



**Marcelo Nascimento Lorio**

**Aproximações de números reais por números racionais:  
Por que as convergentes de frações contínuas fornecem as  
melhores aproximações?**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador : Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro  
Março 2014



**Marcelo Nascimento Lorio**

**Aproximações de números reais por números racionais:  
Por que as convergentes de frações contínuas fornecem as  
melhores aproximações?**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Marcos Craizer**

Orientador

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Profa. Christine Sertã Costa**

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Profa. Gabriela dos Santos Barbosa**

Fundação Educacional Unificada Campograndense – FEUC

**Prof. Antonio Carlos Branco**

Fundação Getúlio Vargas – FGV

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro  
Técnico Científico PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de março de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

### **Marcelo Nascimento Lorio**

Licenciou-se em Matemática na Faculdade de Humanidades Pedro II. Foi aluno da PUC-Rio e da Academia Militar das Agulhas Negras. Foi coordenador pedagógico do Colégio Andrews e do Centro Educacional da Lagoa, e Diretor Acadêmico da Universidade Estácio de Sá. É Professor da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro, tendo exercido o cargo de coordenador pedagógico do Ginásio Experimental de Novas Tecnologias Educacionais. É Professor efetivo da Fundação de Apoio à Escola Técnica (FAETEC). Leciona raciocínio lógico e matemática aplicada no curso de administração da Universidade Cândido Mendes.

Lorio, Marcelo Nascimento

Aproximações de números reais por números racionais: por que as convergentes de frações contínuas fornecem as melhores aproximações? / Marcelo Nascimento Lorio ; orientador: Marcos Craizer. – 2014.

61 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2014.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Frações Contínuas. 3. Aproximações. 4. Convergentes. 5. Visualizações geométricas. 6. Algoritmo de Euclides. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD : 510

Para os meus Pais, Olga(in memorian) e Conrado pelo  
amor incondicional.

## Agradecimentos

À Deus, matemático maior, que dissipa sempre todas as minhas dúvidas.

Ao meu amado Pai que não se cansa de me ajudar.

Ao meu orientador; Professor Marcos Craizer, que sendo grande, sempre se mostrou disponível para estar perto e ajudar.

À todos os meus professores da PUC-Rio.

À Capes, ao Profmat e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

À minha companheira Monica Deveza Paciello por todo apoio, paciência e compreensão.

Aos meus filhos queridos, Rodrigo, Daniel e Isabela, pela inspiração.

Aos meus colegas de mestrado pela rede de cooperação que nos fortificou até o fim.

## Resumo

Lorio, Marcelo Nascimento; Craizer, Marcos. **Aproximações de números reais por números racionais: Por que as convergentes de frações contínuas fornecem as melhores aproximações?** Rio de Janeiro, 2014. 61p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Frações Contínuas são representações de números reais que independem da base de numeração escolhida. Quando se trata de aproximar números reais por frações, a escolha da base dez oculta, frequentemente, aproximações mais eficientes do que as exibe. Integrar conceitos de aproximações de números reais por frações contínuas com aspectos geométricos traz ao assunto uma abordagem diferenciada e bastante esclarecedora. O algoritmo de Euclides, por exemplo, ao ganhar significado geométrico, se torna um poderoso argumento para a visualização dessas aproximações. Os teoremas de Dirichlet, de Hurwitz-Markov e de Lagrange comprovam, definitivamente, que as melhores aproximações de números reais veem das frações contínuas, estimando seus erros com elegância técnica matemática incontestável.

## Palavras-Chave

Frações Contínuas; aproximações; convergentes; visualizações geométricas; algoritmo de Euclides.

## Abstract

Lorio, Marcelo Nascimento; Craizer, Marcos (Advisor). **Approximations of real numbers by rational numbers: why the continued fractions converging provide the best approximations?** Rio de Janeiro, 2014. 61 p. Msc. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Continued fractions are representations of real numbers that are independent of the choice of the numerical basis. The choice of basis ten frequently hides more than shows efficient approximations of real numbers by rational ones. Integrating approximations of real numbers by continued fractions with geometrical interpretations clarify the subject. The study of geometrical aspects of Euclid's algorithm, for example, is a powerful method for the visualization of continued fractions approximations. Theorems of Dirichlet, Hurwitz-Markov and Lagrange show that, definitely, the best approximations of real numbers come from continued fractions, and the errors are estimated with elegant mathematical technique.

## Keywords

Continued Fractions; approximations; convergent; geometric views; Euclid's algorithm.

## Sumário

1.	Introdução	11
2.	Um pouco de História	
2.1	Os primeiros matemáticos que estudaram o assunto	12
2.2	Adolf Hurwitz e Andrei Andreyevich Markov	14
3.	Sequências de aproximações racionais	15
3.1	Aproximações com denominadores $q$	15
3.2	Condições para uma boa aproximação	16
3.3	A prova geométrica do teorema 3.1.1	16
3.4	A existência de melhores aproximações	20
4.	Frações Contínuas	22
4.1	Definição	22
4.2	Frações contínuas finitas e infinitas	23
4.3	Convergentes (ou Reduzidas)	23
4.4	Exemplos	23
5.	O algoritmo de Euclides e as Frações Contínuas	28
5.1	O algoritmo	28
5.2	A relação entre o algoritmo de Euclides e Frações Contínuas	28
5.3	Um exemplo	29
5.4	Uma representação geométrica do algoritmo de Euclides	29
6.	Frações contínuas como as melhores aproximações de um número real	32
6.1	Algumas fórmulas simples	32



6.2	Uma fórmula exata para um número real	34
6.3	O cálculo do erro	35
6.4	O Teorema de Dirichlet	35
6.5	Uma visão geométrica das melhores aproximações	37
6.6	Exemplos	39
7.	O Teorema de Hurwitz – Markov	42
7.1	O enunciado do teorema	42
7.2	A prova do teorema 7.1	42
7.3	Uma visão geométrica do teorema de Hurwitz – Markov	46
7.4	A prova do teorema de Hurwitz – Markov usando o indicador $\lambda_n$	49
7.5	Um exemplo	50
8.	O teorema de Lagrange	52
8.1	O enunciado do teorema	52
8.2	A prova do teorema 8.1	52
8.3	Exemplos	54
9.	Aplicações	55
9.1	Um truque	55
9.2	Frações contínuas e Eletricidade	56
9.3	Um modelo para Física	59
10.	Conclusão	60
11.	Referência Bibliográficas	61

## Lista de Figuras

Foto 1 -	John Wallis	12
Foto 2 -	Leonhard Euler	13
Foto 3 -	Lagrange	13
Foto 4 -	Adolf Hurwitz	14
Foto 5 -	Andrei Markov	14
Figura 1 -	Reticulado $\Lambda$	16
Figura 2 -	Demonstração da Proposição 3.2.1	17
Figura 3a -	Demonstração do Teorema 3.1.1	18
Figura 3b -	Demonstração do Teorema 3.1.1	19
Tabela 1 -	Tabela Comparativa	20
Figura 4 -	Representação do algoritmo de Euclides	30
Figura 5 -	Visualização das relações do algoritmo de Euclides	31
Figura 6 -	A Cruz Hiperbólica	37
Figura 7 -	Aproximações de um racional	40
Figura 8 -	Aproximações de um irracional	41
Figura 9(a) -	Demonstração do Lema 7.3.2	46
Figura 9(b) -	Demonstração do Lema 7.3.2	46
Figura (10a) -	Teorema 7.3.1	47
Figura (10b) -	Teorema 7.3.1	47
Tabela 2 -	Exemplo do teorema de Hurwitz - Markov	51
Tabela 3 -	Aplicação 1	55
Figura 11 -	Associação Mista de Resistores	56

## 1. Introdução

Vamos considerar os números 1,414213562 e 1,470588235, ambos com 9 dígitos decimais em suas representações. Estes números foram obtidos por operações simples em uma máquina de calcular de bolso. O que podemos falar sobre a natureza de cada um deles? Na verdade, apesar de serem números bem semelhantes, se conhecemos nove, noventa ou nove milhões de dígitos decimais de um número não podemos afirmar se esse número é racional ou irracional. No entanto, há uma importante diferença entre os dois: o segundo número é muito próximo do número racional  $\frac{25}{17}$ , com um erro de, aproximadamente,  $3 \times 10^{-10}$ . A fração mais próxima do primeiro número, com denominador de dois dígitos, é  $\frac{99}{70}$ , que possui um erro de  $7 \times 10^{-5}$ , bem maior se comparado com o do segundo número.

Nosso estudo será o de identificar boas aproximações para um número real através de frações convenientes, ou seja, que além de estarem bem próximas do número considerado, não possuam numeradores e denominadores muito grandes.

Primeiramente, iremos constatar que aproximações de números reais feitas por frações cujos denominadores são potências de 10, muitas vezes não são as melhores aproximações racionais para esses números. Apresentaremos, então, o conceito de frações contínuas que sempre fornecem aproximações racionais surpreendentemente boas, estabelecendo, posteriormente, indicadores de qualidade para essas aproximações. Ou seja, veremos que nem todas as aproximações feitas por frações contínuas são igualmente boas.

Voltando aos números iniciais, para aqueles leitores que ficaram curiosos, um deles trata-se do número irracional,  $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$  e o outro, o número racional  $\frac{25}{17}$  que só puderam ser apresentados com 9 dígitos decimais pela limitação física da máquina calculadora em questão.

É certo que uma calculadora não pode provar que  $\sqrt{2}$  é irracional, no entanto, usando uma simples calculadora iremos mostrar, ao término de nosso trabalho que, certamente, podemos distinguir números entre  $\sqrt{2}$  e  $\frac{25}{17}$ .

## 2. Um pouco de História

### 2.1 Os primeiros matemáticos que estudaram o assunto

Encontramos em toda escrita da antiga matemática grega e árabe, exemplos e vestígios de frações contínuas.

Desde a formulação do algoritmo de Euclides(325aC – 265aC), que teve grande influência para o estudo de frações contínuas, passando por estudos realizados por matemáticos dos séculos XVII e XVIII, tais como, Leonhard Euler, Hermite, John Wallis, Lambert e Lagrange, até os dias atuais, as frações contínuas são de grande interesse em várias áreas no campo da matemática, como em teoria dos números, na resolução de equações diofantinas, na ciência da computação, na confecção de algoritmos para o cálculo de aproximações racionais de números reais e problemas na física.

Merece destaque o cientista italiano Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), considerado o descobridor das frações contínuas. Obteve a aproximação de

$$\sqrt{18} \approx 4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \dots}}$$

O matemático britânico John Wallis (1616 – 1703) foi o primeiro a tratar frações contínuas como objeto de estudo. Seu livro “Arithmetica Infinitorum”(1655), desenvolveu e apresentou a surpreendente identidade  $\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \dots}$ . Em seu livro “Opera Mathematica”(1695) utilizou o termo Fração Contínua pela primeira vez e colocou alguns de seus fundamentos básicos, como por exemplo, o cálculo do n-ésimo convergente, descobrindo algumas de suas propriedades.



Foto 1 –John Wallis

Parte da teoria moderna foi desenvolvida por Leonhard Euler (1707 – 1783), grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Em seu trabalho “De Fraction lous Continous”, mostrou que cada racional pode ser expresso como uma fração contínua simples finita, além de uma expressão para o número  $e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}$ , tendo a utilizado para mostrar que  $e$  e  $e^2$  são irracionais. Demonstrou também, a representação de uma série a partir de frações contínuas e vice-versa.



Foto 2 –Leonhard Euler

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático italiano, demonstrou que as raízes irracionais de equações quadráticas têm expansão periódica na forma de fração contínua.

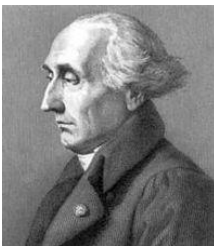


Foto 3 -Lagrange

Estudaremos o teorema de Hurwitz-Markov que apresenta conclusões importantes sobre as aproximações de números reais por racionais, além de estabelecer limites para as aproximações do número da razão áurea, o número de ouro.

Na seção a seguir, apresentaremos , resumidamente, os principais trabalhos desenvolvidos pelos ilustres matemáticos Adolf Hurwitz e Andrei Andreyevich Markov cujo teorema sobre frações contínuas motivou este trabalho..

## 2.2 Adolf Hurwitz e Andrei Andreyevich Markov

Adolf Hurwitz (1859-1919), matemático alemão, iniciou seus estudos universitários de matemática em 1877, na atual Universidade de Munique e posteriormente, por dois anos, na Universidade Humboldt de Berlim. Trabalhou principalmente com a teoria dos números, mas também com análise complexa, investigando o gênero de superfícies de Riemann. Seu nome é perpetuado nos polinômios de Hurwitz, que determina a estabilidade de sistemas dinâmicos.



Foto 4-Adolf Hurwitz

Andrei Andreyevich Markov (1856-1922), matemático russo, formou-se na Universidade Estatal de São Petesburgo em 1878, onde foi professor em 1886. Seus primeiros trabalhos foram limite de integrais e teoria da aproximação. Depois de 1900 aplicou métodos de frações contínuas, que haviam sido iniciados por Pafnuti Tchebychev na teoria da probabilidade. Provou o teorema do limite central. É lembrado pelo seu estudo de cadeias de Markov.



Foto 5 – Andrei Markov

### 3. Sequências de aproximações racionais

#### 3.1 Aproximações com denominadores q

Sabemos que o conjunto dos números racionais é denso em  $\mathbb{R}$ , isto é, números reais podem ser bem aproximados por números racionais, ou seja,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ , com  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \epsilon$ .

Exemplo: Consideremos o número  $\pi = 3,141592633589793238 \dots$ . Podemos escrever que:

$$3 \leq \pi < 4$$

$$\frac{31}{10} \leq \pi < \frac{32}{10}$$

$$\frac{314}{100} \leq \pi < \frac{315}{100}$$

Ou seja, para k casas decimais após a vírgula, teremos:  $\frac{p_k}{10^k} \leq \pi < \frac{p_k+1}{10^k}$ , onde  $p_k$  é o número formado pelos (k+1) primeiros dígitos de  $\pi$ .

O erro cometido nessas aproximações será  $\left| \pi - \frac{p_k}{10^k} \right| < \frac{1}{10^k}$ , que pode ser considerado pequeno se fizermos o valor de k ser muito grande.

O que nos interessa, no entanto, é que tenhamos erros pequenos em nossas aproximações por racionais, mas também que não tenhamos denominadores grandes demais. Comparar o erro com o tamanho do denominador é o que se espera naturalmente. Assim, vejamos o seguinte teorema:

#### 3.2 Condições para uma boa aproximação

A primeira coisa que importa é que o erro,  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$ , seja o menor possível. Mas isso não é tudo: a fração deve ser conveniente, ou seja, os números inteiros p e q não podem ser muito grandes. O tamanho de p depende de  $\alpha$ , o qual não está relacionado com a precisão da aproximação. Então, nós precisamos minimizar dois números, o erro  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$  e o denominador q. Mas os dois objetivos se contradizem. Fazer o erro menor possível é fazer o denominador maior possível!(e vice-versa).

Para conciliarmos essa contradição podemos combiná-los em um indicador de qualidade de uma aproximação.

Chamaremos  $\frac{p}{q}$  uma boa aproximação para um número real  $\alpha$  se o produto  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \cdot q$  for pequeno, digamos, menor que  $\frac{1}{100}$  ou  $\frac{1}{1000000}$  por exemplo.

### 3.3 Teorema 3.1.1 (Das infinitas aproximações)

“Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , e todo  $\varepsilon > 0$ , existem infinitas frações  $\frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q > 0$  tais que  $q \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon$ ”

A prova do teorema tem uma forte inspiração geométrica e o principal ingrediente geométrico para esta inspiração é a noção de reticulado.

Seja  $O$  um ponto origem do plano, e seja  $v = \overrightarrow{OA}$  e  $w = \overrightarrow{OB}$  dois vetores não colineares (que significa que os pontos  $O, A$  e  $B$  não pertencem à mesma reta). Considere o conjunto de todos os pontos que sejam extremidades dos vetores  $pv + qw$  com  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{Z}$ . Isso é o que chamaremos de reticulado ( $\Lambda$ ) gerado pelos vetores  $v$  e  $w$ , apresentado na figura 1. (Um exemplo: Observe que o ponto  $K$  é a extremidade do vetor  $\overrightarrow{OK} = 2v + 3w$ ).

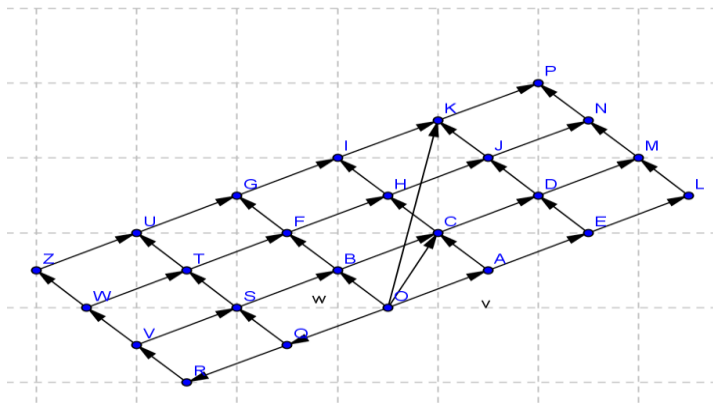


Figura 1 -Reticulado  $\Lambda$

Precisaremos da proposição a seguir para provarmos o teorema.

#### Proposição 3.2.1

Seja  $KLMN$  um paralelogramo tal que os vértices  $K, L$  e  $M$  pertençam ao reticulado  $\Lambda$ , gerado pelos vetores  $v$  e  $w$ . Então,  $N$  também pertencerá ao reticulado  $\Lambda$ .



### Prova da Proposição 3.2.1

Seja  $\overrightarrow{OK} = av + bw$ ,  $\overrightarrow{OL} = cv + dw$ ,  $\overrightarrow{OM} = ev + fw$ , com  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ .  
Então,  $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OK} + (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL}) = av + bw + ev + fw - cv - dw = (a + e - c)v + (b + f - d)w$ , por isso  $N \in \Lambda$ .

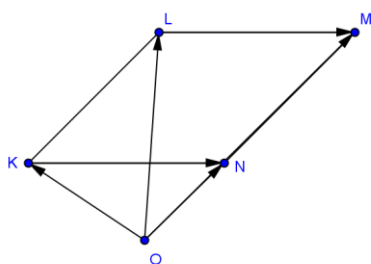


Figura 2 -Demonstração da Proposição 3.2.1

### Proposição 3.2.2<sup>1</sup>

Seja KLMN um paralelogramo com vértices no reticulado  $\Lambda$ .

- (a) A área de KLMN é igual à  $n \cdot s$ , onde  $n$  é um número inteiro positivo e  $s$  a área do paralelogramo elementar OACB, onde  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  (ver figura 1)
- (b) Se nenhum ponto do reticulado  $\Lambda$ , exceto K, L, M, N pertence ao interior do paralelogramo KLMN ou à sua borda, então a área de KLMN é igual à  $s$ .

### Prova do Teorema 3.1.1

Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{Z}^*$  Considere o reticulado gerado pelos vetores  $v = (-1, 0)$  e  $w = (\alpha, 1)$ , então  $pv + qw = (q\alpha - p, q) = (q(\alpha - \frac{p}{q}), q)$ . Observe que o módulo da abscissa desse vetor representa o indicador de qualidade da aproximação  $\frac{p}{q}$  do número real  $\alpha$  e sua ordenada, o denominador desta fração.

<sup>1</sup> A prova desta proposição encontra-se em FUCHS, Dmitry; TABACHNIKOV, Serge. Mathematical Omnibus: Thirty Lectures on Classic Mathematics, p.8.

Nós precisamos provar que na faixa onde  $-\epsilon < q(\alpha - \frac{p}{q}) < \epsilon$ , existem infinitos pontos  $(p,q)$  do reticulado gerado por  $v$  e  $w$ .

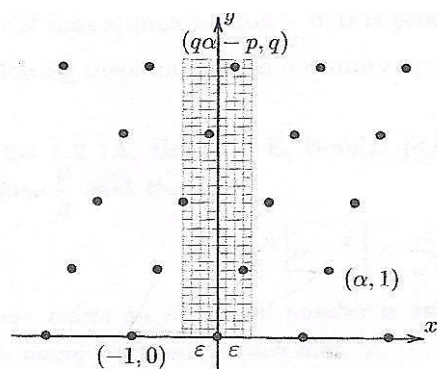


Figura 3a - Demonstração do Teorema 3.1.1

Isso parece óbvio se  $\epsilon$  não for muito pequeno, digamos  $\epsilon = \frac{1}{2}$ . De fato, para todo inteiro positivo  $q$ , a reta horizontal  $y = q$  contém uma sequência de pontos do reticulado com distância igual a 1 entre dois pontos consecutivos. Precisamente um desses pontos estará dentro da larga faixa  $|x| < \frac{1}{2}$ . Daí a larga faixa conterá infinitos pontos do reticulado com a ordenada  $y$  positiva.

Escolha agora um inteiro positivo  $n$  tal que  $\frac{1}{2n} < \epsilon$  e divida a larga faixa em  $2n$  faixas estreitas de largura  $\frac{1}{2n}$ . Pelo menos uma dessas pequenas faixas deverá conter infinitos pontos com ordenadas  $y$  positivas, uma vez que mostramos ter a larga faixa um número infinito de pontos  $(p,q)$  do reticulado gerado por  $v$  e  $w$ . Seja a faixa mostrada na figura 3b. Sejam também os pontos  $A_0, A_1, A_2, \dots$  dentro dessa faixa, numerados na direção de aumento da ordenada  $y$ . Para todo  $i > 0$  tome o vetor igual a  $A_0O$  com origem  $A_i$  e extremidade  $B_i$ . Desde que  $OA_0A_iB_i$  seja um paralelogramo e  $O, A_0$  e  $A_i$  pertençam ao reticulado,  $B_i$  também pertencerá ao reticulado. Além disso, a abscissa  $x$  de  $B_i$  é igual a diferença entre as abscissas de  $A_i$  e  $A_0$  (novamente porque  $OA_0A_iB_i$  é um paralelogramo). Assim,

o valor absoluto da abscissa  $x$  de  $B_i$  será menor do que  $\frac{1}{2n} < \epsilon$ , sendo assim todos os pontos  $B_i$  pertencerão à faixa de comprimento  $\frac{1}{2n}$

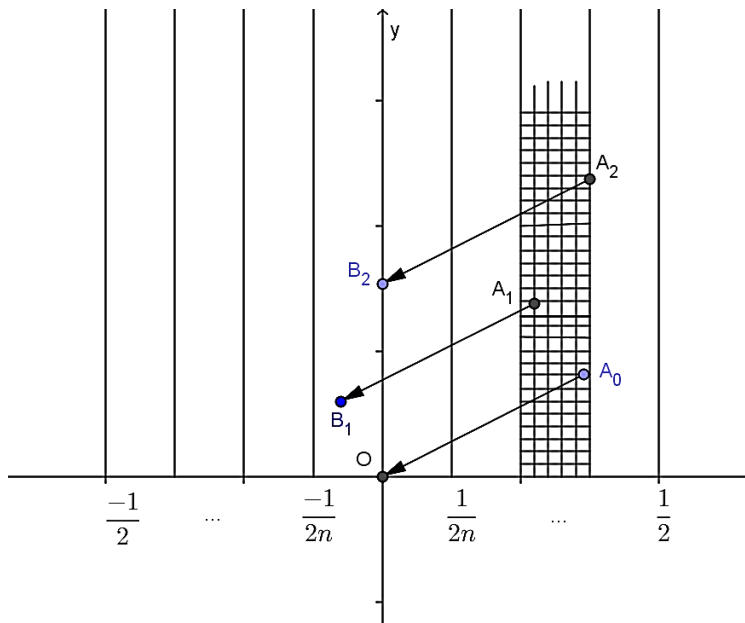


Figura 3b – Demonstração do Teorema 3.1.1

### Proposição 3.2.3 (O erro das aproximações)

As infinitas aproximações de um número real possuem erro menor ou igual à metade do inverso do denominador.

**Prova :**

Seja  $p = [q\alpha] \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $q > 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Sabemos que todo número real está entre dois inteiros consecutivos, e assim,  $p \leq q\alpha < p + 1$ . Dividindo por  $q$ , teremos  $\frac{p}{q} \leq \alpha < \frac{p+1}{q}$ .

Observamos que o erro será  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q}$ . Além disso, a soma dos erros  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| + \left| \alpha - \frac{p+1}{q} \right| = \frac{1}{q}$ , logo  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q}$  ou  $\left| \alpha - \frac{p+1}{q} \right| \leq \frac{1}{2q}$ .

Mas isso não é o melhor que podemos conseguir. Existem melhores aproximações!

### 3.4 A existência de melhores aproximações

Exemplo 1:

Apresentaremos uma tabela com frações que aproximam o valor de  $\sqrt{57}$ , comparando essas frações com as frações decimais, ou seja, aquelas cujos denominadores são potências de 10. Constataremos que existem aproximações bem melhores, avaliando o erro obtido em cada uma delas. Ainda trata-se de apenas uma constatação. Afinal, como surgem essas frações que aproximam tão bem o número irracional em questão? Esse é o objetivo de nosso trabalho que será revelado nas seções posteriores. Vejamos a tabela, considerando aproximações de  $\sqrt{57} = 7,5498344\dots$  por frações decimais e frações não decimais.

Fração decimal	Valor decimal : (I)	Erro: $\sqrt{57} - (I)$	Fração	Valor decimal: (II)	Erro : $\sqrt{57} - (II)$
$\frac{7}{1}$	7	0,5498344...	$\frac{7}{1}$	7	0,5498344...
$\frac{75}{10}$	7,5	0,0498344...	$\frac{8}{1}$	8	1,5498344...
$\frac{754}{100}$	7,54	0,0098344...	$\frac{15}{2}$	7,5	0,0498344...
$\frac{7549}{1000}$	7,549	0,0008344...	$\frac{68}{9}$	7,55555...	0,0057211...
$\frac{75498}{10000}$	7,5498	0,0000344...	$\frac{83}{11}$	7,54545...	0,0043799...
$\frac{754983}{100000}$	7,54983	0,0000044...	$\frac{151}{20}$	7,55	0,0001656...

Tabela 1 –Tabela Comparativa

Observe, por exemplo, as frações  $\frac{754}{100}$  e  $\frac{68}{9}$  e note que esta, além de possuir um erro menor, possui termos também bem menores. O mesmo acontece para as

frações  $\frac{7549}{1000}$  e  $\frac{151}{20}$ . Portanto, é fato que existem frações cujas aproximações são melhores do que as das frações decimais e com denominadores menores.

Exemplo 2 : Arquimedes descobriu uma aproximação para o número  $\pi$  igual a  $\frac{22}{7}$ , cujo erro  $\left| \pi - \frac{22}{7} \right| = 0,0012 \dots < \frac{1}{700}$ , que é uma aproximação melhor que a fração  $\frac{314}{100}$ . Ou ainda, a aproximação de  $\pi$  pela fração  $\frac{355}{113} = 3,14159292\dots$  possui um erro  $\left| \pi - \frac{355}{113} \right| = 0,00000026 < \frac{1}{3000000}$ , um erro melhor do que na base 10 com denominador 1000000! Veremos que isso não ocorre por acaso.

## 4. Frações Contínuas

A partir de agora começaremos a estudar algumas das considerações apresentadas no capítulo 3 deste trabalho. Na ocasião, comparamos algumas frações  $\frac{p}{q}$  e verificamos que algumas eram melhores aproximações para um número real, por além de apresentarem erros menores, possuírem números p e q não muito grandes. Neste capítulo iremos identificá-las e aprender como determiná-las, acreditando, assim como fizemos até agora, que elas são frações mais convenientes para aproximar números reais. Posteriormente, provaremos que as mesmas possuem essa notável característica. A seguir, apresentamos a definição de fração contínua.

### 4.1 Definição

Uma fração contínua de um número real  $\alpha$  é uma expressão da forma :

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

Com  $a_n \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall n \geq 0$ ,  $a_n > 0$ ,  $\forall n \geq 1$ , que representamos

por  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ .

Chamemos de  $a_0$  a parte inteira de  $\alpha$ , ou seja,  $a_0 = [\alpha] \in \mathbb{Z}$ ,  $a_0 \leq \alpha < a_0 + 1$ .

Se  $\alpha = a_0$ , paramos, senão,  $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - a_0} > 1$ ,  $\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$ .

Para  $n \geq 1$ ,  $\alpha_n > 1$ ,  $a_n = [\alpha_n] \in \mathbb{N}^*$

Se  $\alpha_n = a_n$  paramos, senão,  $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} > 1$ ,  $\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$

Assim, teremos :

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}}}}$$

que representamos por  $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$

## 4.2 Frações contínuas finitas e infinitas

Se  $\alpha_n = a_n, \exists n \in N$ , tal que

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}$$

$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{Q}$ , que representa uma fração contínua finita.

Se  $\alpha_n \notin \mathbb{Z}, \forall n \in N$ ,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

e representamos  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ , por uma fração contínua infinita.

## 4.3 Convergentes (ou Reduzidas)

Os números  $a_0, a_1, a_2, \dots$  são chamados de quocientes parciais de  $\alpha$ . O número

$$r_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

É chamado n-ésima convergente (ou reduzida) de  $\alpha$ . Obviamente,  $r_0 < r_2 < r_4 < \dots < \alpha < \dots < r_5 < r_3 < r_1$ . Ou seja, as convergentes de ordem par são aproximações de  $\alpha$  por falta e as convergentes de ordem ímpar são as aproximações de  $\alpha$  por excesso.

## 4.4 Exemplos

a) Vamos representar o número racional  $b_0 = \frac{235}{82}$  por uma fração contínua, usando o algoritmo  $b_n = \frac{1}{b_{n-1} - a_{n-1}}$ ,  $n \geq 1$  e  $a_0 = [b_0]$ ,  $a_1 = [b_1]$ ,  $a_2 = [b_2]$  ...  $a_n = [b_n]$ , ... e a seguir, calcular suas convergentes (frações que são aproximações deste número racional). Vejamos:

$$a_0 = \lfloor b_0 \rfloor = \left\lfloor \frac{235}{82} \right\rfloor = 2$$

$$b_1 = \frac{1}{b_0 - a_0} = \frac{1}{\frac{235}{82} - 2} = \frac{82}{71}$$

$$a_1 = \lfloor b_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{82}{71} \right\rfloor = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{b_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{82}{71} - 1} = \frac{71}{11}$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{71}{11} \right\rfloor = 6$$

$$b_3 = \frac{1}{b_2 - a_2} = \frac{1}{\frac{71}{11} - 6} = \frac{11}{5}$$

$$a_3 = \left\lfloor \frac{11}{5} \right\rfloor = 2$$

$$b_4 = \frac{1}{b_3 - a_3} = \frac{1}{\frac{11}{5} - 2} = 5$$

$$a_4 = \lfloor b_4 \rfloor = \lfloor 5 \rfloor = 5$$

Portanto,

$$\frac{235}{82} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}}$$

E assim,

$$\frac{235}{82} = [2; 1, 6, 2, 5]$$

Observe que trata-se de uma fração contínua finita.

### Cálculo das Convergentes:

$$r_0 = \frac{2}{1} = \frac{p_0}{q_0}$$

$$r_1 = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1} = \frac{p_1}{q_1}$$



$$r_2 = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{6}} = \frac{20}{7} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$r_3 = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{2}}} = \frac{43}{15} = \frac{p_3}{q_3}$$

**Observações:**

$r_4$  é a própria fração  $\frac{235}{82}$ . Observe também que  $\frac{235}{82} = 2,8658536$  e a quarta convergente  $r_3 = \frac{43}{15} = 2,8666666\dots$  possui um erro de aproximação de apenas 0,000813 (para 6 dígitos decimais!)

b) Consideremos agora o número irracional  $\sqrt{3}$ . Usaremos o algoritmo  $b_n = \frac{1}{b_{n-1} - a_{n-1}}$  e  $a_0 = [b_0]$ ,  $a_1 = [b_1]$ ,  $a_2 = [b_2]$  ...  $a_n = [b_n]$ , ... para representá-lo como uma fração contínua. Tomando, então,  $b_0 = \sqrt{3}$ , teremos:

$$a_0 = [b_0] = [\sqrt{3}] = 1$$

$$b_1 = \frac{1}{b_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$a_1 = [b_1] = \left[ \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right] = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{b_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$$

$$a_2 = [\sqrt{3} + 1] = 2$$

$$b_3 = \frac{1}{b_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1 - 2} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$$

Note que  $b_3 = b_1$ , assim os próximos valores irão se repetir. Portanto,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots]$$

Note que  $\sqrt{3}$  possui uma representação por fração contínua, infinita e periódica.

**Cálculo das 5 primeiras convergentes:**

$$r_0 = \frac{1}{1} = \frac{p_0}{q_0}$$

$$r_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2 = \frac{p_1}{q_1}$$

$$r_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$r_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{7}{4} = \frac{p_3}{q_3}$$

$$r_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{19}{11} = \frac{p_4}{q_4}$$

c) O número  $\pi$  por frações contínuas é :

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Ou seja,  $\pi = [3;7,15,1,292,1,\dots]$

Obs : Não é surpresa que as aproximações muito boas de  $\pi$  sejam  $\frac{22}{7}$  e  $\frac{355}{113}$ , pois ambas são oriundas da fração contínua acima ( $r_1$  e  $r_3$ ). Veremos nos capítulos finais deste trabalho, que possuiremos um indicador para qualificar essas aproximações.

d) A Razão Áurea :  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$  por frações contínuas é :  $[1;1,1,1,1,\dots]$ .  
 Observe que a Razão Áurea é a raiz positiva da equação  $x^2-x-1=0$ . Dividindo a equação por  $x$ , obtemos  $x = 1 + \frac{1}{x}$ , que no processo de obtenção de sua fração contínua significa retirar a parte inteira igual a 1 e inverter o resultado, dando o próprio número, e assim o processo se repete, gerando a representação  $[1;1,1,1,1,\dots]$ .

e) O número  $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

Assim,  $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$

Observe que sendo  $\sqrt{2} - 1$  o inverso de  $\sqrt{2} + 1$  o processo se repete.

e) Apenas mostraremos, sem demonstração, a representação do número  $e$  :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2,71828182828459004523 \dots$$

ou ,  $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots]$ .

## 5. O algoritmo de Euclides e as frações contínuas

### 5.1 O algoritmo

Seja um número racional da forma  $\frac{p}{q}$  com  $p, q$  inteiros, e  $q > 0$ .

Podemos escrever:

$$p = a_0q + r_1, \quad 0 < r_1 < q$$

$$q = a_1r_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = a_2r_2 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2$$

...

$$r_{n-2} = a_{n-1}r_{n-1} + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = a_n r_n, \quad r_n > 0 \quad \text{onde} \quad r_n = \text{mdc}(p, q)$$

### 5.2 A relação entre o algoritmo de Euclides e frações contínuas

Podemos também escrever :

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_1}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_3}{r_2}}} \\ &= \dots \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}} \end{aligned}$$

Logo, representamos, neste caso,  $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$

Note que todo número racional possui representação por frações contínuas finita, pois o algoritmo de Euclides é um processo de divisões sucessivas de números inteiros e chegará, necessariamente ao fim, resultando em resto zero.

Ainda que tenhamos números grandes  $p$  e  $q$ , o número de passos que deverão ser efetuados no algoritmo de Euclides poderá nos fazer concluir que se tomarmos um número, e seu processo de transposição à fração contínua terminar rápido, saberemos que o referido número é racional, caso contrário, não poderemos concluir que se trate de um número irracional, mas, se for racional, possuirá denominador muito grande

### 5.3 Um exemplo

No processo de cálculo do mdc entre 235 e 82, teremos:

$$235 = 2 \cdot 82 + 71$$

$$82 = 1 \cdot 71 + 11$$

$$71 = 6 \cdot 11 + 5$$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$

$$5 = 5 \cdot 1 + 0$$

Logo, o  $\text{mdc}(235, 82) = 1$

Podemos expressar a fração  $\frac{235}{82}$  como :

$$\begin{aligned} \frac{235}{82} &= 2 + \frac{71}{82} = 2 + \frac{1}{\frac{82}{71}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{11}{71}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{71}{11}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{5}{11}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{11}{5}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}} = [2; 1, 6, 2, 5] \end{aligned}$$

### 5.4 Uma representação geométrica para o algoritmo de Euclides

Tome um ponto  $O$  no plano e uma reta vertical  $l$  que passe por  $O$ . Tome os pontos  $A_{-2} = (\beta, 1)$  e  $A_{-1} = (-\gamma, 0)$  distantes  $\beta$  e  $\gamma$  de  $l$ , acima da linha horizontal que passa por  $O$ . Construa o vetor  $\overrightarrow{OA_{-1}}$  com origem  $A_{-2}$ , tantas vezes quanto for possível, sem que estes cruzem a reta vertical  $l$ . Seja  $A_0$  a extremidade do último vetor, assim o vetor  $\overrightarrow{A_0D}$  atravessa a reta  $l$ . Então construa o vetor  $\overrightarrow{OA_0}$  com origem em  $A_{-1}$  tantas vezes quanto for possível sem que estes cruzem a reta vertical  $l$ . Seja  $A_1$  a extremidade do último vetor. Então construímos o vetor  $\overrightarrow{OA_1}$  a partir de  $A_0$  e tomemos o ponto  $A_2$ , então  $A_3, A_4$  (não mostrados na figura).

Obtemos duas linhas poligonais  $A_{-2}A_0A_2A_4 \dots$  e  $A_{-1}A_1A_3 \dots$  convergindo para  $l$  por dois lados, e  $\overrightarrow{A_{-2}A_0} = a_0 \overrightarrow{OA_{-1}}$ ,  $\overrightarrow{A_{-1}A_1} = a_1 \overrightarrow{OA_0}$ ,  $\overrightarrow{A_0A_2} = a_2 \overrightarrow{OA_1}$  etc...

Essa construção está relacionada com o algoritmo de Euclides da seguinte forma :

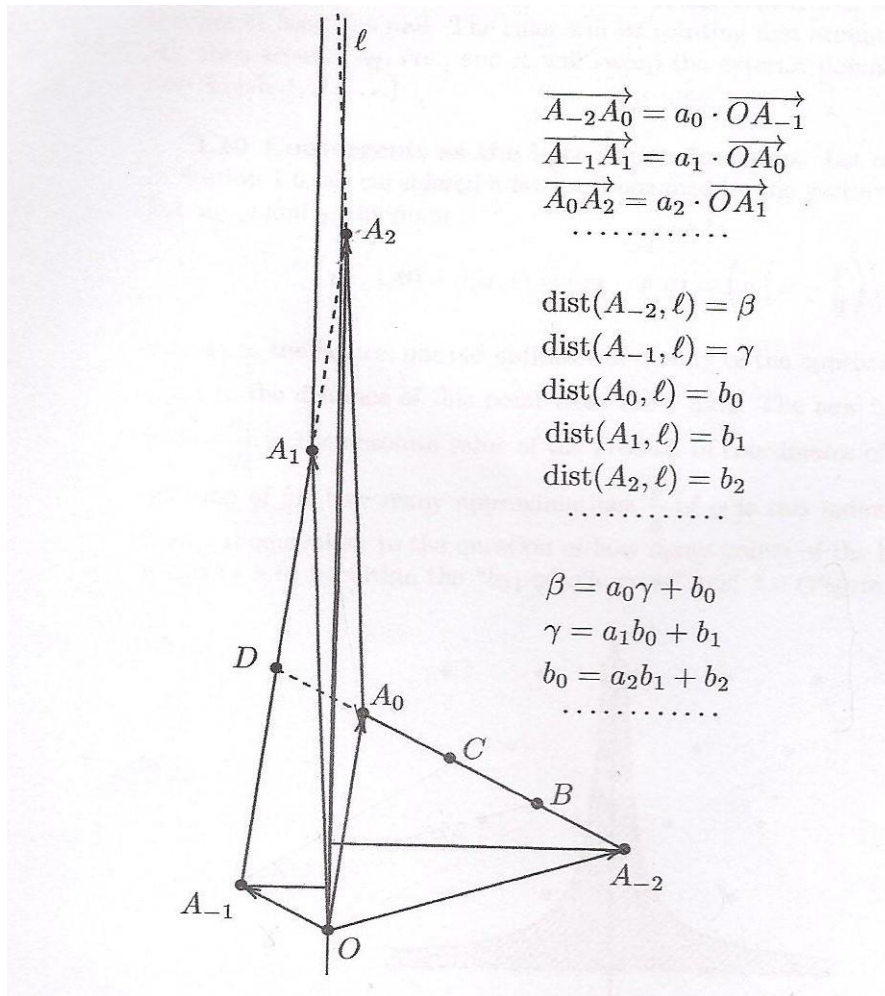


Figura 4-Representação do algoritmo de Euclides

Em particular,  $\frac{\beta}{\gamma} = [a_0, a_1, a_2, \dots]$

Note que se algum ponto  $A_n$  pertencer à reta  $l$ , então a relação  $\frac{\beta}{\gamma}$  é racional e igual a  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Observe também que, todos os pontos marcados na figura 4, não somente  $A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2$ , mas também  $B, C, D$ , pertencem ao reticulado  $\Lambda$  gerado pelos vetores  $\overrightarrow{OA_{-2}}$  e  $\overrightarrow{OA_{-1}}$ . De fato, considere a sequência de paralelogramos  $OA_{-1}A_{-2}B$ ,  $A_{-1}OBC$ ,  $A_{-1}OCA_0$ ,  $A_{-1}OA_0D$ ,  $DOA_0A_1$ ,  $A_1OA_0A_2$  ... Sendo  $A_{-1}, O, A_{-2}$  pontos do reticulado  $\Lambda$ , deduzimos, sucessivamente, pela Proposição 3.2.1 que  $B, C, A_0, D, A_1, A_2, \dots$  são pontos do reticulado.



## 6. Frações contínuas como as melhores aproximações de um número real

Com um pouco de técnica matemática iremos calcular frações contínuas, ou seja, os numeradores e denominadores de  $\alpha \in R$ , através de fórmulas de recorrência de 2ª ordem, fórmulas onde cada termo é uma função dos dois anteriores.

### 6.1 Algumas fórmulas simples

#### Proposição 6.1.1

Sejam  $a_0, a_1, a_2, \dots \in R$  com  $a_n > 0, n \geq 1$ .

Sejam  $(p_n)$  e  $(q_n), \forall n \geq 1$ , sequencias dadas por :

$$p_0 = a_0 \quad p_1 = a_0 a_1 + 1 \quad \dots \quad p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$$

$$q_0 = 1 \quad q_1 = a_1 \quad \dots \quad q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$$

Por exemplo :

$$p_2 = a_2 p_1 + p_0 = a_2 a_1 a_0 + a_0 + a_2$$

$$q_2 = a_2 q_1 + q_0 = a_2 a_1 + 1$$

Então,

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

#### Proposição 6.1.2 :

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n, \forall n \geq 0, n \in Z,$$

$$\text{isto é, } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$$

Obs: Se  $a_j \in Z, \forall j \geq 0, p_n, q_n \in Z, \forall n \geq 0$ .

Neste caso,  $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \geq q_n + q_{n-1}$

Isso mostra que os denominadores crescem rápido quando  $a_{n+1}, p_n$  e  $q_n$  são todos inteiros. Ou seja,  $q_n$  é uma sequencia de termos positivos que cresce, pelo menos, como a sequencia de Fibonnaci.



### Prova da Proposição 6.1.1

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = a_0 = [a_0]$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1]$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = [a_0; a_1, a_2]$$

Por indução em  $n$ .

Seja a fração contínua,

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})}}}}$$

Com  $(n+1)$  termos depois do ponto e vírgula.

Podemos olhar  $(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})$  como um número só, ficando a fração contínua com  $n$  termos, igual a  $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}]$ . Este é um artifício conveniente, pois sabemos algumas coisas sobre frações contínuas com  $n$  termos. Além disso, note que a última parcela justifica a definição de  $a_n \in \mathbb{R}$ .

Podemos agora usar a hipótese de indução, vejamos:

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \\ &= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \\ &= \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \end{aligned}$$

### Prova da Proposição 6.1.2

Vemos, claramente, que  $p_1q_0 - p_0q_1 = (a_0a_1 + 1 - a_0a_1) = 1 = (-1)^0$ . O que inicialmente satisfaz a proposição.

Se  $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$ , temos o próximo,  $p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} = (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} - p_{n+1}(a_{n+2}q_{n+1} + q_n) = -(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$

Obs : Se  $a_j \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall j \geq 0$ ,  $\text{mdc}(p_n, q_n) = 1$ , pois  $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$ , e portanto  $p_n$  e  $q_n$  não podem ter um fator comum. Logo,  $\frac{p_n}{q_n}$  já vem simplificado.

### Corolário 6.1.3

$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$ , onde  $r_n$  é a n-ésima convergente de  $\alpha$ .

De fato,

$$r_n - r_{n-1} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_nq_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$$

Como vimos na seção 4.3,  $\alpha$  está entre  $r_{n-1}$  e  $r_n$ ,  $|r_n - \alpha| < \frac{1}{q_n q_{n-1}}$  e tenderá a zero, quando  $n$  tender a infinito.

## 6.2 Uma fórmula exata para um número real

### Corolário 6.2.1

Seja  $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , uma fração contínua usual. A proposição

6.1.1 permite calcular essa fração contínua, dando  $\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$  como

uma fórmula exata para  $\alpha$ .

Note que se a fração contínua for até a n-ésima casa ou for finita, podemos escrevê-la como :  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ ,

$$\begin{array}{llll} \text{onde, } p_0 = a_0 & p_1 = a_0a_1 + 1 & \dots & p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \\ q_0 = 1 & q_1 = a_1 & \dots & q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \end{array}$$

### 6.3 O cálculo do erro

#### Corolário 6.3.1

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$

#### Prova

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$

pois,  $-(p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$

#### Corolário 6.3.2

Para todo  $n \geq 1$ , temos:

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{\alpha_{n+1}q_n^2} \leq \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \leq \frac{1}{q_n^2}$$

Observe que  $a_{n+1}$  é a parte inteira de  $\alpha_{n+1}$  e, portanto,  $\alpha_{n+1} \geq a_{n+1}$

### 6.4 O Teorema Dirichlet

#### Teorema 6.3.3

Em particular,  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  existem infinitos racionais  $\frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q > 0$  com

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

De fato, todas as aproximações que vêm das frações contínuas satisfazem essa condição! Esse é um resultado muito melhor do que aquele expresso na Proposição 3.2.3, que dizia que existiam infinitos racionais  $\frac{p}{q}$  que aproximavam um número real  $\alpha$  com um erro menor do que a metade do inverso dos seus denominadores, ou seja,  $\frac{1}{2q}$ .

Vamos agora estimar o erro por excesso. Considere

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} > \frac{1}{(\alpha_{n+1} + 1)q_n^2} > \frac{1}{(a_n + 1 + 1)q_n^2}$$

Note que somando 1 a  $a_{n+1}$ , temos  $a_{n+1} + 1 > \alpha_{n+1}$

Portanto, a estimativa do erro, quando aproximamos  $\alpha \in R$  por frações contínuas fica:

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \alpha - \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

Exemplo:

Vamos estimar o erro da quarta convergente do número  $\pi$ :

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

A quarta convergente é

$$\frac{p_3}{q_3} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113}$$

Portanto, 
$$\frac{1}{294 \cdot (113^2)} < \left| \pi - \frac{355}{113} \right| < \frac{1}{292 \cdot (113)^2}$$

Equivalente a 
$$\frac{1}{3754086} < \left| \pi - \frac{355}{113} \right| < \frac{1}{3728548}$$

Note que a 4ª convergente,  $\frac{p_3}{q_3}$ , não foi escolhida por acaso, mas sim por possuir um erro pequeno, uma vez que o quociente parcial  $a_4 = 292$  é um valor grande e como vimos na estimativa do erro, quanto maior for o quociente parcial  $a_{n+1}$ , melhor será a aproximação  $\frac{p_n}{q_n}$ .

Portanto, se estamos interessados em boas aproximações de um número real, basta olharmos o que vem das frações contínuas.

Se considerarmos que a soma dos erros por falta e por excesso obtidos resulta em  $\frac{1}{q_n^2}$ , podemos inferir que pelo menos uma entre cada duas aproximações

consecutivas tem erro menor que a metade do inverso do seu denominador ao quadrado. Ou seja, pelo menos metade das aproximações que veem das frações contínuas são realmente muito boas. Mostraremos nas seções seguintes, que as aproximações que vêm das frações contínuas são as melhores aproximações racionais possíveis de um número real  $\alpha$ . Veremos no capítulo 7 o teorema de Hurwitz-Markov que irá reforçar esse fato, mostrando que, especificamente, existem infinitas aproximações que veem da fração contínua, tais que para  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}$  e que a constante  $\sqrt{5}$  é o maior número com essa propriedade. Veremos também que para o número de ouro a referida constante é a melhor possível.

### 6.5 Uma visão geométrica das melhores aproximações

Seja  $\alpha$  um número real. No capítulo 3, nós consideramos um reticulado  $\Lambda$  gerado pelos vetores  $(-1,0)$  e  $(\alpha,1)$ . Para todo  $p$  e  $q$ , o ponto  $p(-1,0) + q(\alpha,1) = (q\alpha - p, q) = \left( q \left( \alpha - \frac{p}{q} \right), q \right)$  pertence ao referido reticulado. Nosso velho indicador das aproximações  $\frac{p}{q}$  de  $\alpha$  era igual à distância desse ponto ao eixo  $y$ , ou seja, a abscissa desse ponto. O novo indicador de qualidade,  $q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$ , é o valor absoluto do produto das coordenadas desse ponto. Portanto, a questão sobre as aproximações  $\frac{p}{q}$  de  $\alpha$  com esse indicador menor do que  $\varepsilon$ , é equivalente à questão de quantos pontos do reticulado  $\Lambda$  acima do eixo  $x$  ( $q > 0$ ), se encontram dentro da “Cruz Hiperbólica”  $|xy| < \varepsilon$ . (Figura 5)

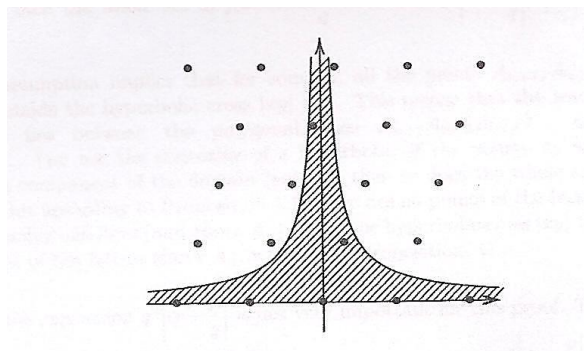


Figura 6: A Cruz Hiperbólica

Aplicando a construção da seção 5.4 do reticulado  $\Lambda$  com  $A_{-2} = (\alpha, 1)$  e  $A_{-1} = (-1, 0)$ , os pontos  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  serão os pontos do reticulado formados pelas  $n$ -ésimas convergentes de  $\alpha$ , cujas distâncias até o eixo  $y$  representam as aproximações  $\frac{p}{q}$  de  $\alpha$ , e que serão as melhores aproximações por estarem vindo da fração contínua.

### Proposição 6.5.1

Para  $n \geq 0$ ,  $A_n = (q_n \alpha - p_n, q_n)$ , onde  $p_n$  e  $q_n$  são o numerador e denominador da fração irredutível da  $n$ -ésima convergente do número  $\alpha$ .

Prova : Por indução em  $n$

Para  $n = 0$  e  $n = 1$ , podemos checar diretamente:

$$p_0 = a_0, q_0 = 1; \quad p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad q_1 = a_1$$

$$A_0 = A_{-2} + a_0 A_{-1} = (\alpha, 1) + a_0(-1, 0) = (\alpha - a_0, 1) = (q_0 \alpha - p_0, q_0),$$

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{-1} + a_1 A_0 = (-1, 0) + a_1(\alpha - a_0, 1) = (a_1 \alpha - (a_0 a_1 + 1), a_1) = \\ &= (q_1 \alpha - p_1, q_1) \end{aligned}$$

Além disso, se  $n \geq 2$  e as fórmulas para  $A_{n-1}$  e  $A_{n-2}$  são verdadeiras, então

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-2} + a_n A_{n-1} = (q_{n-2} \alpha - p_{n-2}, q_{n-2}) + a_n (q_{n-1} \alpha - p_{n-1}, q_{n-1}) = \\ &= ((a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \alpha - a_n p_{n-1} - p_{n-2}, a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = (q_n \alpha - p_n, q_n) \end{aligned}$$

□

Assim, os pontos  $A_n$  são os pontos do reticulado formados pelas  $n$ -ésimas convergentes de  $\alpha$  cujas distâncias até o eixo  $y$ , ou seja, as abscissas, representam as aproximações  $\frac{p}{q}$  de  $\alpha$ .

### Proposição 6.5.2 (As frações contínuas são as melhores aproximações)

Seja  $\varepsilon > 0$ . Se somente para um número finito de convergentes  $\frac{p_n}{q_n}$ ,  $q_n^2 \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \varepsilon$ , então o conjunto de frações  $\frac{p}{q}$  tais que  $q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon$  é finito.

## Prova

O pressuposto implica que para algum  $n$ , todos os pontos  $A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}, A_{n+4}$  estão fora da Cruz Hiperbólica,  $|xy| < \varepsilon$ . Isto significa que todos os pontos da Cruz Hiperbólica, a partir de  $n$ , encontram-se entre as linhas poligonais  $A_{n+1}, A_{n+3}, A_{n+5}, \dots$  e  $A_{n+2}, A_{n+4}, A_{n+6}, \dots$  (nós usaremos a convexidade de uma hipérbole: se os pontos  $A_k$  e  $A_{k+2}$  encontram-se dentro de uma parte do domínio  $|xy| > \varepsilon$ , então todo segmento  $A_k A_{k+2}$  também se encontrará). Mas como sabemos da proposição 5.4.1, não existem pontos do reticulado  $\Lambda$  entre as duas linhas poligonais (e acima de  $A_n$ ). Assim, a Cruz Hiperbólica  $|xy| < \varepsilon$  não contém pontos do reticulado acima de  $A_n$ , de modo que segue a proposição.

Note que a expressão  $q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$  não é tão importante para essa prova. A mesma afirmação pode ser dita sobre o indicador de qualidade calculado como  $q^3 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$  ou  $q^{100} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$  ou, na realidade, por uma expressão  $F(q, \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|)$ , onde a função  $F$  possua a propriedade de seu domínio  $F(x,y) > \varepsilon$  esteja contido no I e II quadrantes e seja convexo para todo  $\varepsilon$ .

## 6.6 Exemplos

Vimos acima que as convergentes proporcionam as melhores aproximações de um número real por racionais, ou seja, se  $\frac{p}{q}$ ,  $p, q$  inteiros,  $q > 0$ , é uma boa aproximação para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então  $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ , para algum  $n$  natural. Vejamos os dois exemplos a seguir:

a) O número de ouro  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , as suas melhores aproximações são:

$$1, [1; 1] = \frac{2}{1}, [1; 1, 1] = \frac{3}{2} = 1,5, [1; 1, 1, 1] = \frac{5}{3} = 1,6666 \dots, [1; 1, 1, 1, 1] = \frac{8}{5} = 1,6, [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] = \frac{89}{55} = 1,6181818 \dots \text{ e quando } n \text{ tende ao infinito temos } [1; 1, 1, 1, 1, 1, \dots] = 1,6180339887 \dots, (\text{ neste caso representamos o valor exato com dez casas decimais})$$

Note que os cinco primeiros números consecutivos são os números de Fibonacci, decorrentes da seção 5.1. Note também que talvez o número de ouro seja o mais irracional dos números irracionais, devido à lentidão com que os quocientes parciais se aproximam de  $\phi$ .

b) Para  $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \dots]$  as melhores aproximações são:

$$1, [1; 2] = \frac{3}{2}, [1; 2, 2] = \frac{7}{5}, [1; 2, 2, 2] = \frac{17}{12}, [1; 2, 2, 2, 2] = \frac{41}{29}, [1; 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{99}{70}, [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{47321}{33461}$$

c) Representação gráfica dos erros das aproximações por frações contínuas de  $\frac{85}{32}$ .

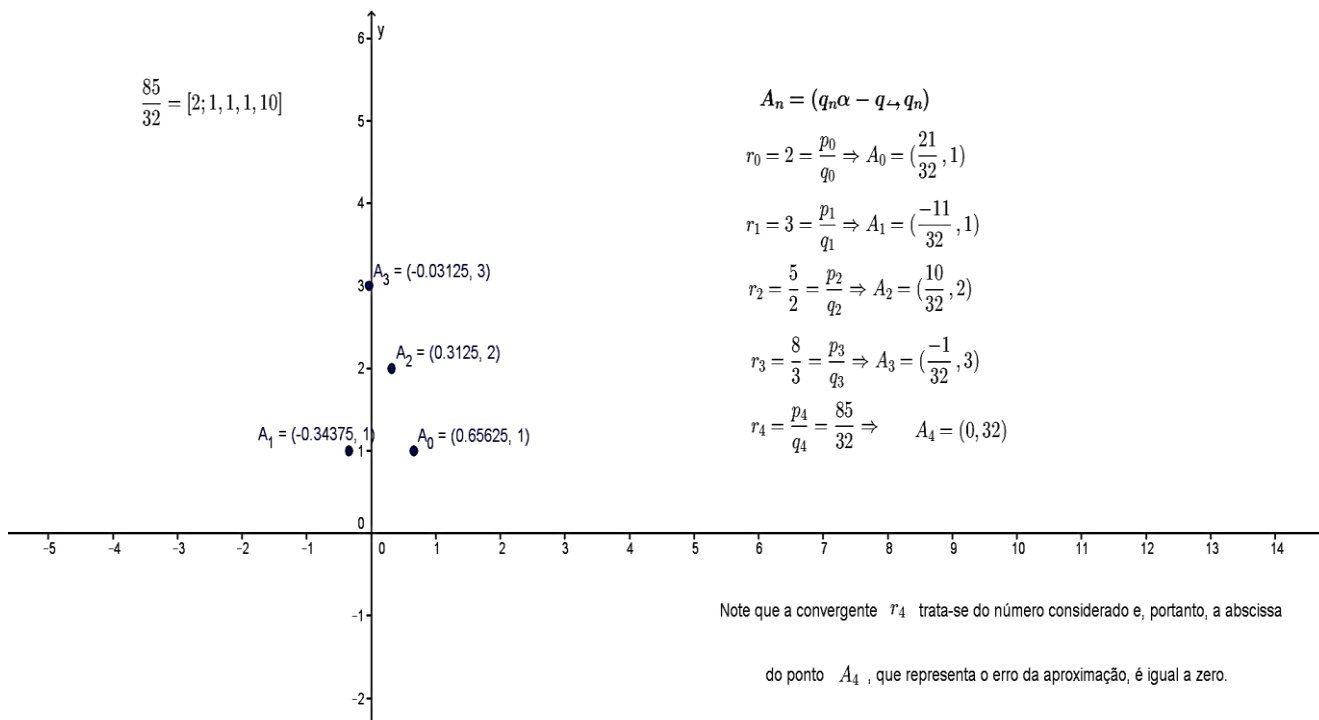


Figura 7 –Aproximações de um racional



- d) Representação gráfica dos erros das três primeiras aproximações por frações contínuas de  $\sqrt{2}$

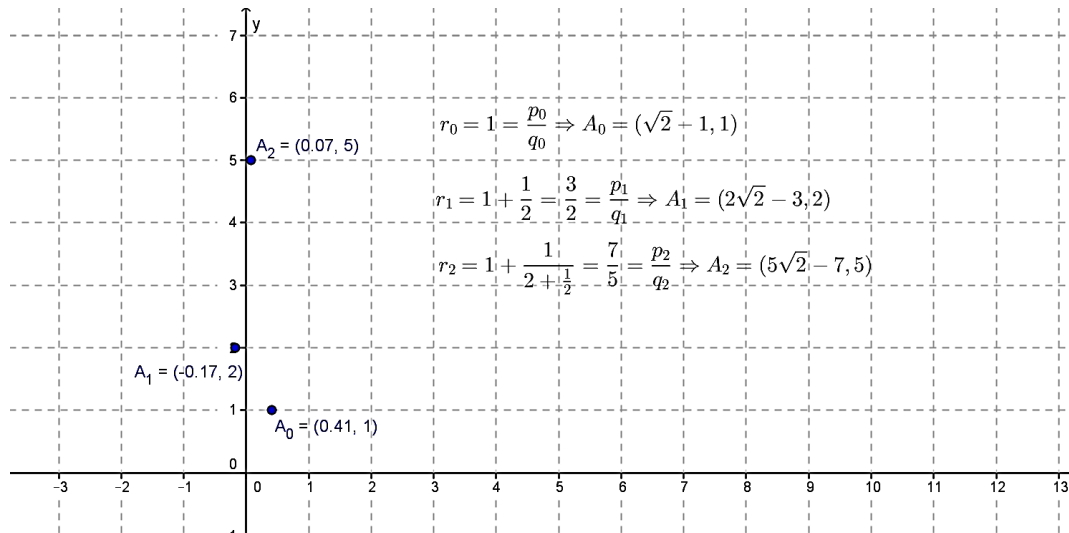


Figura 8 –Aproximações de um irracional

## 7. O teorema de Hurwitz-Markov

### 7.1 O enunciado do teorema

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall n \geq 1, \exists k \in \{n-1, n, n+1\}$ , tal que  $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}$ .

Em particular,  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  existem infinitos  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  ( $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ ) com  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$

Por outro lado,  $\forall c > \sqrt{5}$ , a desigualdade  $\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}$ , tem apenas um número finito de soluções  $\frac{p}{q}$ .

Vamos traduzir o teorema da seguinte maneira:

“Para todo número irracional  $\alpha$ , existirá pelo menos uma, dentre três aproximações consecutivas de  $\alpha$ , feitas por frações contínuas, cujo o erro será menor que o inverso do produto de  $\sqrt{5}$  pelo respectivo denominador da aproximação ao quadrado”.

“Em particular, para todo irracional  $\alpha$ , existem infinitos racionais  $\frac{p}{q}$  que são aproximações de  $\alpha$ , com um erro menor que o inverso do produto de  $\sqrt{5}$  pelo denominador ao quadrado dessas aproximações”

“Por outro lado, existirá somente um número finito de aproximações racionais  $\frac{p}{q}$  do número de ouro, com erros menores que o inverso do produto de  $c$  pelo quadrado do denominador dessas frações, quando  $c$  for maior do que  $\sqrt{5}$ .”

### 7.2 A prova do teorema 7.1

Queremos provar que para algum  $k$ , que pode ser  $n-1$ ,  $n$  ou  $n+1$ , essa aproximação de  $\alpha$ ,  $\frac{p_k}{q_k}$ , é muito boa, no sentido que o erro é menor que  $\frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}$ .

Supondo  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ , temos  $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{(\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1})q_k} = \frac{1}{(\alpha_{k+1} + \beta_{k+1})q_k^2}$

, onde  $\beta_{k+1} = \frac{q_{k-1}}{q_k} = [0, a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1]$ . Observe que  $q_k > q_{k-1}$

De fato,

$$\beta_2 = \frac{q_0}{q_1} = \frac{1}{a_1} = [0; a_1] \quad \text{e por indução} \quad \beta_{k+2} = \frac{q_k}{q_{k+1}} = \frac{q_k}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} = \frac{1}{a_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}}$$

$$= \frac{1}{a_{k+1} + \beta_{k+1}} = \frac{1}{[a_{k+1}; a_k, a_{k-1}, \dots, a_1]} = [0; a_{k+1}, a_k, a_{k-1}, \dots, a_1]$$

$$\text{e } \alpha_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, a_{k+3}, \dots]$$

Queremos provar que vale pelo menos uma das seguintes desigualdades, obtidas quando  $k = n - 1$ ,  $k = n$  e  $k = n + 1$

- $\alpha_n + \beta_n > \sqrt{5}$
- $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} > \sqrt{5}$
- $\alpha_{n+2} + \beta_{n+2} > \sqrt{5}$

Supondo que as três são falsas, queremos chegar a um absurdo, ou seja:

- $\alpha_n + \beta_n \leq \sqrt{5}$
- $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \leq \sqrt{5}$
- $\alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \leq \sqrt{5}$

Supondo  $\alpha_n + \beta_n \leq \sqrt{5}$  e como  $\sqrt{5} < 3$ , devemos ter  $a_n \leq \alpha_n < 3$ , pois  $a_n$  é a parte inteira de  $\alpha_n$ , o que implica  $a_n \leq 2$  ( $a_n$  é inteiro) e, analogamente,  $a_{n+1} \leq 2$  e  $a_{n+2} \leq 2$ .

$$\sqrt{5} \geq \alpha_n + \beta_n \geq \alpha_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{\dots}}$$

Como  $a_{n+1} \leq 2$ , se  $a_n = 2$ , teríamos  $\sqrt{5} \geq \alpha_n = 2 + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{\dots}} > 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5}$ , que é um absurdo! Então,  $a_n = 1$  e analogamente, devemos ter  $a_{n+1} = 1$ .

Além disso,  $\sqrt{5} \geq \alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \geq a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+1} + \beta_{n+1}}$ . Se  $a_{n+2} = 2$ , teríamos

$$\sqrt{5} \geq 2 + \frac{1}{a_{n+1} + \beta_{n+1}} > 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5}, \quad \text{que é um absurdo. Logo, } a_{n+2} = 1.$$

Escreveremos agora  $\alpha_n$ ,  $\alpha_{n+2}$ ,  $\beta_n$  e  $\beta_{n+2}$ , todos em função de  $\alpha_{n+1}$  e  $\beta_{n+1}$ .

Assim, temos:

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{a_n + \beta_n} = \frac{1}{1 + \beta_n} \Rightarrow \beta_n = \frac{1}{\beta_{n+1}} - 1$$

$$\beta_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1} + \beta_{n+1}} = \frac{1}{1 + \beta_{n+1}}$$

$$\alpha_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2}} = 1 + \frac{1}{\alpha_{n+2}} \Rightarrow \alpha_{n+2} = \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1}$$

Voltando à nossa hipótese, temos:  $\alpha_n + \beta_n \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} \leq \sqrt{5}$ .

Como  $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \leq \sqrt{5}$ ,  $\alpha_{n+1} \leq \sqrt{5} - \beta_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - \beta_{n+1}} \Rightarrow \sqrt{5} \geq \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - \beta_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}}{\beta_{n+1}(\sqrt{5} - \beta_{n+1})}$  e assim concluímos que  $\beta_{n+1}(\sqrt{5} - \beta_{n+1}) \geq 1 \Leftrightarrow -\beta_{n+1}^2 + \sqrt{5}\beta_{n+1} - 1 \geq 0$  (I)

Por outro lado,  $\alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \leq \sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1} + \frac{1}{1 + \beta_{n+1}} \leq \sqrt{5}$ .

Sabemos também que  $\alpha_{n+1} \leq \sqrt{5} - \beta_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - 1 - \beta_{n+1}} \Rightarrow \sqrt{5} \geq \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1} + \frac{1}{1 + \beta_{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - 1 - \beta_{n+1}} + \frac{1}{1 + \beta_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5} - 1 - \beta_{n+1})(1 + \beta_{n+1})} \Rightarrow (\sqrt{5} - 1 - \beta_{n+1})(1 + \beta_{n+1}) \geq 1 \Leftrightarrow -\beta_{n+1}^2 + (\sqrt{5} - 2)\beta_{n+1} + (\sqrt{5} - 2) \geq 0$  (II)

Resolvendo as inequações (I) e (II) veremos que o maior ponto do intervalo de uma, que é  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , coincide com o menor ponto do intervalo da outra. Ou seja, acharemos que  $\beta_{n+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , que é um absurdo, pois  $\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \in Q$ . Mostramos assim, que uma dessas três aproximações  $\frac{p_k}{q_k}$  vai ter erro menor que  $\frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}$ .

Mostraremos agora que a constante  $c = \sqrt{5}$ , para a razão áurea, é a melhor constante possível.

Sabemos da proposição 6.5.2 que se tivermos infinitas frações  $\frac{p}{q}$  tais que  $\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ , então podemos obter estas frações através das frações contínuas.

Basta, então, vermos quais são os erros de  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  pelas as aproximações que vêm da fração contínua. Vejamos:

$$\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} < \frac{1}{cq_n^2} \Leftrightarrow \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} > c > \sqrt{5}$$

Mas,  $\alpha_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, \dots] = [1; 1, 1, 1, \dots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1] = [0; 1, 1, 1, \dots, 1]$ , repetindo o número 1, n vezes. Então,

$$\left| \beta_{n+1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| < \frac{1}{q_n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

(Note que  $q_n \geq n$ ,  $q_n$  está crescendo e  $q_1$  é pelo menos 1,  $q_2 > q_1, q_3 > q_2, \dots$ ), o que implica  $\beta_{n+1} < \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1}{n^2}$

$$\text{Assim, temos: } c < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta_{n+1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1}{n^2} =$$

$$\sqrt{5} + \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{n^2} > c - \sqrt{5} > 0 \Rightarrow n^2 < (c - \sqrt{5})^{-1}$$

O que limita n, evidenciando que só temos um número finito de soluções, ou seja, as aproximações da razão áurea têm de vir das frações contínuas,  $\frac{p_n}{q_n}$ , com  $n^2 < (c - \sqrt{5})^{-1}$ .

O Teorema de Hurwitz-Markov traduz, portanto, o que acontece em termos de aproximações racionais para os números reais.

### 7.3 Uma visão geométrica do Teorema de Hurwitz-Markov

Existe uma fórmula surpreendente para indicar a qualidade de uma convergente.

#### Teorema 7.3.1

Seja,  $\frac{p_n}{q_n}$  a  $n$ -ésima convergente (irredutível) para o número real

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

Então,

$$q_n^2 \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\lambda_n}$$

onde,

$$\lambda_n = [a_{n+1}; a_{n+2}, \dots] + \frac{1}{[a_n; a_{n-1}, \dots, a_1]}$$

A prova deste teorema é baseada no lema a seguir:

**Lema 7.3.2 :** Sejam os pontos A e B de coordenadas  $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$  no sistema de coordenadas cartesianas de origem O, onde  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$  são positivos. Então o paralelogramo OACB da figura 9(a) abaixo possui área igual a  $a_1 b_2 + b_1 a_2$ .

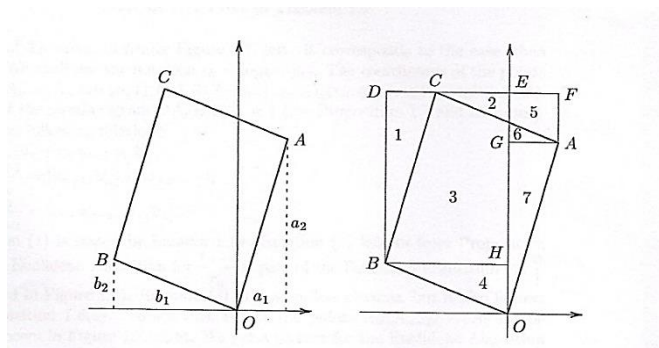


Figura 9 (a)

Figura 9 (b)

Demonstração do lema 7.3.2

### Prova do Lema 7.3.2

Obtemos o pentágono OAFDB, na figura 9(b) dividido em 7 partes. Denotamos por  $S_i$  a área de cada região  $i$ . Obviamente,  $EF = GA = a_1$ ,  $DB = GD = a_2$ ,  $AF = OH = b_2$ . É também óbvio, que  $S_4 = S_2 + S_5$  e  $S_1 = S_7$ .

Assim, a área(OACB) =  $S_3 + S_4 + S_6 + S_7 = S_3 + (S_2 + S_5) + S_6 + S_1 = (S_1 + S_2 + S_3) + (S_5 + S_6) = \text{área(HEDB)} + \text{área(AFEG)} = b_1 a_2 + a_1 b_2$

### Prova do Teorema 7.3.1

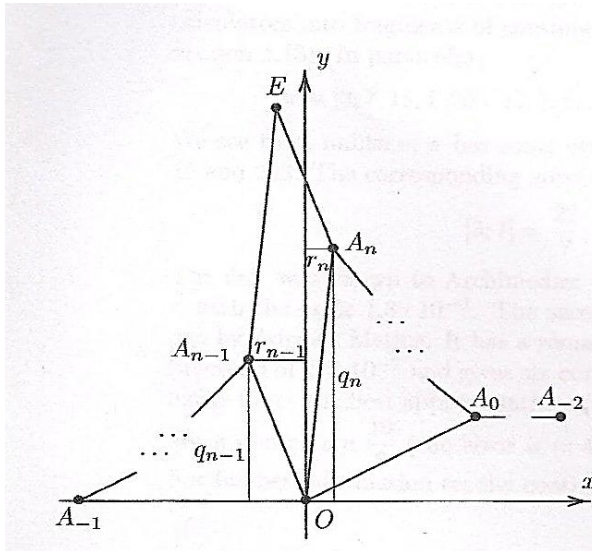


Figura 10 (a) - Teorema 7.3.1

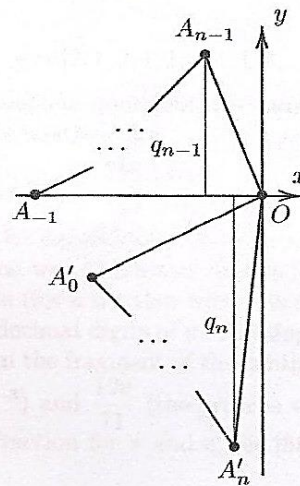


Figura 10 (b) - Teorema 7.3.1

Considere a figura 10 (a) acima que corresponde ao caso em que  $n$  é par. Usaremos a notação  $r_k = |\alpha q_k - p_k|$ . As coordenadas dos pontos  $A_{-2}, A_{-1}, A_{n-1}, A_n$ , são, respectivamente,  $(\alpha, 1), (-1, 0), (-r_{n-1}, q_{n-1})$  e  $(r_n, q_n)$ . (Ver proposição 6.5.1)

A área do paralelogramo  $OA_nEA_{n-1}$  é 1 (Veja a proposição 5.4.1).

Temos as seguintes relações:

- (1)  $r_{n-1}q_n + r_nq_{n-1} = 1$  (É afirmada pelo Lema 7.3.2)
- (2)  $\frac{r_{n-1}}{r_n} = [a_{n+1}; a_{n+2}, a_{n+3}, \dots]$  (Decorre do algoritmo de Euclides para  $\frac{\alpha}{1}$ )

- (3)  $\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1]$  (Pode parecer menos óbvia, mas também decorre do algoritmo de Euclides).

Para ver isso, reflita os pontos  $A_n, A_{n-1}, \dots, A_0$ , em relação à origem, como mostra a figura 10 (b) acima. Nós teremos uma imagem do algoritmo de Euclides para  $\frac{q_n}{q_{n-1}}$  (vire  $90^\circ$  e relita sobre o eixo x). As linhas poligonais correspondentes à  $A_{-2}A_0A_2A_4$  e  $A_{-1}A_1A_3A_5$  são, respectivamente,  $A_n'A_{n-2}' \dots A_0'$  e  $A_{n-1}A_{n-3}A_{n-1}$ .

A segunda termina no ponto  $A_{-1}$  sobre o eixo x, o que significa que  $\frac{q_n}{q_{n-1}}$  é uma fração contínua igual a  $[a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1]$  como afirma a relação (3).

Agora, nós dividimos a relação (1) por  $r_n q_n$  e calculamos  $\lambda_n$ :

$$\lambda_n = \frac{1}{r_n q_n} = \frac{r_{n-1}}{r_n} + \frac{q_{n-1}}{q_n} = [a_{n+1}; a_{n+2}, \dots] + \frac{1}{[a_n; a_{n-1}, \dots, a_1]}$$

ou também

$$\lambda_{n-1} = \frac{1}{r_{n-1} q_{n-1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} + \frac{r_n}{r_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \dots, a_1] + \frac{1}{[a_{n+1}; a_{n+2}, \dots]}$$

Isso conclui a prova para valores pares e ímpares de n.

Este teorema mostra que quando as convergentes são as melhores aproximações racionais para números reais, elas não são todas igualmente boas. A aproximação  $\frac{p_n}{q_n}$  é realmente boa se  $\lambda_n$  é grande, o que significa que sendo

$a_{n+1} < \lambda_n < a_{n+1} + 2$ , o quociente parcial  $a_{n+1}$  é grande. Nesse sentido nem o número de ouro, nem  $\sqrt{2}$  possuem boas aproximações.

Vamos considerar os números irracionais mais frequentemente usados:  $\pi$  e e. Como vimos, não é difícil converter aproximações decimais fornecidas por calculadoras de bolso em fragmentos de frações contínuas. Em particular,  $\pi = [3; 7, 15, 1, 293, 10, 3, 8, \dots]$ , e  $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots]$ . Vemos que, ao contrário de e,  $\pi$  possui alguns quocientes parciais grandes, os mais notáveis 15 e 293. As respectivas aproximações de  $\pi$ , já comentadas anteriormente são  $[3; 7] = \frac{22}{7}$  e



$[3;7,1,15,1] = \frac{355}{113}$ . A primeira foi descoberta por Archimedes, com denominador 7, foi dado o valor de  $\pi$  com um erro de  $1,3 \cdot 10^{-3}$ . A segunda foi descoberta após 4 séculos por Adriaen Metius. Com este denominador sua notável aproximação possui uma precisão de  $2,7 \cdot 10^{-7}$  e fornece uma aproximação correta de 6 dígitos para o valor de  $\pi$ . Nada comparado existe para o número e. As melhores aproximações de e, usando frações contínuas são  $\frac{19}{7}$  (erro  $\approx 4 \cdot 10^{-3}$ ) e  $\frac{199}{71}$  (erro de  $\approx 2,8 \cdot 10^{-5}$ )

#### 7.4 A prova do teorema de Hurwitz-Markov usando o indicador $\lambda_n$

Seja  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$  um número irracional. Queremos provar que para infinitas frações convergentes  $\frac{p_n}{q_n}$ ,  $\lambda_n = \frac{1}{q_n(q_n\alpha - p_n)} > \sqrt{5}$ , e que isso não é sempre verdade se substituirmos  $\sqrt{5}$  por um número maior.

Caso 1 : Sejam infinitos quocientes parciais  $a_n$  maiores ou iguais a 3. Então, para esses valores de n, temos :  $\lambda_n > a_n \geq 3 > \sqrt{5}$ .

Caso 2: Seja um número finito de  $a_n$ ,  $a_n > 2$ , mas infinitos iguais a 2. Então, para infinitos valores de n,  $a_{n+1} = 2$ ,  $a_n \leq 2$ ,  $a_{n+2} \leq 2$  e  $\lambda_n = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \frac{1}{\dots}} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_1}}} \geq 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} > \sqrt{5}$ .

Caso 3 : Para m suficientemente grande,  $a_m = 1$ . Então para  $n > m$ ,

$$\lambda_n = [1; 1, 1, 1, \dots] + \frac{1}{[1; 1, 1, 1, \dots, a_1]}$$

A primeira parcela é o número de ouro,  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , e a segunda parcela tende para  $(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , quando n tende ao infinito e é maior que  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  para todos os outros valores de n.

Assim:

$$\lambda_n > \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt{5}$$

para infinitos valores de  $n$ , desde que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \sqrt{5}$ .

**OBS :** Para todo  $\varepsilon > 0$ , a inequação  $\lambda_n > \sqrt{5} + \varepsilon$  é verdadeira para finitos valores de  $n$ .

Note que apenas no caso 3 não podemos trocar a constante  $\sqrt{5}$  por uma constante maior. Nesse caso, o número  $\alpha$  possui a forma  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, 1, 1, 1, \dots]$ .

O representante mais característico dessa classe é o número de ouro  $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1; 1, 1, 1, \dots]$ . Pode-se provar que todos os números dessa classe são, precisamente, aqueles da forma  $\frac{a\phi+b}{c\phi+d}$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  e  $ad - bc = \pm 1$ .

Se  $\alpha$  não for um desses números, então a constante  $\sqrt{5}$  pode ser aumentada para  $\sqrt{8}$ .

## 7.5 Um exemplo

1) Seja o número irracional  $\sqrt{13} \cong 3,6055512 \dots$ . Escrito em fração contínua, temos:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}$$

Tomemos as três convergentes consecutivas  $r_2, r_3$  e  $r_4$ .

$$r_2 = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$r_3 = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{11}{3} = 3,666 \dots$$

$$r_4 = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{18}{5} = 3,6$$

Vemos na tabela 2 abaixo que pelo menos uma delas terá erro menor que o inverso do produto de  $\sqrt{5}$  pelo respectivo denominador ao quadrado.

n	Erro : $\left  \sqrt{13} - \frac{p_n}{q_n} \right $	< / >	$\frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}$
2	$ 3,6055512 \dots - 3,5  = 0,1055512$	<	0,1118034
3	$ 3,6055512 \dots - 3,666 \dots  = 0,0611154$	>	0,0496904
4	$ 3,6055512 \dots - 3,6  = 0,0055512$	<	0,0178885

Tabela 2 –Exemplo do Teorema de Hurwitz-Markov

## 8. O teorema de Lagrange

### 8.1 O enunciado do teorema

Esse teorema refere-se às chamadas Irracionalidades Quadráticas, que são números irracionais, raízes de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros. Vejamos o enunciado do teorema:

“Seja  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . A fração contínua  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  de  $\alpha$  é periódica a partir de um certo ponto, se e somente se, existem  $A, B, C \in \mathbb{Z}$ ;  $A \neq 0$ , tal que  $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ . (Isso equivale a dizer que  $\alpha = r \pm \sqrt{s}$  com  $r, s \in \mathbb{Q}$ ,  $s > 0$ ,  $\sqrt{s} \notin \mathbb{Q}$ )”

### 8.2 A prova do teorema 8.1

Conhecemos a fórmula exata para  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$$

Isolando  $\alpha_{n+1}$ , temos:

$$\alpha_{n+1} = \frac{p_{n-1} - \alpha q_{n-1}}{\alpha q_n - p_n}$$

$[a_0; a_1, a_2, \dots]$  é periódica a partir de um certo ponto se, e somente se, existirem inteiros positivos  $n_0$  e  $r$ , tais que  $a_{n+r} = a_n, \forall n \geq n_0$ .

Sejam  $m = n_0$ ,  $k = n_0 + r > m$ .

Temos  $\alpha_{m+1} = [a_{m+1}; a_{m+2}, \dots] = [a_{m+r+1}; a_{m+r+2}, \dots] = \alpha_{m+r+1} = \alpha_{k+1}$

$$\frac{p_{m-1} - \alpha q_{m-1}}{\alpha q_m - p_m} = \alpha_{m+1} = \alpha_{k+1} = \frac{p_{k-1} - \alpha q_{k-1}}{\alpha q_k - p_k}$$

Multiplicando em cruz, teremos uma equação do 2º grau em  $\alpha$ :

$$(q_m q_{k-1} - q_{m-1} q_k) \alpha^2 + (q_{m-1} q_k - p_{k-1} q_m) \alpha + p_m q_{k-1} - p_{m-1} q_k = 0.$$

Devemos mostrar, evidentemente, que esta equação não é degenerada. Temos

$$q_m q_{k-1} - q_{m-1} q_k \neq 0, \text{ senão } \frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{q_{m-1}}{q_m}, \text{ absurdo, pois essas frações são}$$

irredutíveis como vimos na prova da proposição 6.1.2.

Falta provarmos a volta, ou seja, se  $\alpha$  for uma irracionalidade quadrática então a fração contínua é periódica a partir de um certo ponto.

Seja  $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}$ , e considere a fórmula exata para  $\alpha$  que vem das frações contínuas,  $\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$ . Substituindo este valor na equação, teremos  $A\left(\frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}\right)^2 + B\left(\frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}\right) + C = 0$ , o que irá implicar, em uma equação do segundo grau com coeficientes em função de  $n$ , ou seja,

$$A_n \alpha_{n+1}^2 + B_n \alpha_{n+1} + C_n = 0, \text{ com}$$

$$A_n = Ap_n^2 + Bp_nq_n + Cq_n^2$$

$$B_n = 2Ap_n p_{n-1} + B(p_n q_{n-1} + p_{n-1} q_n) + 2Cq_n q_{n-1} \text{ e}$$

$$C_n = Ap_{n-1}^2 + Bp_{n-1}q_{n-1} + Cq_{n-1}^2 = A_{n-1}$$

Queremos provar que existem  $m$  e  $k$  inteiros positivos,  $m < k$ , com  $\alpha_{m+1} = \alpha_{k+1}$ , ou seja as frações contínuas devem ser iguais,  $[a_{m+1}; a_{m+2}, \dots] = [a_{k+1}; a_{k+2}, \dots]$ , o que implica que  $a_{m+r} = a_{k+r} \forall r \geq 1$  ou seja,  $a_n = a_n + (k - m), \forall n \geq m + 1$ . Para isso é suficiente mostrar que existe  $M > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , onde  $A_n, B_n$  e  $C_n$  são limitados por  $M$ , ou seja,  $0 < |A_n| \leq M, |B_n| \leq M$  e  $|C_n| \leq M$ , pois assim, encontrando um número finito de coeficientes  $A_n, B_n$  e  $C_n$  e consequentemente um número finito de possibilidades para as equações com duas raízes, estaremos determinando um número finito para  $\alpha_{n+1}$  e como temos um número infinito de  $n$ 's, teremos que repetir o mesmo valor duas vezes. Isso mostra que a fração contínua é periódica a partir de um dado valor de  $n$ . Vejamos os cálculos a seguir.

Seja  $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$  tal que  $Ax^2 + Bx + C = A(x - \alpha)(x - \tilde{\alpha})$ . Substituindo  $x$  por  $\frac{p_n}{q_n}$ , teremos:  $\left| A\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 + B\frac{p_n}{q_n} + C \right| = \left| A\left(\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right)\left(\frac{p_n}{q_n} - \tilde{\alpha}\right) \right| = |A| \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \left| \tilde{\alpha} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{|A|}{q_n^2} \left| \tilde{\alpha} - \frac{p_n}{q_n} \right|$ . Mas, pela desigualdade triangular,  $\left| \tilde{\alpha} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq |\tilde{\alpha} - \alpha| + \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < |\tilde{\alpha} - \alpha| + 1$ , pois note que  $\frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{q_n^2} \leq 1$ . Então,  $\left| A\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 + B\frac{p_n}{q_n} + C \right| \leq \frac{|A|}{q_n^2} (|\alpha - \tilde{\alpha}| + 1)$ . Multiplicando tudo por  $q_n^2$ , temos  $|A_n| = |Ap_n^2 + Bp_nq_n + Cq_n^2| \leq |A| (|\alpha - \tilde{\alpha}| + 1)$ .

Do mesmo modo,  $|C_n| = |A_{n-1}| \leq |A|(|\alpha - \tilde{\alpha}| + 1)$ . O discriminante dessa equação será:

$$B_n^2 - 4A_n C_n = (B^2 - 4AC) \underbrace{(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)^2}_1 = B^2 - 4AC$$

$$B_n^2 = 4A_n C_n + B^2 - 4AC \leq \overbrace{4A^2(|\tilde{\alpha} - \alpha| + 1)^2 + B^2 - 4AC}^{M^2}$$

$M = \sqrt{4A^2(|\tilde{\alpha} - \alpha| + 1)^2 + B^2 - 4AC}$ . Para esses valores de  $M$  os coeficientes  $A_n, B_n$  e  $C_n$  são limitados, menores que  $M$ .

Note que  $A_n \neq 0$ , pois  $A_n = q_n^2 A \left(\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right) \left(\frac{p_n}{q_n} - \tilde{\alpha}\right)$ . Como  $\alpha$  é irracional, e  $\tilde{\alpha} = \frac{-B}{A} - \alpha$ , também será irracional. Além disso,  $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ , portanto,  $A_n \neq 0$

### 8.3 Exemplos

a)  $\alpha = [1; 1, 1, 1, \dots]$

Note que  $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$ , ou seja,  $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$  e, portanto, pegando a raiz positiva, temos  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , que é o número de ouro, da razão áurea.

b)  $\beta = [2; 2, 2, 2, \dots]$

Note que  $\beta = 2 + \frac{1}{\beta}$ , ou seja,  $\beta^2 - 2\beta - 1 = 0$  e, portanto, pegando a raiz positiva, temos  $\beta = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \beta - 1 = [1; 2, 2, 2, \dots]$

## 9. Aplicações

### 9.1 Um truque

Suponha que alguém lhe dê dois números decimais entre 0,5 e 1, de 9 dígitos cada, por exemplo, 0,635149023 e 0,728101457. Suponha também que um desses números foi obtido por uma fração com denominador menor do que 1000, e que o outro, seus algarismos tenham sido escolhidos aleatoriamente.

Afirmamos que poderemos achar, rapidamente, qual deles é uma fração, além disso, qual será essa fração. Vejamos:

Se  $\alpha$  é uma aproximação de 9 dígitos de uma fração  $\frac{p}{q}$ , com denominador menor que 1000, de 3 dígitos, então:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{10^9} = \frac{1}{1000 \cdot (1000)^2} < \frac{1}{1000q^2},$$

q com 3 dígitos.

Pela fórmula do indicador de qualidade das convergentes, apresentada na seção 7.3, um dos quocientes parciais  $a_{n+1}$  de  $\alpha$  é maior do que 1000, e o correspondente  $q_n$  menor do que 1000. Quão grande pode ser n? Sendo  $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ , os números  $q_n$  crescem pelo menos tão rápido quanto os números de Fibonacci  $F_n$ . Quando  $F_{15} = 987$ , n deve ser, no máximo 15.

Usando o algoritmo apresentado na seção 4.4 podemos achar, relativamente rápido, algumas frações incompletas dos números considerados. Quais sejam:

$$0,635149023 = [0; 1, 1, 1, 2, 1, 6, 13, 1024, 1, \dots]$$

$$0,728101457 = [0; 1, 2, 1, 2, 9, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 15, 1, 59, 7, 1, 39, \dots]$$

Obviamente, o primeiro número, e não o segundo, tem uma boa aproximação racional que é  $[0; 1, 1, 1, 2, 1, 6, 13]$ . Usando as relações da proposição 6.1.1, podemos achar as convergentes correspondentes. Vejamos a tabela 3, a seguir:

$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$	$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$	Convergente
$p_0 = a_0 = 0$	$q_0 = 1$	0
$p_1 = a_0 a_1 + 1$	$q_1 = a_1 = 1$	1
$p_2 = 1 \cdot p_1 + p_0 = 1$	$q_2 = 1 \cdot q_1 + q_0 = 2$	1/2
$p_3 = 1 \cdot p_2 + p_1 = 2$	$q_3 = 1 \cdot q_2 + q_1 = 3$	2/3
$p_4 = 2 \cdot p_3 + p_2 = 5$	$q_4 = 2q_3 + q_2 = 8$	5/8
$p_5 = 1 \cdot p_4 + p_3 = 7$	$q_5 = 1 \cdot q_4 + q_3 = 11$	7/11
$p_6 = 6 \cdot p_5 + p_4 = 47$	$q_6 = 6 \cdot q_5 + q_4 = 74$	47/74
$p_7 = 13 \cdot p_6 + p_5 = 618$	$q_7 = 13q_6 + q_5 = 973$	618/973

Tabela 3 –Aplicação 1

Obtemos assim, o resultado final  $\frac{618}{973} = 0,635149023$ .

## 9.2 Frações contínuas e eletricidade

Queremos determinar o valor da resistência equivalente de uma associação mista de resistores idênticos, cada um com resistência  $R$ , conforme ilustrado na figura 11.

OBS : As reticências horizontais indicam que o número de sub-malhas quadradas (malhas menores envolvendo quatro resistores, um em cada lado do quadrado) é muito grande, podendo ser considerado como infinito.

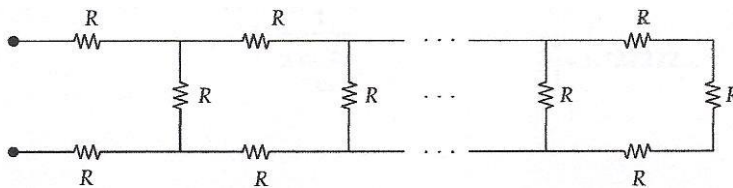


Figura 11 – Associação mista de resistores

Lembremos que a associação em série de duas resistências  $R_1$  e  $R_2$  possui uma resistência equivalente igual a  $R_s = R_1 + R_2$  e também que a associação em paralelo de duas resistências  $R_1$  e  $R_2$  possui uma resistência equivalente igual à

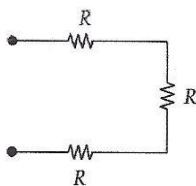
$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ou seja,

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Apresentaremos o circuito da figura 11 gradativamente, chamando de  $R_n$  a resistência equivalente do circuito no  $n$ -ésimo passo. Assim:

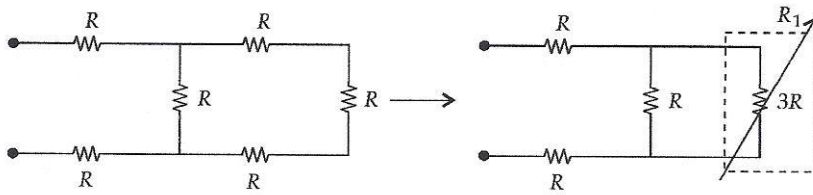
### 1º Passo:



$$R_1 = R + R + R$$

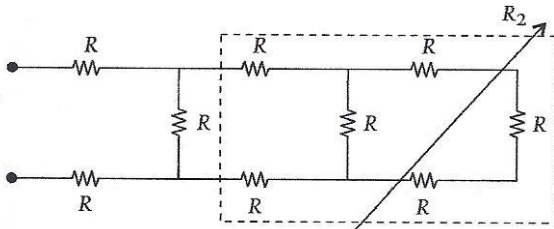


2º Passo:



$$R_2 = R + R + \left( \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}} \right) = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}$$

3º Passo:

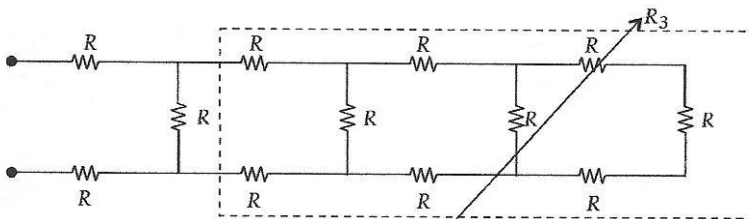


$$R_3 = R + R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}} = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}}$$

ou seja,

$$R_3 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}}}$$

4º passo:



$$R_4 = R + R + \left( \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_3}} \right) = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_3}}$$

ou seja,

$$R_4 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}}}}}$$

Observando o padrão recursivo dos passos anteriores, temos :

**n-ésimo Passo:**

$$R_n = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{n-1}}}$$

Chamemos de  $x$  o valor da resistência equivalente do circuito quando o valor de  $n$  tende ao infinito. Assim, teremos:

$$x = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \dots}}}}}}$$

$$2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \dots}}}}}} = x$$

E que pode ser escrito, usando o valor de  $x$  inicial novamente, da seguinte forma equivalente:

$$x = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{x}}$$

o que é equivalente à equação do segundo grau,  $x^2 - 2Rx - 2R^2 = 0$ , com raízes  $x = R(1 \pm \sqrt{3})$ . Como  $x$  é positivo, temos  $x = R(1 + \sqrt{3})$ .

Considerando que  $\sqrt{3} = [1; 1,2,1,2,1,2, \dots]$ , podemos escrever o resultado em fração contínua, como  $x = R.[2; 1,2,1,2,1,2, \dots] = [2; \overline{1,2}].R$

OBS : O processo acima, na realidade, necessita de verificação mais rigorosa, pois não é garantido que o limite criado no lado direito da equação existe. Mas, como sabemos do teorema de Lagrange, abordado no capítulo 8 deste trabalho, a representação em frações contínuas dos números irracionais quadráticos, como  $\sqrt{3}$ , são realmente periódicas.

### 9.3 Um modelo para a Física

No século XVI o físico holandês Christiaan Huygens elaborou um modelo reduzido do sistema solar, utilizando-se da relação entre duas engrenagens que simulavam o movimento do planeta Saturno em torno do Sol. Era conhecido o tempo para Saturno orbitar o Sol, que era de aproximadamente, 29,43 anos. Assim, o problema traduziu-se em confeccionar duas engrenagens cuja razão entre o número de dentes fosse o tempo considerado. Ou seja,  $\frac{x}{y} = 29,43$ , onde  $x$  e  $y$  são o número de dentes das respectivas engrenagens.

Considerando  $\alpha = 29,43$ , vamos calcular as frações convergentes que serão as aproximações para  $\alpha$ . Vejamos:

$$c_0 = a_0 = 29$$

$$c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = 29 + 0,43 = 29 + \frac{1}{2,32558} = 29 + \frac{1}{2} = \frac{59}{2} \approx 29,5$$

$$c_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = 29 + \frac{1}{2,32558} = 29 + \frac{1}{2 + 0,32558} = 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{206}{7} \approx 29,43. \text{ Ou seja, Uma engrenagem de 206 dentes e a outra de 7 dentes.}$$

Observe que  $c_3 = \frac{2737}{93}$ , sugere engrenagens impraticáveis,

## 10. Conclusão

Reconhecer que existem melhores aproximações racionais para um número real do que aquelas apresentadas na base 10 foi o objetivo deste trabalho. Além disso, vimos que calcular o erro dessas aproximações e apresentar um indicador de qualidade para as mesmas pode ser de muita importância para a resolução de problemas práticos e modelos matemáticos simples.

Foi apresentado que o conceito de fração contínua aparece de forma natural, independentemente da base de numeração escolhida.

Houve a preocupação de associar a todos os conceitos desenvolvidos uma interpretação geométrica que pudesse facilitar a compreensão do assunto. Com isso, criou-se possibilidades de comunicação com outras áreas da matemática, tais como a geometria analítica.

Consideramos, portanto, Frações Contínuas um componente curricular importante da matemática que deve ser contemplado, mesmo que em “doses homeopáticas”, a partir dos dois últimos anos do ensino fundamental.

A construção do conceito de número real deve ser feita de forma mais natural, utilizando-se as aproximações por números racionais e conceitos matemáticos já trabalhados nos primeiros anos do ensino fundamental, ou que venham sendo trabalhados, tais como a divisão euclidiana, a reta numérica e o plano cartesiano.

Acreditamos, que dessa maneira, os alunos poderão construir uma passagem mais consistente da matemática discreta para a matemática contínua e, no início do ensino médio, estarão mais bem preparados para o estudo das funções reais, tema central desta etapa de escolarização.

## Referências bibliográficas

ANDRADE, Eliana Xavier Linhares de; BRACCIALI, Cleonice Fátima. **Frações Contínuas** : algumas propriedades e aplicações. Disponível em <http://www.bienalsbm.ufa.br/MC34.pdf> Acesso em 10/12/2013

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2ª edição. São Paulo : Edgard Blucher LTDA, 1996

FUCHS, Dmitry; TABACHNIKOV, Serge. **Mathematical Omnibus** : Thirty Lectures on Classic Mathematics

HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**, 2a ed. Rio de Janeiro: SBM,2011

MOREIRA, Carlos Gustavo, **Teoria dos números: frações contínuas** – Parte 1 e 2. Disponível em <[www.youtube.com/watch?v=96PMF7bThSo](http://www.youtube.com/watch?v=96PMF7bThSo)>. Acesso em 28/12/2013.

A. Ya. Khinchin, **Continued Fractions**, Dover Science, New York, 1997

C.G. Moreira, **Eureka!** 3,43 (1998)

J.P.Q. Carneiro, **Revista do Professor de Matemática** 34,36 (1997)

M.E.G. Alencar (Dona Fifi), **Física na Escola** 5(2),4(2004)