

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Augusto de Oliveira Corrêa

*Geometria Fractal no Ensino Médio*

Macapá

2014

Augusto de Oliveira Corrêa

*Geometria Fractal no Ensino Médio*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional, PROF-MAT - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Erasmo Senger**

Macapá

2014

Corrêa, Augusto

Geometria Fractal no Ensino Médio / Augusto Corrêa - 2014

38.p

1.Geometria 2. recorrência.. I.Título.

CDU 536.21

Augusto de Oliveira Corrêa

*Geometria Fractal no Ensino Médio*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional, PROF-MAT - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 09 de Abril de 2014.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Erasmio Senger

Doutor em Matemática - UNIFAP

---

João Carlos Alves dos Santos

Mestre em matemática - UFPA

---

José Walter Cardenas Sotil

Doutor em Matemática - UNIFAP

---

Guzman Eulalio Isla Chamilco

Doutor em Matemática - UNIFAP

*Aos meus pais (in memoriam), minha esposa  
e filhos e minha irmã.*

*Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.*

## Resumo

O presente trabalho irá abordar a teoria dos fractais, o que eles representam na natureza, seus criadores e suas aplicações em sala de aula. No decorrer do trabalho procurar-se-á apresentar as diferentes formas de fractais encontradas na natureza; tais criações provieram de grandes matemáticos e também de fractais clássicos os quais originaram novas criações. Veremos que os fractais fazem parte de uma geometria nada convencional, com dimensões não inteiras e sim fracionárias. Veremos, também, que a partir de fractais clássicos podemos construir novos fractais, mantendo-se a semelhança. Com intuito de contribuir com a didática do professor em sala de aula, apresentaremos um estudo detalhado dos fractais. Tal estudo versará sobre cálculo de perímetro, área, volume, logaritmo e sequências numéricas, que fazem parte do conteúdo da componente Matemática estudado no ensino médio.

Palavras - Chave: Fractais, Fractais clássicos, Aplicações em sala de aula.

## Abstract

This study will approach the theory of fractals, what they represent in nature, their creators as well as their applications in the classroom. During the work, the different forms of fractals found in nature will be presented; such creations came from great mathematicians and also classical fractals which originated new creations. We will see that fractals are part of a unconventional geometry with non-entire dimensions, but fractional. We will also see that from classical fractals, one can build new ones, keeping the similarity. In order to contribute to the practice of the teacher in the classroom, we'll present a detailed study of fractals. This study will focus on calculating perimeter, area, volume, logarithm and numerical sequences, which compose the math contents studied in high school.

Keywords: Fractals, Fractals Classic, Classroom Applications.

## Agradecimentos

Primeiramente, à minha família - minha esposa Leila, meus filhos Beatriz e Gustavo -, por estarem sempre ao meu lado nos momentos bons e ruins.

A meus pais (in memoriam) Raimundo Marques Correa e Miraci das Graças de Oliveira Correa por incentivarem minha formação e por não medirem esforços para que eu pudesse chegar aonde hoje estou.

À minha irmã que tanto amo Cristiane Oliveira por sempre me apoiar em todas as decisões, sendo estas boas ou ruins.

À minha querida e paciente prima Michelle Araujo pelo auxílio nas revisões textuais tão bem feitas.

A meu grande amigo Carlos Santana que sempre me apoiou na pesquisa em nos estudos em grupo além de me incentivar a nunca desistir de alcançar esse tão esperado título.

A meu orientador Erasmo que me auxiliou na escolha das leituras e na elaboração dessa dissertação.

E, por fim, aos professores do Departamento de Matemática pelos seus ensinamentos, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional e a todos que contribuíram direta ou indiretamente ao meu sucesso alcançado com a aprovação desta dissertação.

Muito Obrigado.



*“A geometria fractal fará com que você veja as coisas diferentes. Você arrisaca perder a visão infantil de nuvens, florestas, folres, galáxias, folhas, penas, rochas, montanhas, tapetes, tijolos e muito mais. Nunca mais você interpretará estes objetos da mesma forma”*

*Michael Barnsley em seu livro “Fractals Everywhere”*

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Breve histórico dos fractais</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Fractais Clássicos</b>	<b>12</b>
3.1	O Conjunto de Cantor . . . . .	12
3.2	Curva de Peano . . . . .	16
3.3	Curva de Koch . . . . .	18
3.4	Curva de Sierpinski . . . . .	19
3.5	Samambaia de Barnsley . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Criando Fractais</b>	<b>21</b>
4.1	Fractais de Koch . . . . .	21
4.1.1	Floco de Neve de Koch . . . . .	22
4.2	Fractais de Sierpinski . . . . .	23
4.2.1	O Triângulo de Sierpinski . . . . .	23
4.2.2	O Tapete de Sierpinski . . . . .	24
4.3	Fractais de Dürer . . . . .	25
4.3.1	Fractal Pentagonal de Dürer . . . . .	25
4.3.2	Fractal Hexagonal de Dürer . . . . .	25
4.4	Árvore Pitagórica Fundamental . . . . .	26
4.5	Dimensão Fractal . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>32</b>



# 1 Introdução

Este trabalho apresenta-se como ferramenta de apoio ao professor que deseja abordar em suas aulas a geometria presente nos fractais. Apresenta-se, também, com a intenção de facilitar a compreensão das construções geométricas não euclidianas que podem ser tratadas no ensino médio.

O surgimento da denominação do que hoje conhecemos como “fractais” deve-se a Benoit Mandelbrot. Tal denominação pôde ser encontrada a partir de investigações, nas últimas décadas, a respeito de construções e estudos sobre entidades geométricas.

Os fractais são definidos como figuras geradas por autossimilaridade. Eles possuem características especiais, que representam, em cada parte de si, a representação do todo, o que equivale dizer, que são figuras geradas por autossimilaridade. Veremos no decorrer da exposição que todas as construções partem de um único padrão e depois de várias iterações o padrão se repetirá a cada novo passo.

Os padrões dos fractais não estão presentes somente na geometria, eles aparecem em diversas formas encontradas na natureza, como por exemplo, nos flocos de neve, nas folhas das samambaias, dentre outras.

As construções neste trabalho destacadas poderão ser de grande valia ao professor de matemática, uma vez que ele poderá oferecer ao educando diferentes formas de visões da disciplina matemática. Estas construções apresentarão ao aluno: formas distintas de pensar, de ver e até mesmo analisar, por meio da geometria, suas próprias ações.

Na abordagem dos fractais clássicos, feita no capítulo 2, destacamos o Conjunto de Cantor ( $C$ ) que se constitui por um modelo de imaginação abstrata e O Floco de Neve Koch, que se compara ao padrão do floco de neve presente na natureza. Talvez a imaginação não nos convença de que  $C$  seja um fractal, mas se observarmos sob uma ótica aproximada veremos que suas partes são réplicas de  $C$ .

Veremos no capítulo 3 que, após a visualização dos fractais clássicos e do entendimento dos padrões empregados em sua construção, podemos construir novos fractais. Nesse sentido, vale a interação do professor e do aluno. Aquele incentiva a descoberta

---

e este descobre os padrões de similaridade, tornando a aula de matemática divertida e prazerosa.

Esperamos que, ao final da leitura deste trabalho possamos efetivar a contribuição que se almeja para o ensino de Matemática. A principal finalidade desta dissertação é mostrar que é possível a inserção do conteúdo de fractais nos currículos escolares de Matemática, uma vez que eles estão inseridos na natureza e podem ser reconhecidos pelos discentes em seu cotidiano. Desta forma, comprova-se aqui um conteúdo de Matemática no cotidiano do aluno, critério tão defendido e sugerido por teóricos da área e afins

## 2 Breve histórico dos fractais

Para uma data exata ao começo da história dos fractais, poderíamos escolher o ano de 1975, em que Benoît Mandelbrot criava a palavra “fractal” e preparava já a sua primeira obra sobre o assunto. Há, no entanto, uma série de acontecimentos anteriores, que sem os seus protagonistas o saberem, abriram caminho para que essa iniciativa pudesse surgir. É, pois, por essa “pré-história” que começaremos.

Entre a segunda metade do séc. XIX e a primeira do séc. XX foram sendo propostos vários objetos matemáticos com características especiais e que foram, durante muito tempo, considerados “monstros matemáticos”, já que desafiavam as noções comuns de infinito e para os quais não havia uma explicação objetiva.

George Cantor (1845-1918) que se evidenciou com as suas idéias altamente inovadoras sobre o infinito, colocou o problema de uma linha à qual se removeria o seu terço médio, seguidamente o terço médio de cada um dos segmentos restantes e assim sucessivamente, gerando uma “poeira” que sendo infinita, possuiria um comprimento total igual a zero.

De igual modo, seria, em 1904, apresentada a curva de Von Koch que será alvo de uma análise mais detalhada nos capítulos à frente e que sendo uma linha rodeada por uma área finita, possuiria um comprimento infinito.

No entanto, todos estes objetos matemáticos possuíam algumas características comuns aos fractais. Pois, além de bizarros e de conterem em si elementos infinitos, eram de certo modo iguais a si próprios quando ampliados.

Chegamos então à altura em que, as condições estavam criadas para o aparecimento de uma figura invulgar como Benoît Mandelbrot. Mandelbrot, que nasceu em Varsóvia, na Polónia, em 1924 e se refugiou com a família em Paris em 1936, apesar de ter feito os seus estudos básicos de uma forma irregular, ingressou na École Polytechnique a fim de receber formação universitária. Imperava naquela época uma determinada maneira de ser e estar que venerava o rigor e disciplina mentais como forma de encarar a Matemática, onde até mesmo os gráficos eram banidos, pressupondo-se que o verdadeiro matemático não se deveria deixar influenciar pela componente subjetiva de uma imagem

e que, antes pelo contrário, deveria conter em si uma capacidade de abstração, que aliada a uma notação devida, lhe permitiria produzir um trabalho rigoroso e honesto.

Mandelbrot, porém, era totalmente avesso a este espírito. Em 1952 doutorou-se em Matemática pela Universidade de Paris e em 1958 emigraria uma vez mais, desta feita para os Estados Unidos, iniciando uma carreira no Thomas J. Watson Research Center da IBM. Estudou a variação dos preços de algodão, desenvolveu um trabalho relacionado com a transmissão de ruídos em linhas telefônicas, ensinou em Harvard e investigou a teoria dos jogos entre muitas outras atividades que se por um lado evidenciavam o seu ecletismo, por outro acusavam certa instabilidade, como que à procura de alguma coisa. Em particular, Mandelbrot debruçou-se sobre um problema antigo que questionava qual era efetivamente o comprimento do traçado da costa de um país, a Grã-Bretanha.

Esta e outras questões estiveram na origem de toda uma teoria inovadora que viria a culminar no primeiro livro de Mandelbrot, em 1977, que, porém, não seria bem recebido pela comunidade científica. Só em 1982, com a publicação de 'The Fractal Geometry of Nature', este sairia do anonimato.

Ressalta-se ainda a contribuição do matemático John Hubbard que encarando o método de Newton, segundo uma nova perspectiva e a de Michael Barnsley, inventor do "Jogo do Caos", viriam a influenciar determinantemente o desenvolvimento da Geometria Fractal, tal como conhecemos hoje.

Muitos dos nomes referidos nesta seção, e em particular Mandelbrot, com os seus colaboradores e admiradores, encontram-se ainda hoje na vanguarda dos acontecimentos e constituem o motor do desenvolvimento dessa nova teoria, que ainda parece estar engatinhando tanto no seu desenvolvimento teórico quanto nas suas aplicações.

## 3 Fractais Clássicos

De modo geral, fractal é uma construção na qual um padrão é repetido desde larga escala até pequena escala, de maneira que, quando observado mais de perto a estrutura revela as mesmas figuras ou similares. Existem muitas formas de fractais na natureza como, flocos de neve, árvores, etc. Os fractais por serem irregulares não podem ser descritos através da geometria euclidiana, eles geralmente tem uma dimensão Hausdorff que difere de sua dimensão topológica normal. Uma maneira de produzir fractais é por algoritmos de preenchimento de espaço.

Benoit Mandelbrot é considerado o criador da Geometria Fractal. Notadamente, antes dele outros matemáticos descobriram figuras estranhas que não se enquadravam nas definições da geometria euclidiana e, por isso, foram chamados de “monstros matemáticos”.

A denominação de fractais por Mandelbrot, fundamentou-se no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* significa quebrar: criar segmentos irregulares, fragmentar. Refere-se ao estudo dos fractais quando se diz Geometria Fractal.

Abordaremos a seguir os denominados “monstros” da teoria dos fractais.

### 3.1 O Conjunto de Cantor

Historicamente George Cantor (1845 - 1918) foi um matemático descendente de portugueses, nascido na Rússia, adotou nacionalidade alemã, foi professor da Universidade de Hale, dedicou muito de seus estudos em pesquisas relativas à fundamentação da matemática, principalmente no tocante à parte hoje conhecida como Teoria dos Conjuntos. Foi Cantor o primeiro matemático a estudar, ao final do século XIX, essa teoria.

Em 1883, Cantor publicou um trabalho no qual é construído um conjunto, chamado hoje “Conjunto de Cantor”.

O primeiro objeto reconhecido como fractal foi o Conjunto de Cantor. O Conjunto de Cantor constitui um modelo de imaginação abstrata na Matemática. Na



construção do Conjunto de Cantor (C), iniciamos de um segmento unitário  $[0, 1]$ , o qual se divide em 3 partes iguais e retiramos a parte do meio  $1/3 < x < 2/3$  esse processo é conhecido como “remoção do terceiro meio”. Os segmentos restantes formam o conjunto  $c_1$ . Utilizando o mesmo processo de retirar o terceiro meio das duas partes que restam, chamamos de  $c_2$  os segmentos que sobraram. Repetindo o processo infinitas vezes, chamamos de C o conjunto de pontos que sobraram após retirar infinitos segmentos.

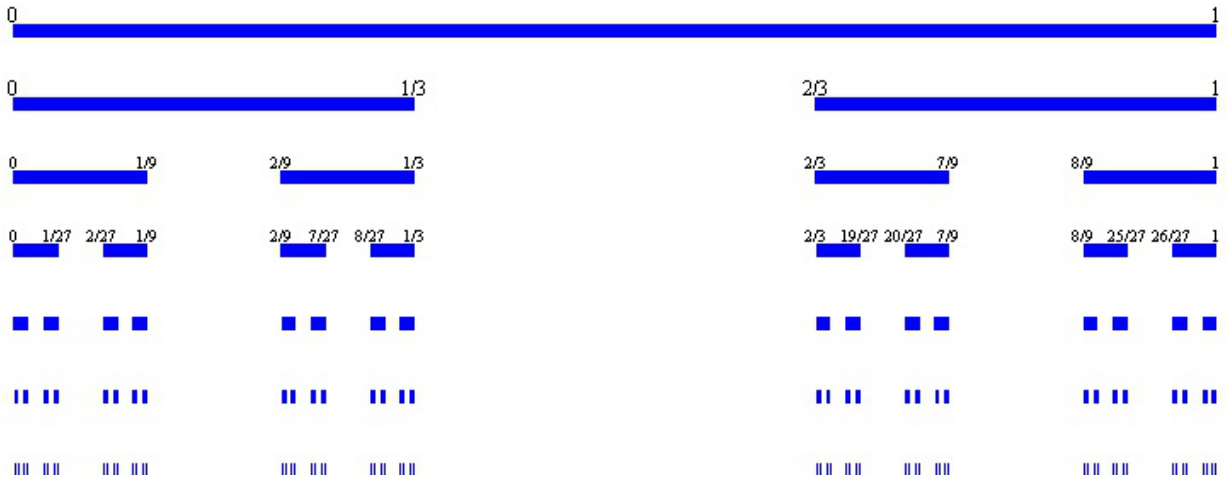


Figura 3.1: Conjunto de Cantor

Na construção do conjunto C, observe que, no 1º passo, retiramos  $\left(\frac{1}{3}\right)$  do comprimento do segmento unitário; no 2º passo, retiramos 2 segmentos de comprimento  $\left(\frac{1}{3^2}\right)$ , isto é, retiramos  $\left(\frac{2}{3^2}\right)$ ; no 3º passo, retiramos 4 segmentos de comprimento  $\left(\frac{1}{3^3}\right)$ , isto é, retiramos  $\left(\frac{2^2}{3^3}\right)$  e assim por diante. O total retirado é, então:

$$1 \left(\frac{1}{3}\right) + 2 \left(\frac{1}{3^2}\right) + 2^2 \left(\frac{1}{3^3}\right) + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \dots\right)$$

Observe que o termo entre parênteses é uma PG infinita de razão  $\left(\frac{2}{3}\right)$ , cuja soma é:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

Resultando no *comprimento total* removido igual a  $\left(\frac{1}{3}\right) . 3 = 1$

Tomando por base a figura(abaixo), imaginamos que sobram os pontos extremos dos intervalos, o que nos permite concluir que C é o conjunto de todos estes pontos.

Mas isto não é verdade, pois existem muitos pontos que não são extremos e que pertencem a C.

Toda vez que retiramos um intervalo: sobram outros dois intervalos, um na esquerda (E) e outro na direita (D).

Ao considerarmos que um ponto está em  $C$ , podemos identificá-lo com uma sequência de posições à esquerda (E) e à direita (D), que indicam a que intervalo este ponto pertence.



Figura 3.2: Conjunto de Cantor, como uma sequência de Esquerda e Direita

É fácil observar que, por exemplo, o ponto extremo à esquerda de  $C$  é representado por:

$$0 \rightarrow EEEE\dots$$

e o ponto extremo à direita por:

$$1 \rightarrow DDDD\dots$$

Observa-se que:

$$1/3 \rightarrow EDDD\dots$$

$$2/3 \rightarrow DEEE\dots$$

$$1/9 \rightarrow EEDD\dots$$

$$2/9 \rightarrow EDEE\dots$$

Na figura, notamos que cada ponto extremo consiste de uma sequência composta de uma combinação finita de E's e D's, seguida de uma sequência infinita de E's e D's. Por exemplo:

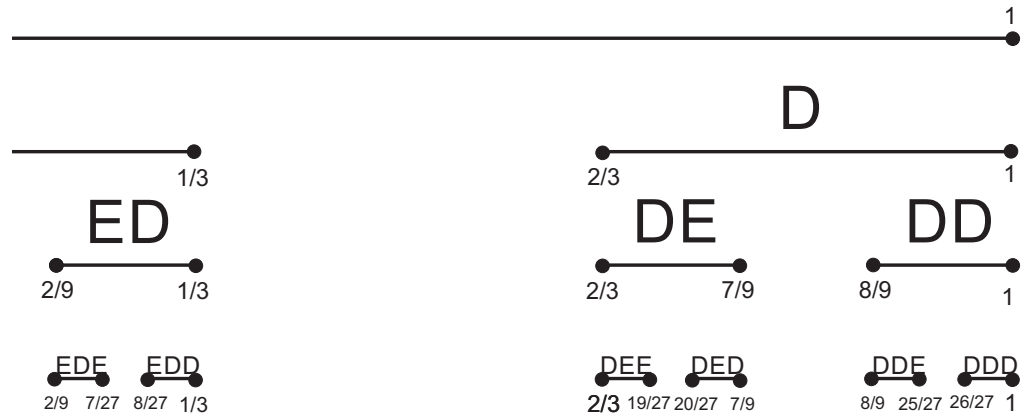


Figura 3.3: Conjunto de Cantor, como uma seqüência de Esquerda e Direita

*EDEDEDDD...*

*DDEDD...*

São, certamente os pontos extremos de  $C$ .

A partir disso, lançamos mãos de uma pergunta: existirão pontos em  $C$  que não terminarão em uma seqüência infinita de  $E$ 's e  $D$ 's? De fato, há muitos destes pontos; Tomemos como exemplo o ponto

*EDEDED...*

Este ponto está:

1º estágio E  $0 < x < 1/3$

2º estágio D  $2/9 < x < 3/9$

3º estágio E  $6/27 < x < 7/27$

Depois de  $k$  estágios determinamos um intervalo de largura  $(1/3)^k$  contido no intervalo precedente.

Logo, estes intervalos decrescem em tamanho até que reste somente um ponto, ou seja, o ponto.

*EDEDED...*

Tal ponto pertence a  $C$ , contudo não é um ponto extremo, por não terminar numa seqüência infinita de  $E$ 's ou  $D$ 's.

Porém, é notório que outros pontos não terminem como uma sequência infinita de  $E$ 's ou  $D$ 's, como:

*EDDEEDDEEEEDDEEEEDDEEEED...*

E estes pontos pertencem a  $C$ .

O que observamos com o Conjunto de Cantor é algo interessante e contraditório, pois enquanto o número de segmentos aumenta indefinidamente o comprimento de cada segmento vai ficando mais próximo de zero, até que, em certo instante, é praticamente igual a zero. O Conjunto de Cantor tem infinitos pontos, pois se lembre que toda vez que faço os cortes com intervalos abertos, os pontos extremos dos intervalos fechados permanecem no Conjunto de Cantor. Portanto, mesmo considerando as infinitas etapas do processo, todos os pontos extremos dos intervalos de construção pertencem ao Conjunto de Cantor e são em uma quantidade infinita, tanto quanto a quantidade dos números naturais.

Outra importante observação no Conjunto de Cantor está relacionada ao seguinte aspecto: a sua construção numérica permite-nos obter a idéia de um subconjunto fechado de números reais. Para termos uma melhor percepção, enunciaremos novamente a sua construção geométrica. Consideremos na figura inicial, o intervalo fechado  $I_0 = [0, 1]$ , dividimo-lo em 3 partes congruentes e desprezamos o terço médio (ver figura 3.1). Ficamos, desta forma, com a união disjunta de dois intervalos fechados,  $I_1 = \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right]$  de comprimento  $\frac{1}{3}$  cada. Aplicando este processo aos demais intervalos indefinidamente obtemos  $I_n$ , que será substituído pela união disjunta de  $2^n$  intervalos.

O conjunto de Cantor não é interessante para ser trabalhado no ensino fundamental, pois aborda questões delicadas. A própria idéia abstrata de tomar um intervalo “sem espessura” e fazer cortes neste intervalo soaria estranho para os alunos.

## 3.2 Curva de Peano

O italiano Giuseppe Peano nasceu em Cuneo (1858) e faleceu em Turim (1932). Atuou como professor da academia Militar de Turim, com enorme contribuição à Matemática. O que no faz lembrar da sua famosa axiomatização para os números inteiros

(positivos).

O teórico publicou em 1890, um estudo aprofundado das noções de continuidade e dimensões, no qual relata a sua famosa curva, que tinha como proposta cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular: -“Sur une courbe qui remplit toute une aire plaine”<sup>1</sup>,(PEANO, 1890, p. 33 apud BAROSA, Ruy Madsen).

Várias são as citações recebidas pela Curva de Peano, por exemplo do russo Vilenkin<sup>2</sup>: “Ele faz aparentar que tudo estaria em ruína, que todo conceito matemático tenha perdido seu significado”; ou do francês Dieudonné<sup>3</sup>: “Alguns objetos matemáticos como a curva de Peano são totalmente não intuitivas [...], extravagantes”. Um comentário feito por Mandelbrot salienta que essas citações apenas indicaram pouco cuidado ao examinar a curva e deficiência de imaginação geométrica, assegurando que se torna muito difícil não associá-la com diversos aspectos da natureza. Tais estruturas patológicas surgiram para perturbar as bases matemáticas, foram importantes para o relacionamento de uma nova geometria com a natureza.

A construção de Peano se baseia em:

- 1 - Temos inicialmente um segmento de reta, fig. 3.4 - I;
- 2 - Substituímos por uma curva de nove segmentos, conforme indicado na fig.3.4 - III , portanto em escala  $\frac{1}{3}$ .
- 3 - Substituímos cada segmento anterior pela curva de nove segmentos(fig.3.4 - IV), e assim sucessivamente.

De posse da figura, constata-se que a curva vai preenchendo uma região quadrada cuja diagonal é dada pelo segmento inicial. A área dessa região quadrada, caso o segmento inicial tenha medida 1, será dada por:

$$A = L^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

O comprimento da curva de Peano é de fácil cálculo: de início temos o próprio segmento, logo é 1. Na fase seguinte, o comprimento será dado pela soma das medidas

<sup>1</sup>Numa curva que preenche toda uma área plana

<sup>2</sup>Alexander Vilenkin recebeu seu diploma de graduação em Física, em 1971, na antiga União Soviética. Mais tarde, ele se mudou para o Estados Unidos , onde obteve seu Ph.D. em Buffalo .

<sup>3</sup>Jean Alexandre Eugène Dieudonné conhecido por suas pesquisas sobre álgebra abstrata e análise funcional e como historiador da matemática, particularmente nos campos da análise funcional e topologia algébrica.

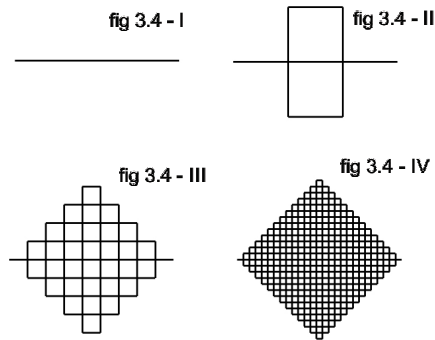


Figura 3.4: Curva de Peano

dos nove segmentos, isto é:  $9 \cdot (1/3) = 3$ ; Na fase 2 cada um dos nove se transforma em nove outros segmentos, teremos portanto  $81 \cdot (1/9) = 9 = 3^2$ . E o processo se mantém até a fase  $n$ :  $9^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^n$ .

### 3.3 Curva de Koch

Um famoso modelo desenvolvido pelo matemático sueco Niels Von Koch (1870 - 1924) é a Curva de Koch. A Curva de Koch é um exemplo de um fractal, um dos primeiros a serem definidos.

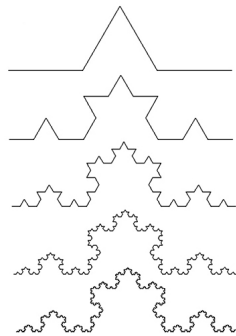


Figura 3.5: Curva de Koch

O comprimento da curva é infinito. O comprimento total é dado por  $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ , pois ele aumenta de  $\frac{1}{3}$  a cada passo  $n$ . Por não ser unidimensional e nem bidimensional, dizemos que ela (comprimento da curva) tem uma dimensão fractal de  $\frac{\log 4}{\log 3} \cong 1,26$ , maior do que a dimensão de uma linha, mas menor do que a dimensão de uma curva (uma dimensão fractal também é chamada de dimensão Hausdorff<sup>4</sup>, em homenagem a um dos fundadores da moderna topologia.)

<sup>4</sup>a dimensão Hausdorff é um número real não-negativo associado a qualquer espaço métrico .

## 3.4 Curva de Sierpinski

O matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882 - 1969), foi professor em Lvov e Wariaw. Em 1916 Sierpinski apresentou um dos famosos “monstros” em seu trabalho: “Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée, Comptes Rendus de l’Academie des Sciences de Paris, 162 (1916) p. 629 - 632”, que complementava sua publicação anterior de 1915.

A construção da curva de Sierpinski leva em consideração que devemos:

- 1 - Considerar um segmento de reta e o triângulo equilátero tendo esse segmento por lado;
- 2 - Substituir o segmento por uma poligonal de 3 segmentos formando os 3 lados de um trapézio isósceles com vértice nos extremos do segmento inicial e nos pontos médios dos outros dois triângulos;
- 3 - Substituir cada segmentos anterior por 3 segmentos conforme a ação 2, em cada um dos 4 triângulos equiláteros de vértices nos pontos médios, com exceção do central;
- 4 - Repetir sucessivamente a ação 3.

Observará que a origem e extremidade final da curva são invariantes e que o resultado da construção encontra-se na figura abaixo.



Figura 3.6: Curva de Sierpinski

## 3.5 Samambaia de Barnsley

Embora a figura abaixo se assemelhe a uma folha de samambaia, ela é um fractal criado por Barnsley, construído nos mesmos moldes dos citados anteriormente.

Se observarmos os ramos que se originam do caule, podemos verificar que são cópias reduzidas da samambaia grande. Os ramos da direita e da esquerda têm no caule uma espécie de eixo e vão reduzindo de tamanho no sentido vertical do caule. Mais uma vez, a figura foi construída como a repetição de algumas regras.

É importante salientar que figuras como floco de neve e a samambaia natural

não são evidentemente cópias reduzidas exatas de si mesmo. O que existe nas figuras da natureza é uma semelhança aproximada em diferentes escalas.

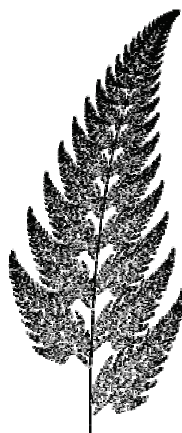


Figura 3.7: Samambaia de Barnsley

Nos fractais matemáticos, as partes são cópias exatas do todo, mas nos fractais naturais as partes são apenas lembranças do todo. A característica central dos fractais é sua invariância sob mudança de escala.



## 4 Criando Fractais

Vários procedimentos são utilizados para construir “novos” fractais, em geral, a construção se baseia em fractais existentes. Vamos examinar apenas alguns, que julgamos de fácil entendimento: um para se construir curvas fractais, com base no fractal Curva de Koch; um segundo para a construção de interiores fractais, ao qual denominamos de criação por remoção, seguindo o procedimento empregado no famoso triângulo de Sierpinski.

### 4.1 Fractais de Koch

Iniciamos destacando a fig. 4.1 que foi construída sobre um segmento de reta dividido em 3 partes iguais, e a do meio substituída por um triângulo equilátero sem um dos lados, ficando assim com quatro partes.

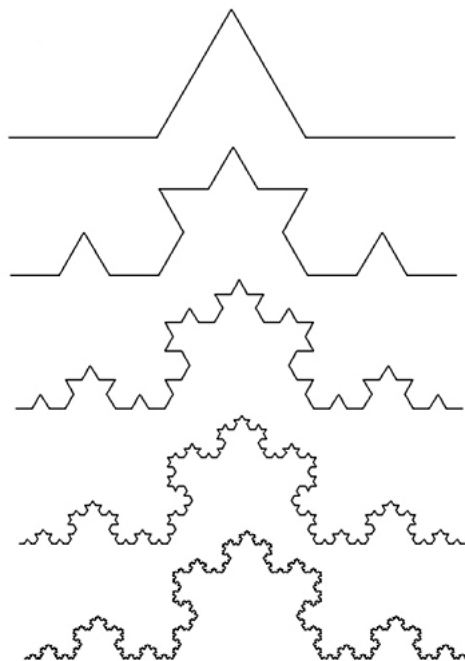


Figura 4.1: Curva de Koch

Daí, a imagem da construção então utilizada, aplicando em cada parte ( em todos os 4 segmentos) o modelo gerador reduzido na razão  $1/3$ , e novamente em cada

uma das 16 novas partes o modelo gerador agora reduzido na razão  $(1/3)^2 = 1/9$ , pode-se construir curvas fractais análogas com base num indicador similar.

### 4.1.1 Floco de Neve de Koch

Para construir o floco de neve Koch, desenhamos um triângulo equilátero, dividimos cada lado em três partes iguais, removemos a parte central de cada lado, substituímos por dois lados de outro triângulo equilátero do mesmo tamanho da seção removida. Repetindo esse processo de construção, obtemos a figura que se assemelha a um floco de neve encontrado na natureza.

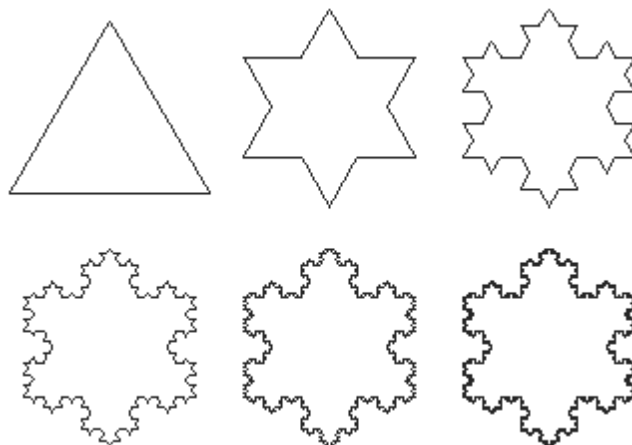


Figura 4.2: Floco de Neve de Koch

Continuando o processo infinitas vezes, concluímos que a área é definida pela fórmula  $\frac{2\sqrt{3}s^2}{5}$  quando  $s$  é a medida de um lado do triângulo original. Note que o perímetro é infinito e que a área é finita. Quando fazemos a mesma operação com um único segmento de linha em lugar de um triângulo, o resultado se aproxima de uma curva na medida em que os segmentos de linha se tornam cada vez menores. A curva é chamada de curva de Koch.

## 4.2 Fractais de Sierpinski

### 4.2.1 O Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski, foi descrito pela primeira vez em 1915, pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski, na forma de uma curva matematicamente definida em vez de uma forma geométrica. Esta região triangular (fig. 4.3 ) é obtida como limite de um processo recursivo e iterativo. Para começar o processo, partimos de uma região limitada por um triângulo equilátero. Em seguida, unem-se os pontos médios de cada lado do triângulo, formando 4 regiões triangulares menores cujos lados estão ligados. Retira-se agora a região triangular central. A recursão consiste em repetir indefinidamente o procedimento anterior em relação a cada um dos triângulos obtidos. A figura abaixo representa o resultado da construção.



Figura 4.3: Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski tem várias propriedades curiosas como a de ter tantos pontos como o do conjunto dos números reais, ter área igual a zero, ser autossimelhante (isto é, uma pequena porção do triângulo é idêntica ao triângulo todo, numa escala adequada) e não perder a sua definição inicial à medida que é ampliado.

Na construção do Triângulo de Sierpinski (fig. 4.3) foram exploradas: a potenciação, a relação de área (para isso foi usado o sistema fracionário) e a relação perímetro e área de cada iteração no Triângulo de Sierpinski. É possível, com isso, construir a fórmula geral para a contagem, para o perímetro e também para a área. A fórmula geral da contagem é  $3^{n-1}$ , a fórmula geral da área é  $\frac{1}{3^{n-1}}$  e a fórmula geral do perímetro é  $\frac{3}{2^{n-1}}$ .

### 4.2.2 O Tapete de Sierpinski

Pode-se aplicar a mesma técnica de eliminação (remoção) usada no triângulo de Sierpinski, partindo de um quadrado, dividindo-o em 9 pequenos quadrados congruentes, e eliminando o central. Em seguida, aplicar esse mesmo procedimento em cada um dos 8 quadrados restantes, e assim sucessivamente e iterativamente. O resultado que se obtém após algumas iterações já é surpreendentemente bonito e conhecido como Tapete de Sierpinski (ou Carpete de Sierpinski). O resultado da construção é mostrado na figura seguinte.

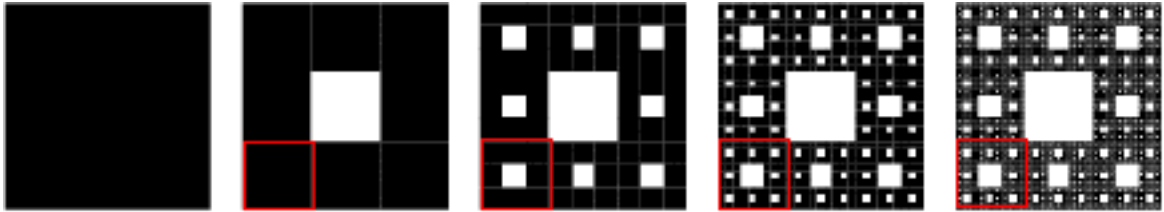


Figura 4.4: Tapete de Sierpinski

Vamos analisar também o que acontece com a área e o perímetro do Tapete de Sierpinski. Seja a área inicial do quadrado de lado  $L$  igual a  $A$ . No nível 1 retiramos uma área de um quadrado de lado  $\frac{L}{3}$ , resta a área  $A_1 = L^2 - \left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{8L^2}{9}$ . Na segunda iteração, em que se retiram 8 (oito) quadrados de lado  $\frac{L}{9}$ , a nova área  $A_2 = \frac{8L^2}{9} - \left(\frac{L}{9}\right)^2 = \frac{64L^2}{81}$ . Na terceira retirada, o número de quadrados retirados aumenta consideravelmente e são retirados, desta vez, 64 quadrados de lado  $\frac{L}{27}$  e a área  $A_3 = \frac{64L^2}{81} - \left(\frac{L}{27}\right)^2 = \frac{512L^2}{729}$ . Percebemos que as áreas  $A_1, A_2, A_3$ , formam uma Progressão Geométrica de termo inicial igual  $\frac{8L^2}{9}$  e razão igual a  $\frac{2^3}{3^2}$ , calculando através da fórmula do termo geral de uma P.G, encontramos a expressão para o termo geral igual a  $A_n = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n \cdot L^2$ . É fácil perceber que esta área vai diminuindo à medida que vamos fazendo mais iterações e retirando os quadrados. Até que chegará um momento em que teremos somente pontos e a área estará reduzida a zero. O perímetro tem um comportamento totalmente contrário ao da área, pois enquanto ela diminui tendendo a zero, ele aumenta indefinidamente tendendo ao infinito. Consideremos o lado inicial do quadrado igual a  $L$ , o perímetro inicial é  $4L$ . Na primeira iteração, o lado do quadrado fica reduzido a  $\frac{L}{3}$  e o perímetro do novo quadrado é igual  $\frac{4L}{3}$ . Na segunda iteração o lado quadrado é

$\frac{L}{9}$  e o perímetro é igual a  $\frac{4L}{9}$ . Na terceira iteração, são acrescentados novos quadrados cujos perímetros são iguais a  $4\left(\frac{L}{27}\right)$ . Prosseguindo assim, verificamos que na iteração  $n$  o perímetro de cada triângulo gerado é igual a  $4\left(\frac{L}{3^n}\right)$ .

## 4.3 Fractais de Dürer

### 4.3.1 Fractal Pentagonal de Dürer

Na construção levamos em consideração um pentágono regular. Seja  $AB$  um de seus lados. Coloquemos pentágonos menores em cada um dos extremos  $A$  e  $B$ , de tal maneira dispostos que um de seus ângulos coincida com o ângulo do pentágono regular inicial, e ainda com a condição de que os pentágonos menores tenham um vértice comum (fig 4.5).

Repetindo essa ação, em cada lado, ficará formado ao centro um novo pentágono regular congruente aos dos lados.

Removamos os 5 triângulos intermediários e o pentágono central, obtendo o nível 1 do Fractal de Dürer (fig. 4.5).

Repetindo essa operação em cada um dos pentágonos regulares restantes, obteremos sucessivamente os outros níveis do fractal

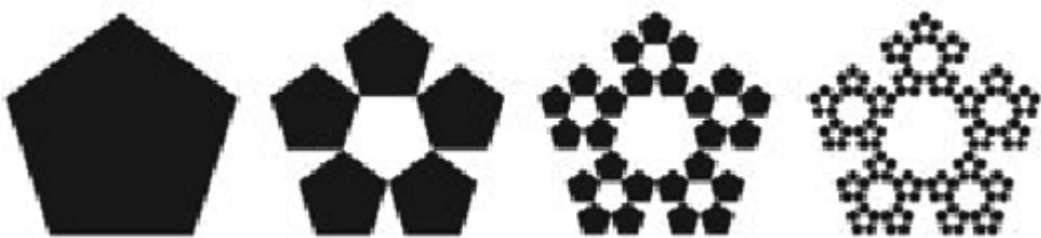


Figura 4.5: Pentágono de Dürer

### 4.3.2 Fractal Hexagonal de Dürer

Construímos um hexágono regular (grande) que será o indicador.

Seja  $AB$  um de seus lados. Coloquemos hexágonos regulares menores em cada um dos extremos  $A$  e  $B$ , de tal maneira dispostos que um de seus ângulos coincida com

ângulo do hexágono regular inicial, com a condição de que os hexágonos menores tenham um vértice em comum (fig. 4.6).

Em cada lado repetimos essa ação, portanto construindo 6 hexágonos regulares, ficando formado ao centro um hexágono regular estrelado. Removemos os triângulos intermediários e o hexágono estrelado central, obtendo assim o nível 1 do fractal (fig. 4.6).

Repetindo a operação em cada hexágono do nível anterior, obteremos sucessivamente o Fractal Hexágono Tipo Dürer. (fig. 4.6).



Figura 4.6: Hexágono de Dürer

## 4.4 Árvore Pitagórica Fundamental

Construir inicialmente um triângulo retângulo cujos catetos e hipotenusa são dados pelo terno pitagórico fundamental (3, 4 e 5). Sobre seus catetos e hipotenusa construir os quadrados respectivos (fig. 4.7). O triângulo retângulo e os quadrados dos catetos constituem o indicador-gerador. O quadrado da hipotenusa será o tronco inicial. Para obtenção do nível 1 do fractal (fig 4.7) construiremos sobre o lado de cada quadrado oposto ao respectivo cateto novo triângulo retângulo tendo por hipotenusa justamente esse lado. O que se faz em cada iteração é substituir as funções, cada cateto se transforma em hipotenusa. Mas, para se obter a similaridade, os novos triângulos retângulos precisam ser semelhantes ao inicial, isto é, seus seus lados devem ser proporcionais aos números 3, 4 e 5 (fig 4.7).

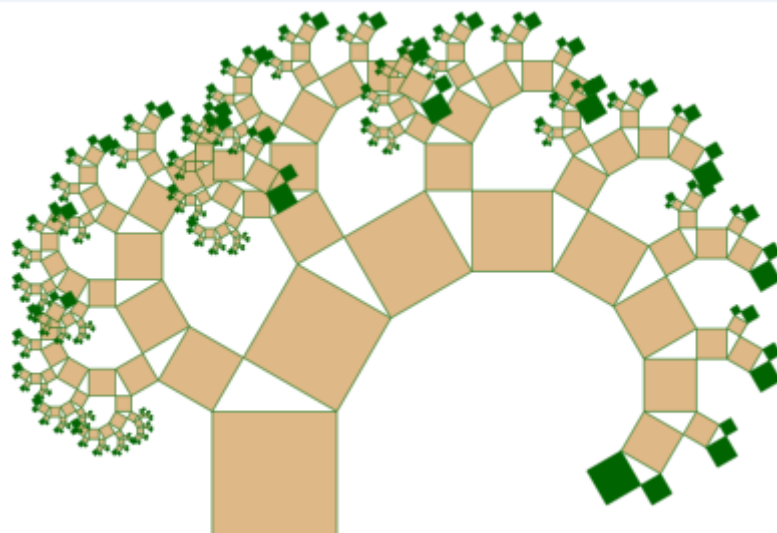


Figura 4.7: Árvore Pitagórica de lados 3, 4 e 5

Podemos fazer também com um triângulo retângulo isósceles. Seguindo os passos anteriores teremos a figura abaixo.

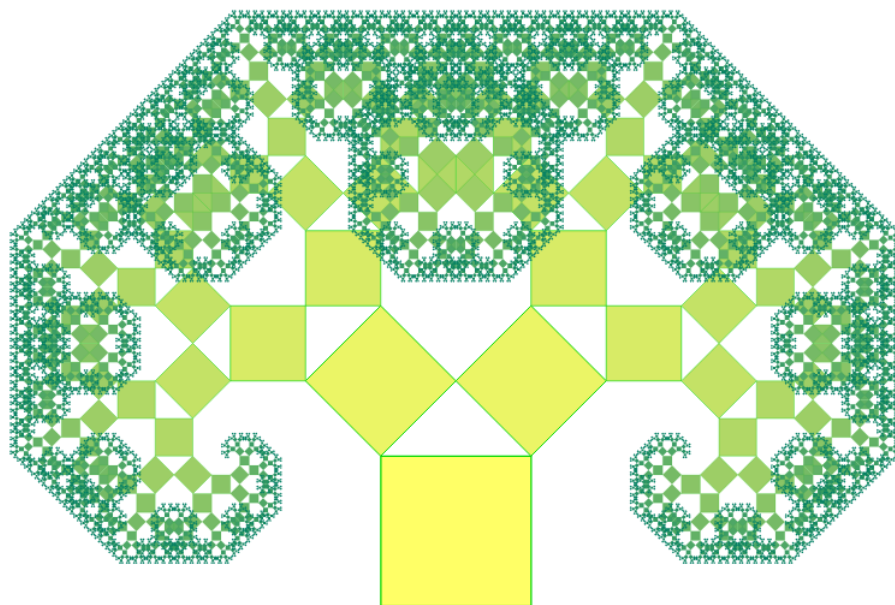


Figura 4.8: Árvore Pitagórica criada a partir de um triângulo isósceles

## 4.5 Dimensão Fractal

Quando à dimensão, sabemos que um ponto, possui dimensão topológica zero, as linhas unidimensionais, dimensão um, as superfícies, dimensão dois e os sólidos, dimensão três, e embora não sejamos capazes de visualizar concretamente, existem ainda dimensões maiores que três. Segundo SERRA (p. 14, 1997) A dimensão de uma figura, é uma dimensão topológica, que se exprime sempre como um número inteiro. Os fractais também são figuras que possuem dimensão topológica, no entanto, pode-se considerar o conceito de dimensão espacial que relaciona o espaço que a figura ocupa. Neste sentido, podemos observar que o Floco de Neve de Koch (fig.4.2), por exemplo, ocupa mais espaço que uma curva simples e, no entanto, não ocupa um espaço do tamanho do plano que a contém. Logo ela possui uma dimensão maior que um e menor que dois, ou seja, uma dimensão fracionária. De acordo com SERRA (1997, p.15): As dimensões fracionárias são usualmente denominadas dimensão fractal. Quando um fractal apresenta autossimilaridade estrita, sua dimensão pode ser determinada por um método simples que se delinea na passagem de um dado nível na construção do fractal para o nível imediatamente seguinte. Sendo assim basta anotarmos: O número  $p$  de subpartes similares que se tomam no lugar de uma dada parte do fractal. O fator de redução  $q$  da parte considerada para cada subparte que entra em seu lugar. A dimensão espacial é calculada, então pela quantidade:

$$dim = \frac{\log p}{\log q}.$$

A toda hora usamos medidas de largura, comprimento e altura consideradas na geometria de Euclides. Estas medidas expressam o “tamanho” de um objeto. Então, analisemos alguns objetos:

1. um ponto não possui altura, largura, nem comprimento; logo, não tem dimensão é (adimensional).



Figura 4.9: Ponto

2. uma reta possui somente comprimento, ou seja, tem uma só dimensão; assim, é unidimensional.



Figura 4.10: Reta

- um plano possui comprimento e altura, o que caracteriza duas dimensões; então, é bidimensional.

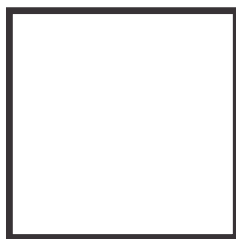


Figura 4.11: Quadrado

- O espaço possui altura, largura e comprimento, o que caracteriza três dimensões; então, é tridimensional.

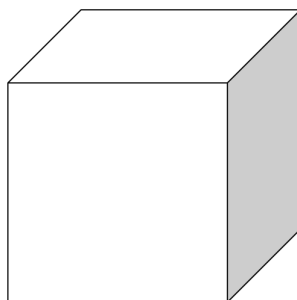
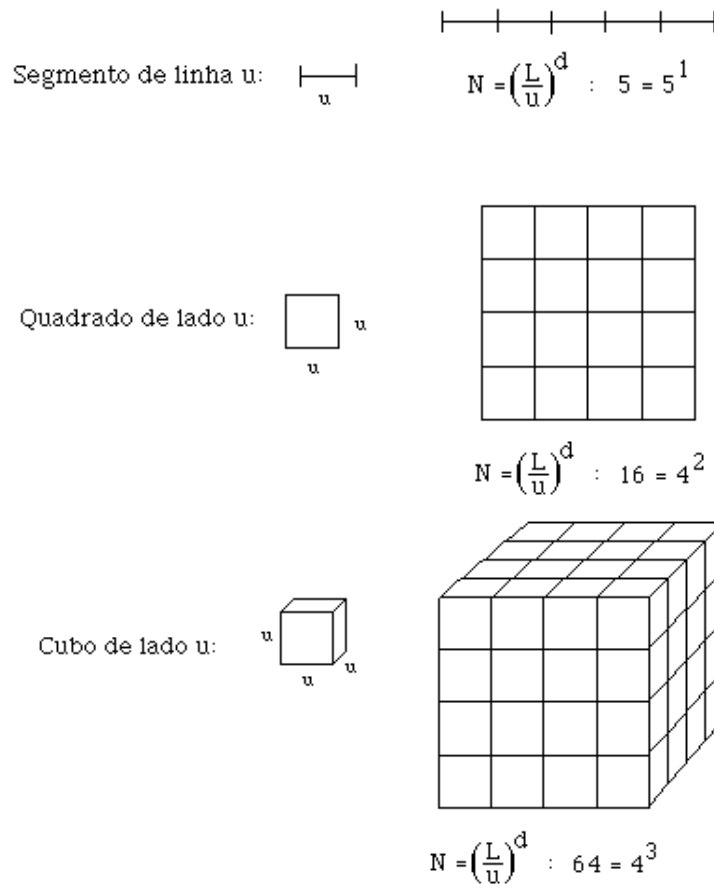


Figura 4.12: cubo

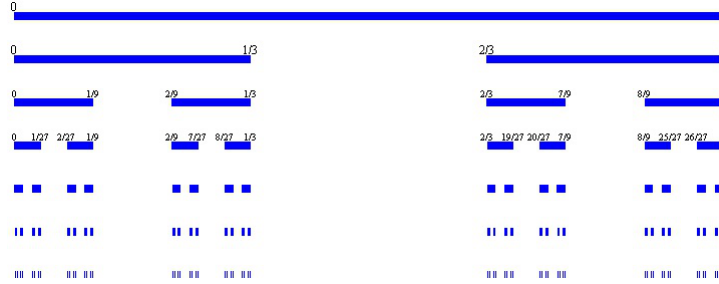
Verificamos que, na Geometria Euclidiana, estas três medidas é que remetem ao conceito associado à dimensão e que estes objetos não apresentam irregularidades em suas formas. Porém, a verdadeira dimensão de um objeto é diferente das citadas acima. No caso dos fractais, ao contrário do que ocorre com os objetos euclidianos “perfeitos”, cada objeto tem sua dimensão própria. As curvas irregulares têm dimensão que variam entre um e dois, de modo que uma superfície irregular tem dimensão entre dois e três. Segundo Mandelbrot, Um conjunto é dito fractal se a Dimensão Hausdorff deste conjunto for maior do que a sua dimensão topológica. A dimensão de um fractal indica o espaço ocupado por ele que está relacionado com o seu grau de aspereza, irregularidade (igual em diferentes escalas) ou fragmentação. Daí o fato de os fractais possuírem dimensão fracionária e não inteira (como na Geometria de Euclides), por não serem figuras perfeitas.

Assim, a dimensão de qualquer fractal pode ser obtida utilizando o método que segue: Tomamos uma linha de comprimento  $L$  (unitário, ou seja,  $L = 1$ ). Esta linha pode ser dividida em  $N$  partes iguais (elementos), sendo que cada segmento desta “reta” (escala) é  $u = \frac{1}{N}$  (ver fig. abaixo). Assim,  $N = \frac{L}{u}$ . Da mesma forma, para medir um quadrado (ou cubo) de lado  $L$  (unitário), tomamos um quadrado (ou cubo) de lado  $u$  e contamos o número  $N = \frac{L^2}{u^2} = \left(\frac{L}{u}\right)^2$  (ou  $N = \frac{L^3}{u^3} = \left(\frac{L}{u}\right)^3$ ) que precisamos para cobrir o objeto. De um modo geral, este processo leva a  $N = \left(\frac{L}{u}\right)^d$ , ou, tomando o logaritmo de ambos os membros,  $dim = \frac{\log N}{\log \left(\frac{L}{u}\right)}$ .

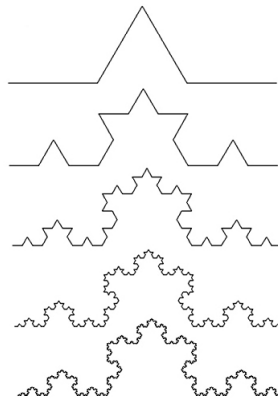


A figura acima mostra que podemos determinar a dimensão das figuras euclidianas da mesma forma que a determinamos para os fractais. Se pensarmos em dobrar, por exemplo, uma reta, um plano ou um cubo, notamos que ocorrerá um crescimento exponencial. Determinaremos, pela fórmula descrita anteriormente, as dimensões dos fractais (curvas) mais simples, como o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch. Para as curvas mais complexas, tal como o Tapete de Sierpinski, o processo de cálculo também é o mesmo, vejamos os exemplos a seguir.

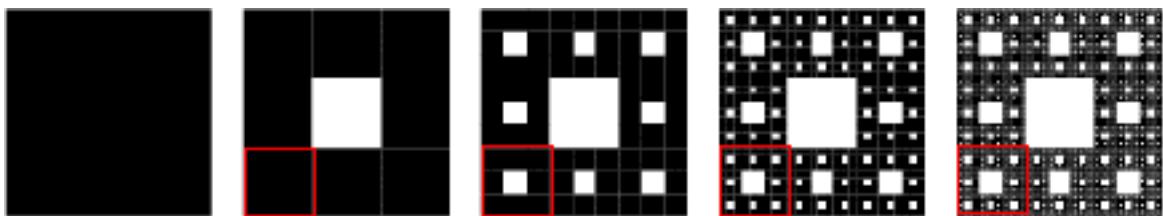
**Exemplo 4.5.1. Dimensão do Conjunto de Cantor.** Dividimos o segmento em 3 partes iguais e não consideramos o segmento do meio. Assim,  $L = 1$ ,  $N = 2$  e  $u = \frac{1}{3}$ ;  $D = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,6309\dots$



**Exemplo 4.5.2. Dimensão da Curva de Koch.** Cada lado do triângulo é dividido, continuamente, em três partes. Cada triângulo formado é equilátero. Tem-se  $L = 1$ ,  $N = 4$  e  $u = \frac{1}{3}$ ;  $D = \frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1,2618\dots$



**Exemplo 4.5.3. Dimensão do Tapete de Sierpinski.** Temos que  $L = 1$ ,  $N = 8$  e  $u = \frac{1}{3}$ ;  $D = \frac{\log 8}{\log 3} \simeq 1,892789\dots$



## 5 Conclusão

O ensino das ciências vem passando por profundas transformações. E no contexto das transformações, o professor de matemática se sente no dever de acompanhar os avanços tecnológicos, de mudar sua metodologia de ensino e de criar estratégias que seduzam a atenção dos alunos.

Propondo uma alternativa de ensino, lançamos mãos na estrutura geométrica dos fractais. Abordando fatos históricos, seus criadores e as relações matemáticas presentes em cada figura, descobrindo dimensão, comprimento, área, volume e relações de recorrência tão importantes...

É claro que o estudo detalhado dos fractais precisa de outros conhecimentos matemáticos e o professor deve inseri-los em suas aulas à medida que os conteúdos do ensino médio avançam. Encorajamos que haja uma investigação por parte dos alunos, que eles sejam os reais descobridores dos padrões presentes em cada figura e que possam criar, a partir de fractais existentes, novas figuras por autossimilaridade.

Destacamos que nesse trabalho oferecemos maneiras de se construir, passo a passo, todos os fractais clássicos. Seja através de uma reta, de um triângulo, de um quadrado, etc., que fazem parte da geometria euclidiana estudada no ensino médio. E quando a figura já apresenta um padrão de construção, fizemos uma análise matemática de todas as relações conhecidas nos fractais.

Ao professor, que fizer uso desse trabalho, reforçamos que se construam fractais com auxílio de programas computacionais, que se faça uso do laboratório de informática, que se investiguem através da internet aplicações dos fractais nas diversas áreas do conhecimento.

Reforçamos que toda estrutura com auto similaridade presente na natureza ou em experimentos químicos, por exemplo, deva ser tratado com olhar interdisciplinar. A nosso ver, quando o conteúdo de matemática fica além dos limites da sala de aula e se relaciona com as outras componentes, o aluno não fica apenas no "decoreba" das fórmulas, ele aprende de fato.

Por fim, esperamos que esse trabalho possa influenciar de alguma maneira na

---

didática do professor de matemática. Acreditamos que a beleza presente em cada construção possa prender a atenção dos alunos e que, com a participação ativa do professor, eles possam encontrar todas as relações matemáticas presentes em cada figura.

## Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa, Ruy Madsen. *Descobrimdo a geometria fractal - para a sala de aula*. 3ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.
- [2] Falconer, Kenneth. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application*. 2ª edição. John Wiley & Sons, Ltd, 2003.
- [3] Janos, Michel. *Geometria Fractal*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltada, 2008.
- [4] Martinelli, Rodiane Ouriques, *et al.* *Fractais no Ensino Fundamental: Explorando essa Nova Geometria*. Belo Horizonte: PUCRS, 2007
- [5] Rooney, Anne *A História da Matemática - Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito*. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda. 2012