo já é mais elaborado, o uso do diagrama será mais interessante. Esse já pode ser passado para os estudantes esboçarem os primeiros diagramas.

Jogo 2 *Pula Sapo*

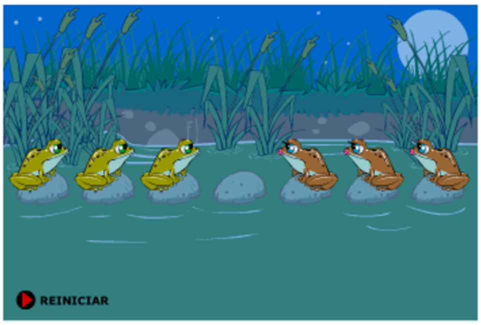


Figura 45: Pula sapo

O objetivo é inverter os sapos de lado, ou seja, os que estão na esquerda devem ser levados para a direita (vice-versa). Cada sapo só pode pular para a pedra à frente ou saltar um (único) sapo do time oposto. Qual o diagrama das possibilidades e no final qual a sequência de pulos que resolve o problema?

Problema 37 *Dominó* . . . .

(a) Considere as seguintes pedras: 0-1, 0-2, 0-3, 1-4, 1-6, 1-3, 2-4, 2-6. Com esse conjunto de pedras é possível formar que tipo de partida? Por quê?

(b) Considere esse outro conjunto de pedras: 0-5, 0-2, 0-3, 0-4, 1-2, 1-4, 4-3, 4-5. Monte um esquema com pontos e linhas para identificar o tipo de partida que seria formada.

(c) Vamos acrescentar as pedras 0-0, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 aos conjuntos de pedras dos itens 1 e 3. Faça os esquemas (os grafos) para cada caso e, com base neles, explique o que ocorre nas partidas.

Jogo 3 *Travessia do Rio*

As regras são as seguintes:

Figura 46: Travessia do Rio

1. Somente o pai, a mãe e o policial sabem pilotar o barco;
2. A mãe não pode ficar sozinha com os filhos;
3. O pai não pode ficar sozinho com as filhas;
4. O prisioneiro não pode ficar sozinho com nenhum integrante da família;
5. O barco só pode transportar 2 pessoas por vez;
6. Você pode ir e vir com as pessoas quantas vezes precisar;
7. Clique nos bonequinhos para colocá-los dentro do barco e depois na alavanca vermelha para atravessá-los.

Jogo 4 *Travessia da Ponte*

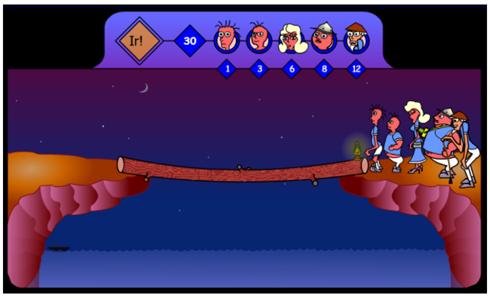


Figura 47: Travessia da Ponte

As regras são as seguintes:

É noite e há somente um lampião;

No máximo 2 pessoas podem cruzar a ponte (sempre com o lampião;

Cada pessoa possua a respectiva velocidada;

A dupla anda na velocidade mais lenta;

O lampião dura 30 segundos, depois disso a travessia da ponte tem que parar.

8.2 Desenhando sem tirar o lápis do papel.

[Referência na Dissertação] Capítulo 2.

[Ano/Série] Essa é uma atividade para qualquer ano do Fundamental 2 e/ou para as séries iniciais do Ensino Médio.

[Tempo Pedagógico] O tempo será ajustado para o respectivo ciclo de aplicação da atividade, a saber: para o Fundamental 2, a teoria inicial deve ter 200 min (capítulo 2). A atividade 8.2 deve ter 5 minutos para a execução de cada atidade. Aqui fica-se apenas com exemplos, o docente pode criar (ou pesquisar uma gama).

Problema 38 *Desenhar é preciso!* ....

É possível desenhar cada um dos grafos abaixo sem tirar o lápis do papel?

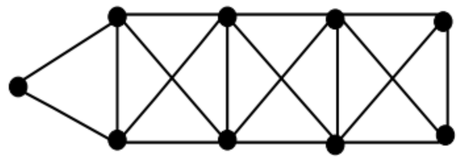


Figura 48: É possível?

Problema 39 *Correio!* ....

É possível distribuir as cartas nas casas da figura abaixo de modo a passar apenas uma única vez por cada uma das ruas que as ligam?

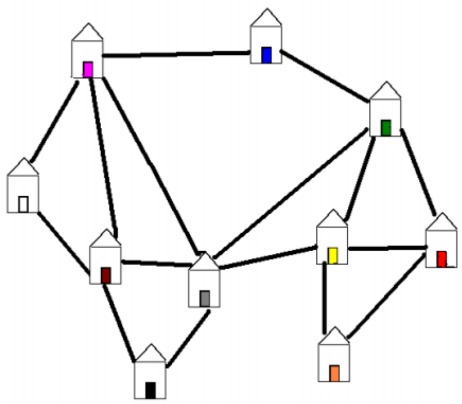


Figura 49: Correio!

8.3 Divisores (I) para aprender a desenhar grafos.

[Referência na Dissertação] Capítulo 2.

[Ano/Série] Essa é uma atividade a partir do oitavo ano até o Ensino Médio.

[Tempo Pedagógico] O tempo será ajustado para o respectivo ciclo de aplicação da atividade, a saber: para o Fundamental 2, a teoria inicial deve ter 200 min (capítulo 2). A atividade 8.3 deve ter 20 minutos de apresentação completa e 5 minutos para a turma tirar as conclusões de cada processo de divisores. Para o E.M., 100 min de teoria e 3 minutos para cada processo de divisores..

Utilizando o conjunto de potências que dividem um número inteiro de modo a construir a árvore de divisores positivos de um número inteiro positivo. Observando o exemplo abaixo, o docente pode criar mais exemplos.

Problema 40 *Divisores I* . . . .

Observe o grafo abaixo e determine qual inteiro possui, unicamente, todos os números abaixo como divisores?

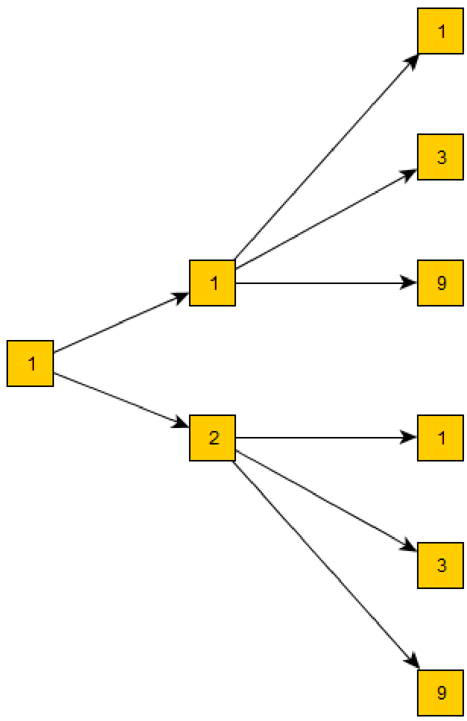


Figura 50: Divisores I

8.4 Divisores (II) para aprender a desenhar grafos.

[Referência na Dissertação] Capítulo 2.

[Ano/Série] Essa é uma atividade para qualquer ano do Fundamental 2 e/ou para as séries iniciais do Ensino Médio.

[Tempo Pedagógio] O tempo será ajustado para o respectivo ciclo de aplicação da atividade, a saber: para o Fundamental 2, a teoria inicial deve ter 200 min (capítulo 2). A atividade 8.1 deve ter 30 minutos de apresentação completa do jogo 1 e 60 minutos para a turma tirar as conclusões dos demais jogos; para o Ensino Médio, a teoria inicial deve ter 100 min (capítulo 2). A atividade 8.1 deve ter 20 minutos de apresentação completa 50 minutos para a turma tirar as conclusões.

Utilizando o conjunto de potências que dividem um número inteiro de modo a construir a árvore de divisores positivos de um número inteiro positivo. Observando o exemplo abaixo, o docente pode criar mais exemplos.

Problema 41 *Divisores II* . . . .

Observe os grafos abaixo e depois faça o mesmo processo para os números, 8, 20, 60 e 80?

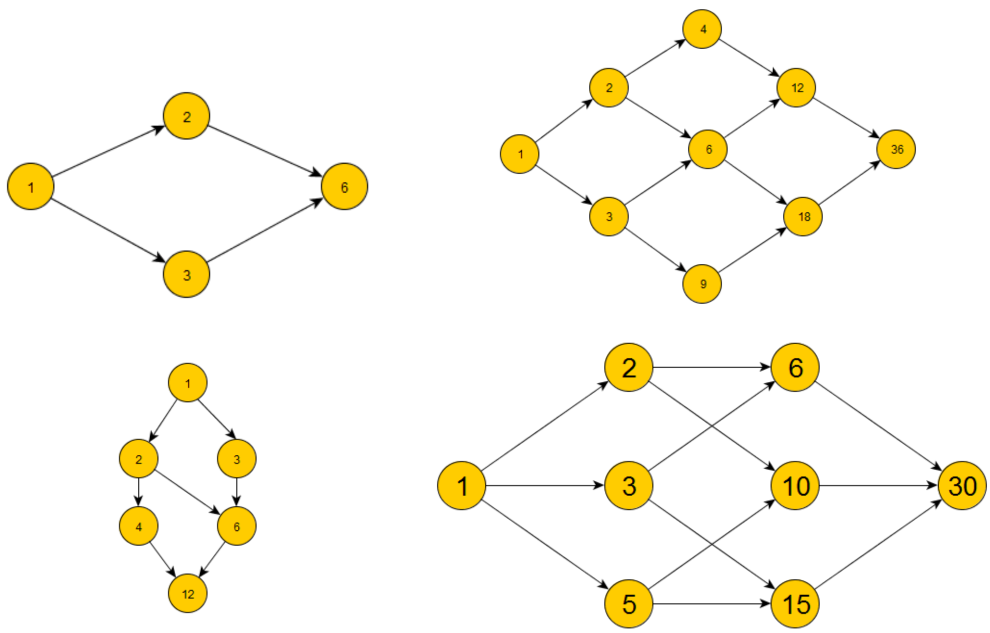


Figura 51: Divisores de 6, 12, 30 e 36.

8.5 Divisibilidade por 7, observando um problema olímpico.

[Referência na Dissertação] *Capítulo 2.*

[Ano/Série] *Essa é uma atividade a partir do sexto ano até as duas séries iniciais do Ensino Médio.*

[Tempo Pedagógio] *O tempo será comum para todos/as anos/séries, a aplicação do problema pode ser imediata, apenas na leitura do enunciado e no processo da atividade 25 min (seguinto a aplicação do capítulo 2, um uso apenas como leitura de grafo). A atividade 8.5 deve ter 10 minutos de apresentação do algoritmo e 15 minutos para a ação dos estudantes. A partir do nono ano deve-se explicar formalmente o funcionamento do algoritmo. (30 minutos)*

Problema 42 *Olimpíada Paulista de Matemática – 2010 – Fase 1 – Níveis Alfa e Beta*

Neste problema vamos mostrar uma forma de calcular o resto da divisão de um número inteiro positivo por 7. Considere a figura 52, com os restos que um número inteiro pode deixar na divisão euclidiana por 7 e algumas flechinhas pretas ou brancas entre eles. Para descobrir o resto da divisão de um número qualquer n por 7, fazemos o seguinte:

- *partimos do zero e seguimos o caminho indicado por x_1 flechas pretas, sendo x_1 o algarismo mais à esquerda de n.*
- *Seguimos por uma flecha branca e então seguimos o caminho indicado por x_2 flechas pretas, sendo x_2 o segundo algarismo mais à esquerda de n.*
- *Seguimos por uma flecha branca e então seguimos o caminho indicado por x_3 flechas pretas, sendo x_3 o terceiro algarismo mais à esquerda de n; e*
- *assim por diante até seguir a quantidade de flechas pretas indicada pelo algarismo das unidades de n e terminar em algum dos restos de 0 a 6.*

O número no qual terminarmos é o resto da divisão de n por 7.

Por exemplo, para $n = 3401$:

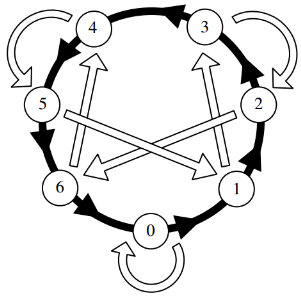


Figura 52: Regra do 7

Partimos do 0 e seguimos por 3 flechas pretas, chegando em 3.

Seguimos uma flecha branca para 2 e, então, seguimos por 4 flechas pretas, chegando em 6.

Seguimos uma flecha branca para 4 e, então, seguimos por 0 flecha preta (ou seja, ficamos na mesma posição), continuando em 4.

Seguimos uma flecha branca para 5 e, então, seguimos por 1 flecha preta, chegando em 6.

Podemos concluir que 6 é o resto da divisão de 3401 por 7.

Perguntas:

a) Encontre, segundo a regra descrita, o resto da divisão de 4288 por 7. Seguindo o modelo acima, descreva os passos para obtenção do resto.

b) Encontre, segundo a regra descrita, o resto da divisão de 10^{2010} *por 7.*

Não é necessário descrever todos os 2011 passos ☺! Justifique.

....

Para finalizar essa atividade, cabe destacar que em sala podem ser criados diversos números, talvez menores em quantidade de dígitos, para possibilitar a compreensão de todos. Começando com números de 1 algarismo, depois 2 algarismos, etc.

8.6 Grafos na OBMEP.

[Referência na Dissertação] *Capítulo 2.*

[Ano/Série] *Essa é uma atividade para qualquer ano do Fundamental 2 e/ou para as séries iniciais do Ensino Médio.*

[Tempo Pedagógio] *O tempo será ajustado para o respectivo ciclo de aplicação da atividade, a saber: para o Fundamental 2, a teoria inicial deve ter 200 min (capítulo 2). A atividade 8.6 deve ter 30 minutos de apresentação completa da busca das questões e para cada problema, 10 minutos; e para o Médio, teoria em 100 minutos (capítulo 2) e a atividade 8.6 deve ter 20 minutos de apresentação completa da busca das questões e para cada problema, 5 minutos.*

No novo site da OBMEP há a possibilidade de encontrar problemas por assunto nas provas anteriores e também nos bancos de questões. Basta ir na área de material didático e escolhar "Provas e Soluções" ou "Banco de Questões". É importante durante a execução dessa atividade, expor aos estudantes como eles podem buscar informação e base de estudo sem a depedência do professor.

8.7 Matrizes de Adjacência

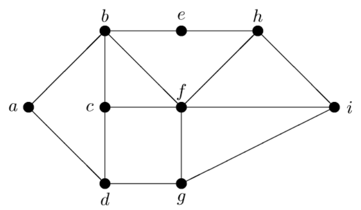
[Referência na Dissertação] *Capítulo 4.*

[Ano/Série] *Essa é uma atividade para todas os/as anos séries a partir do oitavo.*

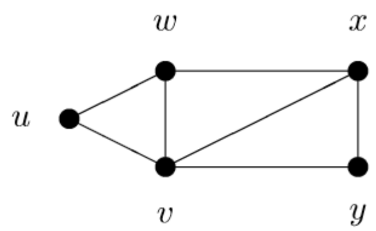
[Tempo Pedagógio] *O tempo será de 100 min (capítulo 4). A atividade 8.7 deve ter 50 minutos de apresentação completa da teoria e mais 5 minutos para o leitura dos grafos para construção das matrizes de adjacência.*

Problema 43 *Construindo matrizes*..

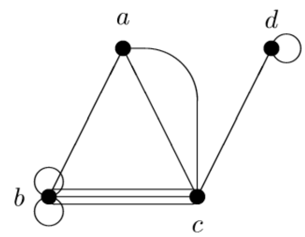
A partir dos grafos a seguir construa as respectivas matrizes de adjacência.



a) Figura 53: 9 vértices



b) Figura 54: 5 vértices



c) Figura 55: 4 vértices

Problema 44 *Construindo grafos*..

A partir das matrizes de adjacência a seguir construa os respectivos grafos e depois avalie o grau de cada vértice.

$$a)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8.8 Três problemas explorando grafos e matrizes

[Referência na Dissertação] Capítulos 3, 4 e 5.

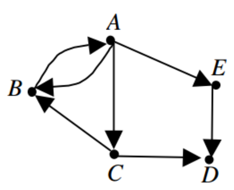
[Ano/Série] Essa é uma atividade para a segunda e a terceira séries do Ensino Médio.

[Tempo Pedagógio] O tempo será de 200 min (capítulos 4 e 5). A atividade 8.8 deve ter 50 minutos de apresentação completa da teoria e mais 10 minutos para o problema 45 e 5 minutos para os problemas 46 e 47.

Problema 45 *OPM 2009 – Fase 2* . . . .

Um grafo orientado é formado por um conjunto finito $V = P_1$ *,*P_2 *, ...,* P_n *, cujos elementos denominamos vértices, e por um conjunto* $E \subset V \times V$ *; os elementos de E são denominados arestas. O estudo de estruturas como essas é uma área muito importante da Matemática contemporânea denominada Teoria dos Grafos. Os chamados grafos são vitais para a Computação e suas aplicações estendem-se até aos Negócios e às Ciências Sociais. Vejamos um exemplo que dá uma mostra bastante simplificada do que pode ser feito em Teoria dos Grafos.*

Vamos supor que em um estudo sociológico observaram-se as seguintes relações: Arnaldo influencia Bernaldo; Arnaldo influencia Cernaldo; Arnaldo influencia Ernaldo; Bernaldo influencia Arnaldo; Cernaldo influencia Bernaldo; Cernaldo influencia Dernaldo e Ernaldo influencia Dernaldo. Então tomando $V = A, B,C, D, E$ *e* $E = (A, B),(A,C),(A, E),(B, A),(C, B),(C, D),(E, D)$ *obtemos o grafo que representa essencialmente a situação descrita, o qual usualmente é representado através de um diagrama como o mostrado na figura .*



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [A(G)]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 56: Grafo da Influência

Seja G um grafo orientado com n vértices. Consideramos a matriz $n \times n$ *com* $a_{ij} = 1$ *se* (P_i,P_j) *é uma aresta de G e* $a_{ij} = 0$ *caso contrário.*

Tal matriz é denominada matriz de adjacência de G e é indicada por A(G) .

Acima, à direita, exibimos a matriz de adjacência do exemplo dado e o seu quadrado, $A[G]^2 = A[G] \cdot\ A[G]$.

Um caminho entre os vértices P_i *e* P_j *em um grafo orientado G é uma sequência de vértices* P_{i1},P_{i2}, ... , P_{im} *em que* $P_{i1} = P_i$, $P_{im} = P_j$ *e* (P_{ik},$P_{i(k+1)}$) *é uma aresta de G e é indicada por* $A[G], 1 \leqslant k < m$. *Ou seja, podemos partir do vértice* P_i *e, percorrendo arestas de G, ir até* P_j .

a) Mostre que, em todo grafo orientado G, o elemento b_{ij} *da matriz é igual à quantidade de caminhos entre* P_i *a* P_j *com exatamente duas arestas.*

b) Prove que existe um caminho entre quaisquer dois vértices (distintos ou não) de um grafo orientado G de n vértices se, e somente se, $A[G] + A[G]^2 + A[G]^3 + A[G]^4 + ...$ *é uma matriz formada apenas por números positivos.*

Problema 46 *UNESP – 2009*[48] . . . .

Uma rede de comunicação tem cinco antenas que transmitem uma para a outra, conforme mostrado na matriz $A = (a_{ij})$, *onde* a_{ij}= *1 significa que a antena i transmite diretamente para a antena j, e* a_{ij} = *0 significa que a antena i não transmite para a antena j.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual o significado do elemento b_{41} *da matriz* $B = A^2$*?*

a) Como b_{41} = *0, isso significa que a antena 4 não transmite para a antena 1.*

b) Como b_{41} = *1, isso significa que a antena 4 transmite para a antena 1.*

c) Como b_{41} = *3, isso significa que a antena 4 transmite para a antena 1.*

d) Como b_{41} = *3, isso significa que existem 3 maneiras diferentes de a antena 4 transmitir para a antena 1, usando apenas uma retransmissão entre elas.*

e) Como b_{41} = *3, isso nada significa, pois* b_{ij} *só pode valer 0 ou 1, conforme definido no enunciado da questão.*

[48]Resposta: D

Problema 47 *FMTM MG – 2003*[49] . . . .

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$*, um elemento indica que a estação i pode atingir (transmitir) diretamente a estação j. Na matriz , o elemento cij indica o número de maneiras pelas quais a estação j pode ser atingida através de uma retransmissão de outra estação. O número de maneiras pelas quais a estação 2 pode ser atingida diretamente ou por uma retransmissão é:*

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

....

[49]Resposta: B

8.9 Criptografia com Matrizes.

[Referência na Dissertação] Capítulos 3 e 4.

[Ano/Série] Essa é uma atividade para qualquer série do Ensino Médio.

[Tempo Pedagógio] O tempo será de 200 min.

- A atividade 8.9, após explicação da teoria, deve ser passada para casa de modo a compor o arcabouço intermediário de produção do estudante. São apenas 2 problemas, mais a complexidade é intermediária. Pode ser solicitado que os estudantes criem elementos criptográficos a partir desses métodos e desafiem os colegas em sala.

Problema 48 *UEL PR – 2006 – adaptada* . . . .

Uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:

1. Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave C ;

2. O destinatário recebe do remetente uma matriz P , tal que MC =P , onde M é a matriz mensagem a ser decodificada;

3. Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: 1=a, 2=b, 3=c, ..., 23=z;

4. Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras k, w e y;

5. O número zero corresponde ao ponto de exclamação;

6. A mensagem é lida, encontrando a matriz M, fazendo a correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue: $m_{11}m_{12}m_{13}m_{14}m_{15}m_{16}m_{17}m_{18}$.

Considere as matrizes:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nos conhecimentos e nas informações descritas, calcule mensagem que foi enviada por meio da matriz M. [50]

[50] Resposta: Boasorte!

Problema 49 *UFG GO – 2011 – Segunda Fase* . . . .

Uma técnica para criptografar mensagens utiliza a multiplicação de matrizes. Um codificador transforma sua mensagem numa matriz M, com duas linhas, substituindo cada letra pelo número correspondente à sua ordem no alfabeto, conforme modelo apresentado a seguir.

Letra	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Letra	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*
Número	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Letra	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*	_
Número	22	23	24	25	26	27

Tabela 5: Chave de Criptografia

Por exemplo, a palavra SENHAS ficaria assim:

$$M = \begin{bmatrix} S & E & N \\ H & A & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 \\ 8 & 1 & 19 \end{bmatrix}$$

Para codificar, uma matriz 2×2, A, é multiplicada pela matriz M, resultando na matriz $E = A \times B$ que é a mensagem codificada a ser enviada. Ao receber a mensagem, o decodificador precisa reobter M para descobrir a mensagem original. Para isso, utiliza uma matriz 2×2, B, tal que B $\times$ A $=$ I, onde I é a matriz identidade (2×2). Assim, multiplicando B por E, obtém-se B $\times$ E $=$ B $\times$ A $\times$ M $=$ M.

Uma palavra codificada, segundo esse processo, por uma matriz A $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ resultou na matriz E $= \begin{bmatrix} 47 & 30 & 29 \\ 28 & 21 & 22 \end{bmatrix}$.

Calcule a matriz B, decodifique a mensagem e identifique a palavra original. [51]

[51] Resposta: B $= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ Decodificação (SIGILO): BE $= \begin{bmatrix} 19 & 9 & 7 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & I & G \\ I & L & O \end{bmatrix}$

BIBLIOGRAFIA

[1] *Eureka 19 (revista)*, Soluções da Prova da OBM de 2003 Fase3.

[2] *15 problemas que magoaram os professores*, Link: http://www.obm.org.br/(...)/semana_olimpica/(...)/2012/problemasmagoaram.pdf acessado em 23/12/2013 às 10:54h, 2012.

[3] Adérito Araújo, *As pontes de königsberg*, Link: http://www.mat.uc.pt/ alma/escolas/pontes/ acessado em 04/01/2014 às 10:15h, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

[4] Paulo Cezar Pinto Carvalho, *Dois problemas sobre grafos*, Revista Eureka (1998), no. 1, Link: http://www.obm.org.br/opencms/ acessado em 23/12/2013 às 9:42h.

[5] ______, *O princípio das gavetas*, Eureka (1999), no. 5.

[6] Nuno Crato, *Entrevista*, Revista Veja (2013), 03/06/2013.

[7] Luiz Roberto Dante, *Didática da resolução de problemas de matemática*, 12 edição ed., Ática, 1999.

[8] Einstien do Nascimento Jr e Samuel Barbosa Feitosa, *Par ou Ímpar? eis a questão*, Eureka (2009), no. 31.

[9] Krerley Irraciel Martins Oliveira e Adán José Corcho Fernández, *Iniciação à matemática, um curso com problemas e soluções*, SBM, Rio de Janeiro, 2010.

[10] Dmitri Fomin et al., *Círculos matemáticos. a experiência russa*, IMPA, 2010.

[11] Gábor Horváth et al, *Mathematics in good will hunting ii problems from the students perspective*, Link: http://www.math.unideb.hu/ ghorvath/publications/gwh2.pdf acessado em 20/12/2013 às 11:23h (2010), 14.

[12] José Plínio O. Santos et al, *Introdução à análise combinatória*, Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

[13] Regina Célia Grando, *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*, Paulus, São Paulo, 2004.

[14] Samuel Jurkiewicz, *Matemática discreta e ensino médio*, Link: http://ensino.univates.br/ chaet/Materiais/matdiscretamedio.pdf acessado em 22/01/2014 às 14:48h.

[15] ______, *Grafos: Uma introdução*, OBMEP, 2009, www.obmep.org.br acessado em 20/11/2013 às 23:47h.

[16] Elon Lages Lima, *Água,luz e telefone*, RPM (1988), no. 12, Disponível em CD.

[17] ______, *Conceituação, manipulação e aplicações. as três componentes do ensino de matemática*, RPM (1999), no. 41, Disponível em CD.

[18] Célia Maria Carolino Pires Marcio Antonio da Silva, *Organização curricular da matemática no ensino médio: A recursão como critério*, Internet, Link: http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v19n2/a02v19n2.pdf acessado em 16/01/2014 às 10:44h.

[19] Secretaria da Educação Básica Ministério da Educação e Cultura MEC, *Orientações curriculares para o ensino médio. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*, vol. 2, BRASIL, 2006.

[20] Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMT) Ministério da Educação (MEC), *Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio*, vol. 3, BRASIL, Brasília, 1998.

[21] Grupo Matemática Multimídia, *Grafos e matrizes*, 2010.

[22] Antônio Caminha Muniz Neto, *Tópicos de matemática elementar*, vol. Volume 4: Combinatória, SBM, 2012.

[23] Jorge Picado, *Estruturas discretas*, Link: http://www.mat.uc.pt/ picado/ediscretas/apontamentos/ acessado em 19/01/2014 às 23:17h, 2010, Capítulo 2.

[24] João Bosco Pitombeira, *O problema das ligações de Água,luz e telefone. uma aplicação da fórmula de euler*, RPM (1987), no. 11, Disponível em CD.

[25] George Polya, *A arte de resolver problemas*, Interciências, Rio de Janeiro, 1986, Primeira reimpressão. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo.

[26] Carlos Yuzo Shine, *21 aulas de matemática olímpica*, SBM, Rio de Janeiro, 2009, Capítulo 7 Grafos e Contagem Dupla.

[27] Ulysses Sodré, *Exponencial de uma matriz*, Link: http://www.alunospgmat.ufba.br/web/arquivo/index.htm acessado em 23/11/2013 ás 12:42h (2001).

[28] Carlos Tomei, *Matrizes de adjacência*, Link: MAT1202/files/teoria/mad.pdf acessado em 13/12/2013 ás 11:45h (2012).

[29] Alejandro Rodríguez Villalobos, *Software: Grafos - versão 1.3.5 (2012)*, Site, 2012, Link: http://arodrigu.webs.upv.es/grafos acessado em 12/12/2013 ás 16:13h.

[30] Eduardo Wagner, *Paridade*, Revista Eureka (1998), no. 2.

[31] ———, *10 matemáticos, 100 problemas*, edição 1 ed., Associação Olimpíada Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2008.

APÊNDICE A

PONTES DE KÖNIGSBERG

O texto a seguir é uma leve adaptação de [4], com alguns acréscimos.

A situação estudada por Euler ficou imortalizada como o Problema das Pontes de Könisberg, ilustrado na lenda abaixo juntamente com a figura .

Lenda 1 *A cidade de Königsberg (hoje Kaliningrado) é banhada pelo rio Pregel que, ao atravessar a cidade se ramifica formando duas ilhotas que estão ligadas entre si às partes da cidade por sete pontes. Dizia-se que os habitantes da cidade, nos dias de descanso, tentavam efetuar um percurso que os obrigasse a passar por todas as pontes, mas apenas uma vez em cada uma e retornar ao ponto de partida. Como as suas tentativas sempre falharam, muitos deles acreditavam que não era possível encontrar tal percurso. Será que tinham razão?*

Figura 57: Königsberg e seu grafo!

Em linguagem de grafos, trata-se de encontrar um circuito euleriano no grafo da figura acima, no qual os vértices representam as ilhas e as margens e os arcos são as pontes[52]. Euler mostrou a não-existência de tal circuito através de um argumento extremamente simples. Consideremos, por exemplo, a ilha da direita. Um circuito qualquer deve chegar à ilha e sair dela o mesmo número de vezes. Logo, para que exista um circuito euleriano, deve haver um número par de pontes com extremidade nesta ilha. Como existem três pontes nessas condições, concluímos que não é possível encontrar um circuito euleriano. De modo mais geral, temos o seguinte:

Teorema 3 ***(Euler)*** *Existe um circuito euleriano em um grafo se e somente se o grafo é conexo (isto é, existe um caminho ligando qualquer par de vértices) e cada vértice tem grau par (ou seja, o número de arcos que nele incidem é par).*

O argumento acima mostra a necessidade de se ter grau em cada vértice para existir um circuito euleriano. É também óbvio que o grafo precisa ser conexo. A prova de que essas duas condições implicam na existência de um circuito euleriano pode ser feita por indução finita no número de arcos do grafo e não será posta aqui.

O caminho é supor propriedade verdadeira para grafos com menos de n arcos e considere um grafo com n arcos, satisfazendo às duas condições. Começando em um vértice qualquer, percorra arcos do grafo, até voltar a um vértice já visitado (o caminho gerado possui, então, um ciclo). Retirando do grafo os arcos desse ciclo, obtém-se um ou mais grafos satisfazendo as duas condições e com menor número de arcos (portanto, com circuitos eulerianos, de acordo com a hipótese de indução). Basta explicar como "costurar" esses circuitos eulerianos ao ciclo descrito acima.

Pode-se aplicar este teorema ao problema de inspeção de estradas. Da mesma forma como no Problema das Pontes de Könisberg, não existe qualquer circuito euleriano no grafo determinado pelo mapa rodoviário, já que o vértice correspondente à capital tem grau 3. Assim, se o nosso inspetor de estradas recebesse de seu chefe a incumbência de elaborar um trajeto nas condições dadas, ele poderia facilmente convencê-lo da impossibilidade de fazê-lo utilizando o teorema 3.

[52] A rigor, neste caso temos um multi-grafo, já que certos pares de vértices são ligados por mais de um arco.

APÊNDICE B

LEVAR ÁGUA, LUZ E ESGOTO PARA 3 CASAS.

O texto a seguir é uma leve adaptação de [16], com ajustes de linguagem.

Representando (com bastante criatividade) as centrais de água, luz e telefone pelas letras A, L, T e as três casas por pontos X, Y e Z. Comecemos ligando água e luz às casas X e Y. Obtem-se um "quadrilátero com possível lado curvilínio" XAYL.

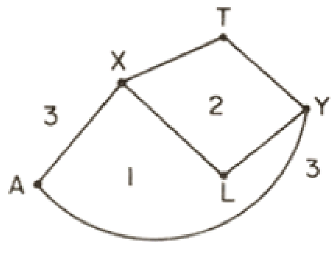


Figura 58: Casas e ligações

A central telefônica T pode estar dentro ou fora deste quadrilátero. Isto não fará diferença alguma mas, para fixar as idéias, suponhamos que esteja fora, como na Figura 58[53]. Liguemos o telefone nas casas X e Y. Ficamos com dois "quadriláteros" adjacentes XAYL e XLYT, os quais decompõem o plano em três regiões, que designamos por 1, 2 e 3, conforme figura 58. (As regiões 1 e 2 são interiores aos quadriláteros, enquanto a região 3 é exterior.) A terceira casa, Z, deverá estar numa dessas três regiões.

[53]Figura original de [16]

Se Z estiver na região 1, poderemos ligar-lhe água e luz porém não telefone. Se estiver na região 2, ficará com luz e telefone, mas sem água. Finalmente, se Z estiver na região 3, poderá ter água e telefone, mas não terá luz. Portanto, as nove ligações não podem ser todas feitas sem que se cruzem, e o problema está resolvido.