



GISELE POLYANA RODRIGUES PEREIRA

**O ENSINO DAS CÔNICAS ATRAVÉS DE ESTUDOS
CONTEXTUALIZADOS ATÉ SUA CONCEPÇÃO NA
GEOMETRIA ANALÍTICA: PARÁBOLA**

LAVRAS - MG

2013

GISELE POLYANA RODRIGUES PEREIRA

**O ENSINO DAS CÔNICAS ATRAVÉS DE ESTUDOS
CONTEXTUALIZADOS ATÉ SUA CONCEPÇÃO NA GEOMETRIA
ANALÍTICA: PARÁBOLA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Agnaldo José Ferrari

LAVRAS - MG

2013

GISELE POLYANA RODRIGUES PEREIRA

**O ENSINO DAS CÔNICAS ATRAVÉS DE ESTUDOS
CONTEXTUALIZADOS ATÉ SUA CONCEPÇÃO NA GEOMETRIA
ANALÍTICA: PARÁBOLA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 13 de março de 2013.

Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa UFLA.

Dra. Grasielle Cristiane Jorge UNICAMP.

Dr. Agnaldo José Ferrari
Orientador

LAVRAS - MG

2013

As pessoas mais importantes de minha
vida, minha família.

DEDICO

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me ter mostrado que a fé e a persistência são peças fundamentais na construção de um sonho e que vencer nossas dificuldades nos faz crescer espiritualmente e nos permite ir além do que poderíamos imaginar quando estávamos no início da caminhada;

A quem mais amo, meu marido Cleibe, que sempre me apoiou e incentivou nesta caminhada;

Ao meu filho Pedro Henrique e a minha sobrinha e afilhada Julia que são a alegria do meu viver;

Aos meus pais; Sebastião e Lenir, minhas irmãs; Eveline e Jaqueline e meu cunhado Alex, pelo carinho e empenho;

À Maria, pela dedicação e todos da minha família que sempre estiveram ao meu lado;

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Ciências Exatas (DEX), pela oportunidade concedida para a realização do mestrado;

Aos professores do Departamento de Ciências Exatas da UFLA, pelos ensinamentos transmitidos;

Ao professor Agnaldo José Ferrari pela paciência, amizade e dedicação, pois os conhecimentos e experiências por ele repassados foram de grande importância no cumprimento desta etapa e para o meu crescimento profissional;

Às professoras Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa e Dra. Grasielle Cristiane Jorge, pela disposição em servir;

A amiga Adriana, pela amizade e por suas contribuições sempre que precisei;

A todos os meus colegas do mestrado, em especial, Neder, Rodnei, Elisângela, Amanda e Lucia, pelo companheirismo;

À coordenadora do Pólo Educação e Integração “Marlene Naves Cardoso”, Liliane Pereira e Freitas e diretora da Escola Estadual “Carmelita Carvalho Garcia”, Maria Aparecida Pinheiro Cardoso, pela compreensão nos momentos de dificuldade.

RESUMO

As cônicas são utilizadas atualmente em astronomia, engenharia, arquitetura, física e em várias outras áreas. Porém, o estudo das cônicas fica restringido ao Ensino Médio, e na maioria dos casos, nem no Ensino Médio é trabalhado. Em muitos livros didáticos encontrados nas escolas, o ensino das cônicas se restringe a memorização de fórmulas sem o entendimento das propriedades e conceitos por trás delas. Apolônio foi o primeiro a se aprofundar no estudo das cônicas. Kepler estabeleceu que as órbitas dos planetas fossem elípticas, e desde então o uso da elipse ganhou importância na astronomia. Ela também é utilizada para construção de alguns tipos de refletores e nas câmaras de sussurros, que utilizam suas propriedades de reflexão nos focos. No método de navegação LORAN (long-range navigation) e na descrição da trajetória de uma partícula-alfa sujeita ao campo elétrico gerado por um núcleo atômico, é utilizado o conceito de hipérbole. Na fabricação de antenas parabólicas, faróis de automóveis, refletores, entre outros, é utilizado o conceito de parábola. Sugerimos que para o ensino de cônicas deve-se dar ênfase a visualização, utilizando material concreto e daí partir para as definições. Para isso foram apresentadas algumas atividades interessantes para se trabalhar na sala de aula. No Capítulo 5 foi apresentada uma parte sobre transformações de coordenadas mais voltada para cursos de graduação. Deseja-se com isso levar o aluno do Ensino Médio a se interessar e entender as cônicas.

Palavras-chave: Parabólico. Coordenada polar. Rotação de eixo.

ABSTRACT

Conics are currently used in astronomy, engineering, architecture, physics and many other areas. However, the study of conics is restricted to high school and, in most cases, not even then. Conics are taught, in many textbooks, only by memorizing formulas, without understanding the properties and concepts behind them. Apollonius was the first to deepen in the study of conics. Kepler established that the planets' orbits were elliptical and, since then, ellipses have gained importance in astronomy. It is also used in the construction of reflectors and whispering chambers, which use its properties of reflection in the focus. The hyperbole method is used in the LORAN navigation method (long-range navigation) and in the description of an alpha-particle subject to an electrical field generated by an atomic nucleus. The parabola is used in the fabrication of satellite dishes, head lights, reflectors, among others. The parabolas are models of various types of movements and are vastly used in physics. We suggest that conics must be taught in a manner of easier visualization using concrete material and, after this, teach the definitions. In order to do this, we bring some interesting activities to work with in the classroom. We also bring, in chapter 5, a portion on coordinate transformations focusing on graduate courses. With this we aim at leading the high school student to be interested in and understand conics.

Key-words: Parabolic. Polar coordinate. Axis rotation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Secção cônica (Parábola)	23
Figura 2 Gráfico da parábola	23
Figura 3 Lançamento oblíquo de uma bola	24
Figura 4 Parábola por meio da sua definição	24
Figura 5 Distâncias da parábola	25
Figura 6 Medida da diretriz ao vértice e foco ao vértice	26
Figura 7 Parábola com concavidade para cima	27
Figura 8 Parábola com concavidade para baixo	28
Figura 9 Parábola com concavidade para a direita	28
Figura 10 Parábola com concavidade para a esquerda	29
Figura 11 Parábola com concavidade para cima	29
Figura 12 Parábola com concavidade para baixo	30
Figura 13 Parábola com concavidade para a direita	30
Figura 14 Parábola com concavidade para a esquerda	31
Figura 15 Construção da parábola	34
Figura 16 Construção da parábola para o lado direito	34
Figura 17 Construção da parábola para o lado esquerdo	35
Figura 18 Esboço rudimentar da parábola	36
Figura 19 Corte na madeira	37
Figura 20 Mesa de bilhar parabólica	37
Figura 21 Molde com medidas	39
Figura 22 Haste de madeira	39
Figura 23 Disco de madeira com hastes fixas	40
Figura 24 Colagem do papel cartão	40
Figura 25 Refletor pronto	40
Figura 26 Posição dos refletores	41
Figura 27 Posições dos refletores	41
Figura 28 Corte no cone	42
Figura 29 Corte no cone de massinha de modelar	44
Figura 30 Característica da parábola	45
Figura 31 Construção da Parábola	45

Figura 32 Construção da parábola.....	46
Figura 33 Esboço da Parábola	46
Figura 34 Esboço da parábola com concavidade para a direita.....	48
Figura 35 Esboço da parábola com concavidade para a esquerda	50
Figura 36 Esboço da parábola com concavidade para cima	51
Figura 37 Esboço da parábola com concavidade para baixo	51
Figura 38 Esboço da parábola	55
Figura 39 Incidência dos raios solares sobre os receptores parabólicos	57
Figura 40 Captadores de energia solar	58
Figura 41 Representação da função quadrática	58
Figura 42 Curva parabólica na água que jorra	59
Figura 43 Objeto lançado de forma oblíqua	59
Figura 44 Antenas parabólicas	60
Figura 45 Faróis de carro	60
Figura 46 Igreja de São Francisco (Belo Horizonte- Minas Gerais - Brasil)	61
Figura 47 Coordenadas polares	62
Figura 48 Pontos em coordenadas polares	62
Figura 49 Alguns pontos marcados em coordenadas polares	63
Figura 50 Coordenadas polares	64
Figura 51 Elipse em coordenada cartesiana.....	66
Figura 52 Parábola em coordenada cartesiana	68
Figura 53 Hipérbole em coordenada cartesiana	69
Figura 54 Equação polar das cônicas	71
Figura 55 Elipse.....	72
Figura 56 Hipérbole	72
Figura 57 Esboço rudimentar da parábola	73
Figura 58 Translação de eixos	74
Figura 59 Rotação de eixos.....	76
Figura 60 Eixos com rotação	77
Figura 61 Rotação de eixos na parábola.....	82
Figura 62 Novo sistema de eixos v_1 e v_2	90

Figura 63 Esboço da elipse com rotação	91
--	----

ANEXO

Figura 1 Ponte pênsil	98
Figura 2 Gráfico da função	98
Figura 3 Trajetória de um corpo	99
Figura 4 Parábola de vértice C	100
Figura 5 Superfície de uma antena parabólica	100
Figura 6 Esboço da parábola com concavidade voltada para cima	101
Figura 7 Esboço de uma parábola e uma reta	102
Figura 8 Pontos P_1 e P_2 na parábola	103
Figura 9 Esboço da parábola com regiões marcadas	103
Figura 10 Esboço da parábola com vértice V e foco F	104
Figura 11 Esboço da parábola com concavidade voltada para cima	105
Figura 12 Esboço da parábola com concavidade voltada para esquerda	105
Figura 13 Esboço da parábola com concavidade voltada para baixo	106
Figura 14 Esboço da parábola com concavidade voltada para direita	106
Figura 15 Carrinho movendo sobre um arco de parábola	108
Figura 16 Esboço da parábola $y = -x^2 + 3x$ e reta $y = 2kx$	109
Figura 17 Esboço da parábola com duas retas	110
Figura 18 Trajetória do pulo do grilo	111
Figura 19 Região hachurada limitada pela reta r e pela parábola	113
Figura 20 Gráficos de funções quadráticas	114
Figura 21 Gráficos de funções	115
Figura 22 Gráficos de funções quadráticas	116

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA	15
3 PARÁBOLA, DEFINIÇÕES E ABORDAGEM USUAL	22
4 PROPOSTAS DE ABORDAGENS	32
4.1 A Parábola	32
4.2 Dedução da fórmula da parábola	47
4.3 Aplicações da parábola	55
4.4 Coordenadas polares	61
4.4.1 Cônicas em coordenadas cartesianas	66
4.4.2 Cônicas em coordenadas polares	70
5 TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS	74
5.1 Translação de eixos coordenados	74
5.2 Rotação dos eixos coordenados	75
5.3 A equação geral do 2º grau em \mathbb{R}^2	82
5.4 Rotação de eixos usando a álgebra linear	84
6 CONCLUSÃO	92
REFERÊNCIAS	93
ANEXO	97

1 INTRODUÇÃO

Os professores da atualidade têm um grande desafio, que é o de ensinar a matemática em um mundo dominado pela alta tecnologia. Portanto, devem modificar suas ações e técnicas para que possam ensinar matemática de forma que ela fique mais interessante para os alunos.

As cônicas são curvas especiais em que se podem destacar a elipse, a parábola e a hipérbole. Elas foram estudadas a fundo no século III pelo matemático grego Apolônio. Atualmente elas são aplicadas na geometria, astronomia, por meio dos movimentos elípticos dos planetas, na física, na óptica, por meio de telescópios espaciais, na engenharia, na arquitetura e nas novas tecnologias, por meio de antenas parabólicas ou hiperbólicas.

No ensino básico, as cônicas só aparecem no terceiro ano do Ensino Médio, sendo quase sempre trabalhadas somente com centro na origem, esquecendo-se assim das cônicas com centros em outros pontos e que as cônicas também podem estar rotacionadas. As elipses e as hipérbolas são trabalhadas por meio dos parâmetros a , b e c e as parábolas do parâmetro p . No ensino superior elas voltam a ser estudadas em cálculo, para a construção de superfícies no espaço, em geometria analítica, com enfoque nas equações analíticas e álgebra linear, onde é feita uma ligação delas com vetores e matrizes.

Objetiva-se com este estudo despertar o gosto pela matemática, tornando-a real e mais simples para os alunos, utilizando materiais concretos e de interesse dos mesmos. Quer-se com isso explorar as cônicas e suas aplicações partindo de materiais concretos e chegando às suas equações. Para tanto, foi elaborado um material didático que pode oferecer alternativas para professores de matemática da educação básica, podendo se estender até a graduação.

Este trabalho está dividido em três partes. As elipses são tratadas por Adriana de Sousa Sabino Melo, as hipérbolas por Neder do Carmo Pereira Habib, e eu trato neste texto as parábolas. Os três trabalhos têm algumas partes comuns, que serão citadas abaixo.

O segundo capítulo traz um histórico das cônicas comum aos três trabalhos.

O terceiro capítulo traz como as cônicas são comumente trabalhadas no Ensino Médio. Essa parte é individual e cada trabalho traz somente a cônica específica.

O quarto capítulo começa com propostas de abordagens e atividades contextualizadas para o ensino de cada cônica, que é individual para cada trabalho. No fim do capítulo mostrou-se um pouco sobre coordenadas polares, parte esta que é comum aos três trabalhos.

O quinto capítulo, comum aos três trabalhos, vem com a parte de transformações de coordenadas usando a geometria analítica e a álgebra linear. Este capítulo é destinado aos cursos de graduação, já que os alunos do Ensino Médio não têm pré-requisitos para esse capítulo. Em anexo segue um banco de questões como material para professores na elaboração de suas aulas.

2 FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA

Neste capítulo será feito um relato da história das cônicas por meio dos séculos mostrando o desenvolvimento do estudo das mesmas.

Egípcios e babilônios, há mais de 3000 anos, utilizavam a geometria nas regiões inundáveis dos vales do Nilo, Tigre e Eufrates, na demarcação das terras a fim de organizar o plantio e facilitar a cobrança de impostos. Durante o período Helênico (400 a.C. - 476 d.C), Alexandre Magno construiu Alexandria em 331 a.C., que em pouco tempo transformou-se no centro mais suntuoso e cosmopolita do mundo. Depois da morte de Alexandre, o império se dividiu em três impérios. Ptolomeu ficou com o governo do Egito, escolheu Alexandria como sua capital e lá construiu a Universidade de Alexandria para atrair homens de saber, cabendo a Euclides o Departamento de Matemática. Apolônio, que foi um dos maiores estudiosos das cônicas, nasceu em Perga e estudou em Alexandria onde ficou por um bom tempo (RODRIGUES FILHO, 2007).

Para Youssef (2005), Menaecmus, astrônomo e geômetra grego foi o primeiro a utilizar duas curvas: a parábola e a hipérbole. No século IV a.C., ele solucionou o problema da “duplicação do cubo” que consistia em encontrar um cubo cujo seu volume fosse igual a dois, utilizando-se dessas duas curvas. Consequentemente, a elipse surgiu mais tarde quando se seccionou uma superfície cônica perpendicularmente a sua geratriz. Por isso o nome secções cônicas.

Segundo Lopes (2011), para alguns historiadores a origem do estudo das cônicas não é muito clara, mas tudo leva a crer que elas originaram-se no problema da duplicação do cubo.

Hipócrates de Chios (470 - 410 a.C.) mostrou que esse problema (a duplicação do cubo) se reduzia em encontrar curvas com propriedades expressas na proporção contínua entre dois segmentos. Esse processo consistia em determinar médias proporcionais entre duas grandezas dadas, ou seja, dados os segmentos a e b , encontrar dois outros x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

Hipócrates afirmou que para $b = 2a$, a proporção contínua traduzia a solução do problema da duplicação do cubo, pois isolando e eliminando y , conclui-se que $x^3 = 2a^3$. Isto equivale, na notação atual, resolver simultaneamente quaisquer duas das três equações $x^2 = ay$; $y^2 = 2ax$ e $xy = 2a^2$ que representam parábolas nos dois primeiros casos e hipérbole no terceiro.

Mas a descoberta dessas curvas se deu por Menaechmus (380 - 320 a.C.) por volta de 360 ou 350 a.C.. Ele construiu as curvas com essas propriedades algébricas e conseqüentemente mostrou que o ponto de interseção delas daria as médias proporcionais desejadas. A descoberta da elipse parece ter sido feita também por ele como um simples subproduto dessa sua pesquisa (LOPES, 2011, p. 33-34).

Para Venturi (1949), foi Apolônio quem introduziu os nomes elipse e hipérbole. Já a parábola, provavelmente, foi nomeada por Arquimedes.

As secções cônicas eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas. [...] O tratado sobre *Cônicas* de Apolônio derrotou todos os Rivais no campo das secções cônicas, inclusive *As cônicas* de Euclides (BOYER, 2010, p. 99).

De acordo com Boyer (2010), Apolônio foi o primeiro a mostrar que as três secções não eram obtidas necessariamente de três cones diferentes, mas poderiam ser encontradas variando o ângulo de inclinação do plano da secção. Esse fato foi relevante para identificar e relacionar os três tipos de curvas. Apolônio também provou que o cone pode ser oblíquo ou escaleno, não precisando ser reto e que as propriedades das curvas não se modificam de acordo com o cone de origem.

Ainda para Boyer (2010), Apolônio poderia ter partido de qualquer cone e ter obtido as mesmas curvas, ou seja, qualquer seção plana de qualquer cone poderia servir de curva base em sua definição.

Menaecmus afirmava que cada secção cônica era encontrada em um formato diferente de cone. Assim, as cônicas eram tratadas de forma separada. Somente com Apolônio houve a unificação das mesmas (BORDALLO, 2011).

De acordo com Quaranta (2008), Arquimedes classifica os cones como reto ou de revolução (retângulo) quando o ângulo formado entre as geratrizes que pertencem a um dado plano que passa pelo vértice do cone e pelo centro da circunferência da base é reto; obtusângulo, quando este ângulo é obtuso e acutângulo, quando é agudo. Arquimedes deu nomes de “Orthotome” para parábola, que surgia do cone retângulo, “Oxythome” para a elipse, que surgia do cone acutângulo e “Amblythome” para a hipérbole que surgia do cone obtusângulo.

Segundo Youssef (2005), Apolônio de Perga (262 - 190 a.C.) escreveu um importante documento sobre as cônicas. Neste documento, acrescentou aos estudos de Menaecmus várias proposições, mas de forma puramente geométrica. Pode-se destacar uma proposição sobre a posição do plano secante em relação ao eixo de rotação ou à geratriz de uma superfície cônica de revolução.

Para Boyer (2010), o cone de duas folhas surgiu quando Apolônio fez uma reta de comprimento indefinido que passava por um ponto fixo mover-se sobre uma circunferência de um círculo que não é coplanar ao ponto de origem, passando por todos os pontos dessa circunferência, a reta móvel dará origem à superfície de um cone duplo. Com isso surge o segundo ramo da hipérbole.

Apolônio foi o autor que mais contribuiu para o estudo das cônicas. Ele escreveu oito livros, dos quais os quatro primeiros apresentam resultados de outros matemáticos anteriores e os quatro últimos apresentam resultados desenvolvidos por ele mesmo. Apolônio é o primeiro a unificar as secções cônicas e afirmar que elas poderiam ser obtidas a partir de um único cone. Ele também duplicou o cone e daí a hipérbole passa a ter duas folhas (QUARANTA, 2008).

Segundo Bordallo (2011), Pappus fez um comentário sobre todos os matemáticos gregos de seu tempo em sua obra “Coleção Matemática”. Ele contribuiu para o estudo das cônicas com seus resultados sobre foco, diretriz e excentricidade. E de acordo com a variação da excentricidade ele define cada curva.

Boyer (2010, p. 101) afirma as cônicas eram conhecidas como “lugares sólidos”, pois as cônicas não eram definidas como seções planas, mas seções de

figuras tridimensionais. Apolônio usava o cone para obter as cônicas, mas o dispensou logo que possível. A partir do cone ele desenvolveu uma propriedade plana fundamental (*symptome*) para a secção e a partir daí iniciou um estudo somente no plano, baseado nessa propriedade.

Seja ABC uma secção triangular de um cone circular oblíquo (Fig.9.3) e seja P qualquer ponto sobre uma secção HPK cortando todos os elementos do cone. Prolongue HK até encontrar BC em G e por P passa-se um plano horizontal que corta o cone no círculo DPE e o plano HPK na reta PM . Trace-se DME , um diâmetro do círculo perpendicular a PM . Então a semelhança dos triângulos MEK e KCG tem-se $\frac{ME}{MK} = \frac{CG}{KG}$. Agora, da propriedade do círculo tem-se $PM^2 = DM \cdot ME$; logo $PM^2 = \left(\frac{HM \cdot BG}{HG}\right) \left(\frac{MK \cdot CG}{KG}\right)$. Se $PM = y$, $HM = x$ e $HK = 2a$, a propriedade na sentença precedente equivale à equação $y^2 = kx \cdot (2a - x)$, que reconhecemos a equação de uma elipse com H como vértice e HK como eixo maior. De modo semelhante, Apolônio obteve para a hipérbole o equivalente da equação $y^2 = kx(x + 2a)$. Essas formas são facilmente redutíveis às formas de nome acima, bastando tomar $k = \frac{b^2}{a^2}$ e $l = \frac{2b^2}{a}$. Depois de Apolônio ter obtido de um estudo esteriométrico do cone a relação básica entre o que chamaríamos hoje as coordenadas planas um ponto da curva - dadas pelas três equações $y^2 = lx - \frac{b^2 x^2}{a^2}$, $y^2 = lx$ e $y^2 = lx + \frac{b^2 x^2}{a^2}$ obteve outras propriedades a partir das equações no plano, sem mais referência ao cone. Em particular, Apolônio conhecia as propriedades da hipérbole referida às assíntotas como eixos, dadas para a hipérbole equilátera, pela equação $xy = c^2$.

Não podia saber, é claro, que um dia essa relação, equivalente à lei de Boyle, seria fundamental no estudo dos gases, ou que seu estudo da elipse seria essencial para a moderna astronomia (BOYER, 2010, p. 101-102).

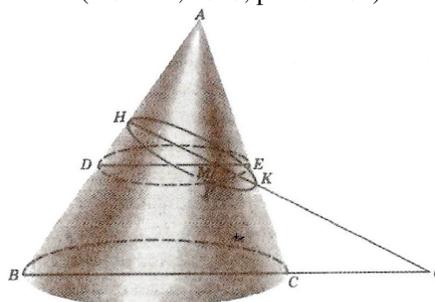


Figura 9.3 Cortes no cone

Ainda para Boyer (2010), Apolônio provou que quando um ramo de uma hipérbole intersecta os dois ramos de outra hipérbole, o outro ramo da primeira hipérbole não intersectará nenhum dos ramos da segunda em dois pontos, também se uma hipérbole encontra uma segunda hipérbole com sua concavidade em sentido oposto em um único ponto, o outro ramo da primeira não encontrará o outro ramo da segunda.

De acordo com Venturi (1949, p. 20), Kepler foi fortemente influenciado pelo livro “As Cônicas” de Apolônio. Em 1609 ele mostra uma fundamental lei da Astronomia: os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos. Kepler também introduziu a palavra foco, que vem do latim focus que significa fogo, lareira. O livro “As Cônicas” também traz outra aplicação em que Galileu (1632) desprezando a resistência do ar diz que a trajetória de um projétil é uma parábola.

Para Quaranta (2008), Kepler (1571 - 1630) também apresenta as cônicas de forma unificada usando a hipérbole para medições do fenômeno de reflexão. Ele também mostra pela primeira vez a parábola como limite de uma elipse ou hipérbole. Na construção da parábola ele utiliza a mesma distância dos pontos até o foco e até a diretriz. Ele também afirma que a parábola tem o segundo foco no infinito, que até então não era utilizado na geometria.

Apolônio em “As Cônicas” não trata de aspectos que atualmente nos parecem tão fundamentais. Por exemplo, ela trata dos focos das cônicas apenas indiretamente e nem tinha nomes para os mesmos (BOYER, 2010).

Segundo Youssef (2005), Apolônio também investigou o movimento dos planetas e baseado nos egípcios, acreditava que os planetas giravam em torno do sol em órbitas circulares. Somente em 1609, Kepler conclui que os planetas giram em órbitas elípticas. Apolônio nunca poderia imaginar que as cônicas estudadas por ele seriam utilizadas 1800 anos depois para descrever as órbitas planetárias e nem que belos projetos arquitetônicos teriam esses formatos.

Afirma Boyer (2010, p. 104) que Apolônio diz que “o assunto é um daqueles que parecem dignos de estudos por si mesmos”. Ele sequer imaginava que futuramente seus estudos seriam importantes na dinâmica terrestre e mecânica celeste, e que eles possibilitariam a viagem de ida e volta à lua.

No pensamento de Boyer (2010), os estudos de Apolônio eram tão semelhantes aos atuais que muitas vezes ele antecipa a Geometria Analítica de Descartes. Seus métodos não são diferentes do uso de sistemas de coordenadas. Nos estudos gregos as equações são determinadas pelas curvas, mas as curvas não eram determinadas por equações. Para os gregos, as equações não eram suficientes, eram necessárias construções.

Para Bordallo (2011), Fermat e Descartes, no século XVII criam separadamente a Geometria analítica, que é mais utilizada atualmente. Com a chegada da Geometria analítica surge uma nova opção, na qual alguns optaram por ela, outros não, e ainda alguns utilizaram as duas concepções em conjunto. O estudo sintético das cônicas, sem a utilização da Geometria analítica contribuiu para a Geometria projetiva. A contribuição de Fermat às cônicas é encontrada principalmente no seu tratado *Ad locos Planos et Solidos Isagoge*, onde Fermat utilizou mudanças de coordenadas para descobrir que tipo de lugar correspondia a uma equação de primeira ou segunda ordem. Ele também mostrou que equação do segundo grau corresponde a uma cônica, um par de retas ou uma reta contada duas vezes.

Segundo Quaranta (2008), Descartes inicia uma nova forma de classificação das curvas por meio de equações. Conhecendo as propriedades geométricas de uma curva, ele representava todos os pontos da mesma por meio de equações.

A caracterização bifocal, que permite as construções das cônicas, começa a ganhar força a partir do século XVI, com Kepler, Descartes e Van Schooten, que utilizam construções mecânicas dessas curvas. Também por meio de retas, da geometria projetiva e por meio de equações analíticas surgem outras caracterizações. Para o ensino das cônicas os métodos mais utilizados são a caracterização analítica e o uso dos focos, além da usual obtida por meio do cone.

De acordo com Venturi (1949), o marco zero da geometria analítica é o tratado de Fermat. Foi Fermat quem descobriu as equações da reta, da circunferência e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole. Para simplificar as equações do 2º grau ele utilizava a rotação dos eixos. Ele também descobriu que se a equação envolve três incógnitas, ela não pode ser de um ponto ou uma curva, mas sim de uma superfície.

Segundo Bordallo (2011), Philippe de La Hire, no século XVII, tornou a fragmentar as cônicas, dando o primeiro passo na direção ao tratamento puramente focal que é presente no ensino das cônicas atualmente, em seu livro *Nouvelle méthode en géometrie pour lessection setles superficies coniques* de 1673. Ele começa o seu trabalho tratando cada curva separadamente, introduzindo as propriedades características e sua definição focal. Dandelin, no século XIX, tentou unificar as cônicas novamente, mostrando que as seções do cone que geram cada cônica coincidem com a definição focal.

O estudo das curvas feito pelos gregos fica em posição desfavorável em relação à flexibilidade e extensão do tratamento moderno. Os antigos não tinham noção da utilização dessas curvas no mundo que os cercava. Os inventores modernos da geometria analítica tinham à sua disposição a álgebra da Renascença, enquanto que Apolônio manjava a álgebra geométrica trabalhando com o instrumento mais rigoroso e menos manejável (BOYER, 2010).

As cônicas estudadas desde a antiguidade estão presentes, no mundo atual, em vários ramos do dia-a-dia. Apesar das várias caracterizações discutidas pelos autores, mal sabiam seus inventores da importância que elas teriam futuramente.

3 PARÁBOLA, DEFINIÇÕES E ABORDAGEM USUAL

Neste capítulo apresentaremos uma análise de como as parábolas são abordadas nos livros didáticos de ensino médio, na maioria dos casos de forma bem resumida e apenas manipulando fórmulas.

Carneiro(2007) diz que a parábola deve ser apresentada para os alunos do Ensino Médio primeiramente no primeiro ano no estudo das funções quadráticas como abordadas no eixo temático II: Funções Elementares e Modelagem, tema 5: Funções, tópico 10: Função quadrática, habilidades 10.1 a 10.5: 10.1. Identificar uma função quadrática a partir de sua representação algébrica ou gráfica. 10.2. Representar graficamente funções quadráticas. 10.3. Identificar os intervalos em que uma função quadrática é positiva ou negativa. 10.4. Resolver situações-problema que envolvam as raízes de uma função quadrática. 10.5 Resolver problemas de máximos e mínimos que envolvam uma função quadrática.

Carneiro(2007) relata ainda que a parábola também deve ser trabalhada com maior aprofundamento no terceiro ano do Ensino Médio com o eixo temático IX: Geometria e Medidas, temas 22: Construções Geométricas, Tópico 46: Lugares geométricos, habilidade: 46.2. Reconhecer a parábola como um lugar geométrico, e também no tema 23: Geometria Analítica, Tópico48: Elipse, hipérbole e parábola, nas habilidades 48.3 e 48.4: 48.3. Equação cartesiana da parábola. 48.4. Relacionar as propriedades da parábola com instrumentos óticos e antenas.

Para Quaranta et al. (2007), o ensino das cônicas ficou restrito ao Ensino Médio, apesar de ter uma importância histórica. Sendo abordado de forma analítica e trabalhado somente com manipulação e memorização de fórmulas, levando os alunos e até os professores a não quererem trabalhar com as cônicas. Assim, não é fácil transmitir esses conhecimentos e sua importância.

Em uma pesquisa a vários livros didáticos verificou-se que alguns trazem um pequeno resumo histórico e tratam as cônicas de forma analítica resumindo-se a manipulação de fórmulas.

Youssef(2005) diz que se pode obter a parábola seccionando uma superfície cônica de revolução por um plano β paralelo à geratriz, como mostra a Figura 1.

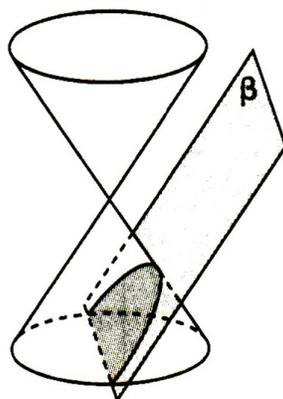


Figura 1: Secção cônica (Parábola)

Em seu livro didático, Smole et al. (2010) mostram que ao estudar a função quadrática os alunos verão que seu gráfico é uma parábola, como mostra o exemplo:

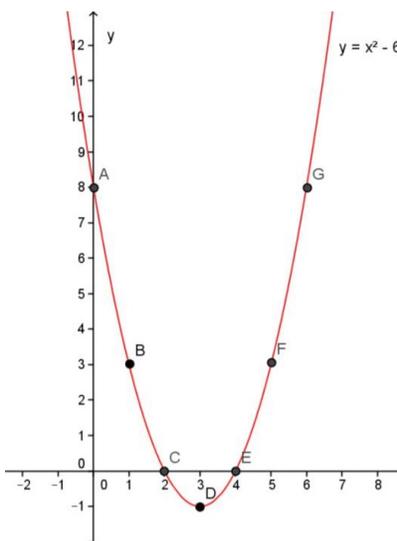


Figura 2: Gráfico da parábola

Também o lançamento oblíquo de uma bola, de um projétil ou de uma pedra pode descrever uma parábola.

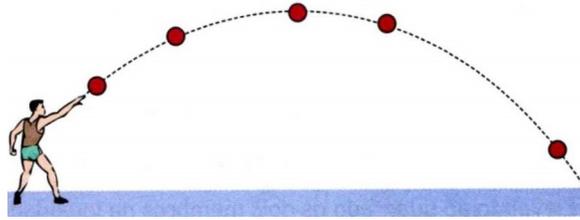


Figura 3: Lançamento oblíquo de uma bola

Considere o plano α , a reta r e o ponto $F \notin r$ como na Figura 4. Ao conjunto de todos os pontos de α com mesma distância em relação à d e à F , denominamos **parábola**.

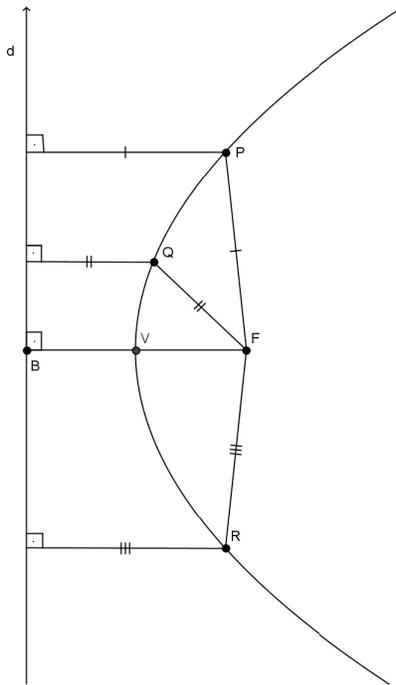


Figura 4: Parábola por meio da sua definição

$$d_{Pd} = d_{PF}$$

$$d_{Qd} = d_{QF}$$

$$d_{Vd} = d_{VF}$$

$$d_{Rd} = d_{RF}$$

Segundo Youssef(2005), pode-se também definir parábola como um lugar geométrico dos pontos de β que são equidistantes de um ponto F e de uma reta r desse plano. Veja na Figura 6 a parábola e alguns de seus pontos:

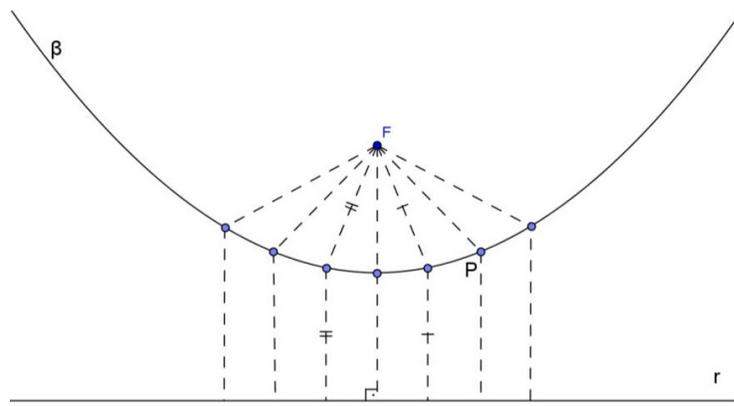


Figura 5: Distâncias da parábola

De acordo com a Figura 6 os elementos de uma parábola são:

- a) F é o foco da parábola;
- b) A reta r é a diretriz da parábola;
- c) A reta e , perpendicular a r , passando pelo foco, é o eixo da parábola, também chamado de eixo de simetria;
- d) A distância p entre o foco e a diretriz é o parâmetro da parábola;
- e) O ponto V é o vértice da parábola e está no ponto médio entre o foco e o ponto M, em que o eixo cruza a diretriz da parábola. Como V é um ponto da parábola, tem-se, pela definição:

$$VF = VM = \frac{p}{2}$$

ou, ainda,

$$FM = p$$

Chama-se excentricidade de uma parábola ao número real positivo que é definido como o quociente entre a distância da diretriz ao ponto da parábola e a distância do ponto da parábola ao foco.

Como, na parábola estas distâncias são sempre iguais tem-se que a excentricidade é sempre igual a 1.

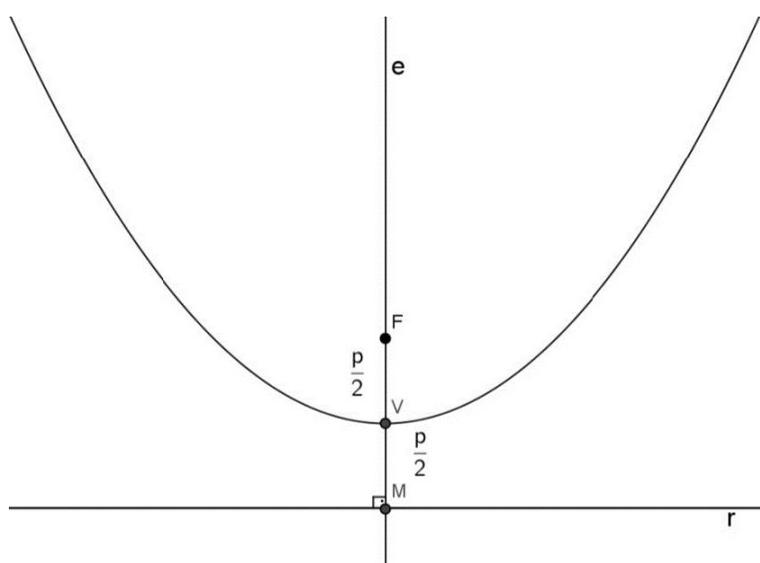


Figura 6: Medida da diretriz ao vértice e foco ao vértice

Alguns poucos livros trazem o desenvolvimento da fórmula da parábola, e muitas vezes o professor não a repassa para os alunos. Nesse capítulo as informações estão como na maioria dos livros didáticos, sem demonstrações e maiores explicações. Essas informações estarão no capítulo 4 onde serão demonstradas as fórmulas.

A equação reduzida da parábola depende da posição em que ela se encontra em relação aos eixos do sistema cartesiano, assim pode-se estabelecer a propriedade comum dos pontos $P(x, y)$ que a ela pertencem.

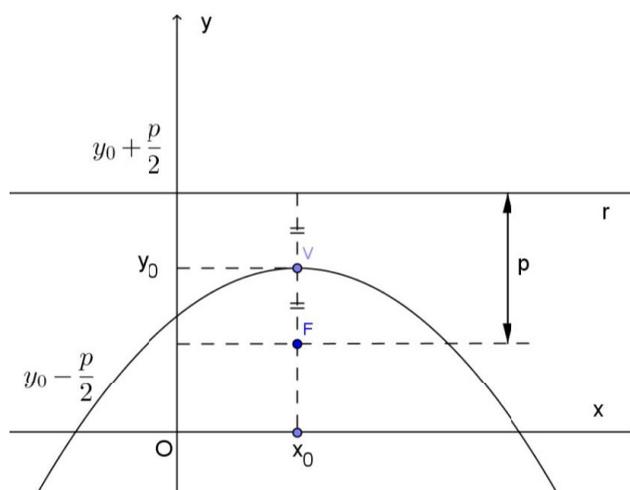


Figura 8: Parábola com concavidade para baixo

2) Para posições em que a diretriz r é paralela ao eixo das ordenadas, com vértice $V(x_0, y_0)$ e parâmetro p , tem-se também duas equações reduzidas:

i) Quando a parábola tem concavidade voltada para a direita, tem-se:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

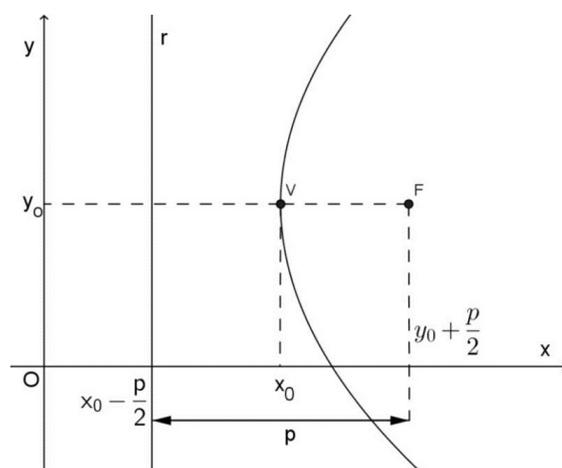


Figura 9: Parábola com concavidade para a direita

ii) Quando a parábola tem concavidade voltada para a esquerda, tem-se:

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

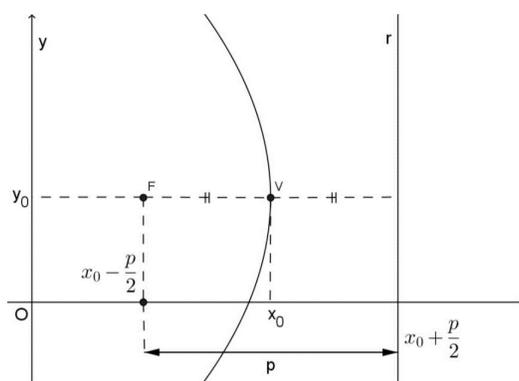


Figura 10: Parábola com concavidade para a esquerda

Existem alguns casos em que o vértice V da parábola coincide com a origem $O(0, 0)$ dos eixos cartesianos, ou seja, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Neste caso, as equações reduzidas são:

$$x^2 = 2py$$

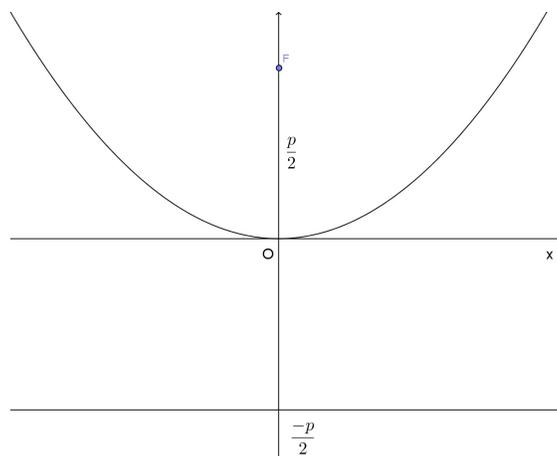


Figura 11: Parábola com concavidade para cima

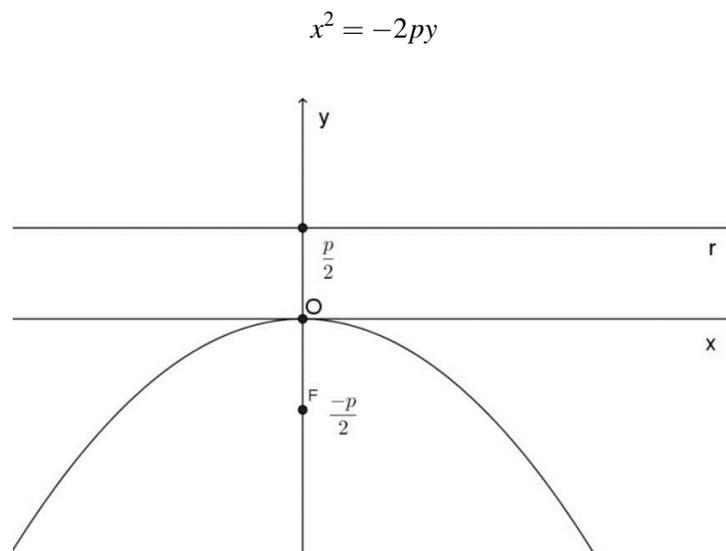


Figura 12: Parábola com concavidade para baixo

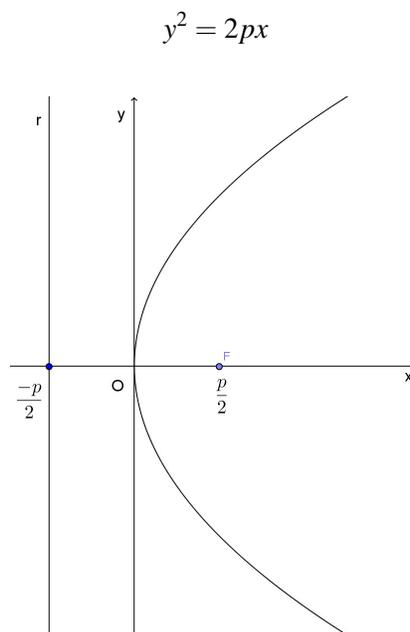


Figura 13: Parábola com concavidade para a direita

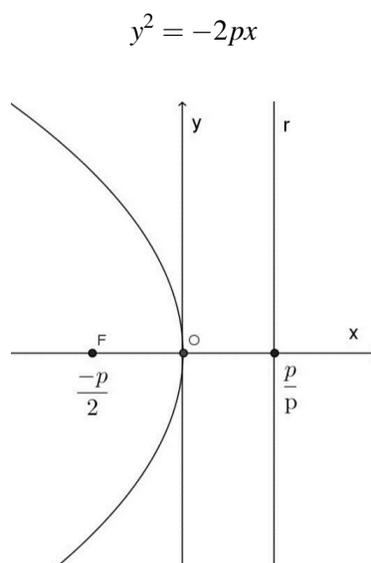


Figura 14: Parábola com concavidade para a esquerda

Após a apresentação do conteúdo, todos os livros didáticos que analisamos trazem uma lista de exercícios explorando as equações e os elementos fundamentais da parábola.

Alguns livros trazem atividades concretas e interessantes utilizando parábolas que poderiam ser usadas como motivação das aulas de matemática.

4 PROPOSTAS DE ABORDAGENS

Neste capítulo apresenta-se uma proposta para o ensino das parábolas utilizando materiais concretos e demonstrando as fórmulas. Traz-se também, no fim do capítulo, uma parte sobre coordenadas polares que pode ser importante no estudo das parábolas.

4.1 Parábola

De acordo com Carneiro(2007), a matemática é uma ferramenta fundamental na resolução de problemas do cotidiano. Nela desenvolvem-se estruturas abstratas fundamentadas em modelos concretos; raciocínios formais ajudam a concluir sobre a possibilidade ou não da ocorrência de certos padrões e suas propriedades no modelo original.

Para Felix et al. (2008, p.3), os educadores sempre devem se questionar: “Como e em que medida nossa prática pedagógica está contribuindo para a formação do indivíduo?”. Às vezes deixa-se de perceber que uma pequena mudança de abordagem pode ajudar a melhorar o aprendizado dos alunos. Os professores às vezes expõem os conteúdos de Matemática de forma rígida, mostrando apenas axiomas, definições, postulados e proposições o que prejudica a absorção de alguns conceitos.

Segundo Carneiro (2007), a matemática possui uma forte ligação com as outras disciplinas: o conhecimento matemático não é só para os matemáticos, ele tem abrangência em outras áreas de conhecimento. O pensamento matemático não deve ser aprendido apenas por aqueles que vão se dedicar a Matemática, mas sim, por todos os alunos.

Sugere-se que haja uma interdisciplinaridade com as aulas de artes para construção de materiais concretos, para facilitar o entendimento e motivar os alunos.

CARNEIRO (2007) diz que, seus tópicos são norteadores, um roteiro, sendo que cada escola pode escolher o caminho a seguir para adequar às suas

necessidades, fazendo uma distribuição do tempo adaptando-o ao seu projeto pedagógico.

Como motivação para o ensino da parábola, Mendes (2012) sugere a construção de uma mesa de bilhar montando uma das tabelas no formato do arco de uma parábola e, no foco desse arco, coloca-se a caçapa. Quando o jogador tacar a bola na direção da parábola, em sentido paralelo às duas laterais retas, a bola cai direto na caçapa.

Proposta 1: Construção da mesa de bilhar parabólica

Objetivos: Confeção de uma “mesa” de bilhar com um dos lados em formato parabólico para uma abordagem prática da propriedade de reflexão.

Público alvo: Alunos do Ensino Médio.

Materiais necessários para o molde: Cartolina ou Kraft, dois percevejos, pedaço de barbante.

Materiais necessários para a mesa: A “mesa” de bilhar com um dos lados em formato parabólico pode ser confeccionada com materiais distintos à escolha do grupo de alunos, como por exemplo, papelão, madeira, MDF, isopor, e nos mais diferentes tamanhos, podendo uma bola de gude, por exemplo, fazer o papel de bola de bilhar. Pano de algodão ou feltro para cobrir a mesa. Para a borda da “mesa” pode-se usar o emborrachado conhecido por EVA ou madeirite.

Recomendações metodológicas: Pode ser indicado como trabalho em grupo. Discussão com os alunos sobre como confeccionar a “mesa”. Caso a mesa for feita de madeira, ou MDF recomenda-se que o professor já leve o molde cortado e furado para não precisar levar materiais perigosos para os alunos.

Dificuldades previstas: Desenho e corte preciso da mesa.

Construção:

1) Molde da parábola

Para construir a mesa de sinuca deve-se construir a parábola como nos ensina Barroso (2010). Primeiramente traça-se uma reta r e marca-se um ponto F ($F \notin r$).

Em seguida, corta-se um pedaço de barbante de comprimento \overline{AB} , idêntico a altura do esquadro (Figura 16). Utilizando dois percevejos, se fixa uma das pontas do barbante no ponto F e a outra no ponto A do esquadro (Figura 15). Apoiando um lápis no esquadro e esticando o barbante, faz-se o traçado de uma metade da parábola, puxando o esquadro para a direita (Figura 16). Para fazer a outra parte da parábola, repetir os passos acima com o esquadro invertido (Figura 17).

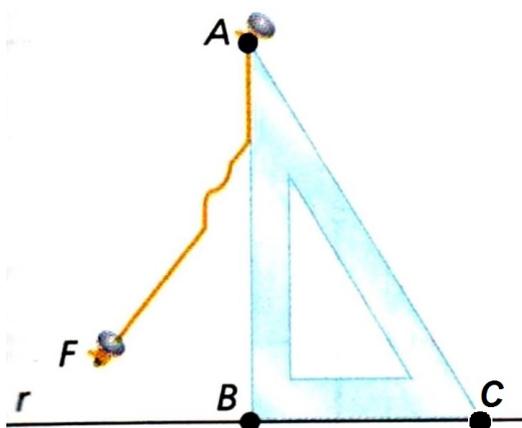


Figura 15: Construção da parábola

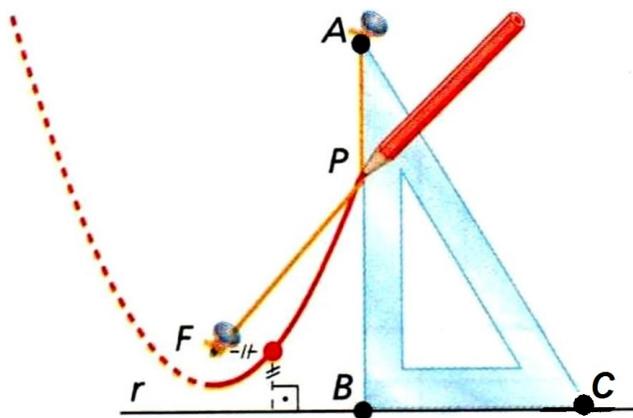


Figura 16: Construção da parábola para o lado direito

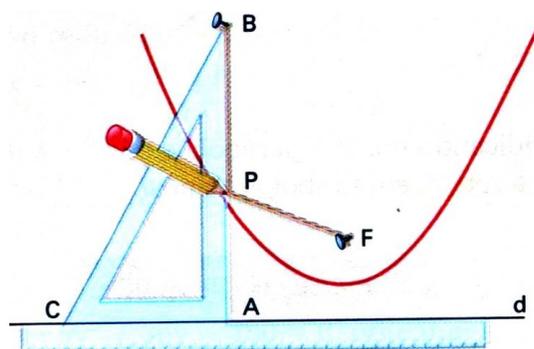


Figura 17: Construção da parábola para o lado esquerdo

Afirma Souza (2008) que para entender porque esta maneira de construir a parábola funciona deve-se verificar que, considerando a ponta do lápis como o ponto P , a distância PB sempre será igual a PF , vendo que:

$$AP + PF = AB,$$

em que AB é o comprimento do barbante. Mas,

$$AP + PB = AB,$$

em que AB é o cateto do triângulo ABC . Então,

$$PF = PB$$

Logo, P pertence à parábola.

Anton et al. (2000) trazem uma outra maneira de esboçar a parábola, de acordo com a Figura 18. Ela pode ser esboçada a partir de sua equação padrão, seguindo quatro passos básicos:

Passo 1: Verifique se o eixo de simetria está em cima do eixo x ou do eixo y . Se a equação tiver um termo y^2 o eixo de simetria está sobre o eixo x , se a equação tiver um termo x^2 o eixo de simetria está sobre o eixo y .

Passo 2: Encontre a abertura da parábola. Se o eixo de simetria estiver em cima do eixo x , a parábola abre-se para a direita se os coeficientes de x forem positivos,

para a esquerda. Se os coeficientes forem negativos, se o eixo de simetria estiver sobre o eixo y , a parábola abre-se para cima se os coeficientes de y forem positivos e para baixo se forem negativos.

Passo 3: Agora encontre o valor de p e faça uma caixa medindo p unidades a partir da origem sobre o eixo de simetria na direção da abertura da parábola e p unidades, para cada lado do eixo de simetria.

Passo 4: Tendo a caixa como guia faça a parábola de modo que seu vértice esteja na origem e que algum ponto da parábola esteja nos cantos da caixa como mostra a figura abaixo:

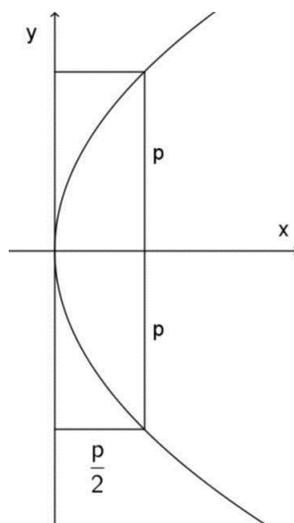


Figura 18: Esboço rudimentar da parábola

2) Construção da mesa de bilhar

Aproveita-se o desenho da parábola feito acima para a construção da mesa de sinuca parabólica. Com uma parábola desenhada num papel, de um tamanho adequado, pega-se um pedaço de MDF (ou isopor, papelão) e transfere-se o desenho da parábola para ele. Corta-se o MDF (isopor, papelão) com a serra e fura-se o focos com a furadeira (Figura 19). Cobre-se o MDF com um tecido de algodão verde. Com madeirite (ou EVA), faz-se uma parede em volta da base da mesa. Para

testá-la coloca-se uma bola na mesa e com um taco joga-se a bola na direção da parábola em trajetória paralela as duas laterais retas, então a bola cairá no buraco (Figura 20).



Figura 19: Corte na madeira



Figura 20: Mesa de bilhar parabólica

De acordo com os modelos matemáticos, a bola seguirá em sentido 100% retilíneo se e somente se o taco e a mesa estiverem em planos paralelos, ou seja, se o taco ficar perfeitamente horizontal à mesa. Se a bola seguir girando em sentido horário ou anti-horário, viajará em trajetória quase retilínea se o taco estava paralelo à mesa no momento da tacada. O atrito provocado pelo giro da bola no equador, não alterará sua trajetória (MENDES, 2012).

Proposta 2: Construção dos refletores parabólicos

Objetivos: Mostrar a propriedade refletora das parábolas.

Público alvo: Alunos do terceiro ano do ensino médio.

Pré-requisitos: Trabalhar com escala.

Materiais necessários: Régua graduada, lápis, cola, tesoura, papel-cartão, disco de madeira (ou papelão) de aproximadamente 70 cm de diâmetro e 1,5 cm de espessura, placas de madeira (ou papelão) de 1,5 cm de espessura, serra de madeira (ou tesoura), pregos, martelo e arame.

Recomendações metodológicas: Se for utilizar madeira levá-la já cortada. Se for utilizar papelão pode ser utilizado cola e não pregos e martelo.

Dificuldades previstas: Alguns alunos podem não ter habilidade suficiente para trabalhar com os materiais necessários.

Construção:

1) Construção das hastes

Organize os alunos em grupos de no máximo 4 componentes. Faça um molde em forma de parábola de acordo com as medidas da Figura 21. Retire 2 cm da extremidade mais estreita do molde, isso ajuda para que as hastes não se sobreponham. Depois, coloque o molde em cima das placas de madeira e corte 8 hastes iguais (Figura 22).

2) Montagem do refletor

Marque oito setores iguais no disco de madeira e no centro do disco faça uma circunferência de 4 cm de diâmetro (figura 23). Fixe as hastes sobre as marcas do disco de madeira (figura 23), veja que as hastes são colocadas a partir da circunferência do centro do disco. No centro do disco, fixe um pedaço de arame medindo 70 cm. Ponha o papel cartão em cima da estrutura montada e marque com um lápis onde se deve recortar. Assim que recortar cole o papel cartão sobre cada haste da estrutura (figura 24). Meça no arame 53cm a partir do papel cartão e dobre o que sobrar formando uma argola. O arame ficará na vertical em relação ao disco de madeira, o arame será o foco da superfície parabólica (figura 25). Prenda a estru-

tura em uma base de 1m de altura, logo estará pronto o refletor. Construa mais um refletor seguindo novamente os passos acima.

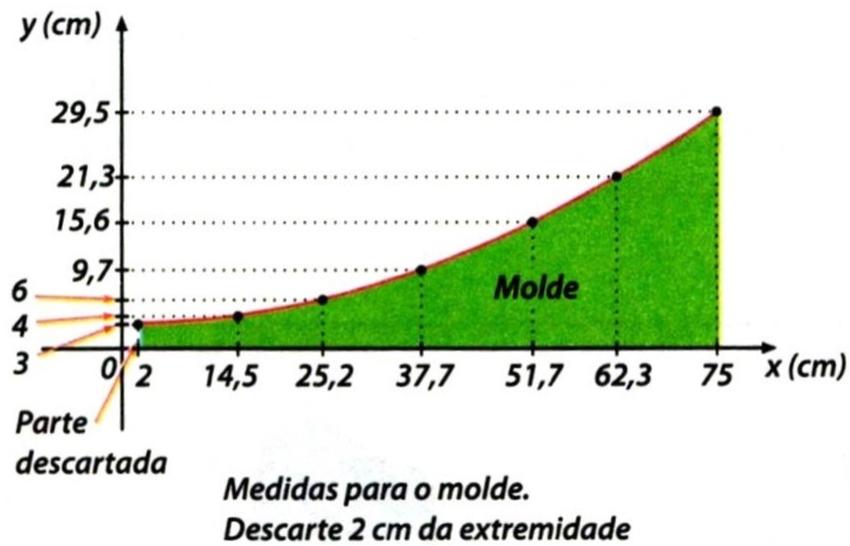
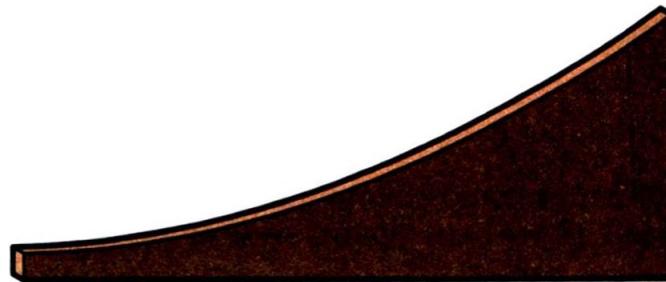


Figura 21: Molde com medidas



Haste de madeira

Figura 22: Haste de madeira

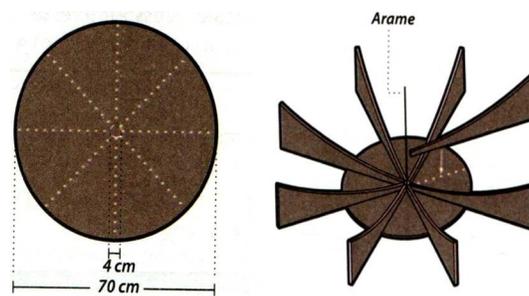


Figura 23: Disco de madeira com hastes fixas

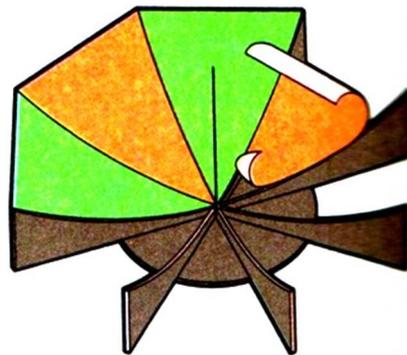


Figura 24: Colagem do papel cartão

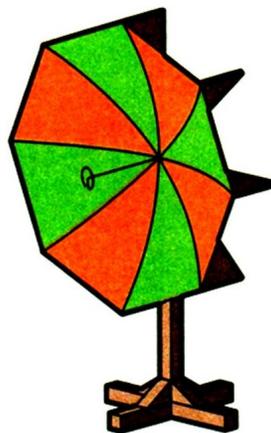


Figura 25: Refletor pronto

Coloque os refletores um de frente para o outro de modo que seus eixos de simetria fiquem alinhados (figura 26) ou usando um ou dois obstáculos para refletir o som (figura 27). Para se comunicar usando os refletores as pessoas devem ao falar colocar a boca bem perto do foco e, ao ouvir, o ouvido também deve estar perto do foco.



Figura 26: Posição dos refletores

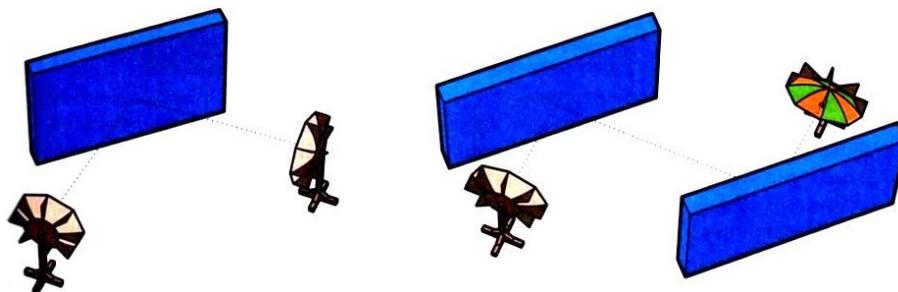


Figura 27: Posições dos refletores

Dante (2010) ressalta que considerando um cone circular reto pode-se seccioná-lo por um plano paralelo à geratriz. Esta secção cônica é conhecida como parábola. Isto motiva nossa próxima atividade.

Proposta 3: Parábola obtida a partir do cone de papel

Objetivos: Desenvolver a visão espacial do aluno e ampliar o raciocínio lógico dando mais significado ao conteúdo.

Público alvo: Alunos do ensino médio.

Materiais necessários: Planificação do cone, tesoura, cola e régua.

Recomendações metodológicas: Devemos trabalhar em grupo, entregando para cada uma planificação do cone, ressaltando as características da elipse, hipérbole e parábola. Utilizando o cone, mostre as curvas por meio dos cortes feitos no mesmo. Durante o trabalho faça algumas perguntas relacionando as cônicas com conteúdos estudados anteriormente. Deixe também que os alunos dêem suas opiniões, interferindo se necessário e tirando as dúvidas que forem surgindo.

Dificuldades previstas: Alguns alunos podem não ter muita habilidade para montar o cone.

Construção:

Com a planificação em mãos, os alunos deverão montar o cone. Depois deverão achatá-lo e fazer um risco com a régua paralela a geratriz do cone e cortar o cone no risco. Ao voltar o cone a sua forma normal eles verão a parábola no corte como mostra a Figura 28.

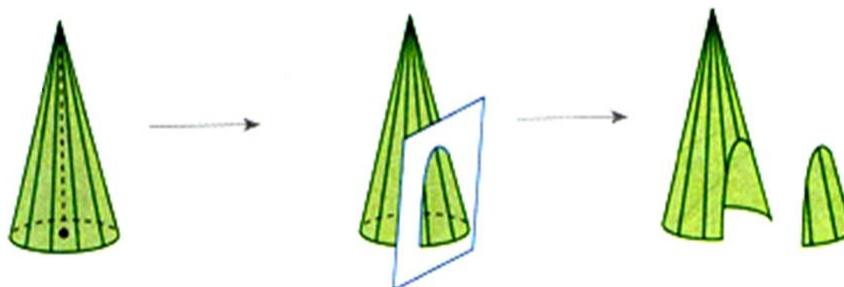


Figura 28: Corte no cone

Ressalta Carneiro(2007) que as propostas curriculares matemáticas contidas no CBC (Currículo Básico Comum) sugerem que as atividades melhorem a criatividade dos alunos tanto do ensino fundamental como médio, e também que o professor use o espaço em sala de aula para os alunos sanarem suas dúvidas e fazerem observações e relatos escritos ou orais sobre as matérias. Em todos os níveis de ensino o professor deve levar os alunos a justificar os processos e conclusão dos problemas, mesmo que não tenha instrumentos formais para isso. No ensino

fundamental as justificativas são muitas vezes intuitivas, já no Ensino Médio, deve se focar mais nas justificativas formais, levando o aluno a uma linguagem mais rigorosa, não esquecendo as metodologias aplicadas no ensino fundamental.

Segundo Quaranta et al.(2007), para se aprender matemática, especialmente geometria o aluno deve passar por todas as etapas de exploração concreta, experimentação, resolução de problemas, elaboração de conjecturas, justificativas informais e provas. Cita também que de acordo com Guimarães, Belfort e Bellemain(2002), estas etapas não são muito bem assimiladas pelos alunos, embora seja super natural vista por quem já as superou.

Além da planificação do cone pode-se trabalhar também com cones de massinha de modelar e cortá-los em ângulos diferentes de modo que o aluno visualize as três cônicas.

Proposta 4: Parábola obtida a partir do cone feito com massa de modelar

Objetivos: Desenvolver a visão espacial do aluno e ampliar o raciocínio lógico dando mais significado ao conteúdo.

Público alvo: Alunos do ensino fundamental.

Materiais necessários: Massinha de modelar e lâmina.

Recomendações metodológicas: O professor deve cortar o cone para evitar ferimentos nos alunos. Faça perguntas relacionadas ao conteúdo e deixe que os alunos dêem suas opiniões.

Dificuldades previstas: Alguns alunos podem não ter habilidade para moldar o cone.

Construção:

O professor deve pegar o cone e cortá-lo de modo que o corte seja paralelo a geratriz do cone. No corte aparecerá a parábola (figura 29).

Pode-se, no Ensino Fundamental, ao apresentar as planificações das figuras espaciais, levar o aluno a fazer cortes no cone para que desde então conheça a parábola. Isso levará o aluno a começar a ter uma visão sobre a parábola.

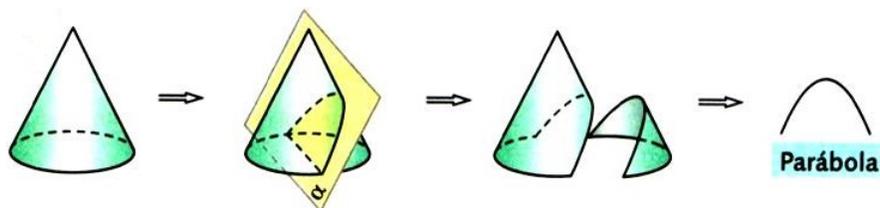


Figura 29: Corte no cone de massinha de modelar

Souza (2008) apresenta outra forma de construir a parábola utilizando régua e compasso.

Proposta 5: Construção da parábola usando régua e compasso.

Objetivo: Fazer um esboço da parábola.

Público alvo: Alunos do ensino médio.

Pré-requisitos: Conceito de reta perpendicular.

Materiais necessários: Folha de papel, régua, compasso e lápis.

Recomendações metodológicas: Trabalhar em grupos.

Dificuldades previstas: Alguns alunos não terão habilidade suficiente para trabalhar com compasso e régua.

Construção:

Considerem a Figura 30, se F é o foco e d é a diretriz, logo P é um ponto da parábola de foco F e diretriz d , e $PF = PG$.

Para termos vários pontos de uma parábola, usaremos régua e compasso. Marque o foco F e trace a diretriz d . Agora trace por F uma reta r perpendicular a d , o ponto de interseção das retas d e r é o ponto D . O parâmetro é o segmento

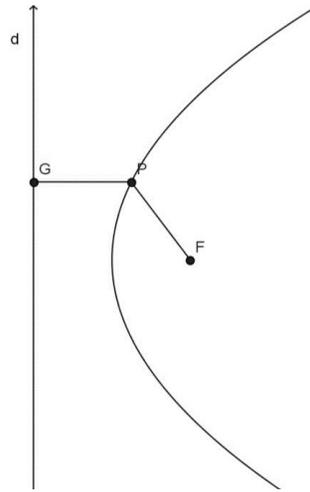


Figura 30: Característica da parábola

DF , marque o ponto médio de DF este ponto será o ponto V , vértice da parábola. Em cada ponto A da semirreta VF , trace uma reta s , perpendicular a r , faça com compasso uma circunferência de centro F e raio AD , esta circunferência corta a reta s nos pontos P e P' , estes pontos pertencem à parábola, pois, por construção: $PF = P'F = AD$.

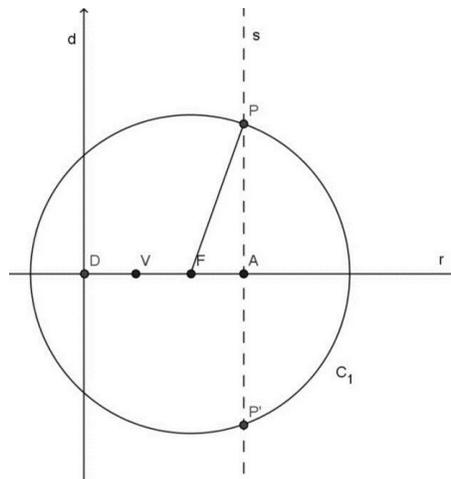


Figura 31: Construção da parábola

Percorrendo todos os pontos A da reta pode-se traçar a parábola (Figuras 32 e 33).

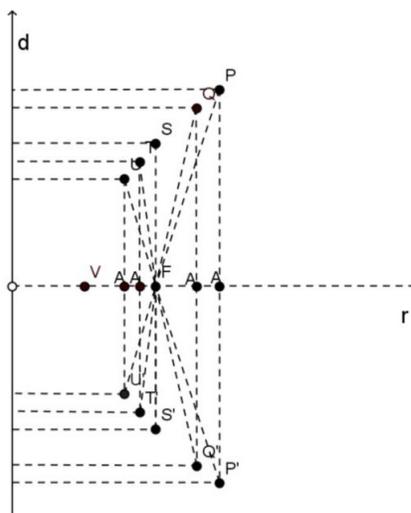


Figura 32: Construção da parábola

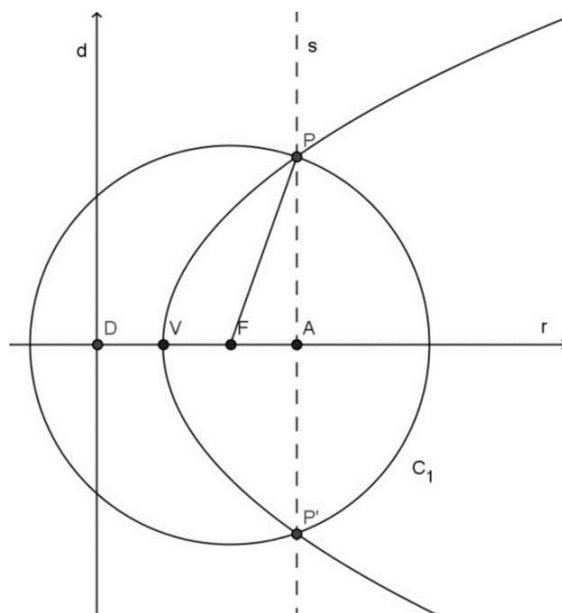


Figura 33: Esboço da Parábola

Ribeiro (2010) diz que existe uma equação específica para a parábola dependendo da localização relativa entre a diretriz e os eixos x e y e a posição do foco em relação à diretriz.

4.2 Dedução da fórmula da parábola

É muito importante para a aprendizagem dos alunos a demonstração da fórmula da parábola e não somente apresentá-la de forma pronta. Lehmann(1966) traz a seguinte definição para lugar geométrico:

Definição 1: O conjunto dos pontos, cujas coordenadas satisfaçam uma equação do tipo $f(x,y) = 0$, se chama gráfico da equação ou lugar geométrico.

Qualquer ponto cujas coordenadas satisfaçam a equação $f(x,y) = 0$ pertence ao gráfico da equação.

Lehmann (1966) ressalta ainda que o importante é que se as coordenadas de um ponto satisfazem uma equação, esse ponto pertence ao gráfico dessa equação e reciprocamente, se um ponto está sobre o gráfico de uma equação suas coordenadas satisfazem a equação. Isto é, evidentemente, o enunciado de uma condição necessária e suficiente. Como as coordenadas dos pontos de um lugar geométrico estão restringidas por sua equação tais pontos estão localizados, em geral, em posição tais que, tomadas em conjunto, formem um traço definido chamado curva, gráfico ou lugar geométrico.

De acordo com CBC (CARNEIRO,2007), demonstrar fatos geométricos é um instrumento formativo muito importante no Ensino Médio. Portanto, a habilidade de argumentar usando a linguagem matemática na demonstração dos fatos só se adquire praticando com bastante paciência e que pode ser conquistada por todos os alunos.

Lehmann(1966) afirma que a equação da parábola é deduzida a partir de sua definição como o lugar geométrico de um ponto que se move de acordo com uma lei específica.

Pela definição, parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto fixo chamado de foco, e de uma reta também fixa chamada diretriz (ponto não pertencente à reta).

Pode-se representar uma parábola pelas coordenadas do vértice $V(x_0, y_0)$, as coordenadas do foco $F(x_0 + \frac{p}{2}, y_0)$, a reta focal $l : y - y_0 = 0$ ou seja $l : y = y_0$ e a diretriz paralela ao eixo y e o foco e , à direita de r , então, a reta r é paralela ao eixo y , a equação de r é dada por $r : x = x_0 - \frac{p}{2}$.

Considere-se um ponto $P(x, y)$ qualquer pertencente à parábola. Logo seu esboço será:

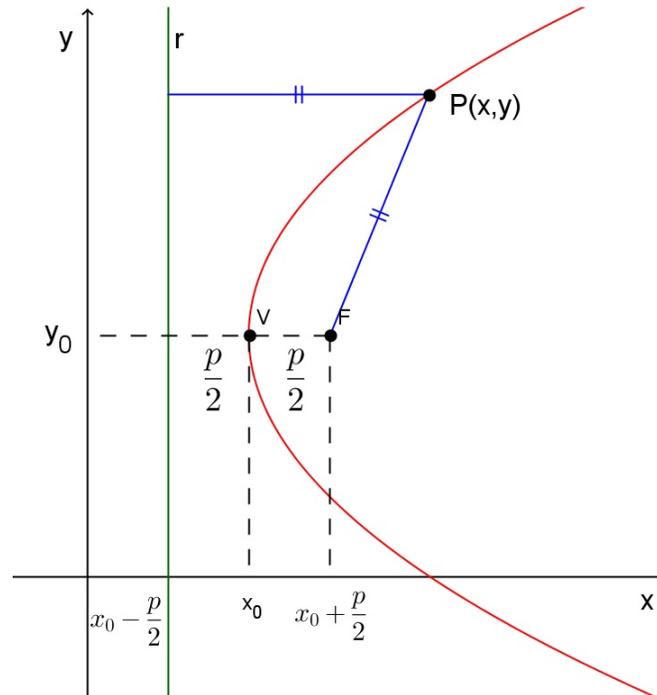


Figura 34: Esboço da parábola com concavidade para a direita

Então, tem-se

$$d(P, r) = d(P, F)$$

Como

$$d(P, r) = \left\| x - x_0 + \frac{p}{2} \right\|$$

e

$$d(P, F) = \sqrt{\left[x - \left(x_0 + \frac{p}{2} \right) \right]^2 + (y - y_0)^2},$$

tem-se

$$\left\| (x - x_0) + \frac{p}{2} \right\|^2 = \left(\sqrt{\left[x - \left(x_0 + \frac{p}{2} \right) \right]^2 + (y - y_0)^2} \right)^2$$

$$(x - x_0)^2 + p(x - x_0) + \frac{p^2}{4} = (x - x_0)^2 - p(x - x_0) + \frac{p^2}{4} + (y - y_0)^2$$

Logo a equação da parábola será:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

É possível obter as outras três equações da parábola de forma análoga. São elas:

(a) diretriz paralela ao eixo y e foco à esquerda da diretriz.

Os elementos serão:

Vértice: $V = (x_0, y_0)$,

Foco: $F = \left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0 \right)$,

Reta focal: $l : y = y_0$,

Diretriz: $r : x = x_0 + \frac{p}{2}$

Logo, a equação será: $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$

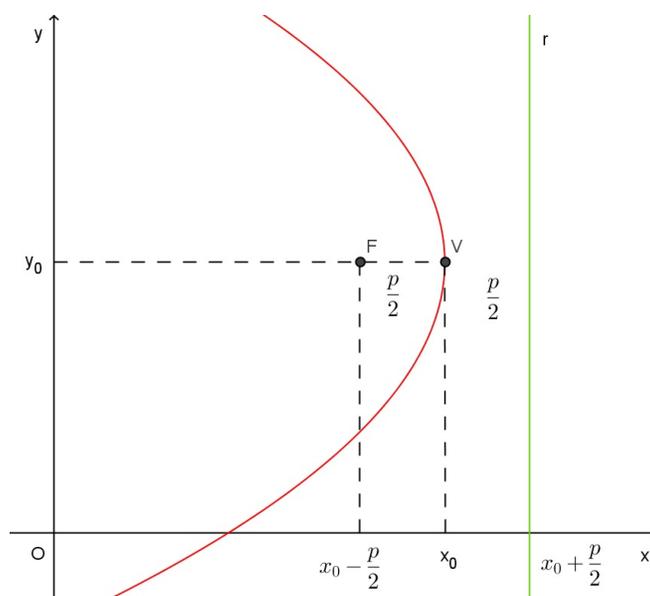


Figura 35: Esboço da parábola com concavidade para a esquerda

(b) diretriz paralela ao eixo x e foco acima da diretriz.

Os elementos serão:

Vértice: $V = (x_0, y_0)$,

Foco: $F = (x_0, y_0 + \frac{p}{2})$,

Reta focal: $l : x = x_0$,

Diretriz: $r : y = y_0 - \frac{p}{2}$

Logo, a equação será: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

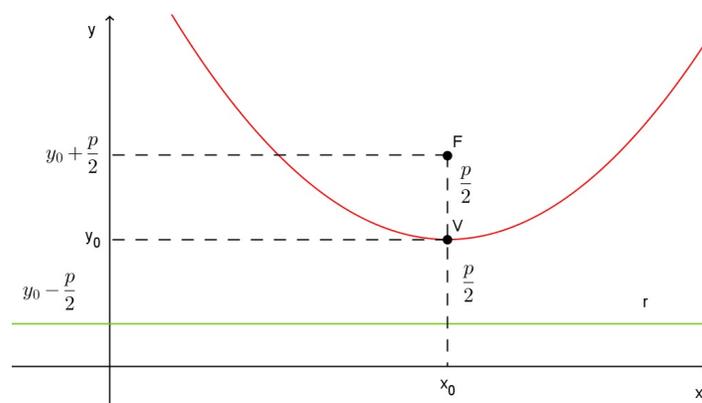


Figura 36: Esboço da parábola com concavidade para a cima

(c) diretriz paralela ao eixo x e foco abaixo da diretriz.

Vértice: $V = (x_0, y_0)$,

Foco: $F = (x_0, y_0)$,

Reta focal: $l : x = x_0 - \frac{p}{2}$,

Diretriz: $r : y = y_0 + \frac{p}{2}$

Logo, a equação será: $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$

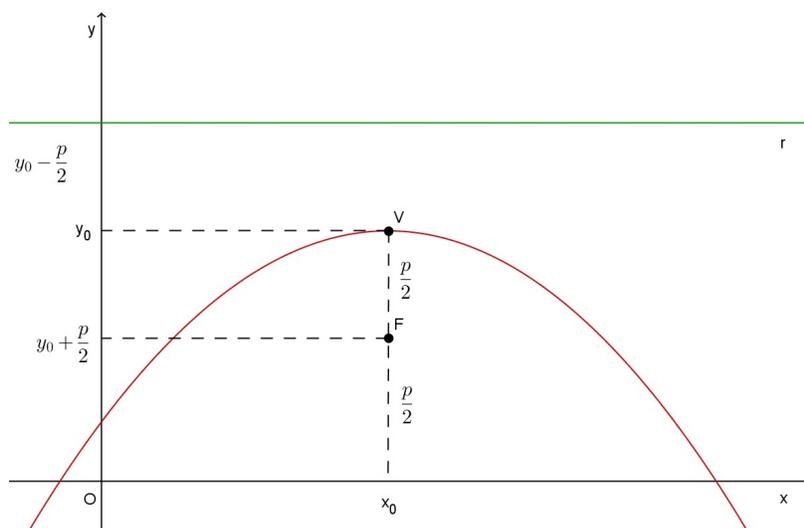


Figura 37: Esboço da parábola com concavidade para a baixo

Com relação às seções cônicas tem-se:

Teorema: (Propriedade foco-diretriz das Cônicas) Suponha que um ponto P move-se no plano determinado por um ponto fixo (chamado de foco) e uma reta fixada (chamada de diretriz), sendo que o foco não está situado na diretriz. Se um ponto move-se de tal maneira que a distância ao foco, dividida pela distância à diretriz é uma constante e (chamada de Excentricidade), então a curva descrita pelo ponto é uma seção cônica. Além disso, a cônica é uma parábola se $e = 1$, uma elipse se $0 < e < 1$ e uma hipérbole se $e > 1$ (ANTON et al., 2000, p. 165).

Kindle(1976) diz que as seções cônicas são divididas em três classes, de acordo com sua excentricidade e as cônicas mudam seu formato e suas propriedades, quando $e < 1$, é uma elipse, quando $e = 1$ é uma parábola e se $e > 1$ é uma hipérbole.

É importante ressaltar para os alunos que a excentricidade da parábola é sempre igual a um, pois a distância da reta diretriz ao ponto da parábola e a distância do ponto da parábola ao foco é sempre igual, logo o quociente é 1.

Deve-se também mostrar aos alunos que nem sempre as parábolas estão na forma padrão (paralelas aos eixos x ou y). Como os alunos do Ensino Médio não têm pré-requisitos para trabalhar com a rotação dos eixos, podendo trabalhar com equações de retas, distância entre pontos, distância entre reta e ponto e outros conceitos já vistos anteriormente. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 1: Determine a equação da parábola P que tem vértice $V = (6, -3)$ e diretriz $l : 3x - 5y + 1 = 0$ e faça um esboço.

Primeiramente calcula-se a distância do vértice V a reta diretriz l .

$$d_{(V,l)} = \left\| \frac{3 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) + 1}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} \right\| = \left\| \frac{18 + 15 + 1}{\sqrt{9 + 25}} \right\| = \left\| \frac{34}{\sqrt{34}} \right\|$$

Logo,

$$d_{(V,l)} = \sqrt{34}$$

Agora, encontra-se a equação da reta r perpendicular a diretriz que passa pelo vértice. Esta equação tem a forma $y = mx + n$.

Sabe-se que o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é 1. Então, a equação da diretriz é $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$. Assim, tem-se $\frac{3}{5} \cdot m = -1$, logo, $m = -\frac{3}{5}$. Como a reta r passa pelo vértice, tem-se $-3 = -\frac{5}{3} \cdot 6 + n$, ou seja, $-3 = -10 + n$. Assim, $n = 7$ e portanto a equação da reta r é $r : y = -\frac{5}{3}x + 7$.

Como o foco pertence a essa reta, tem-se que as coordenadas do foco são $F(x, x + 7)$.

Pela definição da parábola tem-se que

$$d_{(V,F)} = d_{(V,l)}$$

$$\sqrt{(x-6)^2 + \left(-\frac{5}{3}x + 7 - (-3)\right)^2} = \sqrt{34}$$

Elevando ao quadrado, tem-se:

$$(x-6)^2 + \left(-\frac{5}{3}x + 7 - (-3)\right)^2 = 34$$

donde obtém-se:

$$x^2 - 12x + 27 = 0$$

Resolvendo esta equação, obtém-se: $x_1 = 9$ e $x_2 = 3$

O foco não pode ter abscissa $x = 3$, pois esta abscissa que pertence a r se encontra na diretriz. Logo o foco tem abscissa $x = 9$. Então, o foco é $F = (9, -8)$. Considerando $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola, tem-se:

$$d_{(P,l)} = d_{(P,F)}$$

$$\left\| \frac{3x - 5y + 1}{\sqrt{34}} \right\| = \sqrt{(9 - x)^2 + (-8 - y)^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{(3x - 5y + 1)^2}{34} &= (9 - x)^2 + (-8 - y)^2 \\ &= \frac{9x^2 - 15xy + 3x + 25y^2 - 15xy - 5y + 1 + 3x - 5y}{34} \\ &= 81 - 18x + x^2 + 64 + 16y + y^2 \end{aligned}$$

Resolvendo, obtém-se:

$$-25x^2 - 30xy - 9y^2 + 618x - 554y - 4929 = 0$$

Logo, a equação da parábola será:

$$25x^2 + 30xy + 9y^2 - 618x + 554y + 4929 = 0,$$

cujo esboço é apresentado na Figura 38.

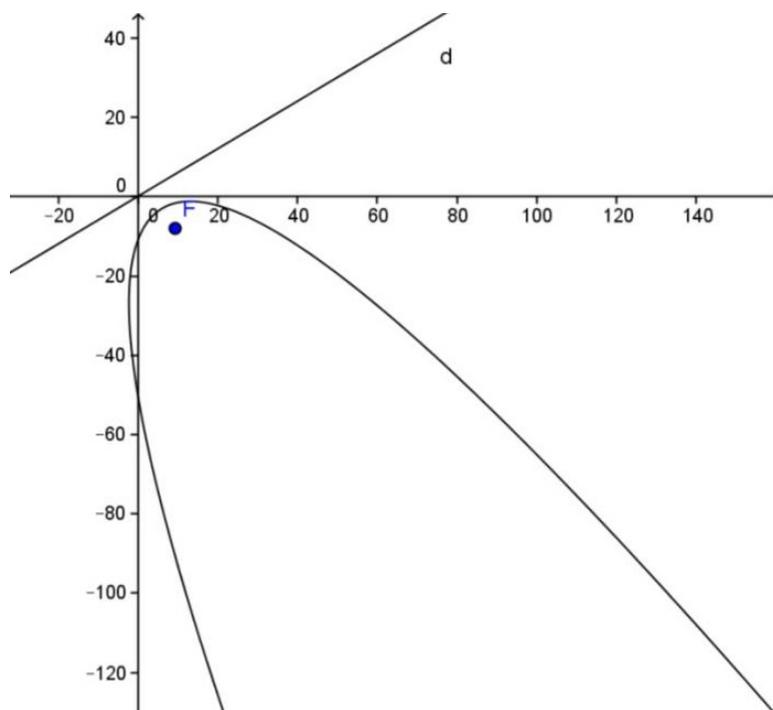


Figura 38: Esboço da parábola

A partir das construções e definições mostradas anteriormente, deve-se aplicar questões atraentes para que os nossos alunos aprendam e adsorvam as ideias, assim montamos um Banco de Questões (ANEXO A).

4.3 Aplicações da parábola

Deve-se sempre mostrar para os alunos as possíveis aplicações da parábola.

Segundo Wagner (1997), as antenas que captam sinais do espaço e os espelhos dos telescópios astronômicos devem ser parabólicos para capturar os sinais recebidos que são muito fracos como as ondas de rádio ou luz por exemplo. A área decaptura deve ser grande e concentrá-los num único foco para que sejam ampliados. Então, a superfície receptora (antena ou espelho) deve receber todos os sinais e direcioná-los para um único ponto após a reflexão.

Na física, quando uma luz é refletida de um ponto P sobre uma superfície, o ângulo entre o raio incidente e a reta tangente em P é igual ao ângulo entre o raio de partida e a reta tangente em P. Por consequência, se uma superfície refletora tem seções transversais parabólicas com um foco e eixo em comum, então se tem a partir do teorema 3.4.4 que todo raio de luz entrando em paralelo ao eixo será refletido pelo foco (Figura 3.4.31 a); inversamente se uma fonte de luz estiver localizada no foco, então os raios refletidos serão paralelos ao eixo (Figura 3.4.31 b). Este princípio é usado em certos telescópios para refletir os raios de luz aproximadamente paralelos, de estrelas e planetas de um espelho parabólico para uma lente no foco; e os refletores parabólicos de uma lanterna e os faróis de um carro utilizam este princípio para formar um feixe paralelo de raios de luz a partir de uma lâmpada localizada no foco. O mesmo princípio óptico é aplicado aos sinais de radares e ondas sonoras, o qual explica a forma de muitas antenas (ANTON, 2000, p. 165).

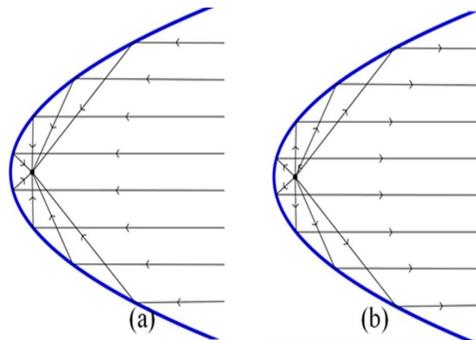


Figura 3.4.31

Fonte: (ANTON, 2000, p. 160).

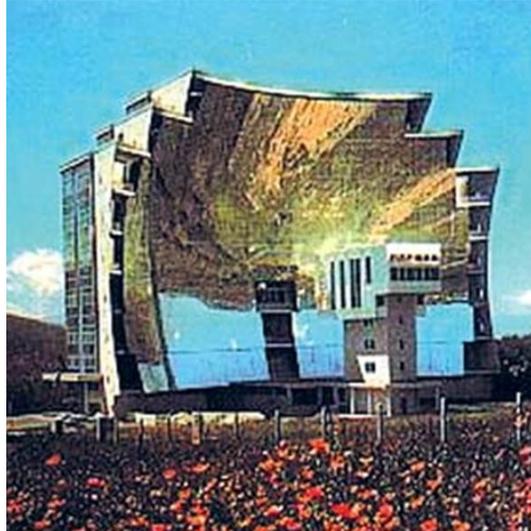


Figura 40: Captadores de energia solar

A parábola é muito estudada no tema funções, pois ela é a representação de uma função quadrática.

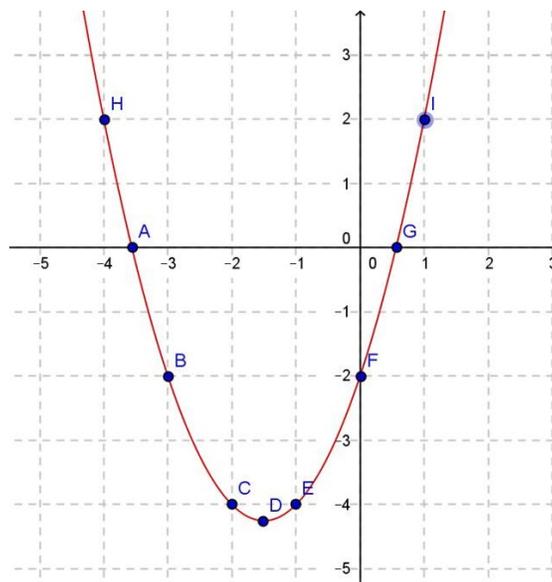


Figura 41: Representação da função quadrática

Pode-se perceber as parábolas em vários lugares do cotidiano:

1) Nos bebedouros públicos, a água que jorra descreve uma curva parabólica.



Figura 42: Curva parabólica na água que jorra

2) Qualquer objeto lançado de forma oblíqua em uma região com algum campo gravitacional, como por exemplo, a nossa superfície terrestre.



Figura 43: Objeto lançado de forma oblíqua

3) Aplicações na engenharia de telecomunicações nas antenas parabólicas;



Figura 44: Antenas parabólicas

4) Engenharia automobilística no formato dos faróis dos carros;

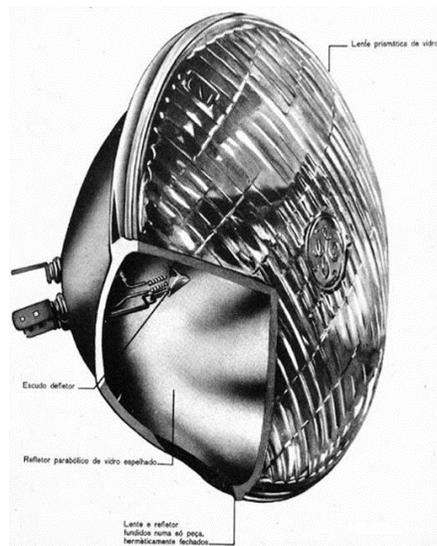


Figura 45: Faróis de carro

5) Engenharia arquitetônica muito utilizada por alguns arquitetos e engenheiros, como Oscar Niemeyer, no projeto da "Igrejinha" da Pampulha (figura 50).



Figura 46: Igreja de São Francisco (Belo Horizonte - Minas Gerais - Brasil)

4.4 Coordenadas polares

Em geral, os alunos do Ensino Médio utilizam somente o sistema de coordenadas cartesianas. Deve-se introduzir outros sistemas de coordenadas no Ensino Médio, entre eles o sistema de coordenadas polares. Para alguns, pode parecer desnecessário considerar outro sistema diferente do sistema cartesiano. Mas em muitos casos o uso dessas coordenadas representa muitas vantagens sobre as coordenadas cartesianas.

Segundo Kindle (1976), para determinar a posição de um ponto P ao invés de usar como referência dois eixos ortogonais, às vezes é mais fácil localizá-lo em função da distância dele a um ponto fixo O e do ângulo que a direção OP forma com uma reta fixa que passa por O as coordenadas desse sistema denominam-se coordenadas polares.

Para Lehmann (1966), trace o segmento OP e designe sua longitude por r (Figura 47). Considerando um segmento AO , onde A é um ponto qualquer do plano, chamemos θ ao ângulo AOP . Evidentemente a posição do ponto P com relação ao eixo polar e ao pólo é determinada quando se conhecem r e θ . Em particular r se chama vetor raio e θ ângulo polar, ângulo vetorial ou argumento de P . As coordenadas polares de P se escrevem (r, θ) .

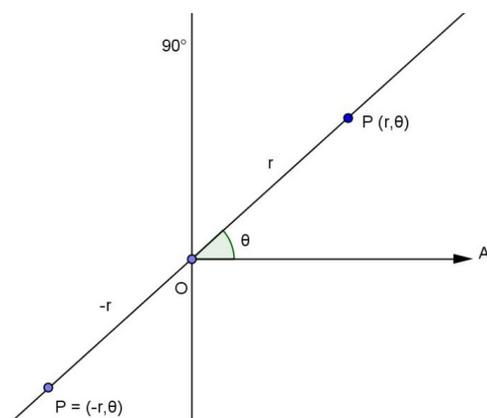


Figura 47: Coordenadas polares

Chama-se r de coordenada radial de P e θ de coordenada angular (ou ângulo polar) de P (ANTON et al., 2000).

De acordo com Júnior (1973) chamaremos de θ o menor ângulo positivo medido no sentido anti-horário em graus ou em radianos de AO para OB , e de r a distância orientada positivamente, OP . Mas às vezes é preciso que r e θ tenham valores positivos ou negativos. Se θ é negativo e r é positivo, traçamos o ângulo $\theta = AB$, medidos a partir de OA , no sentido horário e marcamos P sobre OB de modo que $OP = r$. Se r é negativo construímos $\theta = AB$, prolongando OB até o pólo B' e marcamos P sobre OB' a uma distância $\|r\|$ de O . Um par de coordenadas polares determina somente um ponto, mas um ponto pode ser determinado de várias maneiras. Outra forma de representar é $(r, \theta + 2\pi n)$ onde θ está dado em radianos e n é um número inteiro ou $(-r, \theta + \pi n)$ onde n é um número inteiro ímpar qualquer.

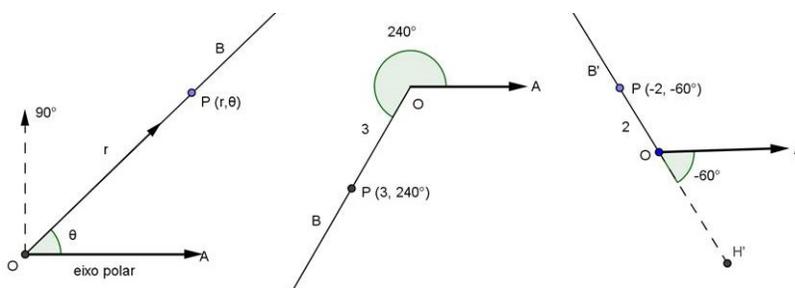


Figura 48: Pontos em coordenadas polares

Lehmann (1966) traz um exemplo de pontos em coordenadas polares está representado na figura 52, onde estão traçados os pontos $P_1(4, \frac{\pi}{6})$, $P_2(6, 2)$, $P_3(-7, 75^\circ)$ e $P_4(5, \frac{7\pi}{4})$. O ângulo polar 2 (em P_2) significa 2 radianos que equivale a $114^\circ 35,5'$ (aproximadamente).

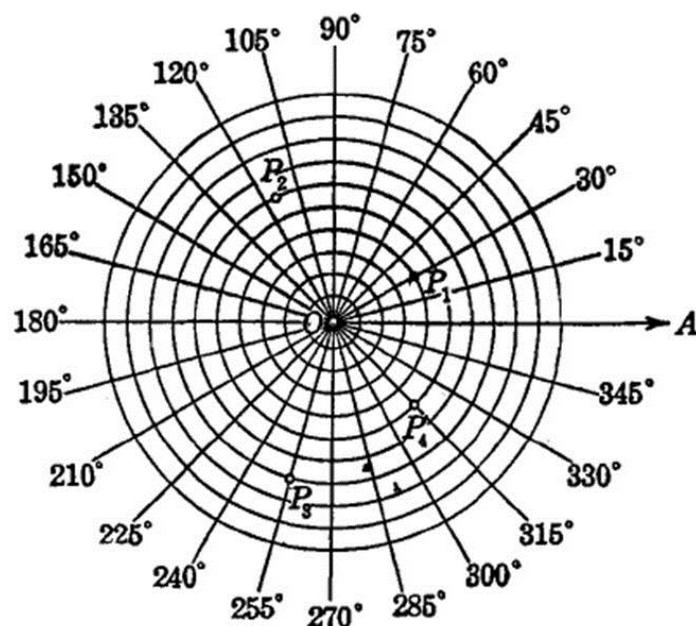


Figura 49: Alguns pontos marcados em coordenadas polares
Fonte: (LEHMANN, 1966).

O pólo tem infinitas representações no sistema polar $(0, \theta)$, pois são todos os valores de θ tais que $r = f(\theta) = 0$, que dão as direções das tangentes no pólo.

Considerando o pólo como a origem do sistema cartesiano, e o eixo polar como a parte positiva do eixo x tem-se as seguintes relações:

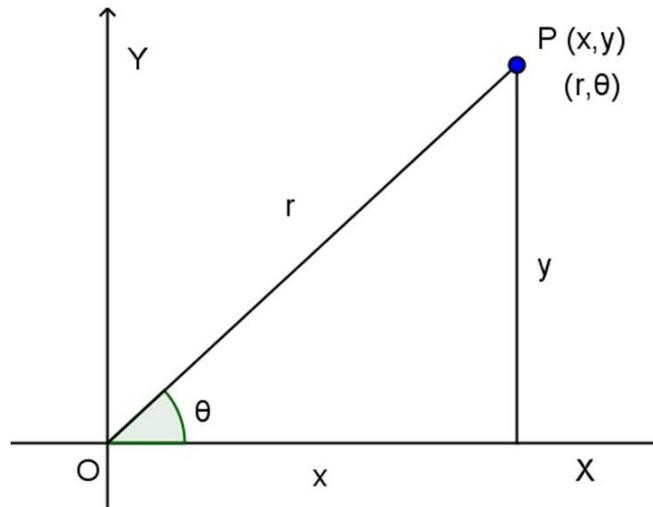


Figura 50: Coordenadas polares

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta \quad (1)$$

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\text{sen}\theta \quad (2)$$

Pelo Teorema de Pitágoras tem-se que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

E daí provém que $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ então:

$$\text{sen}\theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e

$$\cos\theta = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Dividindo (2) por (1) tem-se que:

$$\frac{y}{x} = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{r \operatorname{cos} \theta}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Para traçar o gráfico de curvas em coordenadas polares deve-se, de acordo com Lehmann (1966), seguir os seguintes passos:

- a) Determinação das intersecções com o eixo polar e com o eixo de 90° ;
- b) Determinação da simetria da curva com respeito ao eixo polar, ao eixo a 90° e ao pólo;
- c) Determinação da extensão do lugar geométrico;
- d) Cálculo das coordenadas de um número suficiente de pontos para obter um gráfico adequado, e
- e) Traçar o gráfico.

Para determinar as intersecções com o eixo polar basta fazer $\theta = 0^\circ$ e para fazer a intersecção com o eixo de 90° , basta fazer $\theta = 90^\circ$.

Para fazer a simetria explica Kindle (1976) nos casos em que a substituição de θ por $-\theta$ não altera a equação, curva é simétrica em relação ao eixo polar. Quando substituímos θ por $\pi - \theta$, e a equação continua a mesma, a curva é simétrica em relação à reta $\theta = \pi$. E a curva é simétrica em relação ao pólo quando substituímos r por $-r$ ou θ por $\pi + \theta$ e a equação não se modifica.

Sobre a determinação da extensão do lugar geométrico Ayres Júnior (1973) diz que a equação polar $r = f(\theta)$ representa curva fechada quando r é um número real e finito para qualquer θ , mas quando existem valores para os quais uma das variáveis torna a outra infinita a curva não é fechada.

Segundo Anton et al. (2000), deve-se escolher valores conhecidos para θ , calcular os valores correspondentes de r , então, marcar os pontos (r, θ) no sistema

de coordenadas polares e então traçar o gráfico.

4.4.1 Cônicas em coordenadas cartesianas.

(1) A elipse

A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante o maior que a distância entre eles.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

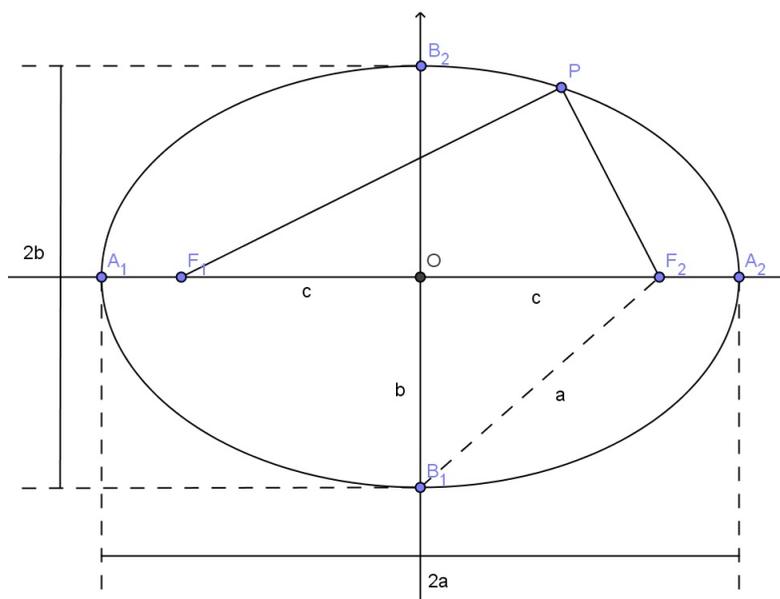


Figura 51: Elipse em coordenada cartesiana

Os elementos de uma elipse são:

Focos: são os pontos F_1 e F_2 .

Distância focal: é a distância entre os focos ($2c = F_1F_2$).

Eixo maior: é o segmento $A_1A_2 = 2a$, que passa pelos focos ($2a > 2c$).

Centro: é o ponto O , ponto médio de A_1A_2 .

Eixo menor: é o segmento $B_1B_2 = 2b$, perpendicular a A_1A_2 passando por O .

Excentricidade (e): é a razão $e = \frac{c}{a}$, sendo $0 < e < 1$.

Se a excentricidade e for próxima de 1, o formato da elipse será mais achatado, se e for próximo de 0, o seu formato será próximo ao de uma circunferência.

Em uma elipse: $a^2 = b^2 + c^2$.

As equações de uma elipse são dadas por:

i) Focos no eixo das abscissas e centro $(0, 0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ii) Focos no eixo das ordenadas e centro $(0, 0)$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(2) A parábola

A parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja distância a uma reta r dada é igual à distância a um ponto fixo F não pertencente a r .

$$PF = PH$$

Os elementos de uma parábola são:

Focos: o ponto F .

Diretriz: é a reta r .

Eixo de simetria: é reta perpendicular a r , que passa por F .

Vértice: é a intersecção da parábola com o eixo de simetria.

Parâmetro da parábola: é a distância de p entre o foco e a diretriz.

As equações de uma parábola são dadas por:

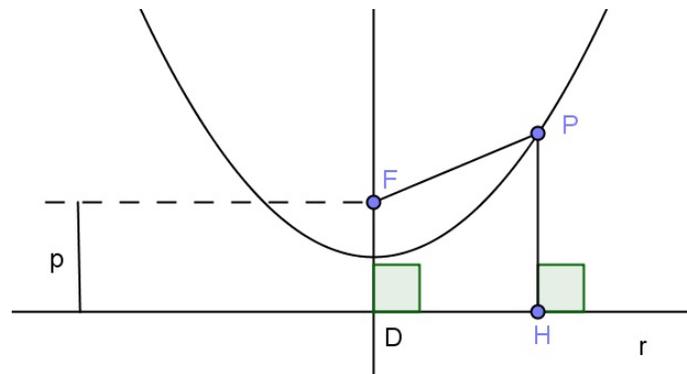


Figura 52: Parábola em coordenada cartesiana

i) Eixo de simetria sobre o eixo x ($F(c, 0)$)

$$y^2 = 4cx \text{ ou } y^2 = 2px$$

ii) Eixo de simetria sobre o eixo x ($F(-c, 0)$)

$$y^2 = -4cx \text{ ou } y^2 = -2px$$

iii) Eixo de simetria sobre o eixo y ($F(0, c)$)

$$x^2 = 4cy \text{ ou } x^2 = 2py$$

iv) Eixo de simetria sobre o eixo y ($F(0, -c)$)

$$x^2 = -4cy \text{ ou } x^2 = -2py$$

(3) A hipérbole

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença, em módulo, de suas distâncias aos focos F_1 e F_2 é constante e menor que a distância entre eles.

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

Os elementos de uma hipérbole são:

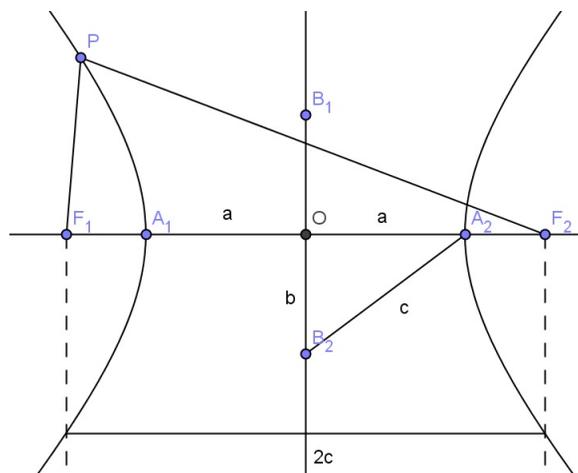


Figura 53: Hipérbole em coordenada cartesiana

Focos: são os pontos F_1 e F_2 .

Distância focal: é a distância entre os focos ($2c = F_1F_2$).

Vértices: São os pontos A_1 e A_2 , intersecções de F_1F_2 com a hipérbole.

Eixo real: é o segmento $A_1A_2 = 2a$.

Centro: é o ponto O , ponto médio de A_1A_2 .

Eixo imaginário: é o segmento $B_1B_2 = 2b$.

Excentricidade (e): é a razão $e = \frac{c}{a}$, sendo $e > 1$.

Se e está próximo de 1, os ramos da hipérbole serão mais fechados. Se e for um número tendendo ao infinito, os ramos da hipérbole serão mais abertos.

Em uma hipérbole: $c^2 = a^2 + b^2$.

As equações de uma hipérbole são dadas por:

i) Focos no eixo das abscissas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ii) Focos no eixo das ordenadas

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

As assíntotas de uma hipérbole são as retas $y = \pm \frac{b}{a}x$, das quais a hipérbole fica cada vez mais próxima, sem tocá-las.

4.4.2 Cônicas em coordenadas polares.

Anton et al. (2000) deduz as equações polares para as cônicas. Suponhamos que a diretriz esteja a direita do foco (Figura 54).

Sabendo que $\frac{PF}{PD} = e$, temos que

$$PF = ePD,$$

e como $PF = r$ e $PD = d - r\cos\theta$, segue que

$$\frac{r}{d - r\cos\theta} = e$$

Assim,

$$\frac{d}{r} - \frac{r\cos\theta}{r} = \frac{1}{e}$$

$$\frac{d}{r} = \frac{1}{e} + \cos\theta$$

$$ed = r + er\cos\theta$$

$$ed = r(1 + e\cos\theta)$$

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

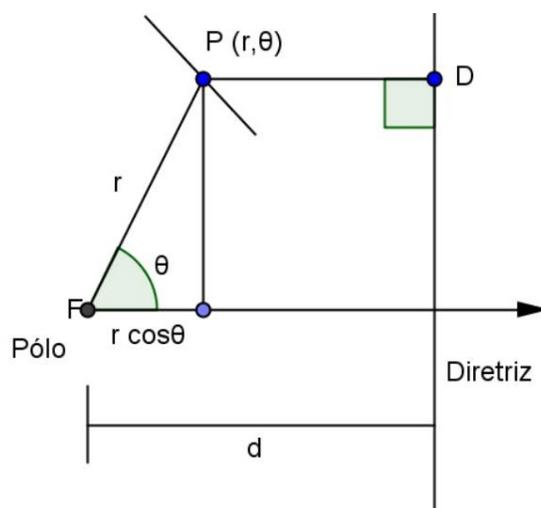


Figura 54: Equação polar das cônicas

Assim, para os demais casos temos o seguinte resultado:

Teorema: Se uma seção cônica com excentricidade e está posicionada em um sistema de coordenadas polares, de modo que seu foco está no pólo e a diretriz correspondente está a d unidades do pólo, então a equação da cônica tem uma das quatro formas possíveis, dependendo da sua orientação:

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta} \quad (\text{diretriz à direita do polo})$$

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta} \quad (\text{diretriz à esquerda do polo})$$

$$r = \frac{ed}{1 + e \sin \theta} \quad (\text{diretriz acima do polo})$$

$$r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta} \quad (\text{diretriz abaixo do polo})$$

Ainda para Anton et al. (2000) na elipse precisa-se determinar a distância do foco aos vértices. Sendo r_0 a distância do foco até o vértice mais próximo e r_1 a distância até o vértice mais afastado, temos que: $r_0 = a - c$, $r_1 = a + c$, somando as duas temos: $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_0)$ e subtraindo temos: $c = \frac{1}{2}(r_1 - r_0)$. Agora multiplicando $r_0 \cdot r_1 = a^2 - c^2 = b^2$, logo $b = \sqrt{r_0 r_1}$. Da mesma maneira que na elipse, na hipérbole tem-se que: $r_0 = c - a$, $r_1 = a + c$, somando as duas temos: $a = \frac{1}{2}(r_1 - r_0)$ e subtraindo tem-se: $c = \frac{1}{2}(r_1 + r_0)$. Agora multiplicando $r_0 \cdot r_1 = c^2 - a^2 = b^2$, logo $b = \sqrt{r_0 r_1}$.

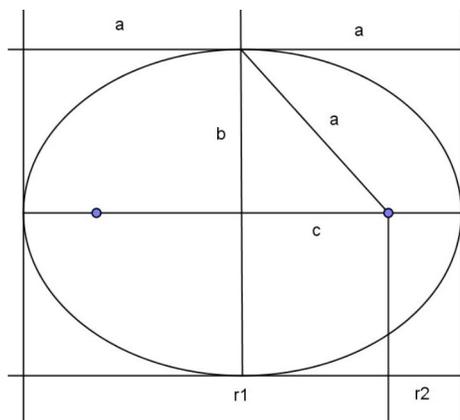


Figura 55: Elipse

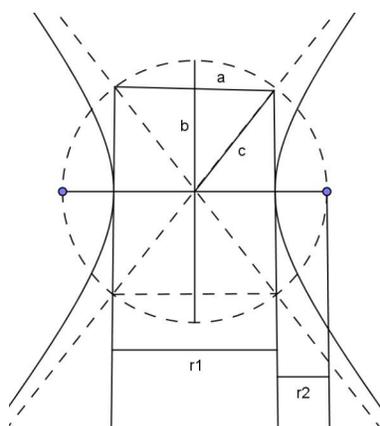


Figura 56: Hipérbole

Exemplo:

a) Esboce o gráfico de $r = \frac{2}{1 - \cos\theta}$ em coordenadas polares. (ANTON, 2000, p. 167).

Solução: A equação é do tipo $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$, então $d = 2$ e $e = 1$. Assim, o gráfico é uma parábola com o foco no pólo e a diretriz 2 unidades a esquerda do pólo. Então, a parábola abre-se a direita ao longo do eixo polar e $p = 1$. Então o esboço é:

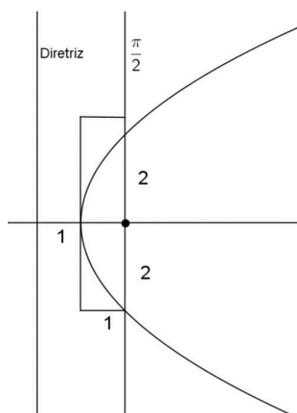


Figura 57: Esboço rudimentar da parábola

5 TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

Este capítulo apresenta um estudo voltado para a graduação, onde abordamos as rotações e translações de eixos coordenados. No fim do capítulo mostramos a rotação de eixos utilizando a álgebra linear.

Quando se trabalha com cônicas, muitas vezes a escolha certa dos eixos conduz a uma forma mais simples da equação. É possível simplificar essa equação de duas maneiras, pela translação de eixos e/ou pela rotação de eixos.

Para Lehmann (1966) uma transformação é uma operação pela qual uma relação, expressão ou figura se transforma em outra seguindo uma lei dada. Analiticamente, a lei se expressa por uma ou mais equações chamadas equações de transformações.

5.1 Translação de eixos coordenados

De acordo com Kindle (1976) sendo OX e OY os eixos originais e $O'X'$ e $O'Y'$ os eixos transladados, respectivamente paralelos aos primeiros. Considerando (h, k) a nova origem do novo sistema e seja P um ponto qualquer do plano, com (x, y) as coordenadas dos eixos originais e (x', y') as coordenadas nos novos eixos.

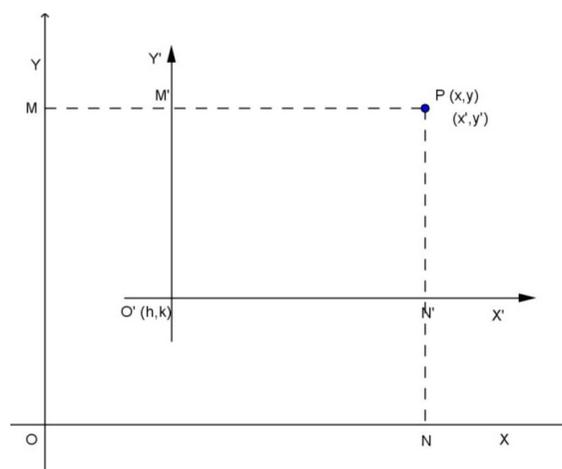


Figura 58: Translação de eixos

Determinando-se x e y em função de x' , y' , h e k , temos:

$$x = MP = MM' + M'P = h + x'$$

e,

$$y = NP = NN' + N'P = k + y'$$

Logo, as fórmulas para transformação são: $x = x' + h$ e $y = y' + k$, isto é, $x' = x - h$ e $y' = y - k$.

5.2 Rotação dos eixos coordenados

A rotação dos eixos coordenados consiste em manter a origem fixa e girar os eixos em um determinado ângulo.

Lehmann (1966) traz o seguinte resultado,

Teorema 1: Se os eixos coordenados giram um ângulo θ em torno de sua origem como centro de rotação, e as coordenadas de um ponto qualquer P antes e depois da rotação são (x, y) e (x', y') respectivamente, as equações de transformação do sistema original ao novo sistema de coordenadas estão dadas por: $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$, $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$.

Demonstração: Sejam X e Y os eixos originais e X' e Y' os novos eixos. A partir do ponto P traça-se a ordenada AP correspondente ao sistema X, Y , a ordenada $A'P$ correspondente ao sistema X', Y' , e a reta OP . Seja o ângulo $POA' = \varphi = r$. Por trigonometria tem-se:

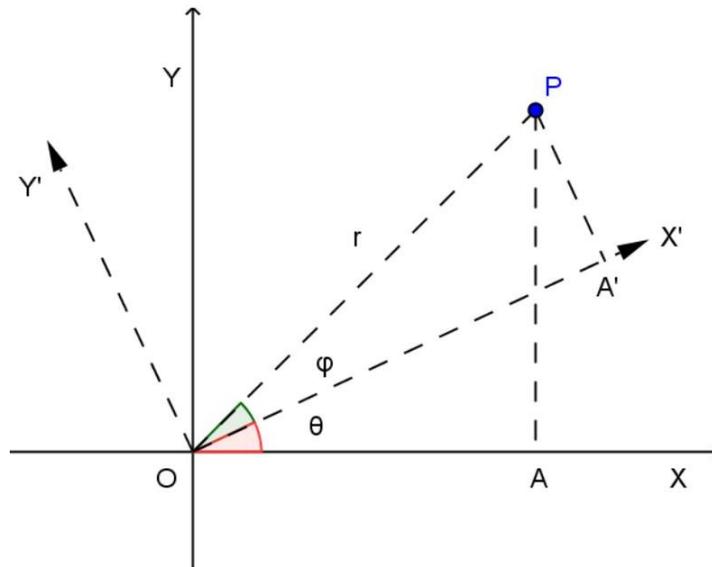


Figura 59: Rotação de eixos

$$x = \overline{OA} = r \cos(\theta + \varphi) \quad (1)$$

$$y = \overline{AP} = r \sin(\theta + \varphi) \quad (2)$$

$$x' = \overline{OA'} = r \cos \varphi, y' = \overline{A'P} = r \sin \varphi \quad (3)$$

De (1) tem-se:

$$x = \overline{OA} = r \cos(\theta + \varphi) = r \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi$$

Se nesta última equação substituir-se os valores dados por (3), obtemos a primeira equação de transformação

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

Analogamente, de (2)

$$y = r \operatorname{sen}(\theta + \varphi) = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi$$

De (3), tem-se a segunda equação de transformação:

$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$$

Para as aplicações será necessário girar os eixos coordenados somente por um ângulo suficientemente grande para fazer coincidir um dos eixos coordenados com uma reta dada fixa qualquer, ou para fazer que seja paralelo a ela em um plano coordenado. Assim podemos restringir, em geral, os valores do ângulo de rotação θ ao intervalo dado por $0^\circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (LEHMANN, 1966).

Já Ayres Júnior (1973) apresenta outra maneira de encontrar as equações de rotação, mantendo a origem fixa, e os eixos coordenados girando em sentido anti-horário um ângulo θ , e se um ponto P tem coordenadas (x, y) no sistema OXY e (x', y') no novo sistema tem-se:

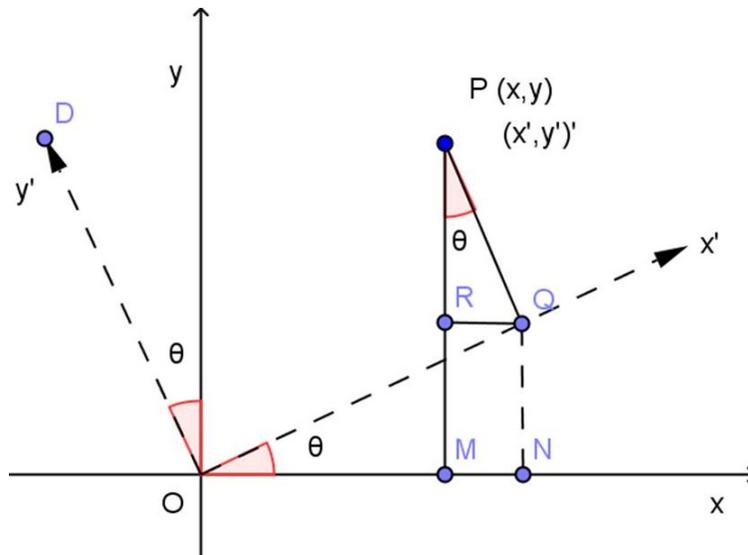


Figura 60: Eixos com rotação

$$\begin{aligned}
 x &= OM = ON - MN = ON - RQ \\
 &= OQ\cos\theta - QP\sin\theta \\
 &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\
 y &= MP = MR + RP = NQ + RP \\
 &= OQ\sin\theta + QP\cos\theta \\
 &= x'\sin\theta + y'\cos\theta
 \end{aligned}$$

De acordo com Camargo et al.(2005) sendo $P(x,y)$ um ponto do plano π . Quando rotaciona-se θ radianos no sentido anti-horário, obtém-se um ponto $P'(u,v)$ tal que

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases},$$

onde $P = P'$. Resolvendo esse sistema temos

$$\begin{cases} u = x\cos\theta + y\sin\theta \\ v = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases},$$

que são as expressões das novas coordenadas em relação às antigas. Pode-se escrever matricialmente por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

onde M é a matriz mudança de base $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ que é ortogonal, ou

seja, $M^{-1} = M^t$.

Exemplo: (LEHMANN, 1966, p. 141-142) Por uma rotação dos eixos coordenados, transformar a equação $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$ em outra de modo que desapareça o termo xy . Traçar seu lugar geométrico em ambos os sistemas de eixos coordenados.

Solução: Se na equação substituirmos os valores de x e y dados pelas equações de transformações do Teorema 1, obtem-se

$$9(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 - 24(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + 16(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 - 40(x'\cos\theta - y'\sin\theta) - 30(x'\sin\theta + y'\cos\theta) = 0$$

Na qual, depois de desenvolvê-la e colocar os termos comuns em evidência tem-se:

$$(9\cos^2\theta - 24\cos\theta\sin\theta + 16\sin^2\theta)x'^2 + (14\sin\theta\cos\theta + 24\sin^2\theta - 24\cos^2\theta)x'y' + (9\sin^2\theta + 24\sin\theta\cos\theta + 16\cos^2\theta)y'^2 - (40\cos\theta + 30\sin\theta)x' + (40\sin\theta - 30\cos\theta)y' - \theta = 0 \quad (3)$$

Como na equação transformada devem desaparecer os termos $x'y'$, iguale-se o coeficiente de $x'y'$ em (3) a zero e obtém-se:

$$14\sin\theta\cos\theta + 24\sin^2\theta - 24\cos^2\theta = 0$$

Agora, como $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ e $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ pode-se escrever

$$7\sin(2\theta) - 24\cos(2\theta) = 0,$$

de onde tem-se:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{24}{7}$$

Pelo Teorema 1, o ângulo θ está no primeiro quadrante, de maneira que 2θ estará no primeiro ou no segundo quadrante, em que o cosseno e a tangente tem o mesmo sinal. De maneira semelhante, $\text{sen}\theta$ e $\text{cos}\theta$ serão positivos.

Portanto, temos que:

$$\text{tg}(2\theta) = \frac{2\text{tg}\theta}{1 - \text{tg}^2\theta} = \frac{24}{7}$$

logo,

$$24\text{tg}^2\theta + 14\text{tg}\theta - 24 = 0$$

Dividindo ambos os membros por 2:

$$12\text{tg}^2\theta + 7\text{tg}\theta - 12 = 0$$

Tomando $\text{tg}\theta = x$, temos

$$12x^2 + 7x - 12 = 0$$

Resolvendo esta equação polinomial do segundo grau, obtemos

$$\text{tg}\theta = x = \frac{-7 \pm 25}{24}$$

Como $\text{tg}\theta$ é positiva, temos:

$$\text{tg}\theta = \frac{3}{4} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}$$

Assim,

$$\text{sen}\theta = \frac{3}{4}\text{cos}\theta$$

Sabendo-se que $\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}\theta\text{cos}\theta$, substituindo o valor encontrado acima tem-se $\text{sen}(2\theta) = 2 \cdot \frac{3}{4}\text{cos}^2\theta = \frac{3}{2}\text{cos}^2\theta$. Daí, como $\text{tg}(2\theta) = \frac{24}{7}$ e que $\text{tg}(2\theta) = \frac{\text{sen}(2\theta)}{\text{cos}(2\theta)}$, segue que:

$$\frac{\text{sen}(2\theta)}{\text{cos}(2\theta)} = \frac{24}{7}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{2}\text{cos}^2\theta}{\text{cos}(2\theta)} &= \frac{24}{7} \Rightarrow \frac{21}{2}\text{cos}^2\theta = 24\text{cos}(2\theta) \Rightarrow \text{cos}(2\theta) = \frac{7}{2}\text{cos}^2\theta \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow \text{cos}(2\theta) = \\ \frac{7}{16}\text{cos}^2\theta &\Rightarrow \text{cos}^2\theta - \text{sen}^2\theta = \frac{7}{16}\text{cos}^2\theta \Rightarrow \text{cos}^2\theta - (1 - \text{cos}^2\theta) = \frac{7}{16}\text{cos}^2\theta \Rightarrow 32\text{cos}^2\theta - \\ 16 &= 7\text{cos}^2\theta \Rightarrow 25\text{cos}^2\theta = 16 \Rightarrow \text{cos}^2\theta = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{tg}(2\theta) = \frac{24}{7} &\Rightarrow \frac{\text{sen}(2\theta)}{\text{cos}(2\theta)} = \frac{24}{7} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}\text{sen}(2\theta)}{\text{cos}(2\theta)} = \frac{24}{7} \Rightarrow \frac{3}{2} \frac{16}{25} = \frac{24}{7} \Rightarrow \frac{24}{25} = \\ \frac{24}{7} &\Rightarrow 24\text{cos}(2\theta) = \frac{7 \cdot 24}{25} \Rightarrow \text{cos}(2\theta) = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

Para efetuar a simplificação da equação (3), necessita-se dos valores de $\text{sen}\theta$ e $\text{cos}\theta$, que podem ser obtidas pelas seguintes fórmulas:

$$\text{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \text{cos}(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{cos}\theta = \sqrt{\frac{1 + \text{cos}(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}$$

Se substituir estes valores de seno e cosseno na equação (3), tem-se:

$$\left(\frac{144 - 288 + 144}{25}\right)x^2 + \left(\frac{168 + 216 - 384}{25}\right)x'y' + \left(\frac{81 + 288 + 256}{25}\right)y^2 - (32 + 18)x' + (24 - 24)y' = 0.$$

A qual se reduz na equação transformada $y'^2 - 2x' = 0$, que é o lugar geométrico de uma parábola, conforme figura abaixo:

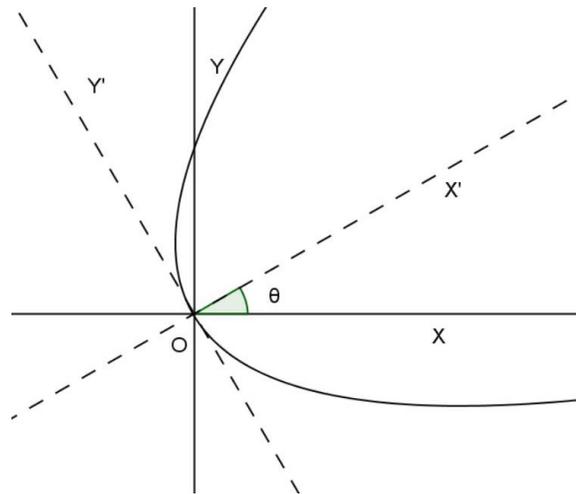


Figura 61: Rotação de eixos na parábola

5.3 A equação geral do 2º grau em \mathbb{R}^2

De acordo com Anton et al. (2000), a equação da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

recebe o nome de equação polinomial de segundo grau em x e y . O termo Bxy é chamado termo misto. Se a equação não tiver o termo misto, ou seja, $B = 0$, então a equação é do tipo $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ e, neste caso, o gráfico será possivelmente uma seção cônica degenerada que está na posição padrão ou transladada. Agora, se a equação tiver o termo misto, ou seja, $B \neq 0$, o gráfico será possivelmente uma cônica rotacionada de sua orientação-padrão.

Lehmann (1966) afirma que para transformar a equação polinomial do segundo grau que apresenta o coeficiente B diferente de zero, por rotação de eixos,

tem-se as seguintes equações de transformação por rotação:

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta$$

, e

$$y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta$$

,

dadas no Teorema 1. Substituindo na equação polinomial geral do segundo grau tem-se:

$$A(x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta)^2 + B(x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta)(x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta) + C(x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta)^2 + D(x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta) + E(x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta) + F = 0.$$

Se desenvolver-se e colocar-se os termos comuns em evidência, obtém-se

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \quad (2)$$

em que

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta + B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta, \\ B' &= 2(C - A) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta), \\ C' &= A \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta, \\ D' &= D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta, \\ E' &= E \cos \theta - D \operatorname{sen} \theta, \\ F' &= F. \end{aligned}$$

Se na equação (2) desejamos eliminar o termo $x'y'$, o coeficiente de B' deve anular-se. Portanto, devemos ter

$$2(C - A) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) = 0$$

.

Por meio das fórmulas trigonométricas do ângulo duplo, esta última equação pode ser escrita da forma:

$$(C - A) \operatorname{sen}^2 \theta + B \cos^2 \theta = 0 \quad (4)$$

Se $A \neq C$, pela Equação (4) temos $\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{B}{A-C}$. Se $A = C$, então pela Equação (4) temos: $B \cos^2 \theta = 0$. Como $B \neq 0$, por hipótese, segue que

$$\cos^2 \theta = 0 \quad (5)$$

O ângulo de rotação θ é restringido ao intervalo $0^\circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, de maneira que o intervalo de variação para 2θ é $0^\circ \leq 2\theta \leq \pi$. Portanto, da equação (5), temos que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Lehmann (1966) ainda traz a seguinte definição.

Definição 1: Se um dos coeficientes A' ou C' é igual a zero, a equação (4) representa uma parábola ou um dos casos degenerados. Se A' e C' têm o mesmo sinal, a equação (4) representa uma elipse ou um dos casos degenerados. Se A' e C' têm sinais contrários, a equação (4) representa uma hipérbole ou um dos casos degenerados.

Segundo Ayres Júnior (1973), a equação (2), já transformada é chamada de forma semi-reduzida da equação do 2º grau.

Lehmann (1966) traz o seguinte resultado:

Teorema 2: A equação geral de segundo grau representa uma cônica do tipo parábola, elipse ou hipérbole segundo o indicador $I = B^2 - 4AC$. Se $I = 0$ é uma parábola, se $I < 0$ é uma elipse e se $I > 0$ é uma hipérbole.

5.4 Rotação de eixos usando a álgebra linear

Para Callioli et al. (1990), as equações canônicas das cônicas têm um aspecto comum para a álgebra, elas são equações de segundo grau em \mathbb{R}^2 . Mas para que as equações estejam na sua forma canônica é preciso trabalhar com sistemas de eixos ortogonais numa posição favorável em relação às curvas.

Definição: Uma cônica em \mathbb{R}^2 é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde A ou B ou $C \neq 0$. Observe que a equação da cônica envolve uma forma quadrática, $Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, uma forma linear, $L(x,y) = Dx + Ey$, e um termo constante F . Isto é, a equação que define a cônica é: $Q(x,y) + L(x,y) + F = 0$ (BOLDRINI et al., 1980, p. 306).

O Instituto Gauss de Matemática (2013) apresenta outra definição.

Definição: Se A uma matriz $m \times n$, denominamos de autovalor da matriz A o número real λ , tal que $A.V = \lambda V$, em que $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$ é um vetor não nulo. O vetor V é chamado de autovetor de A .

De acordo com Callioli et al. (1990), devemos analisar a equação geral quadrática em duas variáveis

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \quad (1)$$

e verificar se são cônicas ou não. Fazendo essa análise, verificaremos que sempre serão cônicas ou seus casos degenerados, e as classificaremos de acordo com seus coeficientes. Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$f(x,y) = 0$ será escrita na forma

$$X^t . A . X + 2[a_1 a_2]X + a = 0 \quad (2)$$

Como A é simétrica e toda matriz simétrica é diagonalizável, é possível obter uma matriz ortogonal P de forma que $P^t \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, onde λ_1 e λ_2 são autovalores de A .

Ainda segundo Callioli et al. (1990) considerando uma mudança de base determinada por P , sendo a equação $X = P \cdot Y$, onde $Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ é a matriz do vetor genérico de \mathbb{R}^2 na nova base então a equação (2) ficará da seguinte forma

$$f(x_1, y_1) = Y^t \cdot (P^t \cdot A \cdot P) \cdot Y + 2[a_1 a_2] \cdot P \cdot Y + a$$

$$\begin{aligned} &= [x_1, y_1] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 2[a_1 a_2] \cdot P \cdot Y + a \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2b_1 x_1 + 2b_2 y_1 + a = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Os coeficientes b_1 e b_2 são expressos em função de a_1, a_2 e dos termos de P .

Segundo Waga et al. (2013b), para calcular os autovalores associados a uma matriz devemos calcular as raízes do polinômio característico $\det[A - \lambda I_n] = 0$, onde I_n é a matriz identidade. Os autovetores associados devem ser normalizados.

De acordo com Waga et al. (2013a), o polinômio

$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

com coeficientes reais, chama-se forma quadrática no \mathbb{R}^2 . A matriz simétrica $M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ é a matriz da forma quadrática. Então $Q(x, y)$ pode ser representado da seguinte forma

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= [x \ y] \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x' \ y'] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \end{aligned}$$

em que λ_1 e λ_2 os autovalores da matriz simétrica M .

Para classificar uma cônica segundo Boldriniet al. (1980) dada a sua equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde A ou B ou $C \neq 0$ devemos seguir os seguintes passos:

1º passo: Escrever a equação na sua forma matricial:

$$[x \ y] \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [D \ E] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

2º passo: Diagonalização da forma quadrática para eliminar os termos mistos, encontrando os autovalores e autovetores ortonormais da matriz simétrica M .

3º passo: Devemos obter as novas coordenadas substituindo na equação $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, em que P é a matriz de autovetores de M .

4º passo: Substituímos a equação por suas novas coordenadas obtendo $[x' \ y'] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [D \ E]P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + F = 0$, ou seja, $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + ax' + by' + F = 0$.

5º passo: Eliminação dos termos lineares, agrupando os termos e completando quadrados. Então tem-se três casos:

i) λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$

$$\lambda_1 x'^2 + ax' + \lambda_2 y'^2 + by' + F = 0$$

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + \lambda_2 \left(y' + \frac{b}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{b^2}{4\lambda_2} + F = 0$$

Sendo $x'' = x' + \frac{a}{2\lambda_1}$ e $y'' = y' + \frac{b}{2\lambda_2}$, tem-se então $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f = 0$ onde

$$f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2}.$$

ii) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 x'^2 + ax' + by' + F = 0$$

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + by' + F = 0$$

. Sendo $x'' = x' + \frac{a}{2\lambda_1}$ e $y'' = y'$ tem-se $\lambda_1 x''^2 + by'' + f = 0$, onde $f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1}$.

iii) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ (análogo ao anterior).

Exemplo:

Dada a equação na base canônica de \mathbb{R}^2 : $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0$. Determinar que figura essa cônica representa no plano.

Solução: Começa-se eliminando os termos mistos usando diagonalização da forma quadrática.

1º Passo: Escrevendo a equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [4\sqrt{2} \quad 12\sqrt{2}] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8 = 0$$

2º passo: Calculemos os autovalores e os autovetores ortonormais da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4 = 4\lambda + \lambda^2 = 0$$

Daí tem-se os autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$.

Para $\lambda_1 = 0$, tem-se $\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ resolvendo tem-se $2x + 2y = 0$, donde $x = -y$. Então chega-se ao vetor $v = (-1, 1)$, e o vetor normalizado é $v_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Procedendo da mesma forma para $\lambda_2 = 4$ tem-se $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Sabe-se que

$$Q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy$$

se reduz a $Q(x', y') = 0x'^2 + 4y'^2$.

3º Passo: Determinaremos a relação entre $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ e substituiremos na parte linear da equação dada: $L(x, y) = [4\sqrt{2} \ 12\sqrt{2}] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, mas $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

4º Passo: A equação original se reduz a

$$0x'^2 + 4y'^2 + \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 8 = 0$$

$$4y'^2 + 4\sqrt{2} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \right) + 12\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{20}}y' \right) - 8 = 0$$

$$4y'^2 - 4x' + 4y' + 12x' + 12y' - 8 = 0$$

$$4y'^2 + 8x' + 16y' - 8 = 0$$

$$y'^2 + 2x' + 4y' - 2 = 0$$

Esta equação representa a cônica em relação a um novo sistema de eixos que tem como suporte os vetores v_1 e v_2 .

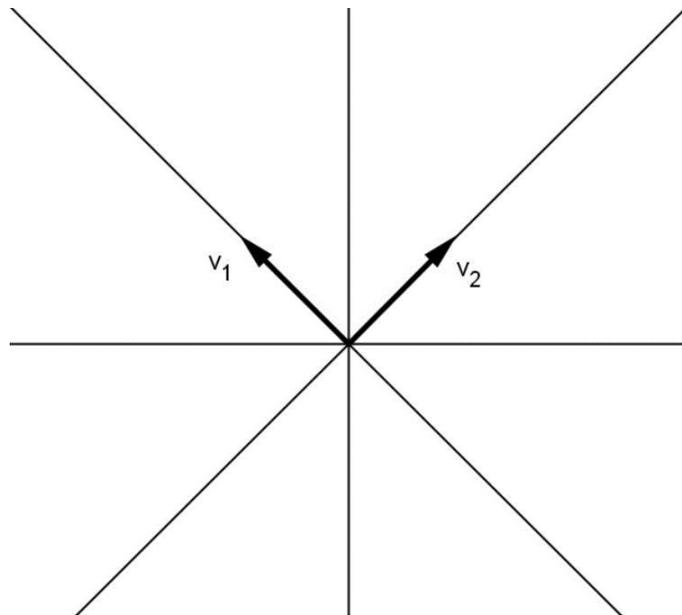


Figura 62: Novo sistema de eixos v_1 e v_2

5º Passo: Agrupa-se os termos para eliminar os termos lineares.

$$(y'^2 + 4y' + 4) - 4 + 2x' - 2 = 0$$

$$(y' + 2)^2 + 2x' - 6 = 0$$

Fazendo $x'' = x'$ e $y'' = y' + 2$ tem-se uma translação de eixos. Então, a equação toma a forma $y''^2 + 2x'' - 6 = 0$ ou $x'' = y''^2 + 3$, que é a equação de uma parábola, cujo esboço se encontra na figura abaixo:

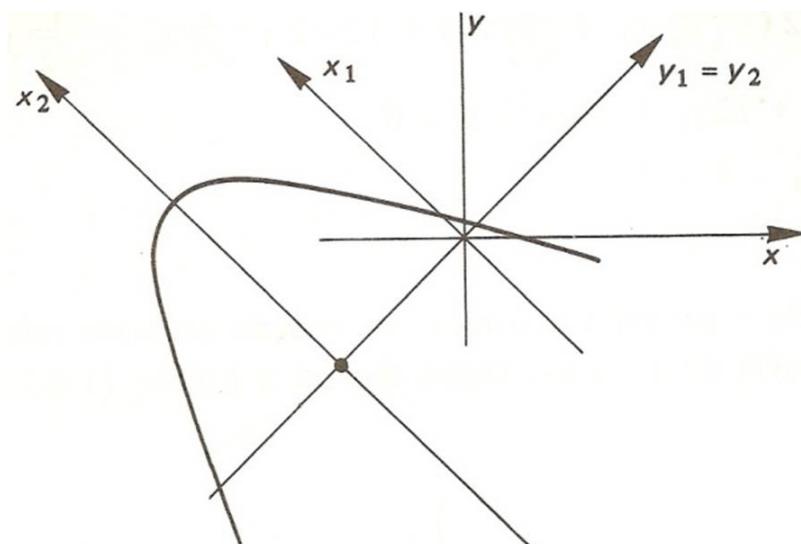


Figura 63: Esboço da elipse com rotação

Ainda para Boldrini et al. (1980) pode-se classificar as cônicas por meio de seus autovalores. Utilizando a equação $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f = 0$ tem-se: se λ_1 e λ_2 , os dois autovalores, forem ambos positivos, ter-se-á para $f < 0$ uma elipse, para $f = 0$ um ponto, e para $f > 0$ o conjunto vazio. Se λ_1 e λ_2 forem negativos tem-se uma elipse se $f > 0$, um ponto se $f = 0$ e o conjunto vazio caso $f < 0$. Se λ_1 e λ_2 tiverem sinais opostos tem-se uma hipérbole se $f \neq 0$, ou um par de retas concorrentes se $f = 0$. No caso da equação $\lambda_2 y''^2 + ax'' + f = 0$ tem-se se $a \neq 0$ uma parábola, se $a = 0$ um par de retas paralelas, uma reta ou o vazio.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos um breve relato histórico, algumas propostas diferenciadas para o trabalho das cônicas, bem como a transformação de coordenadas, que irão ajudar os professores de ensino médio e superior na elaboração de suas aulas, além de um banco de questões.

Elaboramos cinco propostas para o ensino da parábola em sala de aula, a dedução da fórmula e aplicações da parábola. Tem-se também uma proposta para se trabalhar as coordenadas polares no Ensino Médio, levando os alunos a entenderem que existem outros sistemas de coordenadas e não apenas o cartesiano. E, para os professores da graduação, um capítulo de transformações de coordenadas, com translação e rotação de eixos coordenados, equação geral do 2º grau em \mathbb{R}^2 e também rotação de eixos usando a álgebra linear.

O ensino das cônicas no Ensino Médio deverá ser diferenciado para aumentar o interesse dos alunos e levá-los ao entendimento desse assunto. Através desse trabalho foi possível perceber que vários livros didáticos trazem o assunto de forma analítica, somente com a utilização de fórmulas. Os alunos muitas vezes só têm contato com esse conteúdo quando vão para um curso de exatas, no qual é tratado o tema "cônicas", levando-os a uma frustração por não terem os pré-requisitos necessários para este tópico.

Como referência bibliográfica utilizamos alguns livros didáticos, revistas com atividades interessantes e trabalhos publicados por outros alunos que se interessaram pelas cônicas.

Como sugestão para trabalhos futuros, tem-se um estudo sobre quádricas.

REFERÊNCIAS

- ANGLO: Ensino Médio: caderno de exercícios. São Paulo: Anglo, 2002. 172 p.
- ANTON, H. et al. Cálculo, um novo horizonte. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. v. 2, 552 p.
- AYRES JÚNIOR, F. Geometria analítica plana e sólida: resumo da teoria, 155 problemas resolvidos, 203 problemas propostos. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1973. 203 p. (Coleção Schaum, 6).
- BARROSO, J. M. Conexões com a matemática. São Paulo: Moderna, 2010. 160 p.
- BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra linear. 2. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980. 315 p.
- BORDALLO, M. As cônicas na matemática escolar brasileira: história, presente e futuro. 2011. 61 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- BOYER, C. B. História da matemática. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 107 p.
- CALLIOLI, C. A. et al. Álgebra linear e aplicações. 6. ed. São Paulo: Atual, 1990. 285 p.
- CARNEIRO, M. J. D. et al. CBC, Conteúdo Básico Comum. Belo Horizonte: Secretaria do Estado de Educação de Minas Gerais, 2007. 59 p.
- DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010. 134 p.
- FELIX, L. et al. Geometria dinâmica: abordagens interligadas para o estudo das cônicas. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 4., 2008, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

p.3.

GIOVANNI, J. R. et al. Matemática completa. 2.ed. São Paulo: FTD, 2005. 134 p. (Coleção Matemática Completa).

GOULART, M. C. Matemática no Ensino Médio 3^a série. 3.ed. São Paulo: Scipione, 2005. 112 p. (Coleção Matemática no Ensino Médio).

GUIMARÃES, L.C.; BELFORT, E.; BELLEMAIN, F. Geometry: back to the future? In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS, 2., 2002, Creta. Proceedings...Creta: J. Wiley, 2002. 1 CD-ROM.

IEZZI, G. et al. Matemática: ciência e aplicações. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 114 p. (Coleção Matemática no Ensino Médio, 3).

INSTITUTO GAUSS DE MATEMÁTICA. Autovalores e autovetores. Disponível em: <http://www.igm.mat.br/aplicativos/index.php?option=com_content&view=article&id=247%3Aautovalores-eautovetores&catid=41%3Aconteudosal&Itemid=38>. Acesso em: 16 jan. 2013.

KINDLE, J. H. Geometria analítica plana e no espaço: resumo da teoria, 345 problemas resolvidos, 910 problemas propostos. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1976. 118 p. (Coleção Schaum).

LEHMANN, C. H. Geometria analítica. La Habana, 1966. 344 p.

LOPES, J. F. Cônicas e aplicações. 2011. 184 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2011.

MENDES, R. Geometria bom de bilhar. Revista Cálculo, Brasília, n. 12, p. 45-51, 2012.

QUARANTA, F. Tradução comentada da obra “Novos Elementos das Seções Cônicas” (Philippe de La Hire - 1679) e sua relevância para o ensino de matemática. 2008. 310 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

QUARANTA, F. et al. Cônicas: um excelente elo capaz de mostrar as conexões entre a geometria no plano e no espaço. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 2.

RIBEIRO, J. Matemática: ciência, linguagem e tecnologia 3: Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 2010. 273 p.

RODRIGUES FILHO, N. Cônicas e suas aplicações em faróis automotivos. Belo Horizonte: UFMG, 2007. 135 p.

SILVA, C. X. et al. Matemática aula por aula. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. 148 p. (Coleção Matemática Aula Por Aula). SMOLE, K. C. S. et al. Matemática: Ensino Médio, volume 3. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 133 p.

SOUZA, E. W. Cônicas e aplicações. 2008. 39 p. Monografia (Especialização em Matemática, com ênfase em Geometria) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

VENTURI, J.J. Cônicas e quádras. 5. ed. Curitiba: Unificado, 1949. Disponível em: <<http://www.geometriaanalitica.com.br>>. Acesso em: 7 dez. 2012.

WAGA, C. et al. Álgebra linear II. Disponível em: <<http://www.ime.uerj.br/algin/ApostilaAlgLinII.pdf>>. Acesso em: 16 jan. 2013a.

WAGA, C. ET. AL.. Álgebra linear III. Disponível em: <http://www.ime.uerj.br/algin/ApostilaAlgLinIII/Capitulo6_Aut08resumido.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2013b.

WAGNER, E. Por que as antenas são parabólicas. Revista do Professor de Matemática, Rio Grande, n. 33, p. 10-13, 1997. YOUSSEF, A. N. et al. Matemática: Ensino Médio, volume único. São Paulo: Scipione, 2005. 345 p.

ANEXO**BANCO DE QUESTÕES**

O banco de questões é composto por atividades que poderão auxiliar os professores na elaboração de suas aulas.

(1) (SMOLE et al., 2010) Quais são os pontos comuns à reta $x + y - 3 = 0$ e a parábola $x^2 = 4y$? Resolva o problema de duas maneiras diferentes.

(2) (SMOLE et al., 2010) Sejam a reta $s : y = mx + 2$ e a parábola $\lambda : y^2 = 4x$. que valor m deve assumir para que:

- (a) s seja secante a λ ?
- (b) s seja tangente a λ ?
- (c) s não intercepte λ ?
- (d) s seja secante a λ em um único ponto?

(3) (SMOLE et al., 2010) Esboce o gráfico de $y^2 = 2x$ e então responda às questões.

- (a) Essa equação representa uma parábola? Por quê?
- (b) Essa equação representa uma função? Por quê?
- (c) Como deveria ser a parábola para que sua equação representasse uma função?

(4) (SMOLE et al., 2010) Um arquiteto precisa fazer em uma construção um arco parabólico que tenha $3m$ de altura e $4m$ de largura na base. O vértice da parábola está no topo do arco.

- (a) A que altura, sobre a base, o arco terá $2m$ de largura?
- (b) Faça um desenho desse arco.

(5) (SMOLE et al., 2010) (UFC-CE - 2007) Encontre as equações das retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passam pelo ponto $(0, -1)$.

(6) (GIOVANNI et al., 2005) (UFMA) Os cabos da ponte pênsil, indicada na figura abaixo, tomam a forma de arcos de parábola do segundo grau. As torres de suporte têm 24 m de altura e há um intervalo entre elas de 200m. o ponto mais baixo de cada cabo fica a 4m do leito da estrada. Considerando o plano horizontal do tabuleiro da ponte contendo o eixo dos x e o eixo de simetria da parábola como sendo o eixo y , perpendicular a x , determine o comprimento do elemento de sustentação BA , que liga verticalmente o cabo parabólico ao tabuleiro da ponte, situado a 50m do eixo y .

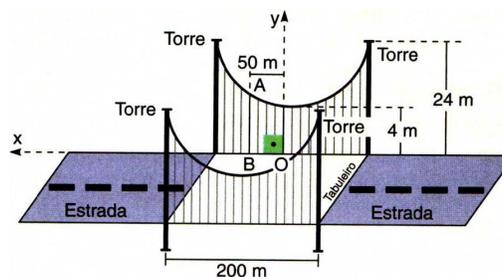


Figura 1: Ponte pênsil

(7) (GIOVANNI et al., 2005) (VUNESP-SP) O gráfico representa uma função f que descreve, aproximadamente, o movimento (em função do tempo t em segundos) por um certo período, de um golfinho que salta e retorna á água, tendo o eixo das abscissas coincidir com a superfície da água.

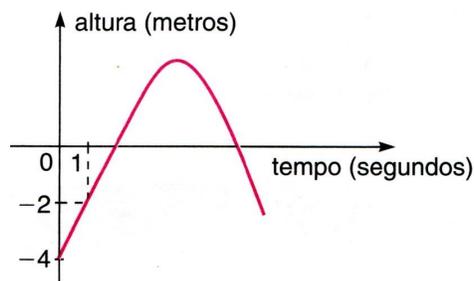


Figura 2: Gráfico da função

(a) Sabendo que a parte negativa do gráfico de f é constituída por segmentos de retas, determine a expressão matemática de f nos instantes anteriores à saída do golfinho da água?

(b) A parte positiva do gráfico de f é formada por parte de uma parábola, dada por $f(t) = -t^2 + 6t - 9$. Determine quantos segundos o golfinho ficou fora da água e a altura máxima, em metros, atingida no salto.

(8) (GIOVANNI et al., 2005) (UFMG) Considere a parábola de equação $y = 8x - 2x^2$ e a reta que contém os pontos $(4, 0)$ e $(0, 8)$. Sejam A e B os pontos da intersecção entre a reta e a parábola. Determine a equação da mediatriz do segmento AB .

(9) (GIOVANNI et al., 2005) A trajetória de um corpo lançado horizontalmente com velocidade $20m/s$, de um local situado a uma altura y_0 , em relação ao solo, é parabólica de equação $x^2 = -80(y - y_0)$. (Aceleração da gravidade: $10m/s^2$.)

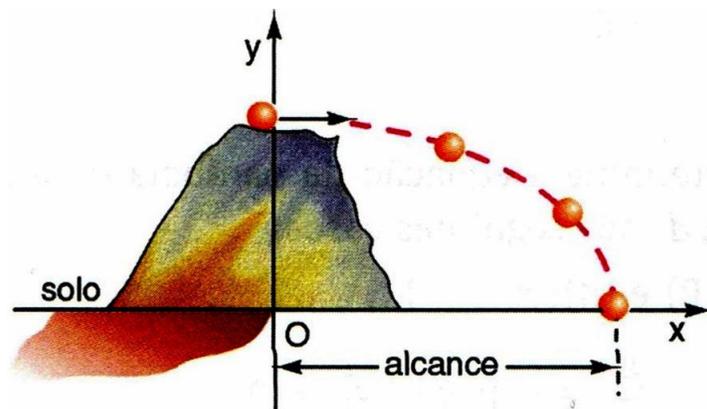


Figura 3: Trajetória de um corpo

Determine o alcance horizontal de um corpo lançado de uma altura $11,25m$

(10) (GIOVANNI et al., 2005) (UFMG) Observe a figura.

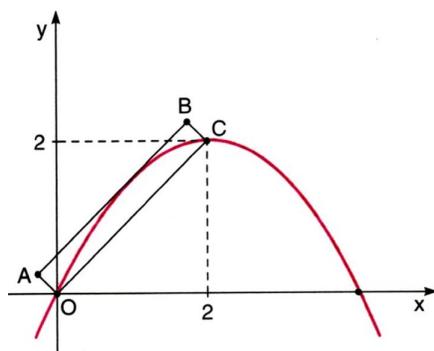


Figura 4: Parábola de vértice C

Nessa figura está representada uma parábola de vértice C.

(a) Determine a equação dessa parábola.

(b) Se o segmento AB é tangente à parábola e $OABC$ é um retângulo, calcule a área do mesmo.

(11) (GIOVANNI et al., 2005) (UERJ) A superfície de uma antena parabólica pode ser gerada pela rotação completa de uma parábola ao redor do seu eixo. A intersecção dessa superfície com qualquer plano perpendicular ao eixo é um círculo. Observe a figura a seguir.

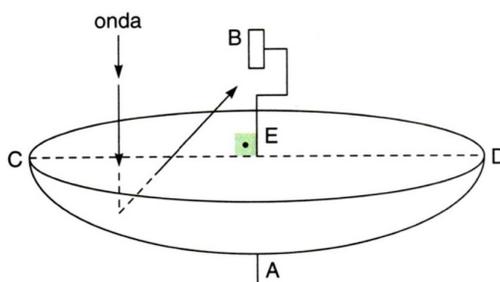


Figura 5: Superfície de uma antena parabólica

Considere um círculo de centro (E) e diâmetro (CD) de 4 metros de comprimento, cuja medida da distância do centro (E) ao vértice (A) do parabolóide é 0,5 metro.

(a) Escreva a equação cartesiana da parábola de foco (B) contida no plano CAD, sendo o vértice (A) a origem do sistema cartesiano e o eixo das abscissas paralelo ao diâmetro CD, como mostra a figura abaixo:

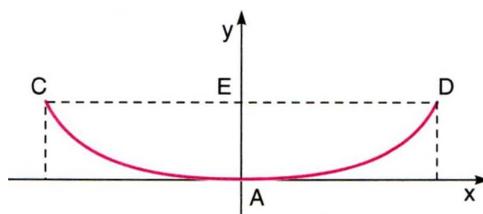


Figura 6: Esboço da parábola com concavidade voltada para cima

(b) calcule a distância do vértice A ao foco B.

(12) (GIOVANNI et al., 2005) (Fuvest-SP) Determine a equação de uma das retas que passa pelo ponto $(0, 0)$ e é tangente à parábola de equação $y = x^2 + 4$.

(13) (GIOVANNI et al., 2005) Identifique a cônica representada pela equação $x^2 - 6x - 4y + 5 = 0$.

(14) (GIOVANNI et al., 2005) (UFAL) Determine a equação da reta paralela ao eixo x e que passa pelo vértice da parábola de equação $x^2 - 10x - 4y + 29 = 0$.

(15) (GIOVANNI et al., 2005) (Cefet-RJ) Observe a figura abaixo, onde estão representadas uma reta e a parábola $y = x^2 - 1$. Pergunta-se:

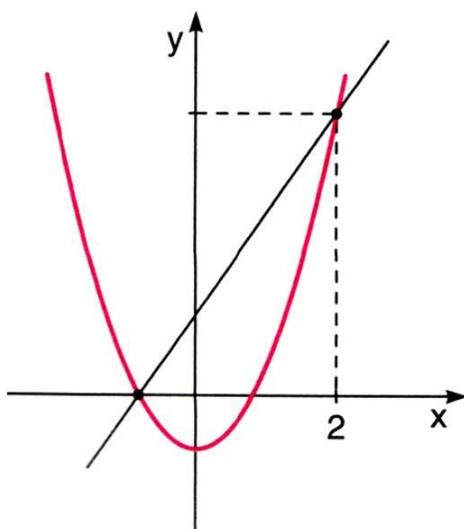


Figura 7: Esboço de uma parábola e uma reta

- (a) Quais os pontos de intersecção da reta com a parábola?
 (b) Qual a equação da reta?

(16) (GIOVANNI et al., 2005) (EFEI-MG) Determine a área do triângulo cujos vértices estão situados sobre o vértice da parábola $y = -x^2 + 8x - 15$ e sobre a sua intersecção com os eixos das abscissas.

(17) (GIOVANNI et al., 2005) (UFRJ) Seja $y = ax^2 + bx + c$ e $P = (x_0, y_0)$ um ponto da parábola. Pode-se traçar a reta tangente á parábola que passa por P da seguinte forma:

Considere os pontos P_1 e P_2 da parábola que têm abscissas $(x_0 - 1)$ e $(x_0 + 1)$, respectivamente. A tangente t procurada é a reta paralela à reta r que passa por P_1 e P_2 como se vê na figura abaixo.

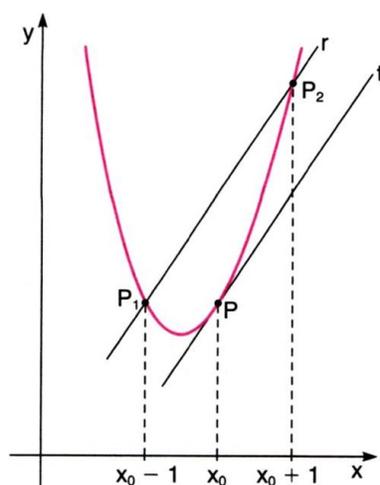


Figura 8: Pontos P_1 e P_2 na parábola

Usando esta propriedade, determine a reta tangente a $y = x^2$ que passa pelo ponto $(1, 1)$.

(18) (GIOVANNI et al., 2005) (UFPB) Estão representadas, na figura abaixo, as curvas $y = x^2$ e $y = 3x$, bem como as regiões $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq 3x\}$ e $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq x^2\}$.

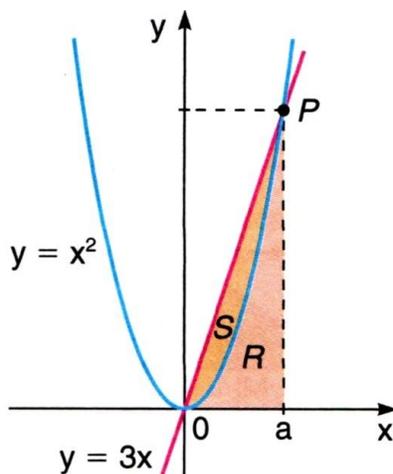


Figura 9: Esboço da parábola com regiões marcadas

- (a) Determine as coordenadas do ponto P.
 (b) Sabendo- se que a região R mede nove unidades de área, calcule quantas unidades de área mede a região S .

(19) (RIBEIRO, 2010) Obtenha as coordenadas do vértice da parábola de equação $y^2 + 14y - 4x + 33 = 0$.

(20) (RIBEIRO, 2010) Dada a parábola de equação $y^2 = -3x$, determine o foco e a equação de sua reta diretriz.

(21) (RIBEIRO, 2010) Determine as coordenadas do foco, as coordenadas do vértice e a equação da reta diretriz da parábola de equação $x^2 - 4x + 8y + 28 = 0$.

(22) (RIBEIRO, 2010) Determine a equação da parábola representada no gráfico abaixo:

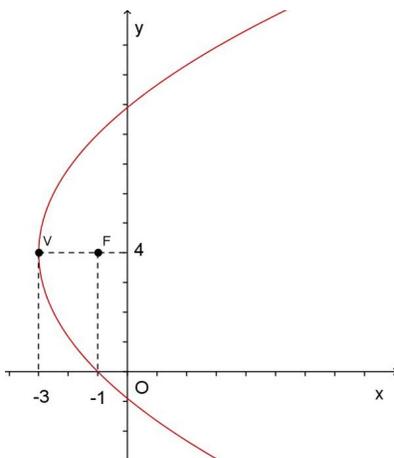


Figura 10: Esboço da parábola com vértice V e foco F

(23) (RIBEIRO, 2010) Obtenha a equação da parábola de foco $F(-2, 3)$ e diretriz $r : x = 2$

(24) (RIBEIRO, 2010) Qual a equação da parábola de vértice $V(1, -12)$ que passa pelo ponto $P(7, -5)$ e tem eixo de simetria paralelo ao eixo y ?

(25) (RIBEIRO, 2010) Determine a equação da parábola na qual a distância do foco à reta diretriz $r : x = 5$ é 4, o vértice possui ordenada -2 e a parábola corta o eixo y .

(26) (RIBEIRO, 2010) Determine a equação da parábola representada no gráfico a seguir:

(a)

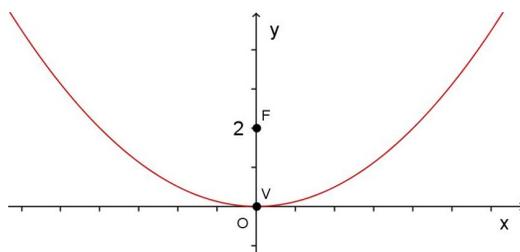


Figura 11: Esboço da parábola com concavidade voltada para cima

(b)

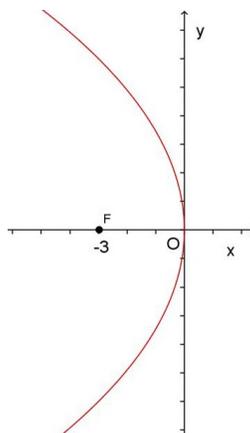


Figura 12: Esboço da parábola com concavidade voltada para esquerda

(c)

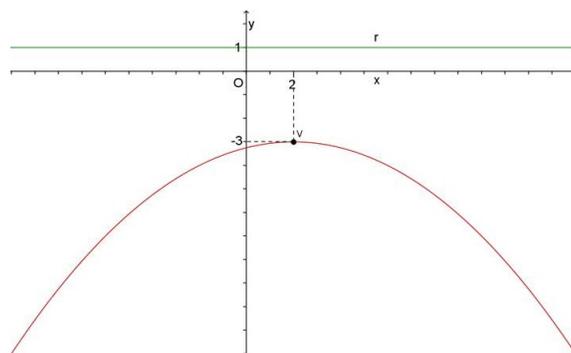


Figura 13: Esboço da parábola com concavidade voltada para baixo

(d)

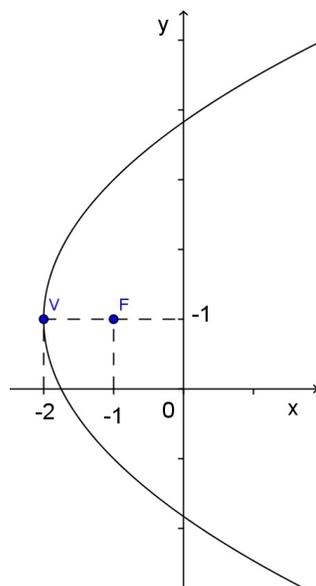


Figura 14: Esboço da parábola com concavidade voltada para direita

(27) (RIBEIRO, 2010) Para cada uma das equações, esboce o gráfico e determine o vértice e o foco da parábola e a equação da reta diretriz.

(a) $x^2 = 3y$

(b) $x = -2y^2$

(c) $y^2 = -12x$

(d) $y = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{18}x - 1$

(28) (RIBEIRO, 2010) Qual a equação da parábola que passa pelos pontos $A(-7, 2)$, $B(1, 2)$ e $C(3, 7)$ e tem eixo de simetria perpendicular ao eixo x ?

(29) (RIBEIRO, 2010) (UEL -PR) O vértice, o foco e a reta diretriz da parábola de equação $y = x^2$ são dados por:

(a) Vértice: $(0, 0)$; foco: $(0, \frac{1}{4})$; reta diretriz $y = -\frac{1}{4}$.

(b) vértice: $(0, 0)$; foco: $(0, \frac{1}{2})$; diretriz da reta $y = \frac{1}{2}$.

(c) vértice: $(0, 0)$; foco: $(0, 1)$; reta diretriz $y = -1$

(d) vértice: $(0, 0)$; foco: $(0, -1)$; reta diretriz $y = 1$.

(e) vértice: $(0, 0)$; foco: $(0, 2)$; reta diretriz $y = -2$

(30) (RIBEIRO, 2010) Os gráficos da parábola $\lambda_1 : y^2 = 3x$ e $\lambda_2 : x^2 = 3y$ são coincidentes? Justifique sua resposta construindo os gráficos dessas parábolas em um mesmo plano cartesiano.

(31) (RIBEIRO, 2010) Determine o foco e a equação da diretriz da parábola que passa pelos pontos $P_1(-2, -6)$, $P_2(2, 6)$ e $P_3(0, 3)$ e tem eixo de simetria paralelo ao eixo y .

(32) (RIBEIRO, 2010) Determine as coordenadas dos pontos em que cada uma das parábolas correspondentes às equações a seguir cruza os eixos x e y .

(a) $x^2 - 8x - 4y + 12 = 0$

(b) $y = -x^2 - x + 2$

(33) (RIBEIRO, 2010)(PUC-MG) Um carrinho se move sobre um arco de parábola de uma montanha-russa, de modo que sua altura em relação ao solo,

em metros, é dada em função do tempo t , medido em segundos, pela equação $h(t) = 2t^2 - 8t + 11$. Então o menor valor de h , em metros, é igual a;

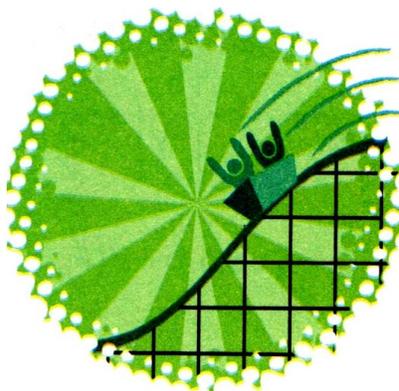


Figura 15: Carrinho movendo sobre um arco de parábola

- (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

(34) (RIBEIRO, 2010) (Unicap-PE) No plano cartesiano xy a parábola $y = x^2 - 3$ e a reta $y = 6x - k$ têm um e somente um ponto de interseção. Qual é o valor de k ?

(35) (RIBEIRO, 2010) Calcule a área do quadrilátero determinado pelos vértices e pelos pontos de interseção das parábolas $\lambda_1 : y^2 - 2x - 6y + 13 = 0$ e $\lambda_2 : y^2 - 6y + 2x = 38$

(36) (RIBEIRO, 2010) (UECE-CE) O valor de m para qual o gráfico da função linear $g(x) = mx$ contém o vértice da parábola que configura o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 6x - 7$ é:

- (a) $-\frac{7}{6}$ (b) $-\frac{13}{5}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{16}{3}$

(37) (RIBEIRO, 2010) (Unicamp- SP) Sejam A e B os pontos de interseção da parábola $y = x^2$ com a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.

(a) Quais as coordenadas do ponto A e B ?

(b) Se P é um ponto da circunferência diferente de A e de B , calcule as medidas possíveis para os ângulos APB .

(38) (RIBEIRO, 2010) Sejam as parábolas da equação $y^2 - 6y - 2x + 1 = 0$ e $y^2 - 2y + 4x - 7 = 0$. Calcule a área do quadrilátero determinados pelos pontos em que essas parábolas se cruzam e pelos vértices de cada uma delas.

(39) (RIBEIRO, 2010) (Unifesp - SP) Na figura, estão representados, no plano cartesiano xy , a reta de equação $y = 2kx$, $0 \leq k \leq \frac{3}{2}$, a parábola de equação $y = -x^2 + 3x$ e os pontos O , P e Q de interseções da parábola com o eixo Ox e da reta com a parábola.

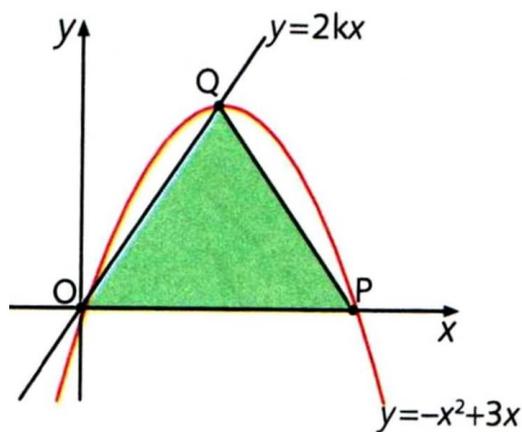


Figura 16: Esboço da parábola $y = -x^2 + 3x$ e reta $y = 2kx$

Nestas condições, o valor de k para que a área do triângulo OPQ seja maior possível é:

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{9}{8}$ (d) $\frac{11}{8}$ (e) $\frac{3}{2}$

(40) (DANTE, 2010) (UFAM) Seja uma parábola com foco $F(0, -\frac{7}{2})$ e vértice $V(0, 0)$, então a equação da parábola é igual a:

- (a) $y = 14x^2$
- (b) $y = -14x^2$
- (c) $y = -\frac{x^2}{14}$
- (d) $y = \frac{x^2}{14}$
- (e) $y = x^2 - 14$

(41) (DANTE, 2010) (UFAM) Dado o foco $F(2, 4)$ e a diretriz $r: y - 2 = 0$, então, uma equação da parábola é dada por:

- (a) $x^2 + 4x - 4y + 16 = 0$
- (b) $x^2 - 4x + 4y + 16 = 0$
- (c) $x^2 - 4x - 4y - 16 = 0$
- (d) $x^2 + 4x + 4y + 16 = 0$
- (e) $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$

(42) (DANTE, 2010) (UFO - GO) A região do plano cartesiano, destacada na figura abaixo, é determinada por uma parábola, com vértice na origem, e duas retas.

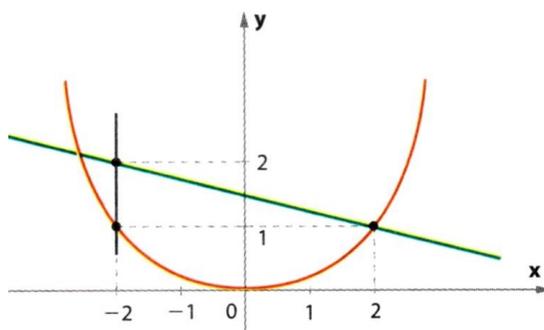


Figura 17: Esboço da parábola com duas retas

Esta região pode ser escrita como o conjunto dos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, satisfazendo:

- (a) $-2 \leq x \leq 2$ e $\frac{x^2}{4} \leq y \leq -\frac{x}{4} + \frac{3}{2}$
 (b) $-2 \leq x \leq 2$ e $-\frac{x^2}{4} \leq y \leq \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$
 (c) $-2 \leq x \leq 2$ e $4x^2 \leq y \leq -\frac{x}{4} + \frac{3}{2}$
 (d) $-2 \leq x \leq 2$ e $4x^2 \leq y \leq -\frac{x}{4} + \frac{3}{2}$
 (e) $-2 \leq x \leq 2$ e $\frac{x^2}{4} \leq y \leq \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$

(43) (DANTE, 2010) (VUNESP) O conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano, com $y \neq 0$, para os quais x e y satisfazem a equação $\left(\frac{y}{x^2 + 1}\right) = 0$ é uma:

- (a) família de parábolas
 (b) família de circunferências centradas na origem
 (c) família de retas
 (d) parábola passando pelo ponto $Q(0, 1)$
 (e) circunferência centrada na origem

(44) (BARROSO, 2010) A trajetória do pulo de um grilo obedece à parábola do gráfico a seguir. Determine no caderno a equação dessa parábola.

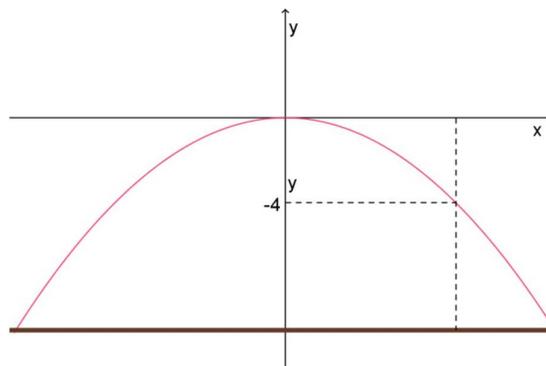


Figura 18: Trajetória do pulo do grilo

(45) (SILVA et al., 2005) (MACK - SP) Das equações abaixo, a que representa uma parábola de eixo coincidente com a reta $y = 0$ é:

- (a) $y - x^2 + 1$
- (b) $x = y^2 + 1$
- (c) $y - x^2 = 0$
- (d) $x^2 - y^2 = 1$
- (e) $x = \frac{1}{y} + 3$

(46) (SILVA et al., 2005) (VUNESP) A distância do vértice da parábola $y = (x - 2) \cdot (x - 6)$ à reta $y = \frac{4}{3}x + 5$ é:

- (a) $\frac{72}{25}$
- (b) $\frac{29}{25}$
- (c) 43
- (d) $\frac{43}{25}$
- (e) $\frac{43}{5}$

(47) (SILVA et al., 2005) (FUVEST -SP) Para que a parábola $y = 2x^2 + mx + 5$ não intercepte a reta $y = 3$, deve-se ter:

- (a) $-4 < m < 4$
- (b) $m < -3$ ou $m > 4$
- (c) $m > 5$ ou $m < -5$
- (d) $m = -5$ ou $m = 5$
- (e) $m \neq 0$

(48) (ANGLO..., 2002) (FEI - SP) A equação da parábola de foco no ponto $(1, 2)$ e reta diretriz $y = 4$ é:

- (a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
- (b) $y^2 = 2x$
- (c) $x^2 + y^2 = 1$
- (d) $x^2 - 2x + 4y - 11 = 0$
- (e) $x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$

(49) (IEZZI et al., 2010) Qual é a equação do conjunto dos pontos $P(x,y)$ que são equidistantes da reta $d : y = 3$ e do ponto $F(-2, -3)$?

(50) (IEZZI et al., 2010) Ache a distância do ponto $P(0, -4)$ à reta determinada pelos pontos de interseção das curvas $x^2 + y^2 = 2$ e $y = x^2$.

(51) (GOULART, 2005) (UFAL - AL) A equação da reta paralela ao eixo x e que passa pelo vértice da parábola de equação $y = 3x^2 - x + 1$ é:

(a) $x = \frac{1}{6}$ (b) $y = \frac{1}{6}$ (c) $y = \frac{11}{12}$ (d) $y = 6x - 1$ (e) $y = \frac{1}{6} - 3$

(52) (GOULART, 2005)(FMU Taubaté - SP) A relação $3x^2 + y - 2x - 1 = 0$ representa:

- (a) uma circunferência
- (b) uma parábola
- (c) uma reta
- (d) uma hipérbole
- (e) uma elipse

(53) (GOULART, 2005)(FATEC - SP) Na figura abaixo, a região hachurada, limitada pela reta r e pela parábola P , representa o conjunto dos pares (x,y) do plano tais que:

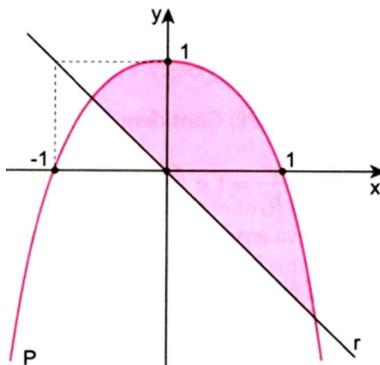


Figura 19: Região hachurada limitada pela reta r e pela parábola

- (a) $y \geq -x$ e $y \leq 1 - x^2$
 (b) $y \leq -x$ e $y \geq 1 - x^2$
 (c) $y \geq x$ e $y \leq 1 - x^2$
 (d) $y \leq x$ e $y \geq x^2 - 1$
 (e) $y \geq -x$ e $y \leq x^2 - 1$

(54) (GOULART, 2005) (CEFET - PA) A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a > 0$, se anula em $x = -1$ e em $x = 1$. Assinale a opção que corresponde ao gráfico que melhor representa f .

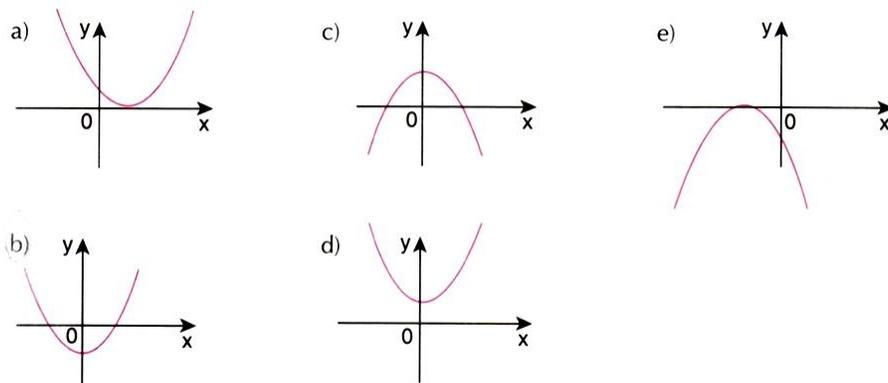


Figura 20: Gráficos de funções quadráticas

(55) (GOULART, 2005) (CEFET - PA) A trajetória de um projétil é determinada pela equação $x(t) = 100t - 5t^2$, em que o tempo t é medido em segundos e a distância do projétil ao solo, no instante t , $x(t)$, é medida em metros. O projétil estará a 420 metros do solo aos:

- I. 6 segundos
 II. 10 segundos
 III. 14 segundos

Assinale a opção correta.

- (a) Apenas o item I está certo.

- (b) Apenas o item II está certo.
- (c) Apenas os itens I e III estão certos.
- (d) Apenas os itens II e III estão certos.
- (e) Todos os itens estão certos.

(56) (GOULART, 2005) (ENEM - SP) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

$R(x) = k.x.(P - x)$, onde k é uma constante positiva característica do boato.

O gráfico cartesiano que melhor representa a função $R(x)$, para x real, é:

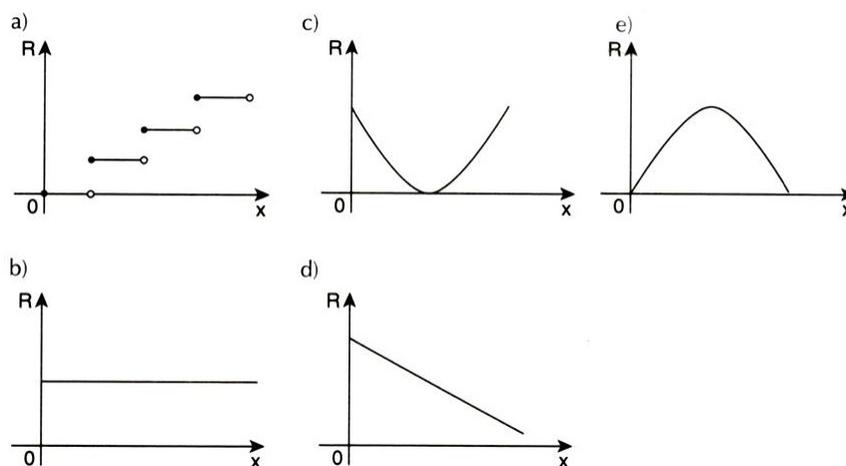


Figura 21: Gráficos de funções

(57) (GOULART, 2005) (ESPCEX - RJ) Na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, definida em \mathbb{R} , os números reais e positivos a , b e c são, nesta ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica. A melhor representação gráfica de $f(x)$ é:

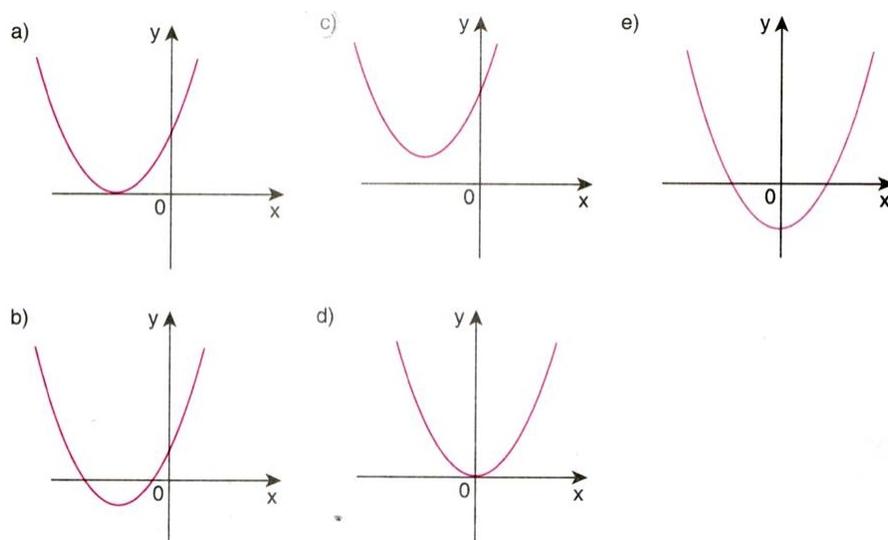


Figura 22: Gráficos de funções quadráticas

(58) (LEHMANN, 1966) Encontrar as equações transformadas ao girar os eixos coordenados pelo ângulo de 45° na equação $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$.

(59) (LEHMANN, 1966) Em cada uma das alternativas abaixo, transforme por uma rotação dos eixos coordenados a equação dada em outra em que não apareça o termo misto.

(a) $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x = 1$

(b) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$.

(60) (LEHMANN, 1966) Determinar a natureza da cônica que representa a equação $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = 0$, e reduzir a equação na sua forma canônica por transformação de coordenadas. Traçar o lugar geométrico e todos os sistemas de eixos coordenados:

(61) (LEHMANN, 1966) Em um sistema polar traçar os seguintes pontos:

$P(1, 135^\circ)$, $Q(-2, \frac{\pi}{3})$, $R(3, 75^\circ)$, $S(-4, \frac{2\pi}{3})$, $T(5, \frac{5\pi}{4})$, $U(-2, 210^\circ)$, $V(-3, \frac{5\pi}{6})$,
 $X(3\sqrt{2}, 135^\circ)$

(62) (LEHMANN, 1966) Construa o triângulo cujos vértices são:

$P(5, 60^\circ)$, $Q(-2, \frac{7\pi}{4})$, $R(-4, 150^\circ)$

(63) (LEHMANN, 1966) Passar a equações cartesianas dadas para a sua forma polar.

(a) $x^2 + y^2 = 4$

(b) $x^2 - 4y - 4 = 0$

(64) (LEHMANN, 1966) Em cada um dos exercícios passar a equação polar para a forma cartesiana:

(a) $r - r\cos\theta = 4$

(b) $r = 2\sec^2(\frac{\theta}{2})$

(65) (KINDLE, 1976) escrever a seguinte equação em forma cartesiana:

$$r = \frac{4}{1 - \cos\theta} \text{ ou } r(1 - \cos\theta) = 4.$$

(66) Trace a cônica $r = \frac{3}{2 - 2\sin\theta}$

RESPOSTAS

Questão 1: R.: $P(-6, 9)$ e $Q(2, 1)$

Questão 2:

- (a) R.: $m < \frac{1}{2}$
 (b) R.: $m = \frac{1}{2}$
 (c) R.: $m > \frac{1}{2}$
 (d) $M = 0$

Questão 3:

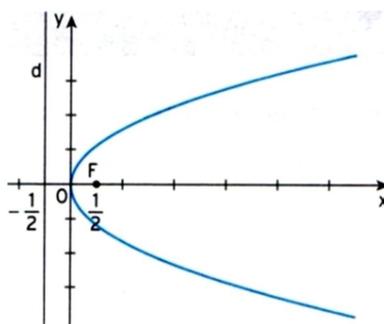


Figura 1: Gráficos de funções quadráticas

- (a) Sim, pois os pontos de forma $\left(\frac{y^2}{2}, y\right)$; $y \in \mathbb{R}$ equidistam de $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
 e $d : x = \frac{1}{2}$
 (b) R.: Não, pois para cada valor de x correspondem dois valores de y .
 (c) R.: $(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$

Questão 4: R.: $2, 25m$

Questão 5: R.: $m = 2 \rightarrow y = 2x - 1$ e $m = -2 \rightarrow y = -2x - 1$

Questão 6: R.: $9m$

Questão 7: R.: (a) $f(t) = 2t - 4$; $2s$. (b) $4s$; $3m$

Questão 8: R.: $2x - 4y + 7 = 0$

Questão 9: R. $30m$

Questão 10: R. (a) $(x - 2)^2 = -2(y - 2)$ (b) 1 u.a.

Questão 11: R. $y = \frac{1}{8}x^2$

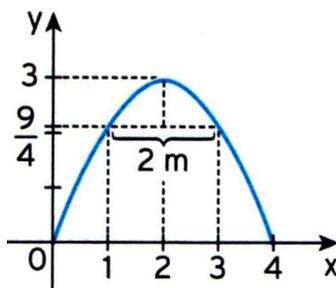


Figura 2: Gráficos de funções quadráticas

Questão 12: R. $y = 4x$ ou $y = -4x$

Questão 13: R. É uma parábola de equação $(x - 3)^2 = 4(y + 1)$, $V(3, -1)$, $F(3, 0)$ e diretriz $y = -2$

Questão 14: R. $y = 1$

Questão 15: (a) R. $M(-1, 0)$ e $P(2, 3)$ (b) R. $x - y + 1 = 0$

Questão 16: R. 1 u.a.

Questão 17: R. $y = 2x - 1$

Questão 18: (a) R. $O(0, 0)$; $P(3, 9)$ (b) R. $S = \frac{9}{2}$

Questão 19: R. $V(-4, -7)$

Questão 20: R. $F\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ e a equação da reta diretriz é $x = \frac{3}{4}$

Questão 21: R. $F(2, -5)$, $V(2, -3)$ e equação da reta diretriz $y = -1$

Questão 22: R. $(y - 4)^2 = 8(x + 3)$

Questão 23: R. $(y - 3)^2 = -8x$

Questão 24: R. $(x - 1)^2 = \frac{36}{7}(y + 12)$

Questão 25: R. $(y + 2)^2 = -8(x - 3)$

Questão 26:

(a) R. $x^2 = 8y$

(b) R. $y^2 = -12x$

(c) R. $(x - 2)^2 = 16(y + 3)$

(d) R. $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$

Questão 27: R. (a) $V(0, 0)$; $F(0, \frac{3}{4})$; $y + \frac{3}{4} = 0$ (b) $V(0, 0)$; $F(\frac{-1}{8}, 0)$; $y = \frac{-1}{8} = 0$

(c) $V(0, 0)$; $F(-3, 0)$; $x - 3 = 0$ (d) R. $V(-1, \frac{-17}{16})$; $F(-1, \frac{47}{16})$; $y = \frac{-81}{16}$

Questão 28: R. $(x + 3)^2 = 4(y + 2)$

Questão 29: R. letra a

Questão 30: R. Não

Questão 31: R. $F\left(2, \frac{17}{3}\right); y = \frac{19}{3}$

Questão 32: R. (a) eixo x : (0,6) e (2,0); eixo y : (0,3) (b) eixo x : (-3,0) e (2,0); eixo y : (0,2)

Questão 33: R. letra b

Questão 34: R. $k = 12$

Questão 35: R. 8 u. a.

Questão 36: R. letra d

Questão 37: R. (a) $A(1,1)$ e $B(-1,1)$ (b) 135° ou 45°

Questão 38: R. $\frac{112}{9}$ u.a.

Questão 39: R. letra b

Questão 40: R. letra c

Questão 41: R. letra e

Questão 42: R. letra a

Questão 43: R. letra a

Questão 44: R. $x^2 = -16y$

Questão 45: R. letra b

Questão 46: R. letra e

Questão 47: R. letra a

Questão 48: R. letra d

Questão 49: R. $(x+2)^2 = -12y$

Questão 50: R. $5u$

Questão 51: R. letra c

Questão 52: R. letra b

Questão 53: R. letra a

Questão 54: R. letra b

Questão 55: R. letra c

Questão 56: R. letra e

Questão 57: R. letra c

Questão 58: R. $4y'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 0$

Questão 59: R. (a) $5x'^2 + 2x' - y' - 1 = 0$

Questão 60: R. $y'^2 - 4x'' = 0$

Questão 63: R. a) $r = 2$ b) $r = \frac{2}{1 - \text{sen}\theta}$

Questão 64: R. a) $y^2 - 8x - 16 = 0$ b) $y^2 + 8x - 16 = 0$

Questão 65: R. $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 4$ ou $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 4$

Questão 66: R.: $4x^2 = 12y + 9$