

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL - PROFMAT

TALITA MELSONE MARCONDES

**GEOMETRIAS HIPERBÓLICAS COM USO DO GEOGEBRA**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2014

TALITA MELSONE MARCONDES

## **GEOMETRIAS HIPERBÓLICAS COM USO DO GEOGEBRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientador: Prof. Dr. André Fabiano Steklain  
Lisbôa

**CURITIBA**

**2014**

---

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

---

M321 Marcondes, Talita Melsone  
Geometrias hiperbólicas com uso do geogebra / Talita Melsone Marcondes. —  
2014.  
43 f. : il.; 30 cm

Orientador: André Fabiano Steklain Lisbôa  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa  
de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2014.  
Bibliografia: f. 41

1. Matemática – ensino médio. 2. Geometria. 3. Hipérbole - geometria. 4. Geogebra  
– software educacional. 5. Tecnologia educacional. 6. Matemática – Dissertações. I.  
Lisbôa, André Fabiano Steklain, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III.  
Título.

---

CDD (22. ed.) 510

---

Biblioteca Central da UTFPR, Campus Curitiba

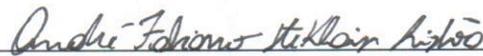
Título da Dissertação No. 017

## “Geometrias Hiperbólicas usando o Geogebra”

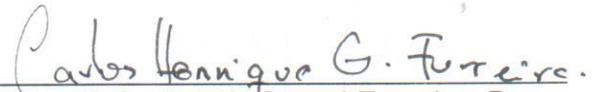
por

### Talita Melsone Marcondes

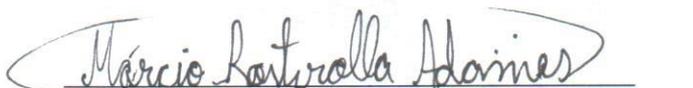
Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 13h do dia 12 de maio de 2014. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:



Prof. André Fabiano Steklain Lisbôa, Dr.  
(Presidente - UTFPR/Curitiba)



Prof. Carlos H. Grossi Ferreira, Dr.  
(USP/São Carlos)



Prof. Márcio Rostirolla Adames, Dr.  
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:



Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.  
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

Prof. Ronie Peterson Dario  
Coordenador Acadêmico  
do PROFMAT  
UTFPR - Câmpus Curitiba

*Ao meu marido por me incentivar a estudar e lutar pelos meus sonhos,  
pela força e paciência por nem sempre ter tempo para ele e minha filha  
Maria e em me apoiar nos momentos difíceis durante o curso .*

## **AGRADECIMENTOS**

- Ao meu marido e minha filha por terem me dado apoio e amor, de me fazerem me sentir forte a cada dificuldade encontrada.
- Aos meus amigos de mestrado Orlando, Leandro e Flávio, por me darem apoio e esperança para terminar este curso , pelos dias de estudo na sexta, por acreditarem em mim quando estava triste e desanimada com as dificuldades.
- À minha mãe por sempre acreditar em mim e me apoiar neste sonho de me tornar mestre, pela esperança de uma vida melhor e mais justa.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- Ao meu orientador pelo apoio durante a realização deste trabalho, a sua paciência e dedicação.

## RESUMO

MARCONDES, Talita Melsone. GEOMETRIAS HIPERBÓLICAS COM USO DO GEOGEBRA. 43 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

Este trabalho possui o objetivo de trazer para o contexto do ensino regular (Ensino Médio) as geometrias não-euclidianas que, apesar de estarem contempladas nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica, ainda são deixadas de lado pela maioria dos professores. Foram realizadas duas abordagens. Inicialmente é proposta uma abordagem histórica para fornecer a motivação ao estudo das geometrias não-euclidianas. Por fim é proposta uma abordagem utilizando o GeoGebra, um software educacional de geometria, para estudar conceitos básicos da geometria hiperbólica, tais como reta, segmento, ângulo e polígonos.

**Palavras-chave:** Geometrias não euclidianas; Geometria Hiperbólica; GeoGebra.

## ABSTRACT

MARCONDES, Talita Melsone. HYPERBOLIC GEOMETRIES WITH GEOGEBRA. 43 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROF-MAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

This work has the purpose of bringing to the context of regular education (Secondary) non-Euclidean geometries, despite being covered in the Basic Education Curriculum Guidelines, are still left aside by most teachers. Two approaches were performed. Initially a historical approach is proposed to provide motivation to the study of non-Euclidean geometries. Finally an approach is proposed using GeoGebra, an educational geometry software to study basic concepts of hyperbolic geometry, such as a line, segment, angle and polygons.

**Keywords:** Non-Euclidean Geometries; Hyperbolic Geometry; GeoGebra

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– O quinto postulado de Euclides. ....	12
FIGURA 2	– O Quadrilátero de Saccheri. Fonte: Alencar (1930). ....	13
FIGURA 3	– As curvas de Gauss. Fonte: Silvestrini (2010). ....	16
FIGURA 4	– Esfera. Fonte: Alencar (1930). ....	19
FIGURA 5	– Distância entre dois pontos do globo terrestre. Fonte: Alencar (1930). ..	19
FIGURA 6	– Distância entre A e B na geometria esférica. ....	20
FIGURA 7	– Pseudo-esfera. Fonte: Alencar (1930). ....	22
FIGURA 8	– Pseudo-esfera. Fonte: Alencar (1930). ....	23
FIGURA 9	– Pseudo-esfera. Fonte: Alencar (1930). ....	23
FIGURA 10	– Modelo de Klein. Fonte: Ferreira (2011). ....	24
FIGURA 11	– Uma “reta” no Disco de Poincaré. ....	24
FIGURA 12	– Outra “reta” no Disco de Poincaré. ....	25
FIGURA 13	– Segmento Hiperbólico. ....	25
FIGURA 14	– Postulado e Proposição. Fonte: Alencar (1930). ....	26
FIGURA 15	– Distância Hiperbólica ....	27
FIGURA 16	– Ângulo hiperbólico. ....	27
FIGURA 17	– Triângulo no Disco de Poincaré. ....	28
FIGURA 18	– Círculos Limites I e III. ....	28
FIGURA 19	– Tela inicial do GeoGebra. ....	29
FIGURA 20	– Construção da h-reta e do h-segmento. ....	30
FIGURA 21	– Inversão de B e C ....	31
FIGURA 22	– Mediatriz ....	31
FIGURA 23	– O h-segmento ....	32
FIGURA 24	– Obtenção da h-distância. ....	33
FIGURA 25	– Comparativo entre os segmentos. ....	34
FIGURA 26	– Postulado da paralelas. ....	35
FIGURA 27	– Construção do ângulo hiperbólico. ....	35
FIGURA 28	– Triângulo. ....	36
FIGURA 29	– Quadrilátero. ....	36
FIGURA 30	– Quadrilátero de Saccheri. ....	37
FIGURA 31	– Posição do ponto inverso. ....	42

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>UMA BREVE HISTÓRIA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS</b>	<b>11</b>
2.1	A CONTRIBUIÇÃO DE SACCHERI	13
2.2	O SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	14
2.2.1	Gauss, Lobachevsky, Bolyai	15
2.2.2	Riemann e Beltrami	17
<b>3</b>	<b>UM POUCO SOBRE GEOMETRIA ELÍPTICA</b>	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>GEOMETRIA HIPERBÓLICA</b>	<b>21</b>
4.1	MODELO DA PSEUDO-ESFERA DE BELTRAMI	22
4.2	MODELO DE KLEIN	23
4.3	MODELO DO DISCO DE POINCARÉ	23
<b>5</b>	<b>GEOGEBRA</b>	<b>29</b>
<b>6</b>	<b>CONSTRUÇÃO DO DISCO DE POINCARÉ NO GEOGEBRA</b>	<b>30</b>
6.1	SEGMENTO, RETA E DISTÂNCIA HIPERBÓLICA	30
6.2	POSTULADO DAS PARALELAS	33
6.3	ÂNGULO HIPERBÓLICO	33
6.4	TRIÂNGULOS E OUTROS POLÍGONOS	34
<b>7</b>	<b>GEOMETRIA E COSMOLOGIA</b>	<b>38</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>40</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>41</b>
	<b>Apêndice A – CONSTRUÇÃO DO SEGMENTO HIPERBÓLICO</b>	<b>42</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As geometrias não euclidianas há muito tempo passaram a ter um papel maior do que o de uma simples curiosidade matemática. Estas geometrias possuem aplicações que abrangem desde a física (WEINBERG, 1972) até a navegação. Estas aplicações possuem como consequência o fato das geometrias não euclidianas constarem nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE's) como componente obrigatória. As DCE's explicitam que

No Ensino Médio, aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica. (PARANÁ, 2008)

Apesar de serem componente obrigatória, as geometrias não euclidianas não vêm sendo trabalhadas satisfatoriamente em sala de aula. Uma das possíveis explicações é porque faltam ferramentas para ilustrar corretamente os conceitos que diferem da geometria euclidiana. De fato, as geometrias não euclidianas abrangem resultados que não são intuitivos e são difíceis de trabalhar apenas com lousa e giz.

A utilização de novas tecnologias em sala de aula é uma tendência e está cada vez mais presente no ensino, em particular no ensino de Matemática. No entanto, muitas vezes o uso destas tecnologias é ignorado por parte dos professores por simples falta de conhecimento das ferramentas existentes e suas possibilidades.

Uma das ferramentas digitais mais conhecidas para o ensino de geometria é o GeoGebra. Ele é um *software* gratuito, de forma que sua aquisição não acarreta nenhum custo para as escolas. Apesar de ser amplamente utilizado para ensinar a geometria euclidiana plana, poucos professores conhecem outras utilizações para este programa.

O objetivo deste trabalho é mostrar uma abordagem de como alguns conceitos básicos de geometrias não euclidianas, em particular da geometria hiperbólica, podem ser abordados no ensino médio. O conteúdo será desenvolvido a partir de duas abordagens. Uma abordagem histórica e outra envolvendo tecnologias digitais.

A história das geometrias não euclidianas mostra como novas geometrias surgiram a partir do problema do quinto postulado, que para muitos matemáticos deveria ser uma mera consequência dos postulados anteriores, mas cuja modificação abriu as portas para diferentes tipos de geometria. Será mostrada a contribuição de todos os percursores na composição destas novas geometrias. Ao se mostrar a história das geometrias, o porque elas existem, faz com que o aluno adquira um significado claro do porque se aprende este conteúdo.

O GeoGebra será utilizado para ilustrar alguns dos conceitos a serem trabalhados e para mostrar como o uso das tecnologias digitais pode facilitar o ensino das geometrias não euclidianas. Nesta etapa, será utilizado um modelo da geometria hiperbólica (o disco de Poincaré) para ilustrar os principais conceitos e compará-los com os conceitos equivalentes da geometria euclidiana.

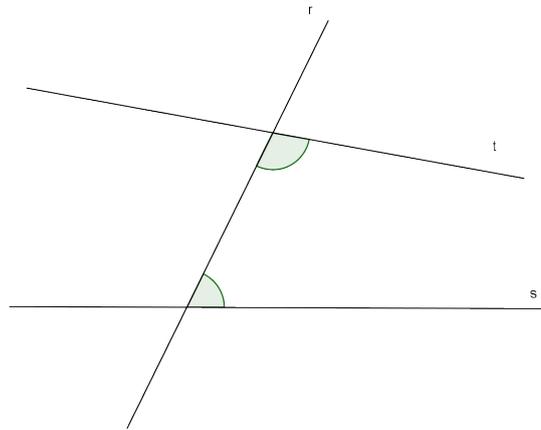
## 2 UMA BREVE HISTÓRIA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

A geometria teve origem no Egito antigo com a necessidade na agricultura de medir o tamanho das terras após as cheias no Rio Nilo. Neste tempo a medida era feita empiricamente, através de modelos prontos. A partir de Tales de Mileto (600 a.C., aproximadamente), surgem as primeiras tentativas de deduzir os fatos geométricos provenientes das ideias dos egípcios. Nesta época surge a geometria com demonstrações e postulados. Por volta de 500 a.C. os gregos fundaram as primeiras academias e a busca por conhecimentos sobre geometria aumentou.

Cerca de 300 a.C, Euclides de Alexandria escreveu os *Elementos* (EUCLID, 1956; ÁVILA, 2010), obra em que fundamentou toda a estrutura da geometria que se estuda até hoje. Nesta obra, Euclides baseia a geometria em cinco postulados que podem ser interpretados da seguinte maneira (ÁVILA, 2010):

1. *Dois pontos determinam uma reta.*
2. *A partir de qualquer ponto de uma reta é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário.*
3. *É sempre possível traçar um círculo com centro e raio arbitrários.*
4. *Todos os ângulos retos são iguais.*
5. *Dadas três retas  $r, s$  e  $t$  num mesmo plano, se  $r$  encontra  $s$  e  $t$  de forma que a soma dos ângulos interiores de um mesmo lado de  $r$  seja menor que dois ângulos retos, então as retas  $s$  e  $t$ , quando prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado de  $r$  em que os referidos ângulos interiores.*

A Figura 1 ilustra o quinto postulado descrito acima. Nesta ilustração, as retas  $s$  e  $t$  encontram  $r$ , no lado em que  $\alpha + \beta < \pi$ . Caso tivéssemos  $\alpha + \beta > \pi$ , então as retas  $s$  e  $t$  se encontrariam no lado oposto. Finalmente, se  $\alpha + \beta = \pi$ , então em nenhum dos dois lados a condição de Euclides é satisfeita, portanto as retas não podem se encontrar em nenhum dos lados. Neste último caso as retas  $s$  e  $t$  são *paralelas* (MLODINOW, 2008).



**Figura 1: O quinto postulado de Euclides.**

Por muitos anos tentou-se mostrar que o quinto postulado era uma consequência dos quatro primeiros, pois o mesmo não era intuitivo como os quatro primeiros postulados. Diversos matemáticos se dedicaram ao desafio de tentar demonstrar o quinto postulado. Entre outros, figuram Ptolomeu (90-168), Proclo (410-485), Levi ben Gerson (1288-1344), P.A. Cataldi (1548-1626), Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679), Girolamo Saccheri (1667-1733) e Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Nestas tentativas surgiram novas versões para o quinto postulado, como a que foi publicada por Playfair (1748-1819), embora já conhecida por Proclo (410-485). Segundo Ávila (2010) esta versão é basicamente a que é usada até os dias de hoje, com pequenas modificações:

*5a. Por um ponto  $P$  fora da reta  $r$  existe exatamente uma reta paralela à reta  $r$ .*

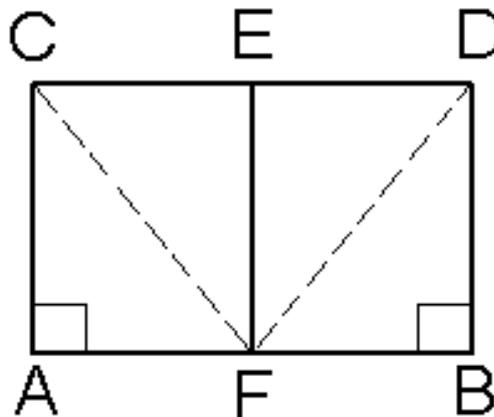
Um dos matemáticos a se ocupar em demonstrar o quinto postulado foi Adrien-Marie Legendre (1752-1833), que reescreveu o livro de Euclides com a linguagem da época para a geometria ser mais acessível. O “*Èlements de géometrie*” também trazia uma tentativa de demonstração do quinto postulado, mas sempre com erros que ele mesmo corrigia em edições seguintes de seu livro. Apesar de fracassarem na tentativa de demonstrar o quinto postulado, muitos dos matemáticos que debruçaram sobre este problema deixaram um legado de contribuições notáveis que ajudariam mais tarde no surgimento das geometrias não euclidianas. Destaca-se o trabalho de alguns deles a seguir.

## 2.1 A CONTRIBUIÇÃO DE SACCHERI

O padre Jesuíta Girolamo Saccheri foi um dos matemáticos que acreditava que o quinto postulado poderia ser demonstrado mas que não obteve sucesso, morrendo sem ter conseguido sucesso no seu intuito. Antes de morrer, Saccheri publicou um livro onde buscava demonstrar o quinto postulado. Neste livro Saccheri demonstra algumas dezenas de teoremas geométricos com a intenção de, ao final, demonstrar o quinto postulado.

Saccheri tentou fazer a demonstração através do método do absurdo. A partir de uma destas negativas chegou em alguns teoremas que segundo ele eram “estranhos” (pois eram ideias diferente das de Euclides) apesar de corretos. Estes teoremas influenciaram vários matemáticos posteriormente.

Para tentar fazer esta demonstração ele usou os quatro primeiros postulados para demonstrar o quinto postulado a partir de um quadrilátero. Imagine uma figura geométrica formada por quatro lados (um quadrilátero), como o que está na Figura 2. Os ângulos da base, A e B, são retos e os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento.



**Figura 2: O Quadrilátero de Saccheri. Fonte: Alencar (1930).**

Considere ABCD o quadrilátero da Figura 2, onde os ângulos A e B são retos e o lado AC é igual ao lado BD. Saccheri provou diversos teoremas:

**Teorema 2.1.** *No quadrilátero a linha EF que une o meio da base AB ao meio do topo CD do quadrilátero é perpendicular à base e ao topo.*

**Teorema 2.2.** *O topo CD é MENOR que a base AB no caso OBTUSO, IGUAL no caso EUCLIDIANO e MAIOR que ela, no caso AGUDO.*

**Teorema 2.3.** *A soma dos ângulos de um triângulo é maior que  $180^\circ$  no caso OBTUSO, igual a  $180^\circ$  no caso EUCLIDIANO e menor que  $180^\circ$  no caso AGUDO.*

Saccheri provou que se os ângulos C e D fossem retos, seria possível obter daí o quinto postulado. Restaria provar que a hipótese de que o caso dos ângulos serem ambos agudos ou obtusos levaria a uma contradição.

- 1) Caso OBTUSO: os ângulos C e D são maiores que  $90^\circ$ .
- 2) Caso EUCLIDIANO: os ângulos C e D são retos.
- 3) Caso AGUDO: os ângulos C e D são menores que  $90^\circ$ .

Saccheri esperava que os casos OBTUSO e AGUDO levassem a contradições inaceitáveis e que seu quadrilátero se reduziria, pela força da lógica, ao caso EUCLIDIANO. Levando esse projeto adiante ele demonstrou o caso OBTUSO, e acreditava ter demonstrado também o caso AGUDO. No caso OBTUSO ele obteve a demonstração ao utilizar o Axioma de Arquimedes e o Princípio da Continuidade para demonstrar que tanto o caso OBTUSO quanto o caso EUCLIDIANO implicavam no quinto postulado, mas que o quinto postulado implicava no caso EUCLIDIANO (demonstração que não é útil ao se aceitar a existência de retas de tamanho finito no caso OBTUSO). Na demonstração do caso AGUDO ele concluiu que este caso levaria à existência de “retas assintóticas”, o que, segundo o próprio Saccheri, “era repugnante à natureza da reta”. Mais tarde demonstrou-se que estas retas poderiam existir, e que Saccheri estava enganado. Saccheri não encontrou a contradição necessária, e sim uma longa série de resultados, alguns dos quais vieram a se tornar teoremas clássicos da geometria não euclidiana.

Apesar de Saccheri não ter sido bem sucedido na sua tentativa de demonstrar o quinto postulado a sua contribuição foi fundamental para o surgimento das geometrias não euclidianas.

## 2.2 O SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Depois de Saccheri sucederam-se outros matemáticos que também buscavam demonstrar o quinto postulado, tal como Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss estudou sobre o assunto por volta de 1810 e obteve diversos resultados, porém não publicou nada oficial. Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) publicou as suas descobertas sobre a teoria da nova geometria e Janos Bolyai (1802-1860), por influência do pai amigo de Gauss, que queria demonstrar o quinto postulado, também estudou esta ideia sem trégua e obteve descobertas interessantes. Estes três estudaram sobre este assunto paralelamente. Posteriormente Bernhard Riemann (1826-1866) e Eugenio Beltrami (1835-1900), Felix Klein e Henri Poincaré ajudaram

a consolidar as novas geometrias com a construção dos modelos.

### 2.2.1 GAUSS, LOBACHEVSKY, BOLYAI

Gauss foi o maior matemático de sua época e contribuiu muito para o desenvolvimento da nova geometria. Apenas alguns dos resultados de Gauss foram conhecidos durante sua vida. Sabe-se da descoberta da nova geometria por Gauss graças as suas anotações e correspondências que trocava com alguns matemáticos da época. Muitos de seus resultados foram divulgados dessa forma.

Inicialmente, Gauss tentou provar o quinto postulado usando o método redução ao absurdo, conforme as tentativas de Saccheri e Lambert. Mas na segunda década do século XIX, Gauss começou a deduzir uma nova geometria, formulando ideias e teoremas.

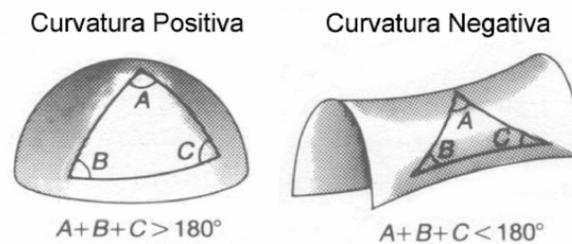
Segue-se um trecho da carta escrita por Gauss a F.A. Taurinus, em Göttingem, em 8 de novembro de 1824:

A hipótese que a soma dos ângulos é menor que  $180^\circ$  leva a uma geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente, a qual desenvolvi a um ponto que me satisfaz plenamente, no sentido de que posso resolver qualquer problema nela, com exceção da determinação de uma constante que não pode ser fixada a priori(...) Os teoremas dessa geometria parecem paradoxais e absurdos para um não iniciado; mas reflexão cuidadosa sobre o assunto revela que eles não contém nada de impossível. (...) Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta geometria não euclidiana não tiveram sucesso, e a única coisa nela que se opõe a nossa concepção é que se for verdade, deve existir no espaço uma unidade universal de medida linear (desconhecida por nós). ... ( v. [5] p. 45).

Gauss provou que a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado numa superfície de curvatura negativa constante é proporcional a área do triângulo. Esse trabalho coincidia com o trabalho de Lambert e indicava a existência de uma geometria onde na qual o postulado das paralelas não era válido.

Gauss desenvolveu uma metodologia para analisar a curvatura destes espaços. onde a superfície é desenvolvida pelo teorema da função implícita como o gráfico de uma função  $f$  de 2 variáveis. Assumindo o ponto  $p$  como um ponto crítico, isto é o gradiente de  $f$  anula-se (isto pode sempre ser alcançado por um movimento rígido apropriado), então a curvatura Gaussiana da superfície em  $p$  é o determinante da matriz Hessiana de  $f$ , isto é, o determinante da matriz 2 por 2 de segundas derivadas. Esta definição permite uma imediata distinção entre pontos de máximo/mínimo versus ponto de sela em termos do cálculo univariado. Assim, segundo o método de Gauss uma superfície esférica tem uma curvatura positiva enquanto que a superfície

de um hiperbolóide tem curvatura negativa, conforme ilustrado na Figura 3. E ainda que em uma superfície com curvatura positiva a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado nessa superfície é maior que  $180^\circ$ . No caso de uma superfície com curvatura negativa a soma desses ângulos internos será menor que  $180^\circ$ .



**Figura 3: As curvas de Gauss. Fonte: Silvestrini (2010).**

Bolyai realizou um trabalho independente do de Gauss. Ele descobriu que a afirmação de que “Por um dado ponto, é possível traçar um número infinito de retas paralelas a outra sem fim” não contraria os quatro primeiros postulados da geometria de Euclides, a não ser o quinto postulado. Este resultado fez com que seu pai encaminhasse sua descoberta para Gauss. Gauss respondeu que já havia feito esta descoberta, e que a considerava muito avançada para época e que não seria aceita pela sociedade científica. Bolyai ficou frustrado, mas não desistiu do projeto.

Paralelamente a Bolyai, Lobachevsky em 1826 durante uma conferência na Universidade de Kasan sugeriu a criação de uma nova geometria, na qual mais de uma reta paralela a uma reta dada podiam ser traçadas por um ponto e onde a soma dos ângulos de um triângulo seria menor que  $180^\circ$ . Em 1830 publicou um documento em russo sobre esta nova geometria, não tendo grande repercussão. Em 1840, já cego, publicou um livro em francês para tentar obter um maior impacto, mas não obteve sucesso. Gauss e Bolyai só leram sua publicação em 1866, quando Gauss afirmou que suas descobertas eram similares à dele, mas desenvolvidas e demonstradas de modo diferente. Somente depois de 35 anos as suas publicações foram reconhecidas.

As ideias de Saccheri, Gauss, Bolyai e Lobachevsky eram ainda nesta época tidas como absurdas. Mas *todas elas chegaram a uma mesma conclusão* (BERLINGHOF; GOUVEA, 2010): que negando o quinto postulado, é possível provar vários teoremas sem nenhuma contradição. No entanto, como eles não tinham um modelo (espaço) para construir esta nova geometria e seus conceitos não tinham como dizer que esta era uma nova geometria e sim apenas teoremas que não haviam contradições.

## 2.2.2 RIEMANN E BELTRAMI

Outros matemáticos seguiram utilizando das descobertas de Gauss, Bolyai e Lobachevsky de se obter novas geometrias em superfícies diferentes das de Euclides. Riemann, seguindo os passos de seus predecessores, dizia que *que eles sempre admitiam, sem contestar, que uma reta tem de ser infinita e ilimitada* (ALENCAR, 1930) conforme usada no segundo postulado de Euclides. Riemann afirmou que isto só seria válido no espaço de Euclides e não nestas novas geometrias. Sem considerar o quinto e o segundo postulado, Riemann criou um novo espaço na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que  $180^\circ$  correspondente ao caso OBTUSO usada por Saccheri. Esta superfície de Riemann é facilmente visualizada no espaço como sendo a superfície de uma esfera.

Em 1868, Eugenio Beltrami, lembrando a obra de Saccheri que ficou dormente por mais de um século, desenvolveu um outro tipo de geometria não euclidiana. Ele publicou um livro intitulado “Ensaio sobre a interpretação de uma geometria não euclidiana”, onde criou modelos de espaços para estudar esta nova geometria.

Atualmente estas geometrias recebem as seguintes classificações:

1. Geometria “elíptica” de Riemann;
2. Geometria “plana” de Euclides;
3. Geometria “hiperbólica” de Beltrami e Lobachevsky.

Destas geometrias, a plana obedece a todos os postulados de Euclides. A geometria hiperbólica não obedece ao quinto postulado e a geometria elíptica não obedece ao segundo e ao quinto postulados.

### 3 UM POUCO SOBRE GEOMETRIA ELÍPTICA

Esta geometria utiliza como um dos modelos a superfície bidimensional de uma esfera como sendo o espaço. Nesta geometria o conceito de reta é atribuído os círculos máximos da esfera, como por exemplo a linha do equador. A menor distância entre dois pontos é dado por um arco do círculo máximo que passa por estes pontos. Na qual a interseção de duas retas distintas é um único ponto.

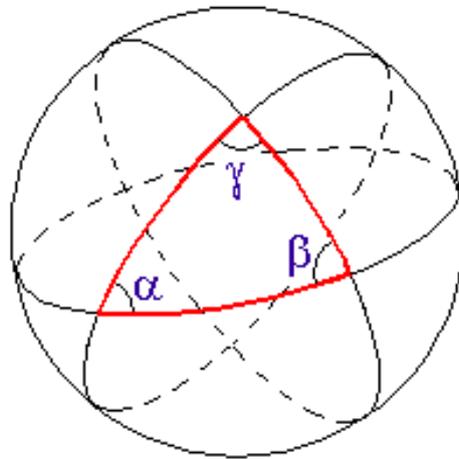
Nessa geometria elíptica o Quinto Postulado de Euclides fica muito diferente. Como as retas são círculos máximos surgem três constatações:

1. Uma reta nessa geometria é ilimitada mas não é infinita, ou seja, pense no globo terrestre e imagine uma “reta” ela seja representado como uma curva é uma circunferência, pois não tem começo nem fim.
2. Não existe uma reta paralela a uma reta dada, pois círculos máximos distintos de uma superfície esférica sempre se cruzam em exatamente dois pontos.
3. A soma dos ângulos de um triângulo na geometria elíptica é MAIOR que 180 graus, como ilustra a Figura 4

Pensando na curvatura de Gauss, já se sabe que esse espaço esférico possui curvatura positiva. Isso significa que esse tipo de espaço é encurvado para dentro, isto é, para o lado do raio da esfera.

Esta geometria possui muitas aplicações , principalmente na aviação e na navegação, pois as rotas (trechos) são um arco do círculo máximo e não retas como se pensa. Assim para calcular a distância entre duas cidade teremos que usar a distância entre pontos em uma esfera.

A distância entre duas cidades no modo Euclidiano é dado pelo comprimento de um segmento de reta, já na Geometria esférica é uma curva como ilustrada pela curva vermelha na Figura 5.



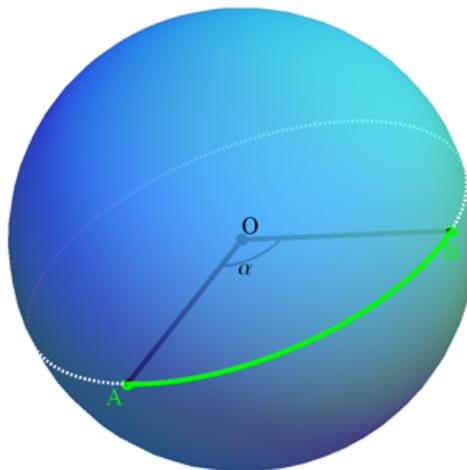
**Figura 4: Esfera. Fonte: Alencar (1930).**



**Figura 5: Distância entre dois pontos do globo terrestre. Fonte: Alencar (1930).**

Considere um ângulo  $A\hat{O}B$  correspondente ao menor arco  $AB$  e  $\alpha$  a sua amplitude na Figura 6. Então,  $d(A, B) = \alpha r$ , com  $\alpha$  em radianos

Temos que esta geometria tem papel importante para astronomia e outros estudos que utilizam de um espaço esférico como base. E ainda é importante para demonstrar como estudar estes elementos em sala de aula pela sua importância no mundo atual.



**Figura 6: Distância entre A e B na geometria esférica.**

## 4 GEOMETRIA HIPERBÓLICA

A geometria hiperbólica foi proposta inicialmente por Bolyai e Lobatchevsky, mas foi Beltrami que desenvolveu o primeiro modelo (espaço) para estudar esta nova geometria. O Plano Hiperbólico é definido como sendo um espaço de curvatura negativa onde quando duas curvas se cruzam com curvaturas para lados diferentes. Nesta geometria o quinto postulado de Euclides é substituído por outro axioma:

*5'. Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada, ou seja, é possível traçar mais de uma reta paralela a reta dada.*

Este postulado pode ser substituído por outra formulação, que é *Proposição 2* de (BARBOSA, 2007): *Dados uma reta  $n$  e um ponto  $P$  fora desta reta existem exatamente duas retas  $m$  e  $m'$  que passam pelo ponto  $P$  e que separam o conjunto das retas que interceptam  $n$  do conjunto das que não interceptam  $n$ .*

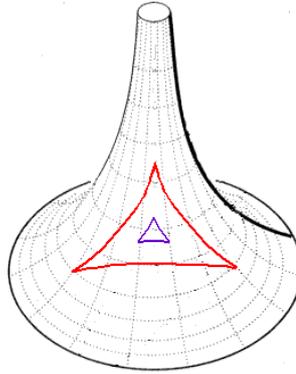
Nos diferentes modelos de geometria hiperbólica existem diversas definições de reta. Porém todos os resultados da geometria euclidiana que não dependem do quinto postulado permanecem válidos na geometria hiperbólica. A definição de ângulo dependerá do conceito de reta. Algumas propriedades são as mesmas, em especial dos triângulos, independentes do modelo. Por exemplo, seja qual for o modelo de geometria hiperbólica o seguinte resultado permanece válido.

**Teorema 4.1.** *Em geometria hiperbólica, para todo triângulo a soma dos seus ângulos internos é sempre menor que  $\pi$ .* (BARBOSA, 2007)

Os elementos desta geometria serão apresentados para cada modelo, pois os conceitos ficam mais simples de serem analisados e estudados. A utilização dos modelos não faz com que os resultados percam a generalidade, pois estes são consequências da utilização dos axiomas, que não dependem do modelo utilizado. O modelo do Disco de Poincaré será utilizado para estudo no GeoGebra.

#### 4.1 MODELO DA PSEUDO-ESFERA DE BELTRAMI

Diferentemente do caso euclidiano Beltrami utiliza uma pseudo-esfera, que é um tipo de espaço de curvatura negativa conforme ilustrada na Figura 7.



**Figura 7: Pseudo-esfera. Fonte: Alencar (1930).**

Neste espaço os elementos da geometria como reta e triângulos ficam mais claros e podem ser facilmente visualizados e analisados. Observa-se três constatações importantes:

1. Uma reta será uma curva chamada Geodésica neste espaço;
2. Por uma reta dada passam infinitas retas paralelas;
3. A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que  $180^\circ$ .

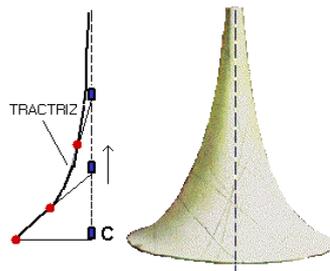
Esta pseudo-esfera é desenvolvida e construída na Figura 8 e a partir da seguinte relação descrita por (ALENCAR, 1930):

Imagine um carrinho C percorrendo uma linha reta sobre o tampo de uma mesa. Na traseira do carrinho amarra-se um cordão bem esticado, inicialmente perpendicular à reta que o carrinho percorre. Na ponta desse cordão põe-se um pequeno disco que deixa um rastro pela mesa ao deslizar sobre ela. Pois bem, puxando-se o carrinho o rastro traçado pelo disco é uma tractriz, nome bem apropriado, portanto.

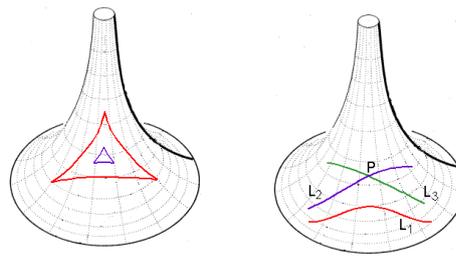
Depois, fazemos a tractriz girar em torno da reta pontilhada e obtemos uma superfície de revolução que é a pseudo-esfera que pode ser modelo para a geometria hiperbólica.

Na Figura 9 é ilustrado um triângulo na geometria hiperbólica. Também é ilustrado o quinto postulada nesta geometria hiperbólica, que afirma que por um ponto P passam infinitas retas paralelas a reta  $L_1$ .

Este modelo possui dois defeitos descritos por (ALENCAR, 1930):



**Figura 8: Pseudo-esfera. Fonte: Alencar (1930).**



**Figura 9: Pseudo-esfera. Fonte: Alencar (1930).**

- 1) As “retas” sobre ela nem sempre são infinitas como deveriam ser;
- 2) Existem círculos nela que não podem ser encolhidos até se tornarem um ponto.

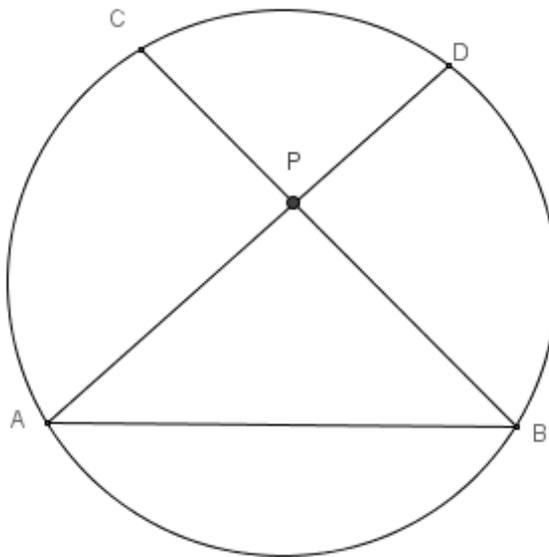
Por isso foram desenvolvidos outros modelos para melhor expor a geometria como O Disco de Poincaré e o Modelo de Klein, que serão descritos a seguir.

#### 4.2 MODELO DE KLEIN

Felix Klein utiliza um modelo em que ao invés do plano euclidiano se utiliza um disco, tendo no círculo que o circula os pontos que representam o infinito no plano original. Neste caso, as retas são as cordas do disco, excluindo suas extremidades. Na Figura 10, as retas DA e CB são paralelas à reta AB. E ainda as retas têm um comprimento infinito dentro de uma área limitada, a compreensão desse modelo exige que os conceitos euclidianos de ilimitação e infinitude não permaneçam associados um ao outro.

#### 4.3 MODELO DO DISCO DE POINCARÉ

Este modelo foi criado por Henri Poincaré (1864-1912) baseado na geometria euclidiana. O plano neste modelo é como um mapa que segundo (ALENCAR, 1930) é um desenho gráfico que se propõe a representar, sobre uma folha plana de papel, o que existe na realidade em uma região geográfica cheia de acidentes, que implica necessariamente em distorções e ainda

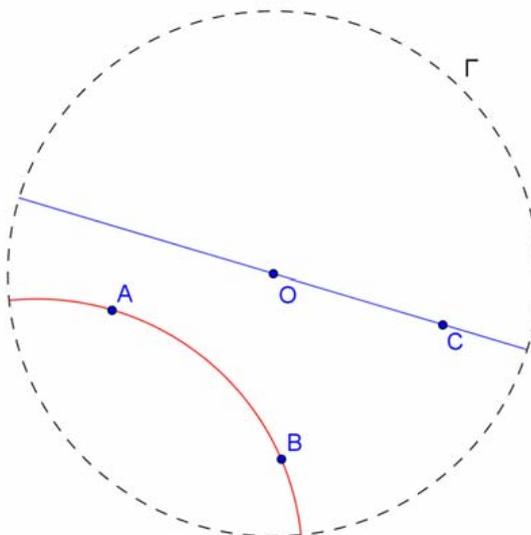


**Figura 10: Modelo de Klein. Fonte: Ferreira (2011).**

onde os ângulos são mantidos sem distorções. Este plano transporta todo o espaço hiperbólico ( Dado por  $H^3 = (x, y, z) \in \mathcal{R}^3 / z > 0$  para um círculo construído a partir das regras:

- 1) Todo ponto do plano hiperbólico corresponde a um, e só um, ponto dentro do disco.
- 2) Uma "reta" do plano hiperbólico corresponde a um segmento de círculo encerrado dentro do disco, cujas pontas se aproximam perpendicularmente da borda desse disco.

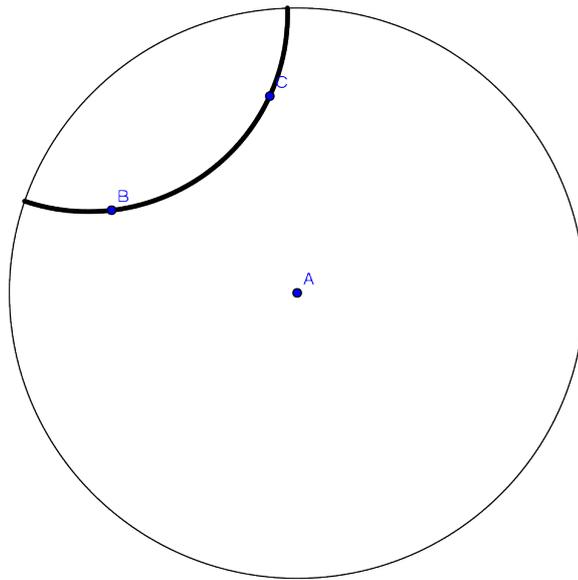
Neste plano a reta é uma curva , ou seja, um arco de circunferência como ilustrada na Figura 11 pelo curva AB.



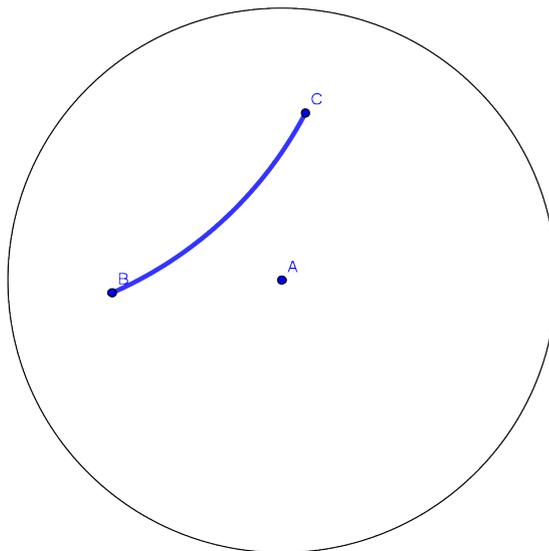
**Figura 11: Uma "reta" no Disco de Poincaré.**

De acordo com Lovis e Franco (2012) o plano de Poincaré é o interior de um Círculo euclidiano, onde as retas são cordas abertas que passam pelo centro  $O$ , e arcos de circunferências abertas ortogonais ao horizonte, que são quando dado um ponto no interior de um círculo  $C_1$ , os círculos  $C_1$  e  $C_2$  serão ortogonais se  $C_2$  passa pelo inverso se  $P$  em relação a  $C_1$ .

Uma reta  $BC$  é o arco finito com extremidade na circunferência como mostra a Figura 12 e um segmento é um arco compreendido entre os pontos internos  $A$  e  $B$  do disco de Poincaré como ilustra a Figura 13.



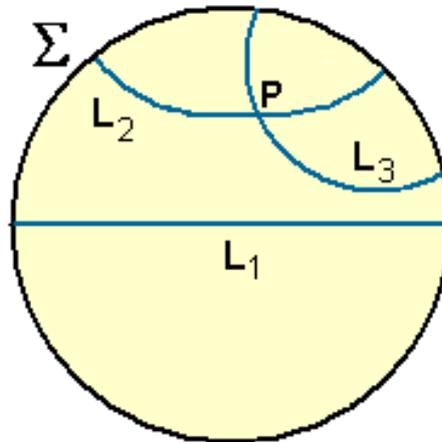
**Figura 12: Outra “reta” no Disco de Poincaré.**



**Figura 13: Segmento Hiperbólico.**

Assim, podemos representar o quinto postulado desta geometria e a *Proposição 2* de (BARBOSA, 2007): *Dados uma reta  $L_1$  e um ponto  $P$  fora desta reta existem exatamente duas*

retas  $L_2$  e  $L_3$  que passam pelo ponto  $P$  e que separam o conjunto das retas que interceptam  $L_1$  do conjunto das que não interceptam  $L_1$  de modo mais claro como ilustra a Figura 14



**Figura 14: Postulado e Proposição. Fonte: Alencar (1930).**

A medida de um segmento é calculado pela fórmula (LOVIS; FRANCO, 2012)

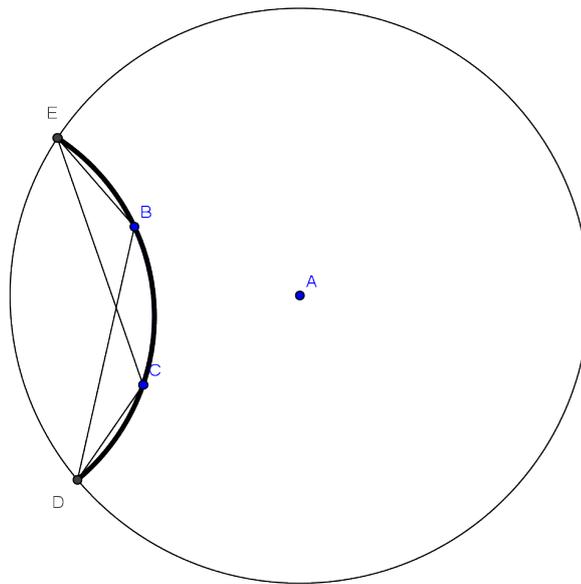
$$a = \left( \frac{\text{distância}[B, D] * \text{distância}[C, E]}{2 \text{distância}[B, E] * \text{distância}[C, D]} \right) - 2,$$

onde D e E são pontos ideais ( pontos no círculo) da h-reta BC. O esboço encontra-se na figura 15. Os pontos do horizonte são chamados de pontos ideais. Poincaré usou esta métrica para construir um espaço ilimitado (plano hiperbólico), em um espaço limitado com a métrica euclidiana (circunferência euclidiana). A métrica desenvolvida por Poincaré permite que quando os pontos B e C se aproximam dos pontos ideais o valor das medidas BE e CD diminuem, consequentemente o logaritmando aumenta e, assim, depois da aplicação da função logarítmica a função distância tende ao infinito. Ao aproximar os pontos B e C o valor das medidas BD e CE diminuem, o que ocasiona, depois da aplicação da função logarítmica uma distância que tende a zero.

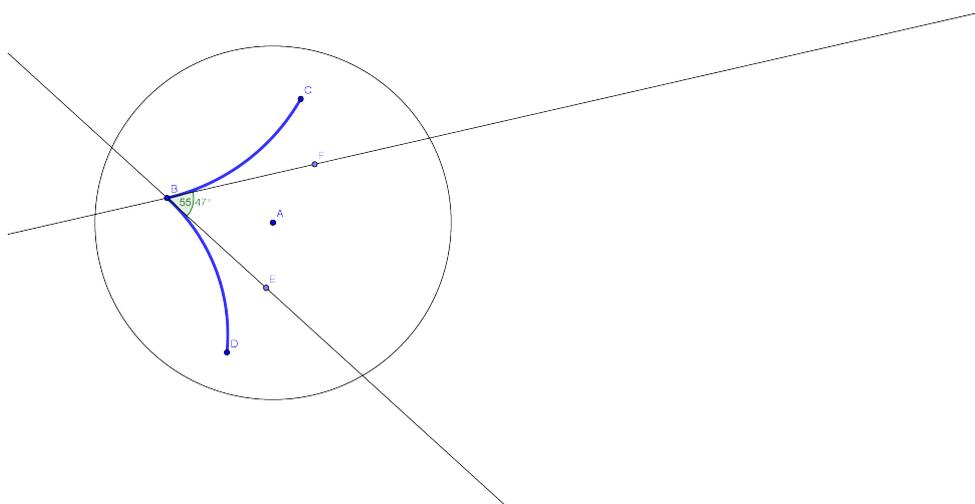
Ao utilizarmos a métrica desenvolvida por Poincaré, obtemos que a distância entre dois pontos quaisquer, quando estes estiveram próximos do horizonte, tenderá ao infinito. Isso acontece porque as h-retas, assim como a reta euclidiana, devem ser infinitas, para satisfazer o segundo postulado de Euclides.

O ângulo formado por duas retas hiperbólicas é determinado (ou construído) pelas retas tangente euclidianas a estas retas (arcos euclidianos) como podemos ver na Figura 16.

A figura mais importante que temos que visualizar neste modelo de geometria é o



**Figura 15: Distância Hiperbólica**



**Figura 16: Ângulo hiperbólico.**

triângulo, pois as definições de geometria hiperbólica se baseiam na soma dos ângulos internos de um triângulo ser menor que  $180^\circ$  ou  $\pi$  como ilustrado na figura 17

Para representar um polígono no Disco de Poincaré usamos vários segmentos hiperbólicos de acordo com o número de lados necessários para construir o polígono desejado. E ainda, se quisermos, podemos ter círculos neste disco e todos os elementos da geometria euclidiana transferidos para este plano.

Um artista que utiliza deste modelo para criar suas obras é Mauritus Escher que fez duas obras como ilustrado na Figura 18

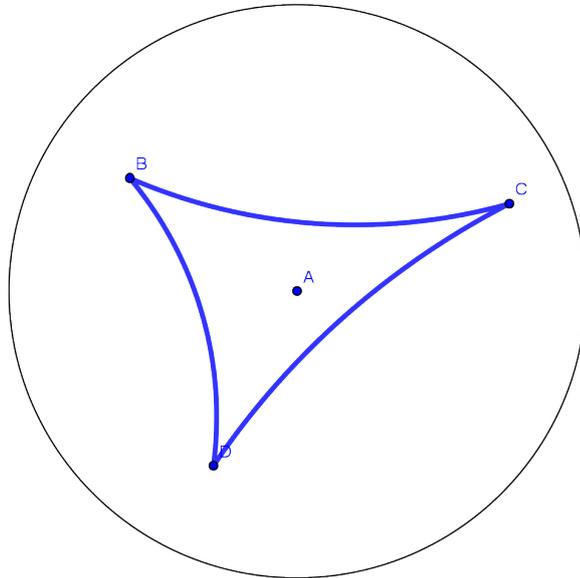


Figura 17: Triângulo no Disco de Poincaré.

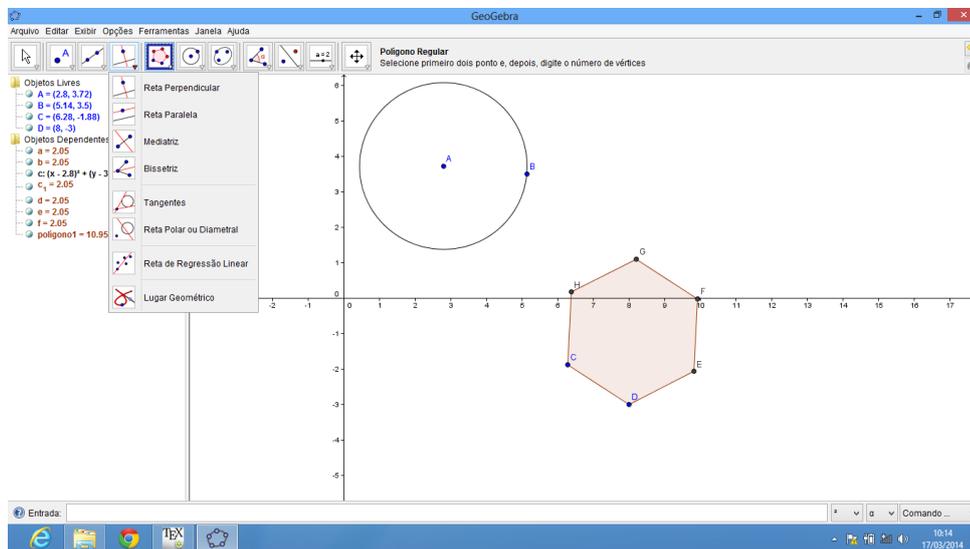


Figura 18: Círculos Limites I e III.

## 5 GEOGEBRA

O GeoGebra é um software gratuito que já está instalado na grande maioria das Escolas Públicas do Paraná e está disponível na internet em [www.GeoGebra.org](http://www.GeoGebra.org). Este programa foi criado por Markus Hohenwarter em 2001 com o intuito de facilitar o ensino e aprendizagem em Matemática.

O GeoGebra reúne em um único ambiente elementos de geometria, álgebra e cálculo, como ilustrado na figura 19. Entre outras coisas, ele permite a construção de cônicas no plano com suas respectivas suas fórmulas, polígonos regulares e irregulares, elementos de posições entre retas, funções afins e de segundo grau. Todas as construções, no entanto estão restritas ao plano (apesar de já existirem projetos para o GeoGebra em três dimensões).



**Figura 19: Tela inicial do GeoGebra.**

O programa é bastante intuitivo e de fácil utilização. Devido às suas características o GeoGebra pode ser facilmente adaptado para uma classe mais ampla de geometrias, tais como as geometrias não euclidianas. A facilidade e a maleabilidade do uso do GeoGebra podem fazer com que este software possa ser facilmente incorporado em sala de aula. Ele pode ser acrescido de novas ferramentas, como a de geometria hiperbólica, como será desenvolvido neste trabalho.

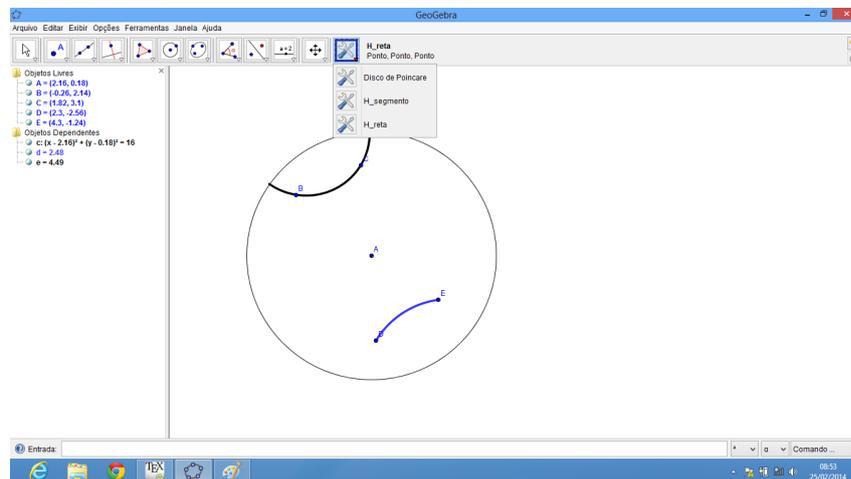
## 6 CONSTRUÇÃO DO DISCO DE POINCARÉ NO GEOGEBRA

O Disco de Poincaré é construído no GeoGebra a partir de um círculo de centro A e um determinado raio. Em seguida cria-se uma nova ferramenta que será nomeado de Disco de Poincaré.

### 6.1 SEGMENTO, RETA E DISTÂNCIA HIPERBÓLICA

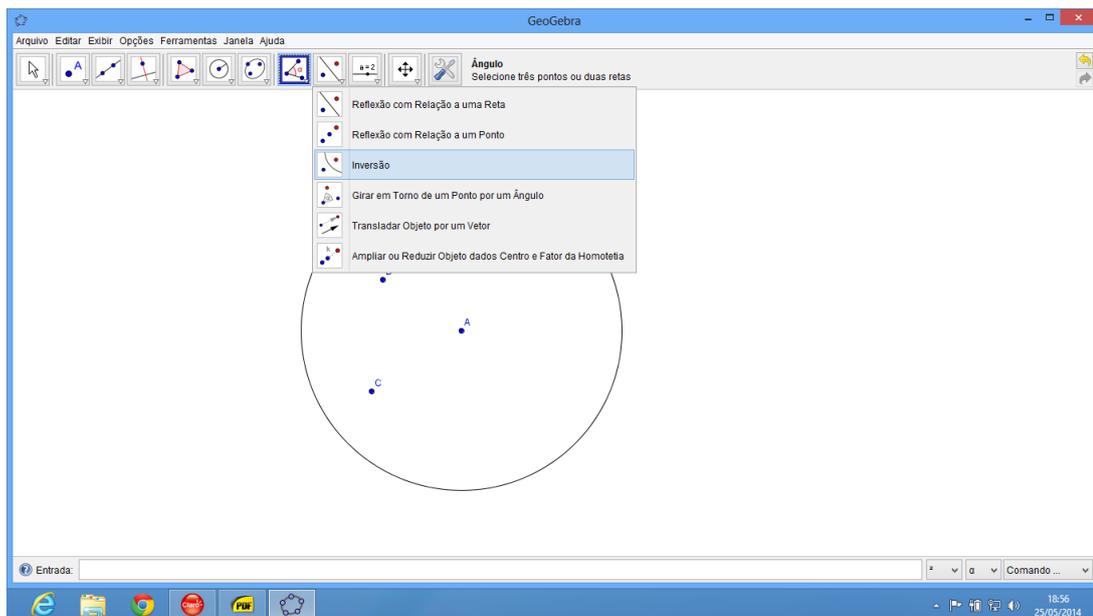
Para construir h-reta (reta hiperbólica) e h-segmento (segmento hiperbólico) é usada a definição da reta ou segmento no Disco que é um arco de um círculo, construído como ilustrado na Figura 20, a demonstração da validade desta construção estão no Apêndice A .

As etapas de construção das mesmas seguem abaixo:



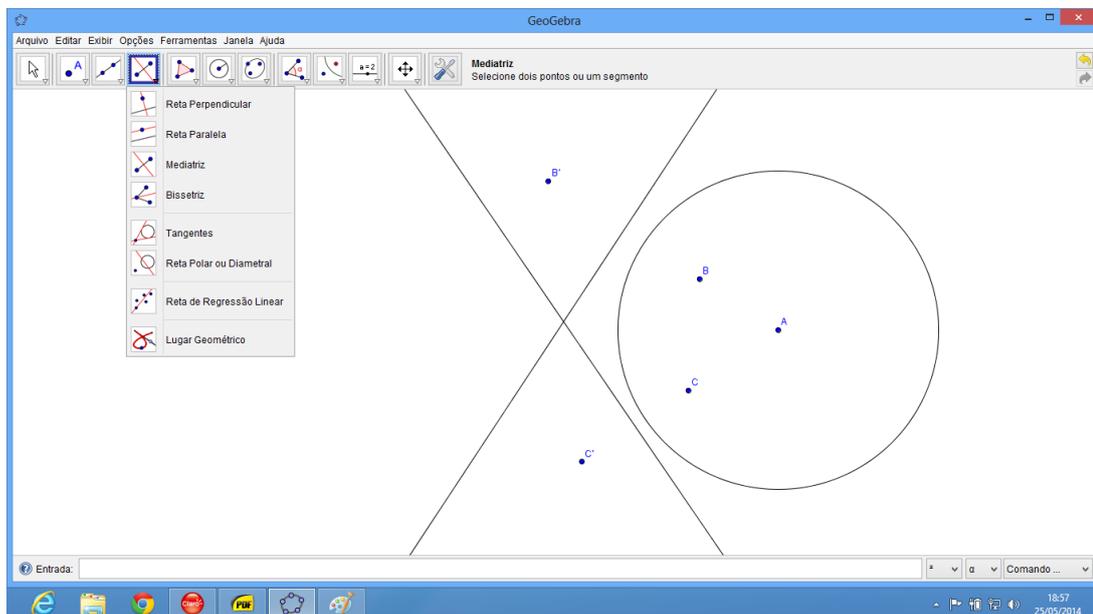
**Figura 20: Construção da h-reta e do h-segmento.**

1. Construir o Disco de Poincaré de centro A;
2. Marcar dois pontos B e C dentro do disco;
3. Fazer a inversão dos pontos B e C em relação ao círculo que será B' e C', onde inversão é quando  $AB \cdot AB' = r^2$  co r sendo o raio do círculo representados na figura 21



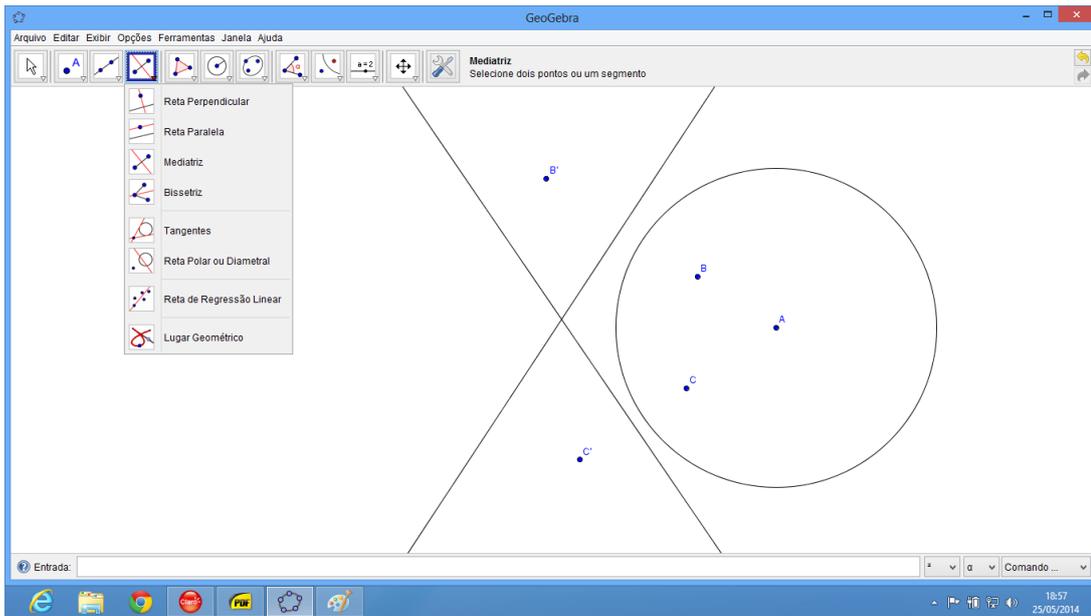
**Figura 21: Inversão de B e C**

4. Traçar as retas mediatrizes de  $BB'$  e  $CC'$ , como na figura 22;



**Figura 22: Mediatriz**

5. Marcar o ponto D , interseção das duas retas mediatrizes;
6. Construir o arco BC, que será o h-segmento
7. Criar as novas ferramentas primeiro com objeto final o arco BC e inicial pontos B e C este será nomeado h-segmento, conforme ilustrado na figura 23.



**Figura 23: O h-segmento**

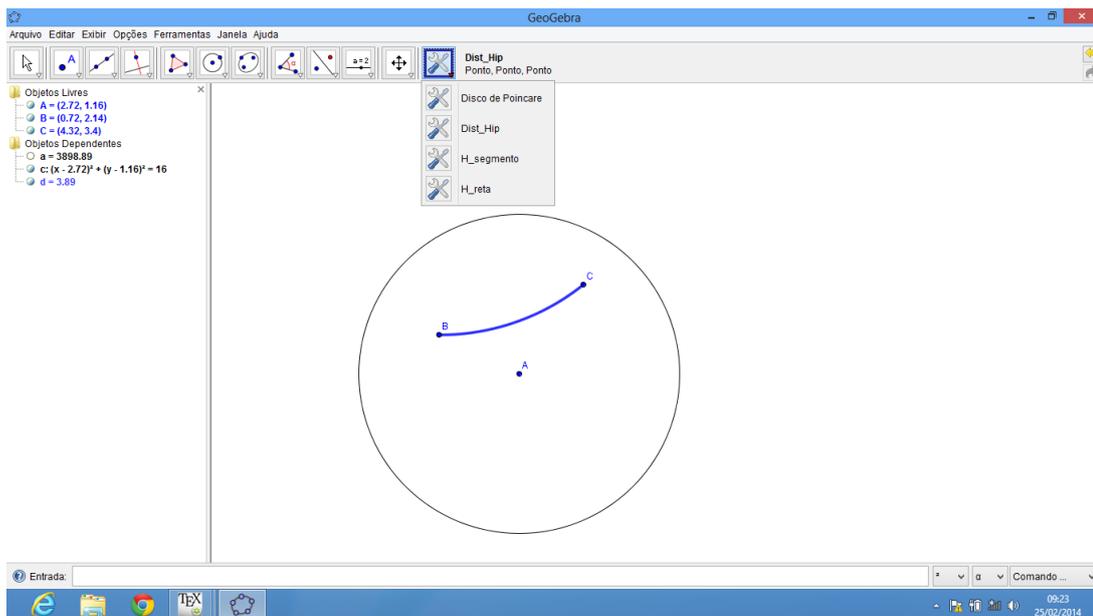
8. Para h-reta temos que primeiro fazer um círculo de centro em D e raio BD e marcar os pontos E e F de interseção dos dois círculos e em seguida fazer arco EF.
9. Para criar as novas ferramentas primeiro objeto final o arco EF e inicial pontos B e C esta será nomeado h-reta;
10. Para fazer h-distância com segmento BC, basta usar a fórmula na Entrada

$$a = \left( \frac{\text{distância}[B, E] * \text{distância}[C, F]}{2 \text{distância}[B, F] * \text{distância}[C, E]} \right) - 2$$

e criar a nova ferramenta com objeto final a distância e objeto inicial os pontos B e C como ilustrada na Figura 24.

11. Salvando as h-segmento, h-reta e h-distância entrar em ferramenta, depois abrir gerenciar nova ferramenta e gravar como cada uma delas com seu nome .

Comparando o segmento Euclidiano e Hiperbólico, temos dado um segmento fixo no espaço Euclidiano , o segmento hiperbólico no Disco de Poincaré muda, quanto mais perto do centro mais se aproxima do Euclidiano e quanto mais perto da borda maior o arco (segmento hiperbólico) como ilustram as Figuras 25.



**Figura 24: Obtenção da h-distância.**

## 6.2 POSTULADO DAS PARALELAS

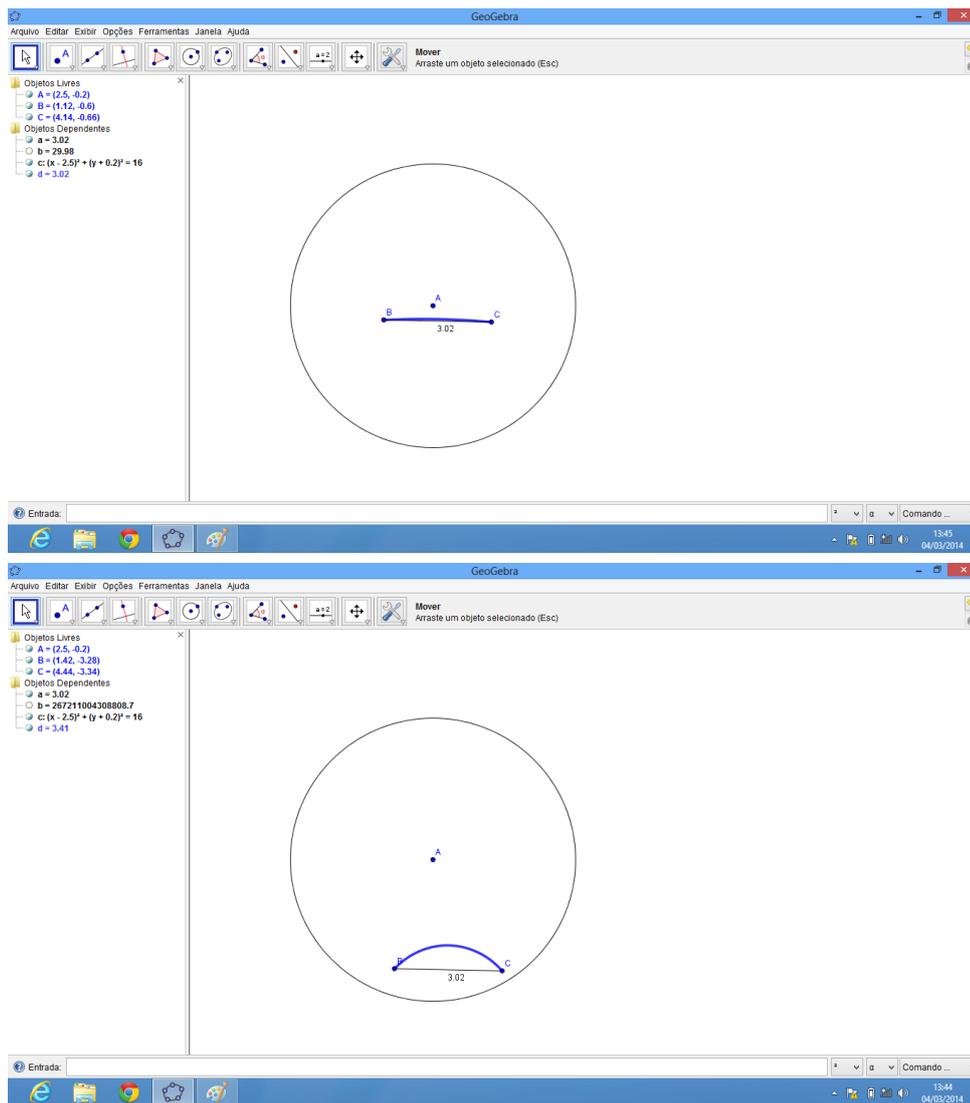
Para visualizar o *postulado das paralelas*, onde por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas que não cruzam a reta dada, ou seja, que é paralela a reta dada como mostra a Figura 26.

Com a Figura 26, também podemos entender a *Proposição 2* de Barbosa Barbosa (2007): *Dados uma reta  $n$  e um ponto  $P$  fora desta reta existem exatamente duas retas  $m$  e  $m'$  que passam pelo ponto  $P$  e que separam o conjunto das retas que interceptam  $n$  do conjunto das que não interceptam  $n$ .*

## 6.3 ÂNGULO HIPERBÓLICO

O GeoGebra também pode medir o ângulo entre duas h-retas como ilustrado na Figura 27 que é dado pela medida euclidiana das tangentes dos segmento hiperbólico. As etapas para construção do ângulo hiperbólico são as seguintes:

1. Construir duas h-retas que passam por um mesmo ponto;
2. Por este ponto de interseção traçar as retas tangentes às h-retas;
3. Marcar um ponto em cada reta para assim definir o ângulo hiperbólico;



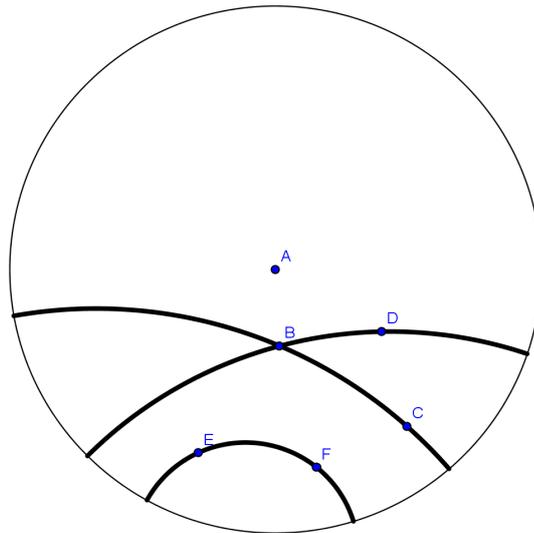
**Figura 25: Comparativo entre os segmentos.**

4. Para criar a nova ferramenta use como objeto final o ângulo e objeto inicial os pontos do ângulo;
5. Salvar a nova ferramenta em gerenciamento de ferramenta em gravar como.

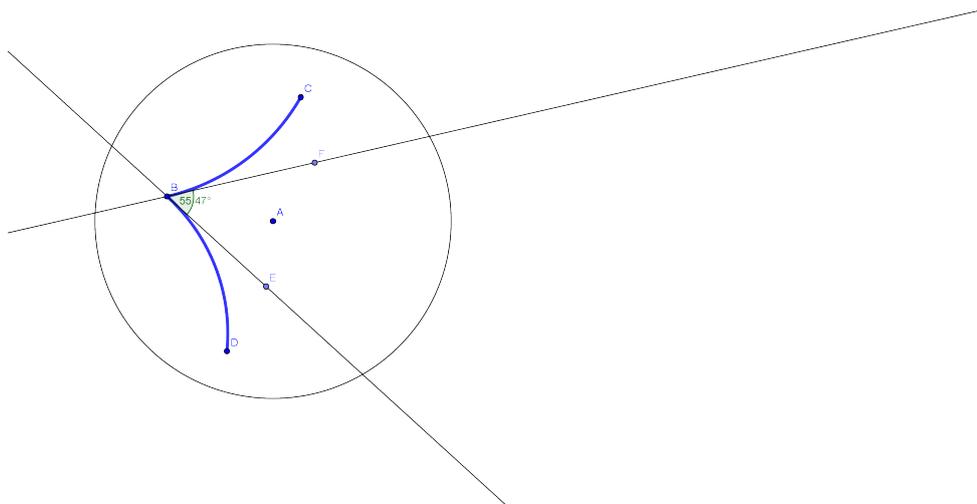
#### 6.4 TRIÂNGULOS E OUTROS POLÍGONOS

Para construir um triângulo no Disco de Poincaré, usa-se três pontos B, C e D e depois criar os h-segmentos BC, BD e CD. Pode-se medir seus comprimentos com a h-distancia e seus ângulos como ilustrado na Figura 28. Podemos visualizar que a soma dos ângulos internos é sempre menor que  $180^\circ$ , o que o diferencia da geometria Euclidiana.

Um quadrilátero BCDE, no Disco de Poincaré é representado na Figura 29 onde é



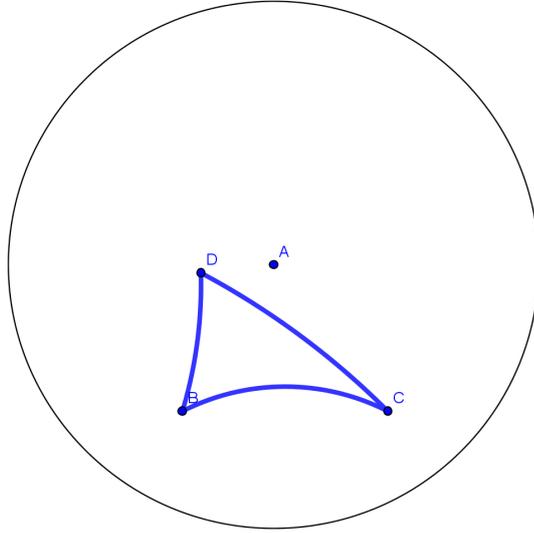
**Figura 26: Postulado da paralelas.**



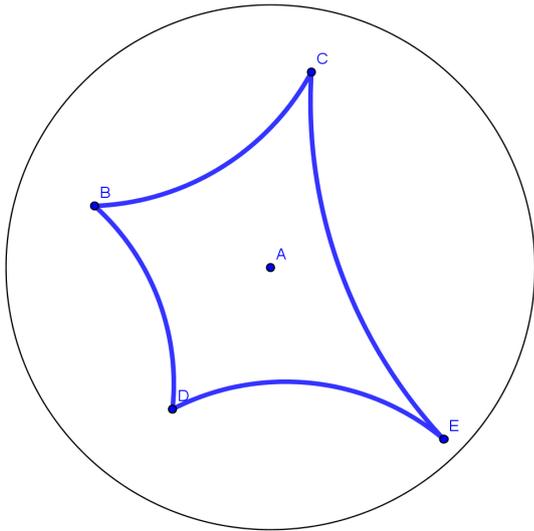
**Figura 27: Construção do ângulo hiperbólico.**

possível visualizar as diferenças entre as duas geometrias, no caso hiperbólico, soma dos ângulos internos menor que  $360^\circ$ .

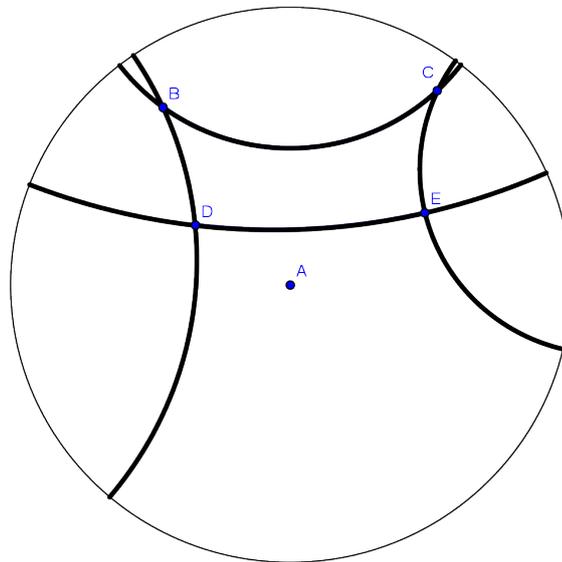
O quadrilátero de Saccheri é mostrado na Figura 30. É possível visualizar que no caso da construção de um quadrilátero em que dois lados adjacentes são perpendiculares o restante dos ângulos é menor do que  $180^\circ$ , correspondendo ao caso AGUDO.



**Figura 28: Triângulo.**



**Figura 29: Quadrilátero.**



**Figura 30: Quadrilátero de Saccheri.**

## 7 GEOMETRIA E COSMOLOGIA

As geometrias não euclidianas tiveram um papel fundamental no desenvolvimento da física, em especial na Relatividade Especial e Geral. Na Relatividade Especial Henri Poincaré (1854-1912) notou que a variável tempo poderia ser representada como a parte imaginária de um espaço-tempo de quatro dimensões, em que a transformação de velocidades poderia ser interpretada como uma rotação. Hermann Minkowski (1864-1909) elaborou esta idéia e propôs o espaço que foi batizado com seu nome. O espaço de Minkowski é o espaço em que a Relatividade Especial é mais comumente formulada.

Na Relatividade Geral Einstein propõe que o espaço-tempo, ao invés de adotar a estrutura do espaço de Minkowski (uma generalização da geometria euclidiana), adota um tipo de geometria que depende diretamente da matéria presente. Desta maneira a gravidade, ao invés de ser entendida como um campo atuando dentro de um espaço-tempo fixo, é interpretada como a deformação do próprio espaço-tempo (WEINBERG, 1972).

Para começar, a relatividade geral de Albert Einstein diz que a presença de matéria pode "encurvar" o espaço e modificar o tempo. Isto é, mesmo se nosso espaço for euclidiano quando vazio, perto de uma grande estrela ele se encurva e deixa de ser plano. (ALENCAR, 1930)

Na física newtoniana objetos atuando apenas sob a ação da inércia descrevem trajetórias em linha reta no espaço euclidiano. Na Relatividade Geral objetos sob ação da inércia também seguem linhas retas, mas em um espaço não euclidiano. Desta forma a trajetória destes objetos parecem curvas. Quando por exemplo a NASA lança um feixe de luz laser na direção da Lua, os engenheiros fazem seus cálculos considerando que esse feixe seguiu uma reta em um espaço euclidiano. Contudo eles estão desprezando a deformação do espaço tempo provocada por outros corpos, tais como o Sol e os planetas do Sistema Solar. Este efeito de "Lente Gravitacional" está presente em diversos fenômenos e já foi comprovado por inúmeros experimentos. O primeiro a comprovar o desvio gravitacional da luz foi Arthur Eddington em 1919 durante um eclipse total do Sol. A luz segue curvas geodésicas. A luz não se move uniformemente ao

longo de linhas retas não porque ela está sujeita a alguma força, mas por que o espaço-tempo é curvo. Isso é muito importante por que mostra que o conceito de força foi substituído pelo conceito geométrico de curvatura do espaço-tempo.

As observações mais recentes a respeito da distribuição de massa do universo mostram que o universo é, em *larga escala*, isotrópico e homogêneo. Como a curvatura do espaço-tempo está relacionada com a distribuição de massa temos então que em larga escala a curvatura do universo é constante. Desta forma existem três possibilidades para a evolução do universo (SILVESTRINI, 2010; MUKHANOV, 2005)

1. O espaço-tempo possui curvatura positiva, o que corresponde a um universo que evolui a partir de uma singularidade, se expande até uma certa separação entre as galáxias e então contrairá de volta até uma nova singularidade. Este é o chamado universo fechado (elíptico).
2. O espaço-tempo possui curvatura nula correspondente a um universo que se expande para sempre, diminuindo sua velocidade à medida que faz isso. Este é o chamado universo espacialmente plano.
3. O espaço-tempo possui curvatura negativa o que corresponde a um universo que se expandirá para sempre em um ritmo acelerado. Este é o chamado universo hiperbólico.

Recentemente observações envolvendo supernovas mostraram que o universo está se expandindo em uma taxa mais acelerada, correspondendo ao caso hiperbólico. Esta observação foi objeto do Prêmio Nobel de Física de 2011.

## 8 CONCLUSÃO

Ao final deste trabalho é possível concluir que, apesar das geometrias não euclidianas comporem um ramo vasto e complexo da Matemática, é possível apresentar alguns conceitos básicos com a utilização de recursos tecnológicos. A breve apresentação destes conceitos não tem por objetivo ser uma demonstração completa, mas sim uma ferramenta de introdução e motivação dos estudantes. Esta motivação pode ser complementada com os aspectos históricos que culminaram no surgimento destas geometrias, bem como sua aplicação em diversos ramos do conhecimento, como a Física.

Contudo, o aspecto altamente não trivial e muitas vezes não intuitivo destas geometrias demandam que o professor seja capacitado não somente no que diz respeito ao uso das tecnologias, mas a respeito da Matemática embutida nestas geometrias. O entendimento destes conceitos, por sua vez, faz com que seja necessária um aprofundamento maior dos conhecimentos de Matemática do professor que atua a nível de Ensino Médio. Isto é necessário para que os estudantes não corram o risco de serem expostos a conceitos errôneos e explicações superficiais. Para que os professores possam cumprir o que está disposto nas DCEs é necessário que exista uma capacitação neste sentido. A formação contínua do professor está cada vez mais presente como uma necessidade no ensino de Matemática.

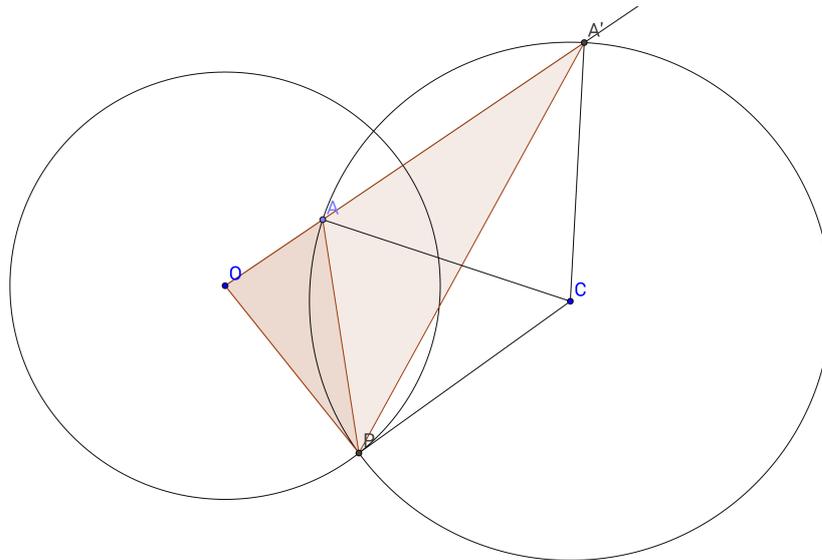
## REFERÊNCIAS

- ALENCAR, M. E. G. de. **Apostilas Eletrônicas**. São Paulo: site, 1930. Disponível em: <<http://www.seara.ufc.br/donafifi/donafifi.htm>>.
- ÁVILA, G. **Várias Faces da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- BARBOSA, J. ao L. M. **Geometria Hiperbólica**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- BERLINGHOF, W. P.; GOUVEA, F. **A Matemática Através dos Tempos**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- EUCLID. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. New York: Dover, 1956.
- FERREIRA, L. **Uma proposta de ensino de geometria hiperólica**. 1. ed. Maringa: site, 2011. Disponível em: <<http://www.dma.uem.br/igi/arquivos/artigo1.pdf>>.
- LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. **Utilizando o geogebra para construção de modelos planos para geometria hiperbólica**. 1. ed. Uruguai: Conferencia, 2012.
- MLODINOW, L. **A janela de Euclides**. 1. ed. São Paulo: Geração, 2008.
- MUKHANOV, V. **Physical Foundations of Cosmology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.
- PARANÁ, S. D. E. D. E. A. D. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Paraná: Governo do Paraná, 2008.
- SILVESTRINI, L. H. da C. **A Geometria dos Espaços Curvos ou Geometria não Euclidiana**. São Paulo: site, 2010. Disponível em: <[http://www.fc.unesp.br/~hsilvestrini/a\\_geometria\\_dos\\_espacos\\_curvos.pdf](http://www.fc.unesp.br/~hsilvestrini/a_geometria_dos_espacos_curvos.pdf)>.
- WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1972.

## APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO DO SEGMENTO HIPERBÓLICO

Dados dois pontos distintos no Disco de Poincaré existe um único segmento hiperbólico que passa pelos dois pontos. A construção deste segmento é relativamente simples dados alguns resultados da geometria plana. O resultado que vamos utilizar é o seguinte teorema

**Teorema A.1.** *Dadas  $C$  e  $C'$  duas circunferências que se interceptam ortogonalmente, seja  $A$  um ponto do interior de  $C$  que pertença a  $C'$ . Ao se estender um raio do centro  $O$  de  $C$  passando por  $A$ , o outro ponto de intersecção com a circunferência  $C$  será o seu inverso  $A'$ .*



**Figura 31: Posição do ponto inverso.**

Este teorema é facilmente demonstrado identificando os triângulos semelhantes  $\triangle OAP$  e  $\triangle OA'P$ , sendo  $O$  o centro da circunferência  $C$  e  $P$  o ponto de intersecção das circunferências  $C$  e  $C'$ .

Este resultado mostra que, dada uma reta hiperbólica que contenha  $A$ , uma vez que esta reta hiperbólica é o arco de uma circunferência que possui uma intersecção ortogonal com o Disco de Poincaré, o seu inverso  $A'$  também estará na circunferência. Para dois pontos distintos,  $A$  e  $B$ , a reta hiperbólica que passa pelos dois pontos é o arco da circunferência que passa por  $A$

e B e pelos seus inversos  $A'$  e  $B'$ . Portanto, dados estes quatro pontos é possível obter a (única) circunferência que passa por eles e, desta maneira, a (única) reta hiperbólica que passa pelos pontos A e B.