

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Diego Ferreira Gomes

Equações de Diferenças e Alguns Modelos

Teresina
2014

Diego Ferreira Gomes

Equações de Diferenças e Alguns Modelos

Dissertação apresentada ao Curso de Matemática da UFPI, como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Jefferson Cruz dos Santos Leite

Doutor em Matemática - UFPI

Teresina

2014

FICHA CATALOGRÁFICA

D633e Gomes, Diego Ferreira.
Equações de diferenças e alguns modelos [manuscrito] /
Diego Ferreira Gomes. – 2014.
74 f.

Cópia de computador (*printout*).
Dissertação (Mestrado) – Curso Pós-Graduação em
Matemática da Universidade Federal do Piauí - UFPI, 2014.
Orientador: Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

1. Equações de Diferenças. 2. Modelos Matemáticos. 3.
Matemática – Recorrência. I. Título.

CDD 515.38



PROFMAT



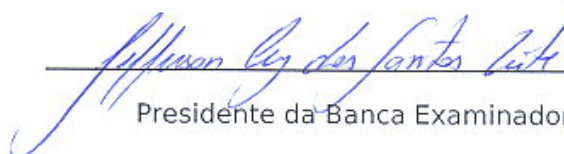
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

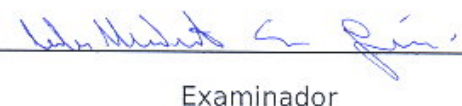
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

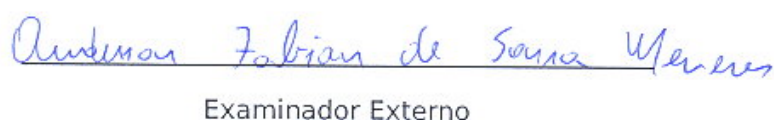


Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional,
na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em
matemática** intitulada: Equações de Diferenças e Alguns Modelos

defendida por Diego Ferreira Gomes em
04 / 06 / 2014 e aprovada pela banca constituída pelos professores:


Presidente da Banca Examinadora


Examinador


Examinador Externo

A meu Deus que nunca me abandonou.

*A meus pais, minha família e amigos, pelo
apoio e companheirismo.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao meu bom Deus que sempre teve misericórdia da minha vida e que no meio das lutas e dificuldades me ajuda a obter vitórias.

A minha mãe, Maria do Amparo Ferreira Gomes, pelo seu amor inesgotável, pela sua compreensão e zelo.

Ao meu pai, Francisco Gomes Leal, por proporcionar sonhos maiores do que eu poderia imaginar, pelo cuidado, pelas injeções de ânimo, pela amizade e compreensão.

A minha família, pelo grande incentivo aos estudos e compreensão.

A minha namorada, Maria da Conceição Gomes de Sousa, por está toda esta temporada ao meu lado sendo sempre compreensiva, amável e cuidadosa.

Ao meu orientador Jefferson Cruz dos Santos Leite, pela sua compreensão em meio as minhas dificuldades, pela sua instrução e amizade.

Aos meus amigos “profmáticos”, por comporem esta grande e divertida turma de 2012 e em especial meu companheiro de estudos Edem Assunção Baima Neto, pelas incansáveis horas de estudos.

Aos meus companheiros de trabalho, pela ajuda e força nesta caminhada.

Enfim, a todos que de forma direta e indiretamente colaboraram para que este grande dia acontecesse.

“Educa a criança no caminho em que deve andar; e até quando envelhecer não se desviará dele”.

Provérbios 22:6

Resumo

Neste trabalho analisaremos as equações de diferenças de primeira e segunda ordem e alguns modelos matemáticos que descrevem situações cotidianas como o crescimento populacional, o orçamento familiar, o financiamento de veículos e a criação de escargot. Com isso, faremos uma analogia a recorrências de primeira e segunda ordem, onde nesta, aprenderemos a identificar uma recorrência, distinguir recorrências lineares das não lineares, diferenciar recorrências de primeira e segunda ordem e analisar, identificar e resolver equações recursivas. Estudaremos também, a ideia de recorrência caracterizando algumas brincadeiras e jogos lúdicos, como a pizza e o queijo de Steiner, a torre de Hanói e os coelhos de Fibonacci. Buscaremos trazer ao leitor uma grande quantidade de exemplos diretos e contextualizados para a maior fixação de como caracterizar recursivamente uma situação problema e como resolvê-las usando alguns teoremas e resultados.

Palavras-chaves: Equações de diferenças, recorrência, modelos matemáticos.

Abstract

In this work we analyze the difference equations of first and second order and some mathematical models to describe current situations such as population growth, the family budget, vehicle financing and escargot's creation. With this, we will analogy to recurrences of first and second order, where this will learn to identify a recurrence, distinguishing linear recurrences of nonlinear differentiate recurrences of first and second order and analyze, identify and resolve recursive equations. Study also, the idea of recurrence featuring a few jokes and fun games such as pizza and cheese Steiner, the tower of Hanoi and rabbits Fibonacci. Seek to provide the reader with a lot of direct and contextualized examples for greater fixation as recursively characterize a problem situation and how to resolve them using some theorems and results.

Keywords: Difference equations, recurrence, mathematical models.

Sumário

1	Introdução	7
2	Recorrência	10
2.1	Sequências Definidas Recursivamente	11
2.2	Recorrências Lineares de Primeira Ordem	13
2.2.1	A Pizza e o Queijo de Steiner	25
2.2.2	A Torre de Hanói	31
2.3	Recorrências Lineares de Segunda Ordem	33
2.3.1	Os Coelhos de Fibonacci	46
3	Equações de Diferenças	49
3.1	Apresentação	49
3.2	Equações Lineares de Diferenças de Primeira Ordem	50
3.2.1	Modelo Malthusiano de Crescimento Populacional	52
3.2.2	Orçamento Familiar	53
3.2.3	Financiamento de Veículos	56
3.3	Equações Lineares de Diferenças de Segunda Ordem	58
3.3.1	Criação de Escargot	62
4	Considerações Finais	67
	Referências Bibliográficas	69

1 Introdução

A matemática está presente nas diversas atividades humanas, praticamente, não existe uma em que não seja necessário codificar, quantificar, analisar, contar, interpretar, ordenar, generalizar e estabelecer relações. Essas características são inerentes à matemática e a torna um dos instrumentos essenciais para a análise e a compreensão da realidade. Fruto da criação humana, a matemática surgiu e se desenvolveu a partir da busca de soluções para os problemas do cotidiano. Ao longo dos séculos, sofreu influências, contribuições e modificações de diversas culturas até atingir o estágio atual, e continua em pleno desenvolvimento. A apropriação do conhecimento matemático contribui para o desenvolvimento de habilidades necessárias para uma vida produtiva em sociedade (veja em [1]).

O objetivo central de um educador em Matemática é fazer o aluno compreender o seu papel na sociedade, como agente ativo e transformador da realidade, e construir o conhecimento matemático de acordo com fatos cotidianos e fenômenos naturais, isto é, observar a realidade em seu derredor para analisar e criar modelos matemáticos para sua maior compreensão do mundo.

Segundo Bassanezi (veja em [2]):

Modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. O modelo pode ser considerado como uma síntese da reflexão sobre alguma parte da realidade. Seu objetivo é explicar ou entender a situação estudada para, eventualmente poder agir sobre ela e, mesmo as situações mais simples fornecem motivações para uma iniciação científica. (BASSANEZI, 2012, p. 12)

Temos em nosso cotidiano várias situações problemas que podem ser observadas, várias aplicações de equações diferenciais, isto é, podemos modelar situações do dia a dia, jogos e etc., por equações matemáticas ou sistemas de equações que envolvam equações diferenciais. De acordo com Bassanezi (veja em [2]):

Um problema real não pode ser representado de maneira exata em toda sua complexidade por uma equação matemática ou um sistema de equações. Um modelo deve ser considerado apenas como um retrato ou uma simulação de um fenômeno e sua validação depende muito da escolha das variáveis e das hipóteses formuladas. (BASSANEZI, 2012, p. 14)

A modelagem é um processo dinâmico para se obter modelos matemáticos e, segundo Bassanezi (2012) em seu livro [2], é construída por etapas as quais ele define como:

Experimentação: Escolhido o tema em estudo, obteremos dados experimentais ou empíricos para compreensão do problema que nos ajudaram na estruturação, formulação e modificações do modelo. Como nossa construção é voltada para o ensino básico a obtenção destes dados pode ser feita até mesmo pela internet.

Abstração: É o processo de seleção das variáveis essenciais responsáveis pela evolução do fenômeno estudado.

Formulação do modelo: É o processo que transforma a linguagem usual em uma linguagem matemática montando-se uma estrutura matemática que sintetiza o modelo.

Resolução: Dependendo do grau de complexidade, a resolução pode ser realizada de maneira analítica ou numérica.

Validação: É a comparação feita do modelo obtido com a realidade.

Modificação: Se na validação do modelo o grau de aproximação desejado não é atingido devemos inserir novas variáveis no modelo ou modificar a lei de formação, e assim o modelo original deve ser modificado iniciando novamente o processo.

Aplicação: Obtendo o modelo desejado com sucesso, este permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender o experimento observado, ou seja, o observador é capaz de participar do mundo real e influenciar suas mudanças.

A linguagem oferecida pelas equações diferenciais é fundamental na transferência e entendimento da linguagem "natural", uma vez que a palavra chave *variação* aparece quase sempre nas situações reais. Quando estas variações são instantâneas ou contínuas estas equações matemáticas são chamadas de equações diferenciais, ao passo que se as variáveis envolvidas forem discretizadas, isto é, funções de uma malha de pontos, em que temos as médias das variações, então as equações do modelo serão denominadas equações de diferenças. Como o público alvo desta dissertação é trabalharmos com alunos do ensino básico, nos ateremos a falar somente em equações de diferenças, pois para tratarmos de equações diferenciais seria necessário um maior aprofundamento em cálculo diferencial e integral.

Neste trabalho, analisaremos as equações de diferenças de primeira e segunda ordem e alguns modelos matemáticos que descrevem situações cotidianas como: o crescimento populacional, o orçamento familiar, o financiamento de veículos e a criação de escargot. Tal análise será realizada com uma analogia a recorrências de primeira e segunda ordem, onde nesta, aprenderemos a identificar uma recorrência, distinguir recorrências lineares das não lineares, diferenciar recorrências de primeira e segunda ordem e analisar, identificar e resolver equações recursivas. Finalizando a ideia de recorrência caracterizando algumas brincadeiras e jogos lúdicos, como: a pizza e o queijo de Steiner, a torre de Hanói e os coelhos de Fibonacci. Buscamos trazer ao leitor uma grande quantidade de exemplos diretos e contextualizados para a maior fixação de como caracterizar recursivamente uma situação problema e como resolvê-las usando alguns teoremas e resultados, estimulando o leitor a pensar, observar e criar novos modelos gerando uma visão mais crítica e interventora no meio onde está inserido.

2 Recorrência

Sequências recorrentes são sequências em que cada termo x_0, x_1, x_2, \dots é determinado por uma dada função dos termos anteriores. Dado um inteiro positivo k , uma *sequência recorrente de ordem k* é uma sequência em que cada termo é determinado como uma função dos k termos anteriores:

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_{n+1}, x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

E se esta for *linear* então

$$x_{n+k} = g_1(n)x_{n+k-1} + g_2(n)x_{n+k-2} + \dots + g_k(n)x_n + g_{k+1}(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

onde $g_i(n)$ é uma função em relação a n , com $i = \{1, 2, \dots, k+1\}$.

Com essa generalidade, o comportamento de tais sequências pode ser bastante caótico e de descrição muito difícil, mesmo qualitativamente. Um caso particular muito importante ocorre quando a função f é *linear de coeficientes constantes*: existem constantes c_1, c_2, \dots, c_{k+1} tal que

$$x_{n+k} = c_1x_{n+k-1} + c_2x_{n+k-2} + \dots + c_kx_n + c_{k+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tais sequências são conhecidas como sequências recorrentes lineares, e generalizam simultaneamente as progressões geométricas, aritméticas e os polinômios. Uma sequência é dita *não-linear* se f não for de primeiro grau.

Observe que as recorrências lineares podem ser classificadas como *homogênea*, o termo independente é nulo ($c_{k+1} = 0$), e *não-homogênea*, o termo independente é não-nulo ($c_{k+1} \neq 0$).

Este capítulo é uma adaptação as menções que se encontram nos livros de Elon Lages Lima [12] e [13], na apostila de Abramo Hefez [9] e ao artigo escrito por Carlos Gustavo Moreira [14] com o objetivo principal de aprendermos a determinar soluções de sequências de primeira e segunda ordem com a finalidade de resolvermos equações de diferenças.

2.1 Sequências Definidas Recursivamente

Muitas sequências são definidas recursivamente (isto é, por recorrência), ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

Exemplo 2.1.1. A sequência (x_n) dos números naturais pares $2, 4, 6, 8, \dots$ pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + 2$ ($n \geq 1$), com $x_1 = 2$.

Exemplo 2.1.2. Qualquer progressão aritmética (x_n) de razão r e primeiro termo a pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + r$ ($n \geq 1$), com $x_1 = a$.

Exemplo 2.1.3. Qualquer progressão geométrica (x_n) de razão q e primeiro termo a pode ser definida por $x_{n+1} = q \cdot x_n$ ($n \geq 1$), com $x_1 = a$.

Exemplo 2.1.4. A sequência (F_n) , dita de Fibonacci, cujos termos são $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ e na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ($n \geq 0$), com $F_0 = F_1 = 1$.

Vemos que uma recorrência, por si só, não define a sequência. Por exemplo, a recorrência do Exemplo 2.1.1, $x_{n+1} = x_n + 2$, é satisfeita não apenas pela sequência dos números pares, mas por todas as progressões aritméticas de razão 2. Para que a sequência fique perfeitamente determinada é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s).

Observe que, nos Exemplos 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.3 temos *recorrências de primeira ordem*, isto é, nas quais cada termo é expresso em função do antecessor imediato, e que, no Exemplo 2.1.4, temos uma *recorrência de segunda ordem*, ou seja, na qual cada termo é expresso em função dos dois antecessores imediatos.

Exemplo 2.1.5. Quantas são as sequências de 10 termos, pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?

Solução. Chamando x_n o número de sequências com n termos que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0, o valor de x_{n+2} será a soma das seguintes quantidades:

- i. O número de sequências de $n + 2$ termos que começam por 1 e não possuem dois zeros consecutivos. Isso é precisamente igual a x_{n+1} , pois se o primeiro termo é 1, para formar a sequência basta determinar os termos a partir do primeiro, o que pode ser feito de x_{n+1} modos.

- ii. O número de seqüências de $n + 2$ termos que começam por 2 e não possuem dois zeros consecutivos ocorre de maneira análoga ao item anterior, ou seja, x_{n+1} modos.
- iii. O número de seqüências de $n + 2$ termos que começam por 0 e não possuem dois zeros consecutivos. Se o primeiro termo é zero, temos dois modos de escolher o segundo termo (1 ou 2) e, escolhido o segundo termo, temos x_n modos de escolher os demais. Há portanto, $2x_n$ seqüências começadas em 0.

Logo, $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n$. Temos que $x_1 = 3$, pois a seqüência pode começar com 0, 1 ou 2, e que $x_2 = 8$, pois temos $9 - 1 = 8$ maneiras de obtermos uma seqüência com dois algarismos onde estes algarismos podem ser 0, 1 e 2, excluindo-se o caso $\{0, 0\}$. Daí obtemos $x_3 = 2x_2 + 2x_1 = 22$, $x_4 = 60, \dots, x_{10} = 24960$.

Exemplo 2.1.6. Seja D_n o número de permutações caóticas de $1, 2, \dots, n$, isto é, o número de permutações simples de $1, 2, \dots, n$, nas quais nenhum elemento ocupa o seu lugar primitivo. Mostre que $D_{n+2} = (n + 1)(D_{n+1} + D_n)$, se $n \geq 1$.

Solução. Calculemos D_{n+2} , o número de permutações simples de $1, 2, \dots, n + 2$ nas quais nenhum elemento ocupa o seu lugar primitivo. As permutações podem ser divididas em dois grupos: aquelas nas quais o 1 ocupa o lugar do número que ocupa o primeiro lugar e aquelas nas quais isso não ocorre.

Para formar uma permutação do primeiro grupo, devemos escolher o número que trocará de lugar com o 1, o que pode ser feito de $n + 1$ modos, e, em seguida, devemos arrumar os demais n elementos nos restantes n lugares, sem que nenhum desses elementos ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_n modos. Há, portanto, $(n + 1) \cdot D_n$ permutações no primeiro grupo.

Para formar uma permutação do segundo grupo, temos de escolher o lugar que será ocupado pelo número 1 (chamemos esse lugar de k), o que pode ser feito de $n + 1$ modos, e, em seguida devemos arrumar os restantes $n + 1$ elementos dos demais $n + 1$ lugares, sem que o elemento k ocupe o primeiro lugar e sem que nenhum dos demais elementos ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_{n+1} modos. Há, portanto, $(n + 1) \cdot D_{n+1}$ permutações no segundo grupo.

Logo, $D_{n+2} = (n + 1)(D_{n+1} + D_n)$, como queríamos demonstrar.

Nos exemplos 2.1.7 e 2.1.8 mostraremos que toda recorrência de primeira e segunda ordem são escritas de maneira única.

Exemplo 2.1.7. Prove que uma recorrência de primeira ordem, $x_{n+1} = f(x_n)$, com uma condição inicial $x_1 = a$, tem sempre uma e só uma solução.

Solução. Temos que o valor de x_1 está bem definido, pois $x_1 = a$. Suponhamos, por indução finita, que x_n está bem definido. Então, temos que $x_{n+1} = f(x_n)$, ou seja, x_{n+1} é escrito em função de x_n . Como, por hipótese, x_n está bem definido, teremos que x_{n+1} também está bem definido. Logo, pelo princípio de indução finita, o valor de x_n está bem definido para todo natural n .

Exemplo 2.1.8. Prove que uma recorrência de segunda ordem, $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$, com condições iniciais $x_1 = a$ e $x_2 = b$, tem sempre solução única.

Solução. Temos que os valores de x_1 e x_2 estão bem definidos, pois $x_1 = a$ e $x_2 = b$. Suponhamos, por indução finita, que x_n e x_{n+1} estão bem definidos. Então, temos que $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$, ou seja, x_{n+2} é escrito em função de x_n e x_{n+1} . Como, por hipótese, x_n e x_{n+1} estão bem definidos, teremos que x_{n+2} também está bem definido. Logo, pelo princípio de indução finita, o valor de x_n está bem definido para todo natural n .

2.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Definição 2.2.1. Uma recorrência de primeira ordem expressa x_{n+1} em função de x_n , ou seja, a recorrência depende do seu antecessor imediato, portanto

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

E esta, é dita linear se (e somente se) essa função for do primeiro grau, ou seja,

$$x_{n+1} = g_1(n)x_n + g_2(n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $g_i(n)$ é uma função em relação a n , com $i = \{1, 2\}$.

Observação 2.2.1. Temos que a recorrência linear de primeira ordem pode ser classificada como: *homogênea*, o termo independente é nulo ($g_2(n) = 0$), e *não-homogênea*, o termo independente é não nulo ($g_2(n) \neq 0$).

Definição 2.2.2. A recorrência é não-linear se (e somente se) a função $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, não é de primeiro grau.

Exemplo 2.2.1. As recorrências $x_{n+1} = 2x_n - n^2$ e $x_{n+1} = nx_n$ são lineares e a recorrência $x_{n+1} = x_n^2$ não é linear. As duas últimas são ditas homogêneas, por não possuírem termo independente de x_n .

Não há grandes dificuldades na resolução de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem, conforme mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 2.2.2. Resolva a recorrência $x_{n+1} = nx_n$, com $x_1 = 1$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}x_2 &= 1x_1 \\x_3 &= 2x_2 \\x_4 &= 3x_3 \\&\vdots \\x_n &= (n-1)x_{n-1}.\end{aligned}$$

Daí, multiplicando membro a membro, obtemos

$$x_2x_3x_4 \cdots x_n = [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)]x_1x_2x_3 \cdots x_{n-1}.$$

Como os termos da recorrência são não nulos, podemos simplificar a equação e obter $x_n = (n-1)!x_1$. Logo, $x_n = (n-1)!$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exemplo 2.2.3. Resolva a recorrência $x_{n+1} = 2x_n$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}x_2 &= 2x_1 \\x_3 &= 2x_2 \\x_4 &= 2x_3 \\&\vdots \\x_n &= 2x_{n-1}.\end{aligned}$$

Daí, multiplicando membro a membro e simplificando conforme o exemplo anterior, obtemos $x_n = 2^{n-1}x_1$. É claro que como não foi definido o valor de x_1 , há uma infinidade de soluções para a recorrência.

Logo, tomando $x_1 = c$, uma constante arbitrária, teremos

$$x_n = c \cdot 2^{n-1}.$$

As recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem que mais facilmente se resolvem são as da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Com efeito, temos

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 + f(1) \\
 x_3 &= x_2 + f(2) \\
 x_4 &= x_3 + f(3) \\
 &\vdots \\
 x_n &= x_{n-1} + f(n-1).
 \end{aligned}$$

Somando-se membro a membro obtemos

$$\begin{aligned}
 x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \\
 \Leftrightarrow x_n &= x_1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \\
 \Leftrightarrow x_n &= x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k).
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.4. Resolva a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n$, com $x_1 = 1$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 + 2^1 \\
 x_3 &= x_2 + 2^2 \\
 x_4 &= x_3 + 2^3 \\
 &\vdots \\
 x_n &= x_{n-1} + 2^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Somando-se membro a membro as equações, obtemos

$$\begin{aligned}
 x_n &= x_1 + (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) \\
 &= 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} \\
 &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} \\
 &= 1 \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\
 &= 2^n - 1.
 \end{aligned}$$

Logo, $x_n = 2^n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exemplo 2.2.5. Resolva $x_{n+1} = x_n + n$, com $x_1 = 0$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 + 1 \\
 x_3 &= x_2 + 2 \\
 x_4 &= x_3 + 3 \\
 &\vdots \\
 x_n &= x_{n-1} + (n-1).
 \end{aligned}$$

Somando-se membro a membro as equações, obtemos

$$\begin{aligned}x_n &= x_1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) \\ &= \frac{n(n - 1)}{2}.\end{aligned}$$

Logo, $x_n = \frac{n(n - 1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exemplo 2.2.6. Determine o número máximo de regiões em que n círculos podem dividir o plano.

Solução. Inicialmente, tomaremos x_n como sendo o número máximo de regiões em que n círculos podem dividir o plano. Observe que um círculo divide o plano em duas regiões, ou seja, $x_1 = 2$. Se traçarmos mais um círculo, de modo que gere uma quantidade máxima de regiões, veremos que este gera mais duas novas regiões, ou seja, $x_2 = x_1 + 2 \cdot 1 = 4$. Continuando o processo traçando-se mais um círculo nas mesmas condições do enunciado, veremos que este gera mais quatro novas regiões, ou seja, $x_3 = x_2 + 2 \cdot 2 = 8$. Assim, quando traçarmos o círculo $n + 1$, este intersecta, os n círculos já existentes, em $2n$ pontos, isto é, gera $2n$ novas regiões. Portanto, $x_{n+1} = x_n + 2n$, com $x_1 = 2$, o que caracteriza a questão recursivamente. Assim,

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 \\ x_2 &= x_1 + 2 \\ x_3 &= x_2 + 4 \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 2(n - 1).\end{aligned}$$

Somando membro a membro as equações, obtemos

$$\begin{aligned}x_n &= 2 + 2 + 4 + \cdots + 2(n - 1) \\ &= 2 + 2[1 + 2 + \cdots + (n - 1)] \\ &= 2 + n(n - 1) \\ &= n^2 - n + 2.\end{aligned}$$

Logo, $x_n = n^2 - n + 2$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exemplo 2.2.7. Quantas são as seqüências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que possui um número ímpar de termos iguais a 0?

Solução. Primeiramente denominaremos x_n como sendo a quantidade de seqüências de n termos que possui um numero ímpar de termos iguais a 0. Seqüências de $n + 1$ termos compostas por 0, 1 ou 2 com um número ímpar de termos iguais a 0 podem ser de dois tipos:

- i. As que começam com 1 ou 2, restando n termos que podem ser escritos de x_n maneiras cada;
- ii. As que começam com 0, restando n termos que podem ser escritos de $3^n - x_n$ maneiras, pois o total de seqüências que possuem termos iguais a 0, 1 ou 2 é dado por 3^n e retirando-se a quantidade de seqüências que possui um número ímpar de termos iguais a 0 obteremos a quantidade de seqüências que possui um número par de termos iguais a 0, como já fixamos um 0 no início da seqüência teremos $3^n - x_n$ seqüências com $n + 1$ termos satisfazendo as condições desejadas.

Portanto, temos que a recorrência é $x_{n+1} = 2x_n + (3^n - x_n)$, ou seja, $x_{n+1} = x_n + 3^n$ com $x_1 = 1$, pois a seqüência com um termo que possui um número ímpar de termos iguais a 0 é a seqüência (0). Então,

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= x_1 + 3^1 \\ x_3 &= x_2 + 3^2 \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 3^{n-1}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as equações, obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} \\ &= 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} \\ &= \frac{3^n - 1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $x_n = \frac{3^n - 1}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

O teorema a seguir mostra que qualquer recorrência linear não-homogênea de primeira ordem pode ser transformada em uma recorrência da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Teorema 2.2.1. *Se a_n é uma solução não-nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \quad \text{em} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}.$$

Demonstração. A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \quad \text{em} \quad a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Mas, $a_{n+1} = g(n)a_n$, pois a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$. Portanto, a equação se transforma em

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n),$$

ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}.$$

□

Exemplo 2.2.8. Resolva $x_{n+1} = 2x_n + 1$, sendo que $x_1 = 2$.

Solução. Uma solução não-nula de $x_{n+1} = 2x_n$ é, por exemplo, $a_n = 2^{n-1}$, conforme vimos no Exemplo 2.2.3. Fazendo a substituição $x_n = 2^{n-1}y_n$, obtemos $2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$. Daí se tem

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 2^{-1} \\ y_3 &= y_2 + 2^{-2} \\ y_4 &= y_3 + 2^{-3} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

Somando-se membro a membro as equações, resulta

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-(n-1)} \\ &= y_1 + 2^{-1} \frac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1} \\ &= y_1 - 2^{1-n} + 1. \end{aligned}$$

Como $x_n = 2^{n-1}y_n$ e $x_1 = 2$, temos $y_1 = 2$ e $y_n = 3 - 2^{1-n}$. Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{n-1}y_n \\ &= 2^{n-1}(3 - 2^{1-n}) \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - 1, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exemplo 2.2.9. Resolva $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$, sendo que $x_1 = 2$.

Solução. Uma solução não-nula de $x_{n+1} = 3x_n$ é, por exemplo, $a_n = 3^{n-1}$ (ou qualquer outra progressão geométrica de razão 3). Façamos a substituição $x_n = 3^{n-1}y_n$. Obtemos $3^n y_{n+1} = 3^n y_n + 3^n$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 1$. Daí, y_n é uma progressão aritmética de razão 1. Logo, $y_n = y_1 + (n-1)1$. Como $x_n = 3^{n-1}y_n$ e $x_1 = 2$, temos $y_1 = 2$ e $y_n = n+1$. Daí, $x_n = (n+1)3^{n-1}$.

Exemplo 2.2.10. Sheila e Helena disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem a iniciou tem probabilidade 0,6 de ganhá-la e probabilidade 0,4 de perdê-la. Se Helena iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade de Sheila ganhar a n -ésima partida?

Solução. Analisaremos $n+1$ partidas realizadas e consideraremos x_n a probabilidade de Sheila ganhar a n -ésima partida. Para Sheila ganhar a $(n+1)$ -ésima partida:

- Ou ela ganha a n -ésima partida e ganha a seguinte (com probabilidade condicional 0,6), com probabilidade igual a $0,6x_n$;
- Ou perde a n -ésima partida (com probabilidade $1-x_n$) e ganha a seguinte (com probabilidade condicional 0,4), com probabilidade igual a $0,4(1-x_n)$.

Portanto, a probabilidade x_{n+1} de vitória na $(n+1)$ -ésima partida é dada por $x_{n+1} = 0,6x_n + 0,4(1-x_n)$, ou seja, $x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4$, com $x_1 = 0,4$, pois Sheila não inicia a primeira partida.

Para resolver a recorrência começamos com uma solução não nula de $x_{n+1} = 0,2x_n$; como já foi analisado em exemplos anteriores, $a_n = (0,2)^{n-1}$. Fazendo a substituição $x_n = (0,2)^{n-1}y_n$, conforme o teorema 2.2.1 temos

$$(0,2)^n y_{n+1} = (0,2)^n y_n + 0,4 \Leftrightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{0,4}{(0,2)^n},$$

com $y_1 = \frac{x_1}{a_1} = 0,4$. Temos que

$$\begin{aligned} y_1 &= 0,4 \\ y_2 &= y_1 + \frac{0,4}{0,2} \\ y_3 &= y_2 + \frac{0,4}{(0,2)^2} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + \frac{0,4}{(0,2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as equações, obtemos

$$\begin{aligned} y_n &= 0,4 + \frac{0,4}{0,2} + \cdots + \frac{0,4}{(0,2)^{n-1}} \\ &= 0,4 \frac{1 - (0,2)^n}{(0,8) \cdot (0,2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= (0,2)^{n-1} y_n \\ &= \frac{1 - (0,2)^n}{2}, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exemplo 2.2.11. Um círculo foi dividido em n ($n \geq 2$) setores. De quantos modos podemos colori-los, cada setor com uma só cor, se dispomos de k ($k > 2$) cores diferentes e setores adjacentes não devem ter a mesma cor?

Solução. Seja x_n o número de colorações para n setores e consideremos o problema de colorir $n + 1$ setores. Observe que o primeiro setor pode ser colorido de k modos e cada setor subsequente pode ser colorido de $k - 1$ modos, pois não se pode receber a mesma cor do anterior, resultando assim em $k(k - 1)^n$ colorações. Mas este resultado inclui os casos em que o último setor recebe a mesma cor do primeiro, o que é proibido. Os casos contados indevidamente correspondem às colorações que são válidas, exceto pelo fato de dois setores adjacentes terem a mesma cor. Considerando estes dois setores como um único, estas colorações que seram descontadas correspondem a colorações válidas em um círculo que foi dividido em n setores. Portanto, $x_{n+1} = k(k - 1)^n - x_n$, com $x_2 = k(k - 1)$. Usando o teorema 2.2.1, temos que uma solução da equação homogênea $x_{n+1} = -x_n$ é $a_n = (-1)^{n-1}$, conforme exemplos anteriores. Fazendo a substituição $x_n = a_n y_n$, teremos $(-1)^n y_{n+1} = (-1)^n y_n + k(k - 1)^n$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + (-1)^n k(k - 1)^n$, com $y_2 = \frac{x_2}{a_2} = -k(k - 1)$. Assim,

$$\begin{aligned} y_2 &= -k(k - 1) \\ y_3 &= y_2 + k(k - 1)^2 \\ y_4 &= y_3 - k(k - 1)^3 \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + (-1)^{n-1} k(k - 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as equações, obtemos

$$y_n = -k(k - 1) + k(k - 1)^2 - k(k - 1)^3 + \cdots + (-1)^{n-1} k(k - 1)^{n-1},$$

que é a soma dos termos de uma P.G. de razão $-(k-1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} y_n &= -k(k-1) \frac{1 - (-1)^{n-1}(k-1)^{n-1}}{1 + (k-1)} \\ &= -(k-1) - (-1)^n(k-1)^n. \end{aligned}$$

Logo, para $x_2 = k(k-1)$, temos

$$\begin{aligned} x_n &= a_n y_n \\ &= (-1)^{n-1} [-(k-1) - (-1)^n(k-1)^n] \\ &= (-1)^n(k-1) + (k-1)^n. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.12. A torcida do Fluminense tem hoje x_0 membros. A taxa anual de natalidade é i , a de mortalidade é j e, além disso, todo ano um número fixo de r torcedores desiste de vez. Se $i > j$, determine o número de torcedores daqui a n anos. A torcida está condenada a extinção?

Solução. Seja x_n o número de torcedores daqui a n anos. Analisaremos o número de torcedores daqui a $n+1$ anos. Observe que x_{n+1} é composto por:

- A quantidade de torcedores do ano anterior, que é representado por x_n ;
- A quantidade de torcedores que nascem tricolor (sofredor) durante o ano n para o ano $n+1$, decorridos, isto é, ix_n ;
- A quantidade de torcedores que morrem tricolor durante o mesmo decorrer de tempo do item anterior, isto é, jx_n ;
- A desistência do time (sábios), ou seja, a saída de r torcedores.

Portanto, temos $x_{n+1} = x_n + ix_n - jx_n - r$, ou seja, $x_{n+1} = (1+i-j)x_n - r$, considerando a torcida inicial igual a x_0 . Conforme o teorema 2.2.1, temos que uma solução para a recorrência $x_{n+1} = (1+i-j)x_n$ é $a_n = (1+i-j)^{n-1}$. Substituindo $x_n = a_n y_n$ e fazendo $p = 1+i-j$, obtemos

$$p^n y_{n+1} = p^n y_n - r \Leftrightarrow y_{n+1} = y_n - \frac{r}{p^n},$$

com $y_0 = \frac{x_0}{a_0} = x_0 p$. Assim,

$$\begin{aligned}
y_0 &= x_0 p \\
y_1 &= y_0 - r \\
y_2 &= y_1 - \frac{r}{p} \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} - \frac{r}{p^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Somando membro a membro as equações, obtemos

$$\begin{aligned}
y_n &= x_0 p - r - \frac{r}{p} - \dots - \frac{r}{p^{n-1}} \\
&= x_0 p - r \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^{n-1}} \right) \\
&= x_0 p - r \frac{\left(\frac{1}{p} \right)^n - 1}{\frac{1}{p} - 1} \\
&= x_0 p - r \frac{p^n - 1}{p^{n-1}(p - 1)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
x_n &= a_n y_n \\
&= x_0 p^n - r \frac{p^n - 1}{p - 1} \\
&= \left(x_0 - \frac{r}{p - 1} \right) p^n + \frac{r}{p - 1} \\
&= \left(x_0 - \frac{r}{i - j} \right) (1 + i - j)^n + \frac{r}{i - j}.
\end{aligned}$$

Como $p = 1 + i - j$ e $i > j$, por hipótese, temos que $p > 0$. Assim, a torcida se extingue quando o coeficiente $\left(x_0 - \frac{r}{i - j} \right)$ de p^n é negativo, ou seja, quando $r > x_0(i - j)$.

Exemplo 2.2.13. O salário de Daniel no mês n é $S_n = an + b$. Sua renda mensal é formada pelo salário e pelos juros de suas aplicações financeiras. Ele poupa anualmente $\frac{1}{p}$ de sua renda e investe sua poupança a juros mensais de taxa i . Determine a renda de Daniel no mês n .

Solução. Seja x_n a renda de Daniel, S_n seu salário e y_n o montante de suas aplicações

financeiras no mês n . Temos que, a renda de Daniel no mês n é igual ao salário mais o rendimento sobre o montante das aplicações no mês anterior, ou seja,

$$x_n = S_n + iy_{n-1}. \quad (2.1)$$

Observe que o montante das aplicações financeiras no mês n é igual ao do mês anterior somado ao valor poupado no mês n , isto é,

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{p}x_n. \quad (2.2)$$

Isolando y_{n-1} na equação 2.1 encontramos

$$y_{n-1} = \frac{x_n - S_n}{i}. \quad (2.3)$$

E, considerando a análise da renda no mês $n + 1$, temos que $x_{n+1} = S_{n+1} + iy_n$, ou seja,

$$y_n = \frac{x_{n+1} - S_{n+1}}{i}. \quad (2.4)$$

Por fim, fazendo as substituições encontradas nas equações 2.3 e 2.4 na equação 2.2, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - S_{n+1}}{i} &= \frac{x_n - S_n}{i} + \frac{1}{p}x_n \\ \Leftrightarrow x_{n+1} - S_{n+1} &= x_n - S_n + \frac{i}{p}x_n \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= \left(1 + \frac{i}{p}\right)x_n + S_{n+1} - S_n \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= \left(1 + \frac{i}{p}\right)x_n + a(n+1) + b - an - b \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= \left(1 + \frac{i}{p}\right)x_n + a. \end{aligned}$$

Portanto, temos que a recorrência $x_{n+1} = \left(1 + \frac{i}{p}\right)x_n + a$ caracteriza a renda de Daniel recursivamente, com $x_0 = b$, pois sua renda no mês 0 é dado somente pelo seu salário deste mesmo mês, ou seja, $x_0 = S_0 = a \cdot 0 + b = b$.

Seja $k = \left(1 + \frac{i}{p}\right)$, usando o teorema 2.2.1, temos que uma solução particular para a recorrência $x_{n+1} = kx_n$ é $a_n = k^{n-1}$. Fazendo a substituição $x_n = a_n z_n$ na recorrência $x_{n+1} = kx_n + a$, encontramos

$$k^n z_{n+1} = k^n z_n + a \Leftrightarrow z_{n+1} = z_n + \frac{a}{k^n},$$

com $z_0 = bk$, pois $x_0 = k^{(0-1)}z_0$, ou seja, $b = k^{-1}z_0$. Assim,

$$\begin{aligned} z_0 &= bk \\ z_1 &= z_0 + a \\ z_2 &= z_1 + \frac{a}{k} \\ &\vdots \\ z_n &= z_{n-1} + \frac{a}{k^{n-1}}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as equações, obtemos

$$\begin{aligned} z_n &= bk + a + \frac{a}{k} + \cdots + \frac{a}{k^{n-1}} \\ &= bk + a \left(1 + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k^{n-1}} \right) \\ &= bk + a \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^n - 1}{\frac{1}{k} - 1} \\ &= bk + a \frac{1 - k^n}{k^{n-1}(1 - k)}. \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} x_n &= a_n z_n \\ &= k^{n-1} \left(bk + a \frac{1 - k^n}{k^{n-1}(1 - k)} \right) \\ &= bk^n + a \frac{1 - k^n}{1 - k}. \end{aligned}$$

E, substituindo $k = \left(1 + \frac{i}{p}\right)$, teremos que o salário de Daniel no mês n é dado por

$$\begin{aligned} x_n &= b \left(1 + \frac{i}{p}\right)^n + a \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{p}\right)^n}{1 - \left(1 + \frac{i}{p}\right)} \\ &= b \left(1 + \frac{i}{p}\right)^n + \frac{ap - ap \left(1 + \frac{i}{p}\right)^n}{-i} \\ &= \left(b + \frac{ap}{i}\right) \left(1 + \frac{i}{p}\right)^n - \frac{ap}{i}, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2.1 A Pizza e o Queijo de Steiner

O grande geômetra alemão Jakob Steiner¹ (1796-1863) propôs e resolveu, em 1826, o seguinte problema:

Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos?

Pensando no plano como se fosse uma grande pizza e os cortes retos como se fossem retas pertencentes a este plano, determinaremos o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano.

Primeiramente, montaremos uma recorrência que defina a pizza de Steiner considerando P_n a quantidade máxima de regiões que n retas dividem o plano. Observe que, se não tivermos nenhuma reta teremos somente uma região (a pizza inteira), ou seja, $P_0 = 1$. Traçando-se uma reta no plano teremos duas regiões. Se traçarmos mais uma reta no plano de modo a obtermos a quantidade máxima de regiões, veremos que está corta a primeira reta já existente em apenas um ponto, gerando assim duas novas regiões, ou seja, $P_2 = P_1 + 2 = 4$. Façamos o traçado de mais uma reta de tal maneira que está produza o máximo de regiões possíveis, assim esta nova reta cortará as duas retas já existentes em um ponto cada gerando três novas regiões, ou seja, $P_3 = P_2 + 3 = 7$. Continuando o processo e fazendo a análise para $n + 1$ retas temos que, se em um plano tivermos n retas gerando P_n regiões, respeitando as condições impostas pela questão, então se traçarmos a reta $n + 1$ de modo que está produza uma quantidade máxima de regiões, veremos que a reta $n + 1$ corta as n retas em n pontos, gerando assim $n + 1$ novas regiões, isto é, $P_{n+1} = P_n + (n + 1)$, com $P_0 = 1$.

¹Matemático e um dos maiores geômetras da história nascido em Utzenstorf, Suíça, de grande influência e destaque no estudo dos triângulos e círculos. Autodidata na infância, estudou na Escola Pestalozzi, em Yverdon, Suíça. De extraordinária intuição na geometria, ainda estudou em Heidelberg e Berlim, Alemanha. Obteve um doutorado honorário da Universidade de Königsberg (1832), e, dois anos mais tarde, foi indicado para ensinar geometria Universidade de Berlim, onde se tornou professor e viveu até sua morte. Publicou *Systematische entwicklungen* (1832), sobre geometria projetiva baseada em considerações métricas. Colecionou vários escritos, *Gesammelte Werke*, que publicou em dois volumes (1881/1882) e morreu em Berna, Suíça (veja em [10]).

Resolveremos agora a recorrência $P_{n+1} = P_n + n + 1$, com condição inicial $P_0 = 1$, que caracteriza a pizza de Steiner. Observe que

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= P_0 + 1 \\ P_2 &= P_1 + 2 \\ &\vdots \\ P_n &= P_{n-1} + n. \end{aligned}$$

Somando se membro a membro das equações, obteremos

$$\begin{aligned} P_n &= 1 + 1 + 2 + \cdots + n \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, o número máximo de regiões gerado por n retas é dado por $P_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mais, pensando um pouco, para fazer sua pizza, Steiner teve que primeiramente cortar o queijo. Se imaginarmos que o espaço tridimensional é um enorme queijo vamos achar uma fórmula para determinarmos o número máximo de pedaços que poderíamos obter ao cortá-lo por n planos.

Considerando que o queijo seja o espaço tridimensional e que os planos pertencentes a este espaço seccionam-o em regiões. Tomemos Q_n o número máximo de regiões que n planos seccionam o espaço. Observe que, se não tivermos nenhum plano seccionando este espaço, teremos uma única região (o queijo inteiro), ou seja, $Q_0 = 1$. Se tivermos um plano seccionando o espaço, obtemos duas regiões, $Q_1 = 2$. Acrescentando mais um plano a este espaço de modo que este divida o espaço em uma quantidade máxima de regiões, obteremos duas novas regiões, ou seja, $Q_2 = 4$. Continuando, se acrescentarmos mais um plano a este espaço, obedecendo os critérios desejados, obteremos quatro novas regiões, ou seja, $Q_3 = 8$.

Desta forma, acreditamos que $Q_n = 2^n$, contudo ao acrescentarmos o quarto plano verificamos que Q_n não é da forma 2^n . Para que possamos visualizar melhor o problema, vamos imaginar que temos os três planos coordenados xy , yz e xz do sistema cartesiano. Ao traçarmos o quarto plano, teremos três retas formadas da intersecção deste com os planos coordenados. As regiões determinadas por essas retas no plano acrescido

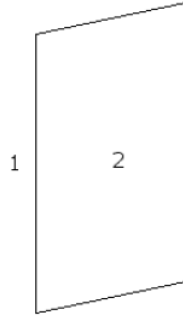


Figura 2.1: Plano dividindo o espaço em duas regiões [11].

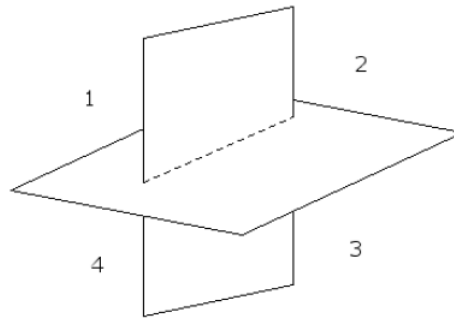


Figura 2.2: Plano dividindo o espaço em quatro regiões [11].

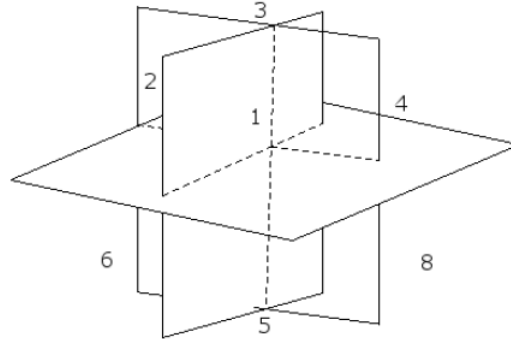


Figura 2.3: Plano dividindo o espaço em oito regiões [11].

dividem as antigas regiões tridimensionais, gerando sete novas regiões no espaço, isto é, $Q_4 = 8 + 7 = 15$.

Observe que ao acrescentar um plano temos que nos assegurar de que este não contenha nenhuma das retas de interseção já existentes. Generalizando, o n -ésimo plano intercepta os $n - 1$ planos antigos em $n - 1$ retas distintas, que o dividem em P_{n-1} regiões, como foi visto na pizza de Steiner. Com efeito, o plano divide o espaço em P_{n-1} novas regiões. Portanto, a recorrência é dada por

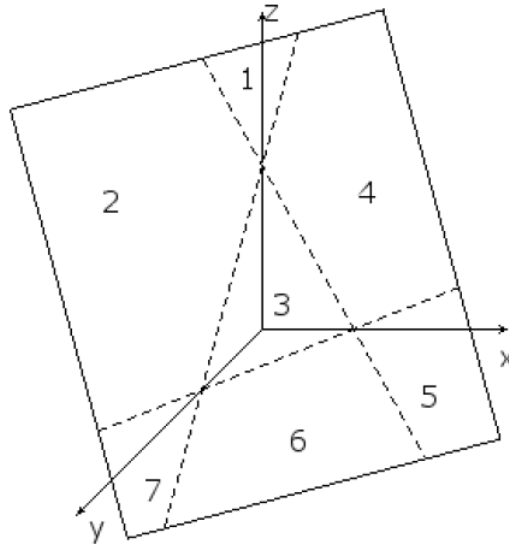


Figura 2.4: Acréscimo do quarto plano gerando sete novas regiões [11].

$$\begin{cases} Q_n = Q_{n-1} + P_{n-1} \\ Q_0 = 1 \end{cases} .$$

Como, $P_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} + 1$, temos que:

$$\begin{cases} Q_n = Q_{n-1} + \frac{(n-1)n}{2} + 1 \\ Q_0 = 1 \end{cases} . \quad (2.5)$$

Resolveremos a recorrência 2.5 e encontraremos uma fórmula que caracterize o queijo de Steiner. Temos que,

$$\begin{aligned} Q_0 &= 1 \\ Q_1 &= Q_0 + \frac{0 \cdot 1}{2} + 1 \\ Q_2 &= Q_1 + \frac{1 \cdot 2}{2} + 1 \\ Q_3 &= Q_2 + \frac{2 \cdot 3}{2} + 1 \\ &\vdots \\ Q_n &= Q_{n-1} + \frac{(n-1)n}{2} + 1. \end{aligned}$$

Somando-se membro a membro das equações e fazendo as simplificações necessárias, obtemos:

$$\begin{aligned}
Q_n &= n + 1 + \left(\frac{0 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \cdots + \frac{(n-1)n}{2} \right) \\
&= n + 1 + \frac{1}{2}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n) \\
&= n + 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k-1)k \\
&= n + 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 - k) \\
&= n + 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k.
\end{aligned}$$

Para determinarmos a fórmula de Q_n , falta encontrarmos um polinômio em função de n que represente $\sum_{k=1}^n k^2$ e $\sum_{k=1}^n k$. Observe que,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (k+1)^2 &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k + 1) \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (k+1)^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (k+1)^2 - \sum_{k=1}^n k^2 &= 2 \sum_{k=1}^n k + n \\
\Leftrightarrow (n+1)^2 - 1 &= 2 \sum_{k=1}^n k + n \\
\Leftrightarrow n(n+1) &= 2 \sum_{k=1}^n k \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Note também que,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n (k+1)^3 = \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \\
\Leftrightarrow & \sum_{k=1}^n (k+1)^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\
\Leftrightarrow & \sum_{k=1}^n (k+1)^3 - \sum_{k=1}^n k^3 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n \\
\Leftrightarrow & (n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n \\
\Leftrightarrow & 3 \sum_{k=1}^n k^2 = (n+1)^3 - n - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} \\
\Leftrightarrow & 3 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1)}{2} \\
\Leftrightarrow & \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n)}{6} \\
\Leftrightarrow & \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ na equação encontrada de Q_n , temos

$$\begin{aligned}
Q_n &= n+1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \\
&= n+1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= n+1 + \frac{n(n^2-1)}{6} \\
&= \frac{n(n^2+5)}{6} + 1.
\end{aligned}$$

Logo, a quantidade máxima de regiões que n planos dividem o espaço é da forma $Q_n = \frac{n(n^2+5)}{6} + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esta seção foi uma adaptação ao trabalho de monografia de Eliane Alves de Jesus e Elisa Fonseca Sena e Silva sobre Relações de Recorrência [11].

2.2.2 A Torre de Hanói

Você provavelmente já conhece esse jogo, pois trata-se de um jogo bastante popular que pode ser facilmente fabricado ou ainda encontrado em lojas de brinquedos de madeira.

Esse jogo foi idealizado e publicado pelo matemático francês Edouard Lucas², em 1883, que, para dar mais sabor à sua criação, inventou a seguinte lenda:

Na origem do tempo, num templo oriental, Deus colocou 64 discos perfurados de ouro puro ao redor de uma de três colunas de diamante e ordenou a um grupo de sacerdotes que movessem os discos de uma coluna para outra, respeitando as regras acima explicadas. Quando todos os 64 discos fossem transferidos para uma outra coluna, o mundo acabaria.

Será que isso seria possível? Quantos movimentos seriam necessários?

O jogo é formado por n discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro e uma base onde estão fincadas três hastes. Numa das hastes, estão enfiados os discos, de modo que nenhum disco esteja sobre um outro de diâmetro menor.

O objetivo do jogo é transferir a pilha de discos para uma outra haste, deslocando um disco de cada vez obedecendo as regras impostas no parágrafo acima.

Mostraremos uma recorrência x_n que caracterize a torre de Hanói para n discos e determinaremos x_n .

Seja x_n a quantidade mínima de movimentos de n discos para uma outra estaca. Analisaremos a quantidade mínima de movimentos de $n + 1$ discos conforme a figura 2.1.

²Edouard Lucas foi educado na Escola Normal em Amiens. Após o qual ele foi trabalhar para o Observatório de Paris, sob as ordens de Le Verrier. Durante a Guerra Franco-Prussiana (1870 a 1871) Lucas serviu como Oficial de Artilharia. Após a derrota Francesa, Lucas tornou-se Professor de matemática no Liceu Saint Louis em Paris. Lucas é melhor conhecido pelos seus resultados na Teoria dos Números. Lucas também criou métodos para testar a primalidade de números essencialmente alguns usados hoje em dia. Em 1876 usou tais métodos para provar que o número de Mersenne $2^{127} - 1$ era primo. Lucas também é conhecido pela sua invenção da Torre de Hanói e outras recreações matemáticas. Os seus quatro volumes de *Récréations mathématiques* (1882-94) tornou-se um clássico (veja em [8]).



Figura 2.5: Torre de Hanói com $n + 1$ discos [9].

Primeiramente, movimentaremos os n primeiros discos com x_n movimentos para a terceira estaca, sobrando assim, um disco na primeira estaca. Depois movimentaremos este disco para a segunda e, finalmente, movimentaremos os n discos que se encontram na terceira estaca para a segunda estaca com mais x_n movimentos, isto é, teremos a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com $x_1 = 1$, pois transferir um único disco para qualquer estaca é necessário um único movimento.



Figura 2.6: Movendo os n primeiros discos da primeira para a terceira estaca [9].

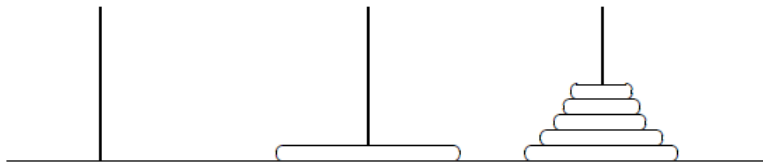


Figura 2.7: Movendo o último disco para a segunda estaca [9].

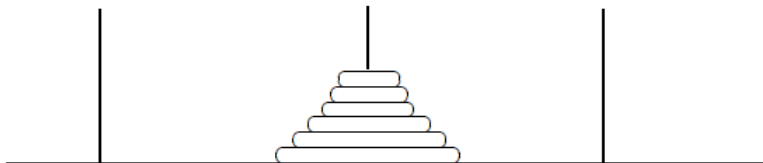


Figura 2.8: Movendo os n discos da terceira para a segunda estaca [9].

Portanto, para resolvermos a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com $x_1 = 1$, usaremos o teorema 2.2.1. Uma solução não nula de $x_{n+1} = 2x_n$ é $a_n = 2^{n-1}$. Fazemos então a substituição $x_n = a_n y_n = 2^{n-1} y_n$ na recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$ e obtemos

$$2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1 \Leftrightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2^n},$$

com $y_1 = x_1 = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= y_1 + \frac{1}{2} \\ y_3 &= y_2 + \frac{1}{2^2} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Somando se membro a membro das equações, obteremos

$$\begin{aligned} y_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= a_n y_n \\ &= 2^{n-1} \left(\frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \right) \\ &= 2^n - 1, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

De acordo com a lenda de Edouard Lucas, a quantidade de movimentos mínimos que os sacerdotes levariam para moverem os 64 discos de uma estaca para outra é igual a $2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$. E, considerando que o sacerdote levaria 1 segundo para realizar cada movimento então levaria-se, aproximadamente, um bilhão de séculos para que o mundo fosse destruído.

2.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Definição 2.3.1. Uma recorrência linear de segunda ordem é uma recorrência do tipo

$$f(n)x_{n+2} + g(n)x_{n+1} + h(n)x_n + k(n) = 0,$$

onde f , g , h e k são funções cujos domínios são o conjunto dos números naturais e $f(n)$ nunca se anula.

Observação 2.3.1. Quando $k(n) = 0$, a recorrência é dita homogênea, caso contrário a recorrência é dita não-homogênea.

Para que uma recorrência do tipo acima nos defina uma sequência, é preciso estipular os valores dos seus dois termos iniciais.

Primeiramente, vamos nos restringir ao caso em que $f(n) = 1$, $g(n) = p$, $h(n) = q$ e $k(n) = 0$, ou seja, uma recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes, isto é, recorrências da forma:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0. \quad (2.6)$$

Suporemos sempre $q \neq 0$, pois se $q = 0$, a recorrência seria, na realidade, uma recorrência de primeira ordem.

A solução é obtida considerando que $x_n = cr^n$ seja uma solução de 2.6. Então, substituindo x_n em 2.6 obtemos

$$cr^{n+2} + pcr^{n+1} + qcr^n = 0 \Leftrightarrow cr^n(r^2 + pr + q) = 0.$$

Assim, os valores de r que satisfazem a condição de $x_n = cr^n$ ser solução de 2.6 são $r = 0$ e as raízes do *polinômio característico* de 2.6,

$$p(r) = r^2 + pr + q.$$

Portanto, temos que:

- Se $r = 0$ então $x_n = 0$ para todo n (solução trivial) que só tem sentido se as condições iniciais forem nulas, isto é, $x_0 = x_1 = 0$.
- Se $r \neq 0$ as raízes do polinômio característico são

$$r_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

A cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma 2.6, associaremos uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, chamada *equação característica*. A nossa suposição preliminar de que $q \neq 0$ implica que 0 não é raiz da equação característica.

O teorema 2.3.1 a seguir mostra que se as raízes da equação característica são r_1 e r_2 , então qualquer sequência da forma $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2 .

Teorema 2.3.1. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2 .*

Demonstração. Substituindo $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$c_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + c_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = c_1 r_1^n 0 + c_2 r_2^n 0 = 0.$$

□

O teorema a seguir mostra que, se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no Teorema 2.3.1.

Teorema 2.3.2. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, com c_1 e c_2 constantes.*

Demonstração. Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Pelo teorema 2.3.1 temos que $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ também é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Portanto, determinemos constantes c_1 e c_2 que sejam soluções do sistemas de equações

$$\begin{cases} c_1 r_1 + c_2 r_2 = y_1 \\ c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 = y_2 \end{cases},$$

isto é,

$$c_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}.$$

Isso é possível pois $r_1 \neq r_2$, $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ para todo n natural, o que provará o teorema. Com efeito, seja $z_n = y_n - c_1 r_1^n - c_2 r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n . Temos

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - c_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - c_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q).$$

O primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Os dois últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.

Além disso, como $c_1r_1 + c_2r_2 = y_1$ e $c_1r_1^2 + c_2r_2^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n , como queríamos demonstrar. \square

Exemplo 2.3.1. Vamos determinar as soluções da recorrência

$$x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 0.$$

Solução. A equação característica é $r^2 + 4r - 5 = 0$, que tem raízes 1 e -5 . De acordo com os teoremas 2.3.1 e 2.3.2, as soluções da recorrência são as seqüências da forma $a_n = c_11^n + c_2(-5)^n$, isto é, $a_n = c_1 + c_2(-5)^n$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Exemplo 2.3.2. Quantas são as seqüências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?

Solução. Seja x_n a quantidade de seqüências de n termos que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0. E, analisando as seqüências com $n + 2$ termos, vimos no exemplo 2.1.5 que $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n$, ou seja, $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 2x_n = 0$, com $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$, caracteriza uma recorrência para a questão desejada.

Temos que a equação característica é $r^2 - 2r - 2 = 0$, que tem raízes iguais a $r_1 = 1 + \sqrt{3}$ e $r_2 = 1 - \sqrt{3}$. Assim, de acordo com os teoremas 2.3.1 e 2.3.2, temos que a solução geral da recorrência é $x_n = c_1(1 + \sqrt{3})^n + c_2(1 - \sqrt{3})^n$. Substituindo $n = 1$ e $n = 2$, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \begin{cases} c_1(1 + \sqrt{3}) + c_2(1 - \sqrt{3}) = 3 \\ c_1(1 + \sqrt{3})^2 + c_2(1 - \sqrt{3})^2 = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1(1 + \sqrt{3}) + c_2(1 - \sqrt{3}) = 3 \\ c_1(4 + 2\sqrt{3}) + c_2(4 - 2\sqrt{3}) = 8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + \sqrt{3}(c_1 - c_2) = 3 \\ 4(c_1 + c_2) + 2\sqrt{3}(c_1 - c_2) = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

onde $c_1 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}$ e $c_2 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}$. Logo, o número de seqüências com n termos iguais a 0, 1 ou 2 sem dois zeros consecutivos é

$$x_n = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}(1 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}(1 - \sqrt{3})^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Exemplo 2.3.3. Caracterize x_n como sendo o número de modos de cobrir um tabuleiro $2 \times n$ com dominós 2×1 iguais. Determine x_n .

Solução. Seja x_n a quantidade de modos que podemos cobrir um tabuleiro $2 \times n$. Vamos considerar o tabuleiro com 2 linhas e $n + 2$ colunas. Começando a preencher o tabuleiro a partir de seu canto esquerdo, observa-se que este pode começar a ser preenchido de duas maneiras diferentes.

- Podemos colocar a primeira peça de dominó "em pé" ocupando toda a primeira coluna, e assim, restando 2 linhas e $n + 1$ colunas, onde pode ser preenchido de x_{n+1} modos;
- Ou, podemos colocar as duas primeiras peças de dominó "deitadas" ocupando toda as duas primeiras colunas, restando assim, 2 linhas e n colunas que podem ser preenchidas de x_n modos.

Portanto, temos que a recorrências $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ caracteriza a situação onde $x_1 = 1$, pois desta forma só podemos colocar o único dominó "em pé", e $x_2 = 2$, pois podemos cobrir o tabuleiro, ou, com dois dominós "em pé", ou, com dois dominós "deitados".

Para determinarmos x_n , temos que a equação característica de $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, ou seja, $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ é $r^2 - r - 1 = 0$ onde suas raízes são iguais a $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim, pelos teoremas 2.3.1 e 2.3.2, temos que a solução geral da recorrência dada é

$$x_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (2.7)$$

E, substituindo $n = 1$ e $n = 2$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = 1 \\ c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + \sqrt{5}(c_1 - c_2) = 2 \\ 3(c_1 + c_2) + \sqrt{5}(c_1 - c_2) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, temos que $c_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$ e $c_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$. Logo, substituindo c_1 e c_2

na solução geral 2.7, obteremos

$$x_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exemplo 2.3.4. Uma planta, tal que cada uma de suas sementes produz, um ano após ter sido plantada, 21 novas sementes e, a partir daí, 44 novas sementes a cada ano. Se plantarmos hoje uma semente e se, toda vez que uma semente for produzida ela for imediatamente plantada, quantas sementes serão produzidas no ano n ?

Solução. Seja x_n a quantidade de sementes geradas no ano n . A quantidade de sementes produzidas no ano $n + 2$ é dado pela soma dos itens abaixo.

- As x_{n+1} sementes produzidas no ano $n + 1$ geram 21 novas sementes cada, pois passou-se um ano após terem sido plantadas, ou seja, $21x_{n+1}$ sementes.
- As $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0$ sementes produzidas nos anos $n, n - 1, \dots, 1, 0$, respectivamente, geram 44 novas sementes cada, pois estas já possuem mais de um ano que foram plantadas, ou seja, $44(x_n + x_{n-1} + \dots + x_1 + x_0)$ sementes.

Assim, a recorrência que representa a quantidade de sementes geradas no ano $n + 2$ é da forma

$$x_{n+2} = 21x_{n+1} + 44(x_n + x_{n-1} + \dots + x_1 + x_0). \quad (2.8)$$

De modo análogo, temos que a recorrência que representa a quantidade de sementes geradas no ano $n + 1$ é da forma

$$x_{n+1} = 21x_n + 44(x_{n-1} + x_{n-2} + \dots + x_1 + x_0). \quad (2.9)$$

Subtraindo a equação 2.9 da equação 2.8, membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+1} &= 21x_{n+1} + 23x_n \\ \Leftrightarrow x_{n+2} &= 22x_{n+1} + 23x_n \\ \Leftrightarrow x_{n+2} - 22x_{n+1} - 23x_n &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a recorrência desejada é da forma $x_{n+2} = 22x_{n+1} + 23x_n$, com $x_0 = 1$, pois inicialmente foi plantada uma única semente, e $x_1 = 21$, pois a semente que havia sido plantada a um ano atrás gera 21 novas sementes.

Assim, a equação característica da recorrência $x_{n+2} - 22x_{n+1} - 23x_n = 0$ é $r^2 - 22r - 23 = 0$. E esta, possui raízes iguais a $r_1 = -1$ e $r_2 = 23$. Com isso, pelos teoremas 2.3.1 e 2.3.2, temos que a solução geral da recorrência é dada por

$$x_n = c_1(-1)^n + c_223^n. \quad (2.10)$$

Substituindo, $n = 0$ e $n = 1$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} c_1(-1)^0 + c_223^0 = 1 \\ c_1(-1)^1 + c_223^1 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 + 23c_2 = 21 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, temos que $c_1 = \frac{1}{12}$ e $c_2 = \frac{11}{12}$. Logo, substituindo c_1 e c_2 na solução geral 2.10, obtemos

$$x_n = \frac{1}{12}(-1)^n + \frac{11}{12}23^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 2.3.5. Cindo times de igual força disputarão todo ano um torneio. Uma taça será ganha pelo primeiro time que vencer três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade da taça não ser ganha nos n primeiros torneios?

Solução. Seja x_n a probabilidade de que a taça não seja ganha nos n primeiros sorteios. Vamos caracterizar x_{n+2} em função de x_{n+1} e x_n .

Primeiramente, temos que o primeiro torneio pode ser ganho por qualquer um dos cinco times, com isso, duas alternativas podem ocorrer para caracterizarmos recursivamente os $n + 2$ torneios.

- i. O time que ganhou o primeiro torneio não ganhar o segundo, o que pode acontecer com probabilidade igual a $\frac{4}{5}$. Assim, considerando que os torneios iniciaram a partir do segundo (sem perda de generalidade), temos que esta alternativa tem probabilidade igual a $\frac{4}{5}x_{n+1}$ de acontecer.
- ii. O time que ganhou o primeiro torneio, ganhar o segundo, mas não ganhar o terceiro, o que pode acontecer com probabilidade igual a $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}$. Assim, considerando que os torneios iniciaram a partir do segundo (conforme a alternativa anterior), temos que esta possibilidade tem probabilidade igual a $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}x_n$, ou seja, $\frac{4}{25}x_n$ de acontecer.

Portanto, temos que a probabilidade de que a taça não seja ganha nos $n + 2$ primeiros torneios é caracterizada recursivamente pela recorrência $x_{n+2} = \frac{4}{5}x_{n+1} + \frac{4}{25}x_n$, ou seja, $x_{n+2} - \frac{4}{5}x_{n+1} - \frac{4}{25}x_n = 0$, com $x_1 = x_2 = 1$, pois ninguém ganhará a taça com

um ou dois torneios conforme a condição do exemplo. Assim, a equação característica da recorrência encontrada é $r^2 - \frac{4}{5}r - \frac{4}{25} = 0$ de raízes iguais a $r_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{5}$ e $r_2 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{5}$. E, conforme os teoremas 2.3.1 e 2.3.2, temos que a solução geral é dada pela equação

$$x_n = c_1 \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{5} \right)^n + c_2 \left(\frac{2 - 2\sqrt{2}}{5} \right)^n. \quad (2.11)$$

Substituindo $n = 1$ e $n = 2$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} c_1 \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{5} \right)^1 + c_2 \left(\frac{2 - 2\sqrt{2}}{5} \right)^1 = 1 \\ c_1 \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{5} \right)^2 + c_2 \left(\frac{2 - 2\sqrt{2}}{5} \right)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{5} \right) + c_2 \left(\frac{2 - 2\sqrt{2}}{5} \right) = 1 \\ c_1 \left(\frac{12 + 8\sqrt{2}}{25} \right) + c_2 \left(\frac{12 - 8\sqrt{2}}{25} \right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(c_1 + c_2) + 2\sqrt{2}(c_1 - c_2) = 5 \\ 12(c_1 + c_2) + 8\sqrt{2}(c_1 - c_2) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = \frac{5\sqrt{2}}{8} \\ c_1 + c_2 = \frac{5}{4} \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, temos que $c_1 = \frac{10 + 5\sqrt{2}}{16}$ e $c_2 = \frac{10 - 5\sqrt{2}}{16}$. Logo, substituindo c_1 e c_2 na solução geral 2.11, obtemos

$$x_n = \frac{10 + 5\sqrt{2}}{16} \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{5} \right)^n + \frac{10 - 5\sqrt{2}}{16} \left(\frac{2 - 2\sqrt{2}}{5} \right)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Se as raízes da equação característica forem complexas, a solução $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, c_1 e c_2 constantes arbitrárias pode ser escrita de modo a evitar cálculos com complexos. Pondo as raízes na forma trigonométrica, teremos:

$$\begin{aligned} r_1 &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta), & r_2 &= \rho(\cos \theta - i \sin \theta) \\ r_1^n &= \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta), & r_2^n &= \rho^n(\cos n\theta - i \sin n\theta) \end{aligned}$$

Logo,

$$c_1 r_1^n + c_2 r_2^n = \rho^n [(c_1 + c_2) \cos n\theta + (c_1 - c_2) i \sin n\theta].$$

É claro que $c'_1 = c_1 + c_2$ e $c'_2 = (c_1 - c_2)i$ são novas constantes e a solução pode ser escrita como

$$a_n = \rho^n (c'_1 \cos n\theta + c'_2 \sin n\theta).$$

Exemplo 2.3.6. A recorrência $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$ tem equação característica $r^2 + r + 1 = 0$, cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

que são complexas de módulo $\rho = 1$ e argumento principal $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$.

Logo, a solução é

$$\begin{aligned} x_n &= \rho^n (c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta) \\ &= c_1 \cos \frac{n\pi}{3} + c_2 \sin \frac{n\pi}{3}, \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes.

Exemplo 2.3.7. Observe que a recorrência $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$ possui equação característica igual a $r^2 + 2r + 2 = 0$ de raízes iguais a

$$r_1 = -1 + i \quad \text{e} \quad r_2 = -1 - i.$$

Assim, r_1 e r_2 são números complexos que possuem forma trigonométrica igual a

$$r_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

de módulo $\rho = \sqrt{2}$ e argumento principal $\theta = \pm \frac{3\pi}{4}$.

Logo, pelos teoremas 2.3.1 e 2.3.2, temos que a solução geral da recorrência é dada por

$$\begin{aligned} x_n &= \rho^n (c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta) \\ &= (\sqrt{2})^n \left(c_1 \cos \frac{3n\pi}{4} + c_2 \sin \frac{3n\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Até o presente momento analisamos os casos em que as raízes da equação característica são diferentes. Veremos agora a análise do conjunto solução de uma recorrência linear homogênea de segunda ordem onde as raízes da equação característica são iguais, ou seja, possui uma raiz real dupla. Observe os próximos dois teoremas.

Teorema 2.3.3. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então, $a_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2 .*

Demonstração. Se as raízes são iguais, então $r = -\frac{p}{2}$. Substituindo $a_n = c_1r^n + c_2nr^n$ na recorrência

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$\begin{aligned} c_1r^n(r^2 + pr + q) + c_2nr^n(r^2 + pr + q) + c_2r^n r(2r + p) &= \\ = c_1r^n 0 + c_2nr^n 0 + c_2r^n r 0 &= 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.4. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $c_1r^n + c_2nr^n$, c_1 e c_2 constantes.*

Demonstração. Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Pelo teorema 2.3.3 temos que $a_n = c_1r^n + c_2nr^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Portanto, determinaremos constantes c_1 e c_2 que sejam soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} c_1r + c_2r = y_1 \\ c_1r^2 + 2c_2r^2 = y_2 \end{cases},$$

isto é,

$$c_1 = 2\frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{y_2 - ry_1}{r^2}.$$

Isso é possível pois $r \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = c_1r^n + c_2nr^n$ para todo n natural, o que provará o teorema.

Com efeito, seja $z_n = y_n - c_1r^n - c_2nr^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n . Temos

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - c_1r^n(r^2 + pr + q) - c_2nr^n(r^2 + pr + q) - c_2r^n r(2r + p).$$

O primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. O segundo e o terceiro parênteses são iguais a zero porque r é raiz de $r^2 + pr + q = 0$. O quarto parêntese é igual a zero porque $2r + p = 0$ já que, quando $r_1 = r_2 = r$, tem-se $r = -\frac{p}{2}$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.

Além disso, como $c_1r + c_2r = y_1$ e $c_1r^2 + 2c_2r^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$ então $z_n = 0$ para todo n , como queríamos demonstrar. □

Exemplo 2.3.8. A recorrência $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0$ tem equação característica $r^2 + 6r + 9 = 0$ com raízes iguais a $r_1 = r_2 = -3$. E, pelos teoremas 2.3.3 e 2.3.4, temos que a solução da recorrência é $x_n = c_1(-3)^n + c_2n(-3)^n$, com c_1 e c_2 constantes.

Por fim, faremos a análise de recorrências lineares não-homogêneas de segunda ordem usando o teorema 2.3.5 que demonstraremos abaixo.

Teorema 2.3.5. *Se a_n é uma solução da equação*

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n),$$

então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

Demonstração. Substituindo x_n por $a_n + y_n$ na equação, obtemos

$$(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n).$$

Mas $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$, pois a_n é a solução da equação original. Logo, a equação se transformou em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

□

De acordo com o Teorema 2.3.5, a solução de uma recorrência não-homogênea é constituída de duas parcelas: uma solução qualquer da não-homogênea e a solução homogênea. A solução da homogênea, sabemos encontrar. Uma solução da não-homogênea, procuraremos por tentativas. Observe os exemplos:

Exemplo 2.3.9. A recorrência $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n + 5^n$ tem equação característica $r^2 - 5r + 6 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Portanto, a solução da homogênea, isto é, de $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$ é $h_n = c_12^n + c_23^n$.

Tentaremos agora descobrir uma solução particular, t_n , da recorrência

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n + 5^n.$$

Ora, se substituirmos t_n em $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n$ devemos encontrar $n + 5^n$. É bastante razoável imaginar que t_n seja a soma de um polinômio do primeiro grau com uma exponencial de base 5. Assim $t_n = An + B + C5^n$. Substituindo em

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n + 5^n,$$

obtemos $2An + 2B - 3A + 6C3^n = n + 5^n$. Portanto, t_n terá solução se $2A = 1$, $2B - 3A = 0$ e $6C = 1$. Logo,

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{6}.$$

Daí,

$$t_n = \frac{n}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5^n}{6}.$$

Logo, pelo teorema 2.3.5, a solução geral da recorrência é a soma de h_n com t_n . Portanto,

$$\begin{aligned} x_n &= h_n + t_n \\ &= c_1 2^n + c_2 3^n + \frac{n}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5^n}{6}, \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Exemplo 2.3.10. A recorrência $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + 2^n$ tem equação característica $r^2 - 5r + 6 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Portanto, a solução da equação homogênea, isto é, de $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$ é $h_n = c_1 2^n + c_2 3^n$. Tentaremos agora descobrir uma solução particular, t_n , da recorrência $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + 2^n$. Ora, se substituirmos t_n em $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n$ devemos encontrar $1 + 2^n$. É bastante razoável imaginar que t_n seja a soma de um polinômio constante com uma exponencial de base 2. Tentaremos $t_n = A + B2^n$. Substituindo em

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + 2^n,$$

obtemos $2A = 1 + 2^n$. Essa igualdade é impossível. A recorrência não admite solução da forma $t_n = A + B2^n$.

Parando para pensar no que aconteceu, verificamos que era óbvio que a nossa tentativa não podia dar certo. O espírito da nossa tentativa era tentar uma constante A para que obtivéssemos uma constante que igualaríamos a 1 e tentar $B2^n$ para gerar uma exponencial que pudéssemos igualar a 2^n . É claro que o termo $B2^n$ não poderia cumprir o seu papel. $B2^n$ é solução da homogênea (é a solução da homogênea que é obtida pondo $c_1 = B$ e $c_2 = 0$) e, substituído da equação, daria zero e não uma exponencial que pudéssemos igualar a 2^n .

Vamos corrigir a nossa tentativa para $t_n = A + Bn2^n$. Sempre que na nossa tentativa em algum bloco não cumprir o seu papel, fazemos a correção "aumentando o

grau”, isto é, multiplicando o bloco por n . Agora, substituindo obtemos $2A - 2B2^n = 1 + 2^n$.

Se $2A = 1$ e $-2B = 1$, isto é,

$$A = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad B = -\frac{1}{2},$$

temos a solução

$$t_n = \frac{1}{2} - \frac{n2^n}{2}.$$

Logo, pelo teorema 2.3.5, a solução geral da recorrência não homogênea é a soma de h_n com t_n . Portanto,

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 2^n + c_2 3^n + \frac{1}{2} - \frac{n2^n}{2} \\ &= c_1 2^n + c_2 3^n + \frac{1}{2} - n2^{n-1}, \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Exemplo 2.3.11. Resolva a equação

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^{n+3},$$

com $x_0 = 3$ e $x_1 = 6$.

Solução. A recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^{n+3}$ possui equação característica igual a $r^2 - 4r + 4 = 0$ da homogênea $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ de raízes iguais a $r_1 = r_2 = 2$. Assim, pelos teoremas 2.3.3 e 2.3.4, temos que a solução geral da homogênea é $h_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n$. Tentaremos agora descobrir uma solução particular, t_n , da recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^{n+3}$. Ora, se substituirmos t_n em $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n$ devemos encontrar 2^{n+3} . É bastante razoável imaginar que t_n é uma exponencial de base 2, mas como vimos no exemplo 2.3.10, temos que 2^n e $n2^n$ são soluções particulares da homogênea, portanto, aumentaremos o grau da nossa solução particular t_n duas vezes, ou seja, faremos $t_n = An^2 2^n$ e substituindo na recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^{n+3}$ obtemos

$$\begin{aligned} t_{n+2} - 4t_{n+1} + 4t_n &= 2^{n+3} \\ \Leftrightarrow A(n+2)^2 2^{n+2} - 4A(n+1)^2 2^{n+1} + 4An^2 2^n &= 8 \cdot 2^n \\ \Leftrightarrow 4An^2 2^n + 16An 2^n + 16A 2^n - 8An^2 2^n - 16An 2^n - 8A 2^n + 4An^2 2^n &= 8 \cdot 2^n \\ \Leftrightarrow 8A \cdot 2^n &= 8 \cdot 2^n \\ \Leftrightarrow A &= 1, \end{aligned}$$

isto é, a solução particular para a recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^{n+3}$ é

$$t_n = n^2 2^n.$$

Portanto, pelo teorema 2.3.5, a solução geral da recorrência não homogênea é a soma h_n com t_n , ou seja,

$$x_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + n^2 2^n. \quad (2.12)$$

Observe que nesta recorrência foram dados condições iniciais $x_0 = 3$ e $x_1 = 6$, o que garante valores únicos para c_1 e c_2 . Substituindo, $n = 0$ e $n = 1$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 2^0 + 0^2 \cdot 2^0 = 3 \\ c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 2^1 + 1^2 \cdot 2^1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ 2c_1 + 2c_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, temos que $c_1 = 3$ e $c_2 = -1$. Logo, substituindo os valores encontrados na solução geral 2.12, obtemos

$$x_n = 3 \cdot 2^n - n 2^n + n^2 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.3.1 Os Coelhos de Fibonacci

Trata-se do seguinte problema proposto e resolvido pelo matemático italiano Leonardo de Pisa³ em seu livro *Liber Abacci*, de 1202.

O problema diz o seguinte: *Um casal de coelhos recém nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento.*

Leonardo apresenta a seguinte solução:

³Leonardo de Pisa (1170-1250), filho de Bonacci, e por isso apelidado Fibonacci, teve um papel fundamental no desenvolvimento da Matemática no Ocidente. Em 1202, publicou o livro *Liber Abacci*, que continha grande parte do conhecimento sobre números e álgebra da época. Esta obra foi responsável pela introdução na Europa do sistema de numeração indo-arábico e pelo posterior desenvolvimento da álgebra e da aritmética no mundo ocidental (veja em [9]).

Mês	Número de casais no mês anterior	Número de casais recém-nascidos	Total
0°	0	1	1
1°	1	0	1
2°	1	1	2
3°	2	1	3
4°	3	2	5
5°	5	3	8
6°	8	5	13
7°	13	8	21
8°	21	13	34
9°	34	21	55
10°	55	34	89
11°	89	55	144
12°	144	89	233

Vamos agora caracterizar a questão dos coelhos de Fibonacci para um certo mês n de forma recursiva e considerando os coelhos imortais. Seja F_n o número de casais gerados no mês n . Faremos a análise para sabermos a quantidade de casais no mês $n + 2$. Observe que duas situações iram ocorrer.

1. Os casais de coelhos que geraram no mês $n + 1$ tornam a gerar no mês $n + 2$, ou seja, F_{n+1} casais de coelhos.
2. Os casais de coelhos nascidos no mês n , começam a gerar no mês $n + 2$, ou seja, F_n casais de coelhos.

Portanto, a recorrência que define os coelhos de Fibonacci é

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

com $F_0 = F_1 = 1$, pois foi colocado em cativeiro somente um casal de coelhos recém nascidos e estes só puderam procriar no segundo mês. Assim, o número de casais de coelhos num determinado mês é igual ao número total de casais do mês anterior somado ao número de casais nascidos no mês em curso, que é igual ao número total de casais do mês anterior ao anterior. Essa recorrência define uma sequência de números naturais, chamada de *sequência de Fibonacci*, cujos os elementos da sequência são chamados de

números de Fibonacci, onde estes possuem propriedades aritméticas notáveis e que ainda hoje são objeto de investigação, conforme Abramo Hefez em sua apostila [9], p.41.

Temos que a equação característica da recorrência $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ é $r^2 - r - 1 = 0$ cujas raízes da equação característica são

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Então, pelos teoremas 2.3.1 e 2.3.2, temos que a solução geral da recorrência é

$$F_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (2.13)$$

Para determinarmos c_1 e c_2 , basta usarmos $F_0 = F_1 = 1$. Assim, substituindo $n = 0$ e $n = 1$, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \begin{cases} c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 = 1 \\ c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 + \sqrt{5}(c_1 - c_2) = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, temos que

$$c_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

Logo, substituindo c_1 e c_2 na solução geral 2.13, obtemos

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ \Leftrightarrow F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

É notável que seja necessário recorrer a fórmulas envolvendo números irracionais para representar os elementos da sequência de Fibonacci, que são números naturais. Mais notável, ainda, é que o número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ seja a *proporção áurea* φ que aparece nas artes, e que $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ seja o simétrico de seu inverso $-\varphi^{-1}$. Intrigante essa inesperada relação entre criar coelhos e a *divina proporção*, não? (HEFEZ, 2009, p. 42, grifos do autor)

3 Equações de Diferenças

3.1 Apresentação

Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, que envolvem a taxa segundo o qual os fenômenos acontecem. Em uma linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são as derivadas, onde estas equações contendo derivadas são denominadas de *equações diferenciais*. Uma equação diferencial que descreve algum fenômeno físico é chamada, muita das vezes, de *modelo matemático* do processo. Alguns exemplos destes modelos são: o movimento de fluidos, o fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação e a detecção de ondas sísmicas, ou o aumento ou a diminuição de populações, entre muitos outros.

Os modelos de *variações discretas* evoluem em intervalos constantes, geralmente, fixos e chamados passos. Presume-se que cada passo o sistema representado possa mudar instantaneamente seu estado. Nos modelos de *variações contínuas* não existem passos, as mudanças acontecem continuamente.

Temos que, um modelo contínuo que leva a uma equação diferencial é razoável e atraente para muitos problemas, existindo casos em que o modelo discreto pode ser mais natural. Por exemplo, o modelo contínuo para juros compostos é apenas uma aproximação do processo real, que é discreto. Analogamente, existem casos em que o crescimento populacional pode ser melhor descrito por um modelo discreto, em vez de contínuo. Por exemplo, para espécies cujas gerações não se sobrepõem e que se propagam a intervalos regulares de tempo, tais como em épocas específicas do ano.

Segundo Bassanezi (2012, p. 17, em [2]) "uma equação de diferenças estabelece uma relação envolvendo os valores de uma variável dependente para um conjunto discreto de valores da variável independente". Suporemos que se a variável independente for o tempo, seus valores sejam tomados igualmente espaçados, isto é, considere $t_2 - t_1 = k$.

"A solução de uma equação de diferenças é uma relação funcional que não envolve diferenças, definida para todos os números naturais $n \in \mathbb{N}$, e satisfazendo a

equação de diferenças, isto é, transformando-a numa identidade” (BASSANEZI, 2012, p. 17). A solução de uma equação de diferenças é obtido por um processo recursivo, ou seja, usaremos os métodos aprendidos no capítulo de recorrência para determinarmos estas soluções.

Trabalharemos nesta unidade com a forma geral de uma equação linear de diferenças com coeficientes constantes de ordem m que é dada por:

$$y_n = a_0 + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_m y_{n-m}, \quad (3.1)$$

ou,

$$y_n = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k y_{n-k},$$

com a_i constantes, $i = \{0, 1, 2, \dots, m\}$; $m < n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e dado m condições iniciais. Lembrando que, para $a_0 = 0$ a equação é dita homogênea, caso contrário, é dita não homogênea. Contudo, nosso objetivo neste capítulo é analisar alguns modelos matemáticos de equações de diferenças de primeira e segunda ordem que possam descrever fatos cotidianos. Este capítulo é uma adaptação ao que foi estudado nos livros de Bassanezi [2] e, Boyce e Prima [4].

3.2 Equações Lineares de Diferenças de Primeira Ordem

Definição 3.2.1. Uma equação linear de diferença é de primeira ordem, se $m = 1$ na equação 3.1, ou seja, sua expressão geral é dada por

$$\begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1} + \beta \\ y_0 \text{ dado} \end{cases},$$

com α e β constantes.

Considerando $\alpha \neq 0$ e usando o teorema 2.2.1 do capítulo de recorrência, temos que $y_n = a_n x_n$, de modo que a_n seja uma solução particular de $y_n = \alpha y_{n-1}$, ou seja, $a_n = \alpha^n$. Assim, substituindo $y_n = \alpha^n x_n$ em $y_n = \alpha y_{n-1} + \beta$, teremos

$$\alpha^n x_n = \alpha^n x_{n-1} + \beta \Leftrightarrow x_n = x_{n-1} + \frac{\beta}{\alpha^n}.$$

Como $y_n = a_n x_n$, temos que

$$y_0 = a_0 x_0 \Leftrightarrow y_0 = \alpha^0 x_0 \Leftrightarrow y_0 = x_0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{\beta}{\alpha^1} \\ x_2 &= x_1 + \frac{\beta}{\alpha^2} \\ x_3 &= x_2 + \frac{\beta}{\alpha^3} \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + \frac{\beta}{\alpha^n} \end{aligned}$$

Somando-se membro a membro das equações, obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + \beta \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \cdots + \frac{1}{\alpha^n} \right) \\ \Leftrightarrow x_n &= y_0 + \beta \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\alpha^n}}{1 - \frac{1}{\alpha}} \\ \Leftrightarrow x_n &= y_0 + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^n - 1}{\frac{\alpha^n}{\alpha} - 1} \\ \Leftrightarrow x_n &= y_0 + \frac{\beta(\alpha^n - 1)}{\alpha^n(\alpha - 1)}. \end{aligned}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} y_n &= a_n x_n \\ \Leftrightarrow y_n &= \alpha^n \cdot \left[y_0 + \frac{\beta(\alpha^n - 1)}{\alpha^n(\alpha - 1)} \right] \\ \Leftrightarrow y_n &= \alpha^n y_0 + \frac{\beta(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Logo, a solução pode ser escrita como

$$\begin{cases} y_n = y_0 + n\beta, & \text{se } \alpha = 1 \\ y_n = \alpha^n y_0 + \frac{\beta(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1}, & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}.$$

3.2.1 Modelo Malthusiano de Crescimento Populacional

"A população cresce numa progressão geométrica enquanto que o alimento cresce segundo uma progressão aritmética."

Vamos considerar primeiramente a questão da população. Considere a população inicial com P_0 elementos, i a taxa de crescimento da população e o período de tempo com variação de uma unidade de tempo considerada, isto é,

$$\begin{aligned} P_1 &= rP_0 \\ P_2 &= rP_1 \\ &\vdots \\ P_n &= rP_{n-1} \end{aligned}$$

e procedendo da mesma forma que foi feito em recorrências, obtemos

$$P_n = r^n P_0.$$

Assim, em termos de diferenças, temos uma equação linear homogênea de primeira ordem, pois

$$\begin{aligned} P_n - P_{n-1} &= rP_{n-1} - P_{n-1} \\ \Leftrightarrow P_n - P_{n-1} &= (r - 1)P_{n-1} \\ \Leftrightarrow P_n - P_{n-1} &= \alpha P_{n-1}, \end{aligned}$$

com $\alpha = r - 1$, ou seja, *"a variação populacional é proporcional à população a cada instante"* e sua solução é

$$P_n = P_0 r^n.$$

Agora, vamos considerar a questão da alimentação. Considere a quantidade de alimentos inicial igual a A_0 , b a diferença de alimentos entre períodos consecutivos e o período de tempo com variação de uma unidade de tempo considerada, isto é,

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 + b \\ A_2 &= A_1 + b \\ &\vdots \\ A_n &= A_{n-1} + b \end{aligned}$$

e procedendo de maneira análoga ao que foi feito em recorrências, obtemos

$$A_n = A_0 + nb.$$

Assim, em termos de diferença, temos

$$A_n - A_{n-1} = b,$$

"a variação alimentar ocorre de maneira constante" e sua solução é

$$A_n = A_0 + nb.$$

3.2.2 Orçamento Familiar

Vamos considerar uma família cuja renda mensal R_n , em um determinado mês n , é igual a um salário fixo R_0 mais o rendimento da poupança P_n do mês anterior. Considere também, que o consumo mensal C_n desta família é proporcional a sua renda mensal. Iremos determinar uma fórmula geral que forneça os valores da renda, da poupança e do consumo da família em cada mês relativamente a um mês inicial (considerando o mês inicial 0) onde se conheça os valores do consumo inicial C_0 e da poupança inicial P_0 .

Observe que a variável independente é o *tempo*, dado em meses. Com isso, buscaremos uma relação entre as variáveis dependentes (*renda, poupança e consumo*) em função do tempo n .

Temos que:

- A poupança no mês n é dado pela poupança do mês anterior mais o valor sobrado no mês n , ou seja,

$$P_n = P_{n-1} + (R_n - C_n). \quad (3.2)$$

- A renda do mês n é igual a renda fixa mensal mais o rendimento da poupança do mês anterior, ou seja,

$$R_n = R_0 + iP_{n-1}, \quad (3.3)$$

onde i é a taxa de juros da poupança.

- O consumo do mês n é proporcional à renda deste mesmo mês, ou seja,

$$C_n = \alpha R_n, \quad (3.4)$$

onde $0 < \alpha < 1$, pois o consumo não poderia ser nulo e nem superior a renda mensal ganha.

Assim, substituindo as equações 3.3 e 3.4 na equação 3.2, obtemos

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + (R_n - C_n) \\ \Leftrightarrow P_n &= P_{n-1} + [R_0 + iP_{n-1} - \alpha(R_0 + iP_{n-1})] \\ \Leftrightarrow P_n &= P_{n-1} + (1 - \alpha)R_0 + (1 - \alpha)iP_{n-1} \\ \Leftrightarrow P_n &= [(1 - \alpha)i + 1]P_{n-1} + (1 - \alpha)R_0 \\ \Leftrightarrow P_n &= aP_{n-1} + b, \end{aligned}$$

com constantes $a = (1 - \alpha)i + 1$ e $b = (1 - \alpha)R_0$.

Observe que, $a \geq 1$, assim, $P_n = aP_{n-1} + b$ é uma equação de diferenças linear de primeira ordem. Portanto, uma solução geral para a equação de diferenças é da forma

$$P_n = a^n P_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

E, fazendo as substituições necessárias, temos

$$P_n = [(1 - \alpha)i + 1]^n P_0 + (1 - \alpha)R_0 \frac{[(1 - \alpha)i + 1]^n - 1}{(1 - \alpha)i}. \quad (3.5)$$

Analisando este orçamento, temos que para $\alpha = 1$ significa que o consumo mensal é igual à renda, portanto, a poupança não varia, ou seja,

$$\begin{cases} C_n = R_n = R_0 + iP_0 \\ P_n = P_0 \end{cases}.$$

Para $\alpha \neq 1$, temos que:

- Pela equação 3.5, a poupança no n-ésimo mês é dado por

$$\begin{aligned} P_n &= [(1 - \alpha)i + 1]^n P_0 + (1 - \alpha)R_0 \frac{[(1 - \alpha)i + 1]^n - 1}{(1 - \alpha)i} \\ \Leftrightarrow P_n &= [(1 - \alpha)i + 1]^n P_0 + R_0 \frac{[(1 - \alpha)i + 1]^n - 1}{i} \\ \Leftrightarrow P_n &= \left(P_0 + \frac{R_0}{i} \right) [(1 - \alpha)i + 1]^n - \frac{R_0}{i}. \end{aligned}$$

- Pela equação 3.3, a renda no n-ésimo mês é dada por

$$\begin{aligned}
R_n &= R_0 + iP_{n-1} \\
\Leftrightarrow R_n &= R_0 + i \left\{ [(1-\alpha)i+1]^{n-1}P_0 + R_0 \frac{[(1-\alpha)i+1]^{n-1} - 1}{i} \right\} \\
\Leftrightarrow R_n &= R_0 + i[(1-\alpha)i+1]^{n-1}P_0 + R_0[(1-\alpha)i+1]^{n-1} - R_0 \\
\Leftrightarrow R_n &= R_0[(1-\alpha)i+1]^{n-1} + iP_0[(1-\alpha)i+1]^{n-1} \\
\Leftrightarrow R_n &= (R_0 + iP_0)[(1-\alpha)i+1]^{n-1}.
\end{aligned}$$

- Pela equação 3.4, o custo no n -ésimo mês é dada por

$$\begin{aligned}
C_n &= \alpha R_n \\
\Leftrightarrow C_n &= \alpha(R_0 + iP_0)[(1-\alpha)i+1]^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.1. Analise a situação orçamentária de uma família após um ano, onde esta possua R\$ 1.000,00 na poupança, com taxa de rendimento igual a 0,1%, salário fixo de R\$ 3.700,00 e gasto de 75% da renda mensal. Considere que esta família tenha situação orçamentária conforme foi analisado nesta subseção.

Solução. Seja a poupança inicial $P_0 = 1000$ com rendimento $i = 0,001$, a renda inicial $R_0 = 3700$ e o gasto mensal igual a 0,75 da renda mensal, determinaremos a poupança, a renda e o custo no décimo segundo mês utilizando as fórmulas encontradas.

Observe que $\alpha \neq 1$, ou seja, $\alpha = 0,75$, assim, a poupança é dada por

$$P_n = \left(P_0 + \frac{R_0}{i} \right) [(1-\alpha)i+1]^n - \frac{R_0}{i},$$

que substituindo os valores dados, temos:

$$\begin{aligned}
P_{12} &= \left(1000 + \frac{3700}{0,001} \right) [(1-0,75)0,001+1]^{12} - \frac{3700}{0,001} \\
\Leftrightarrow P_{12} &= 3701000 \cdot (1,00025)^{12} - 3700000 \\
\Leftrightarrow P_{12} &\cong 12.118,28.
\end{aligned}$$

A renda é dada por

$$R_n = (R_0 + iP_0)[(1-\alpha)i+1]^{n-1},$$

que substituindo os valores, obtemos:

$$\begin{aligned}
R_{12} &= (3700 + 0,001 \cdot 1000)[(1-0,75)0,001+1]^{11} \\
\Leftrightarrow R_{12} &= 3701 \cdot (1,00025)^{11} \\
\Leftrightarrow R_{12} &\cong 3.711,19.
\end{aligned}$$

Por fim, o custo é dado por

$$C_n = \alpha R_n,$$

que substituindo os valores já encontrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
C_{12} &= 0,75 \cdot R_{12} \\
\Leftrightarrow C_{12} &\cong 0,75 \cdot 3711,19 \\
\Leftrightarrow C_{12} &\cong 2.783,39.
\end{aligned}$$

3.2.3 Financiamento de Veículos

No dia a dia, temos a necessidade de acordarmos cedo, levar os filhos a escola, ir para o trabalho, pegar as crianças na escola, ir para casa almoçar, voltar ao trabalho, levar a família para jantar em um restaurante e diversas outras atividades que necessitam de uma locomoção rápida e eficaz. Assim, é fundamental termos um transporte, por exemplo, um carro. E, para fazermos a aquisição do mesmo existem diversos planos financeiros, como: leasing, consórcio, financiamento, entre outros. Suponha que faremos a compra do carro através de um financiamento. Portanto, veremos agora um exemplo para analisarmos o problema de um financiamento de veículos.

Seja um carro no valor de R\$ 32.000,00 que deve ser pago em 4 anos, com parcelas fixas mensais de R\$ 1.100,00. Determinaremos:

- Qual o juros mensal pago?
- Se o juros mensal fosse o mesmo da poupança (taxa média de 0,53 % por mês no ano de 2013), quanto deveria pagar por mês para quitar a dívida em 4 anos?
- Quanto se deve dar de entrada para termos uma parcela fixa de R\$ 600,00, um juros igual ao da poupança e terminar a dívida em 4 anos?

Considere que D_0 seja a dívida inicial. Assim, a dívida D_n , depois de transcorridos n meses da compra, é dada pela dívida corrigida do mês anterior menos a parcela paga no mês, ou seja,

$$\begin{aligned}
D_n &= D_{n-1} + iD_{n-1} - P \\
\Leftrightarrow D_n &= (1 + i)D_{n-1} - P \\
\Leftrightarrow D_n &= aD_{n-1} + b,
\end{aligned}$$

com $a = 1 + i$ e $b = -P$, sendo que i é a taxa de juros mensal do financiamento.

Observe que, $a > 1$, pois $i > 0$. Assim, $D_n = aD_{n-1} + b$ é uma equação de diferenças linear de primeira ordem. Portanto, uma solução geral para a equação de

diferenças é da forma

$$D_n = a^n D_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

E, fazendo as substituições necessárias, temos

$$D_n = (1 + i)^n D_0 - P \frac{(1 + i)^n - 1}{i}. \quad (3.6)$$

A dívida será quitada no mês $n = k$, onde k é o último mês do financiamento, quando $D_k = 0$. Assim, para a resposta do primeiro item, dados: $n = 48$, $D_{48} = 0$, $D_0 = 32000$ e $P = 1100$. E, substituindo na equação 3.6, teremos:

$$\begin{aligned} D_{48} &= (1 + i)^{48} \cdot 32000 - 1100 \frac{(1 + i)^{48} - 1}{i} \\ \Leftrightarrow 32(1 + i)^{48} &= 1,1 \frac{(1 + i)^{48} - 1}{i} \\ \Leftrightarrow 32i &= 1,1 \frac{(1 + i)^{48} - 1}{(1 + i)^{48}} \end{aligned}$$

A resolução desta equação pode ser feita pelo método numérico mais simples, o *método da bissecção*.

Seja $x = 32i$ e $y = 1,1 \frac{(1 + i)^{48} - 1}{(1 + i)^{48}}$. Devemos encontrar i de modo que $x = y$.

Observe que, para:

$$i = 0,01 \Rightarrow x = 0,32 < 0,4177 = y$$

$$i = 0,02 \Rightarrow x = 0,64 < 0,6748 = y$$

$$i = 0,03 \Rightarrow x = 0,96 > 0,8338 = y \text{ (a solução de } x = y \text{ está no intervalo } i \in (0,02; 0,03))$$

$$i = \frac{0,02+0,03}{2} = 0,025 \Rightarrow x = 0,8 > 0,7637 = y$$

$$i = \frac{0,02+0,025}{2} = 0,0225 \Rightarrow x = 0,72 < 0,7219 = y$$

$$i = \frac{0,025+0,0225}{2} = 0,02375 \Rightarrow x = 0,76 > 0,7434 = y$$

$$i = \frac{0,0225+0,02375}{2} = 0,023125 \Rightarrow x = 0,74 > 0,7328 = y$$

$$i = \frac{0,0225+0,023125}{2} = 0,0228125 \Rightarrow x = 0,73 > 0,7274 = y$$

$$i = \frac{0,0225+0,0228125}{2} = 0,02265625 \Rightarrow x = 0,725 > 0,7247 = y$$

$$i = \frac{0,0225+0,02265625}{2} = 0,022578125 \Rightarrow x = 0,7225 < 0,7233 = y$$

$$i = \frac{0,022578125+0,02265625}{2} = 0,0226171875 \Rightarrow x = 0,72375 \cong 0,7240 = y$$

Logo, o juros mensal de tal financiamento é, aproximadamente, 2,26% ao mês, o que responde o primeiro item.

Para respondermos o item b), vamos considerar a taxa de juros mensal $i = 0,53\%$, o período do financiamento de 48 meses e a dívida inicial $D_0 = 32000$. Para

descobrirmos a prestação fixa, basta substituir os valores na equação 3.6 e isolarmos o valor de P , não esquecendo que $D_{48} = 0$.

$$\begin{aligned} D_{48} &= (1 + 0,0053)^{48} \cdot 32000 - P \frac{(1 + 0,0053)^{48} - 1}{0,0053} \\ \Leftrightarrow P \frac{0,2888}{0,0053} &= 1,2888 \cdot 32000 \\ \Leftrightarrow P &\cong 756,81 \end{aligned}$$

Logo, considerando o juros mensal do financiamento igual ao da poupança, a prestação fixa do financiamento seria de, aproximadamente, R\$ 756,81.

Por fim, para respondermos o item c), se dermos uma entrada E a dívida inicial muda, ou seja, $D_0 = 32000 - E$. Considerando a prestação mensal $P = 600$, o juros do financiamento igual ao da poupança $i = 0,0053$ e o período da dívida de 48 meses, e substituindo estes valores na equação 3.6 encontraremos o valor da entrada, ou seja,

$$\begin{aligned} D_{48} &= (1 + 0,0053)^{48} (32000 - E) - 600 \frac{(1 + 0,0053)^{48} - 1}{0,0053} \\ \Leftrightarrow 1,2888(32000 - E) &= 600 \frac{0,2888}{0,0053} \\ \Leftrightarrow E &\cong 6630,49. \end{aligned}$$

Um bom software online encontrado na internet para lhe ajudar nos cálculos de financiamentos está disponível na página eletrônica do banco central do brasil (BCB) denominado como calculadora do cidadão [5], onde preenchendo-se três de quatro valores desejados (tempo do financiamento em meses, taxa de juros mensal, valor da prestação, valor financiado) ele calcula rapidamente o quarto valor desejado.

3.3 Equações Lineares de Diferenças de Segunda Ordem

Definição 3.3.1. Uma equação linear homogênea de diferenças é de segunda ordem, se $m = 2$ e $a_0 = 0$ na equação 3.1, ou seja, sua expressão geral é dada por

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} \\ y_0 \text{ e } y_1 \text{ dados} \end{cases}, \quad (3.7)$$

com a e b constantes.

Observe que a equação linear de diferenças 3.7 é também uma recorrência linear de segunda ordem, assim, usando os teoremas 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 e 2.3.4, vistos no capítulo anterior, obtemos a solução da equação desejada.

Temos que, o polinômio característico da equação 3.7 é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b,$$

sendo que as raízes deste polinômio (autovalores) podem ser diferentes ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) ou iguais ($\lambda_1 = \lambda_2$). Portanto:

- Para $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reais, temos que, pelos teoremas 2.3.1 e 2.3.2, a solução da equação de diferenças 3.7 é da forma

$$y_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n,$$

com $\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$. Como as condições iniciais são y_0 e y_1 , obtemos o sistema

$$\begin{cases} C_1 \lambda_1^0 + C_2 \lambda_2^0 = y_0 \\ C_1 \lambda_1^1 + C_2 \lambda_2^1 = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = y_0 \\ C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 = y_1 \end{cases},$$

donde,

$$C_1 = \frac{-\lambda_2 y_0 + y_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\lambda_1 y_0 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

- Para $\lambda_1 \neq \lambda_2$ complexos, isto é, $\lambda_1 = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $\lambda_2 = \rho(\cos \theta - i \sin \theta)$, onde ρ é o módulo e θ é o argumento, temos que, pelos teoremas 2.3.1 e 2.3.2, a solução da equação de diferenças 3.7 é da forma

$$y_n = \rho^n (C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta),$$

conforme foi determinado no capítulo anterior após o exemplo 2.3.5. Como as condições iniciais são y_0 e y_1 , temos que

$$C_1 = y_0 \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{y_1 - y_0 \rho \cos \theta}{\rho \sin \theta}.$$

Portanto, a sequência y_n é oscilante com amplitude igual a ρ^n e frequência igual a $\frac{1}{\theta}$. Ainda,

– se $\rho > 1$ então a sequência é divergente;

- se $\rho < 1$ então a sequência é convergente;
 - se $\rho = 1$ então a sequência é periódica.
- Para $\lambda_1 = \lambda_2$, temos que, pelos teoremas 2.3.3 e 2.3.4, a solução da equação de diferenças 3.7 é da forma

$$y_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 n \lambda_2^n,$$

com $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}$. Como as condições iniciais são y_0 e y_1 , temos que

$$C_1 = y_0 \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{2y_1}{a} - y_0.$$

Exemplo 3.3.1. Resolva a equação de diferenças

$$\begin{cases} y_n = 6y_{n-1} - 9y_{n-2} \\ y_0 = 1 \text{ e } y_1 = 2 \end{cases}.$$

Solução. Temos que o polinômio característico da equação é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$

e seus autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Portanto, a solução geral desta equação de diferenças é da forma

$$y_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 n \lambda_2^n. \quad (3.8)$$

Como as condições iniciais são $y_0 = 1$ e $y_1 = 2$, temos que,

$$\begin{cases} C_1 = y_0 \\ C_2 = \frac{2y_1}{a} - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Logo, substituindo os valores encontrados na equação 3.8, a sequência gerada pela equação de diferenças é

$$y_n = (3 - n)3^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 3.3.2. Dada a equação de diferenças

$$\begin{cases} y_n = 3ky_{n-1} - 3k^2y_{n-2} \\ y_0 = 0 \text{ e } y_1 = 1 \end{cases}.$$

Determine as condições sobre o parâmetro $k > 0$ para que a solução seja:

- (a) Oscilatória crescente;

- (b) Oscilatória decrescente;
- (c) Periódica.

Solução. Temos que o polinômio característico da equação de diferenças é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3k\lambda + 3k^2,$$

com autovalores números complexos, que são as raízes da equação $\lambda^2 - 3k\lambda + 3k^2 = 0$, ou seja,

$$\lambda_1 = \frac{3k + \sqrt{9k^2 - 12k^2}}{2} = k \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{3k - \sqrt{9k^2 - 12k^2}}{2} = k \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right),$$

com módulo $\rho = k\sqrt{3}$ e argumento $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$. Portanto, a solução geral é dada por

$$y_n = (k\sqrt{3})^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{6} + C_2 \sin \frac{n\pi}{6} \right).$$

E, considerando as condições iniciais $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$, obtemos

$$C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{2}{k\sqrt{3}}.$$

Logo, a solução que satisfaz as condições iniciais é dada por

$$y_n = 2(k\sqrt{3})^{n-1} \sin \frac{n\pi}{6}.$$

Portanto:

- Se $k > \frac{1}{\sqrt{3}}$ então y_n é oscilatória crescente (divergente);
- Se $k < \frac{1}{\sqrt{3}}$ então y_n é oscilatória decrescente (convergente);
- Se $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ então y_n é periódica.

3.3.1 Criação de Escargot

Descobertas arqueológicas comprovam que desde a pré-história o homem utiliza o escargot para a sua alimentação. Nas proximidades das cavernas do homem pré-histórico, arqueólogos encontraram depósitos de conchas de 10 a 200 metros de comprimento com 1 a 1,5 metro de altura, indicação de que os escargots eram largamente consumidos.

Trazido por imigrantes europeus, o escargot começou a ser criado no Brasil há 25 anos e hoje a atividade começa a tornar-se um bom negócio. Em francês, escargot significa caracol, molusco, porque seu corpo é mole, sem esqueleto, gastrópode (parte estomacal (gaster-estômago) junto ao pé (podes = pé)), pulmonado (respira através do pulmão), terrestre, ao contrário de seu primo caramujo que habita as águas doces ou salgadas. Pertence ao gênero *Helix* (de onde vêm hélice), porque seu corpo faz uma torção de 180° e por isso, a criação é denominada helicicultura.

O escargot é molusco hermafrodita incompleto (animal que possui dois sexos mas incapazes de autofecundar-se), havendo por isto necessidade da cópula entre dois animais para que um fecunde ao outro. Cerca de seis espécies são cultivadas no Brasil, entre elas o escargot de Bourgogne, o maior do gênero na Europa – sua concha tem 5,5 cm de diâmetro.

Há duas formas principais de cultivo: em caixas de madeira cobertas ou em criatórios a céu aberto, onde são feitos tanques de alvenaria ou concreto. É neles que ficam os animais adultos que darão início à criação.

No acasalamento, o "pênis" de um escargot penetra a "vagina" do outro, e vice-versa. Vagarosos, a cópula do casal dura de 10 a 12 horas e a postura dos ovos acontece cerca de três semanas depois.

Num período que pode variar de 16 a 30 dias, os filhotes nascem menores que um grão de ervilha e são separados dos adultos. Herbívoros, em geral eles se alimentam de folhas de couve, repolho, brócolis, alface, etc., intercaladas com ração à base de fubá e soja.

Após seis a oito meses de vida boa, eles atingem 15 g de peso e estão prontos para o abate, que pode se dar de duas formas: os coitados são colocados em água quente ou no congelador até morrerem.

Em seguida, cada um deles tem sua carne retirada de dentro da concha com um garfo especial. É um processo minucioso e trabalhoso. Para obter 1 kg de carne, é preciso "depenar" 70 escargots.

Por fim, temos a lavagem, pré-cozimento, embalagem e congelamento da carne selecionada. Nos restaurantes, antes de ser servida, a carne é colocada de volta na concha. Uma porção com uns seis bichinhos sai por cerca de 50 reais nos lugares mais "em conta" (texto adaptado de acordo com as referências [7] e [16]).



Figura 3.1: Criação de Escargot [6].

<http://invernada.com.br/criacao>

Agora, vamos passar por helicicultores, iremos formular e analisar um modelo matemático para a criação de escargot. Suponha que, numa criação de escargot consideramos a população consistindo de adultos, jovens e ovos (variáveis), onde as seguintes hipóteses acontecem:

- (a) Cada adulto põem $\alpha > 0$ ovos viáveis a cada 4 meses;
- (b) Com 4 meses um escargot é considerado jovem;
- (c) Um jovem se torna adulto com 8 meses quando então põem ovos;
- (d) A condição inicial é $P_0 > 0$ (adultos), $J_0 = 0$ (jovens) e $O_0 = 0$ (ovos);
- (e) Desconsidere a taxa de mortalidade, isto é, os escargots sejam imortais.

Inicialmente, considere que a variação de tempo n seja quadrimestral. Montaremos equações de diferenças que representem a quantidade de adultos P_n , jovens J_n e ovos

O_n após n quadrimestres. Observe que, obedecendo as hipóteses da situação problema, os seis primeiros quadrimestres ocorrem conforme a tabela abaixo.

Quadrimestre	Jovens	Adultos	Ovos
0°	0	P_0	0
1°	0	P_0	αP_0
2°	αP_0	P_0	αP_0
3°	αP_0	$(1 + \alpha)P_0$	$\alpha(1 + \alpha)P_0$
4°	$\alpha(1 + \alpha)P_0$	$(1 + 2\alpha)P_0$	$\alpha(1 + 2\alpha)P_0$
5°	$\alpha(1 + 2\alpha)P_0$	$(1 + 3\alpha + \alpha^2)P_0$	$\alpha(1 + 3\alpha + \alpha^2)P_0$
6°	$\alpha(1 + 3\alpha + \alpha^2)P_0$	$(1 + 4\alpha + 3\alpha^2)P_0$	$\alpha(1 + 4\alpha + 3\alpha^2)P_0$

Portanto, temos que a quantidade de escargots adultos no n -ésimo quadrimestre é igual a soma dos escargots adultos do quadrimestre anterior com os escargots jovens do quadrimestre anterior (onde estes, por hipótese, se tornam adultos no próximo quadrimestre), isto é,

$$P_n = P_{n-1} + J_{n-1}. \quad (3.9)$$

Como, por hipótese, os ovos de escargot se tornam jovens após um quadrimestre, temos que, a quantidade de jovens no n -ésimo quadrimestre é igual a quantidade de ovos do quadrimestre anterior, isto é,

$$J_n = O_{n-1}. \quad (3.10)$$

Por fim, temos que cada escargot adulto põem α ovos viáveis a cada um quadrimestre, assim, a quantidade de ovos produzidos no n -ésimo quadrimestre é igual a quantidade de adultos no n -ésimo quadrimestre multiplicado por α , isto é,

$$O_n = \alpha P_n. \quad (3.11)$$

Analisando a equação 3.10 no $(n - 1)$ -ésimo quadrimestre, esta fica da forma

$$J_{n-1} = O_{n-2}. \quad (3.12)$$

E, analisando a equação 3.11 no $(n - 2)$ -ésimo quadrimestre, esta fica da forma

$$O_{n-2} = \alpha P_{n-2}. \quad (3.13)$$

Assim, fazendo as substituições necessárias das equações 3.12 e 3.13 na equação 3.9, obtemos uma equação linear de diferenças de segunda ordem,

$$P_n = P_{n-1} + \alpha P_{n-2} \quad (3.14)$$

com condições iniciais $P_1 = P_0 > 0$.

O polinômio característico da equação de diferenças 3.14 é dada por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - \alpha,$$

assim, as raízes do polinômio são

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}.$$

Temos que a solução geral da equação de diferenças encontrada é da forma

$$\begin{aligned} P_n &= C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n \\ \Leftrightarrow P_n &= C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^n, \end{aligned}$$

e substituindo as condições iniciais na solução geral, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} &\begin{cases} C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^0 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^0 = P_0 \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^1 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^1 = P_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} C_1 + C_2 = P_0 \\ C_1 + C_2 + (C_1 - C_2)\sqrt{1 + 4\alpha} = 2P_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} C_1 + C_2 = P_0 \\ C_1 - C_2 = \frac{P_0}{\sqrt{1 + 4\alpha}} \end{cases} \end{aligned}$$

e resolvendo o sistema, obtemos

$$C_1 = \frac{P_0}{\sqrt{1 + 4\alpha}} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right) \quad \text{e} \quad C_2 = -\frac{P_0}{\sqrt{1 + 4\alpha}} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right).$$

Logo, substituindo C_1 e C_2 na solução geral, obtemos a solução da equação de diferenças 3.14, isto é, obtemos uma fórmula para determinarmos a quantidade de escargots adultos no n -ésimo quadrimestre, ou seja,

$$P_n = \frac{P_0}{\sqrt{1 + 4\alpha}} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^{n+1} - \frac{P_0}{\sqrt{1 + 4\alpha}} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^{n+1}. \quad (3.15)$$

Assim, a quantidade de ovos de escargot no n -ésimo quadrimestre é da forma

$$O_n = \frac{\alpha P_0}{\sqrt{1+4\alpha}} \left(\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} \right)^{n+1} - \frac{\alpha P_0}{\sqrt{1+4\alpha}} \left(\frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2} \right)^{n+1}.$$

E, a quantidade de escargots jovens no n -ésimo quadrimestre é da forma

$$J_n = \frac{\alpha P_0}{\sqrt{1+4\alpha}} \left(\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} \right)^n - \frac{\alpha P_0}{\sqrt{1+4\alpha}} \left(\frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2} \right)^n.$$

Observe que, a sequência dos coelhos de Fibonacci, desenvolvida no capítulo anterior, é um caso particular do nosso modelo matemático para a criação de escargot, pois basta considerarmos $P_0 = 1$, $J_0 = 0$, $O_0 = 0$, $\alpha = 1$ e a variação do tempo mensal para obtermos a mesma situação problema dos coelhos de Fibonacci. E, substituindo estes valores na equação 3.15 obtemos a fórmula que define a sequência de Fibonacci,

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4 Considerações Finais

Estudar matemática ainda é, para muitos, um "bicho de sete cabeças", onde estes declaram ser uma ciência fantástica, mas que nunca conseguiram aprender seus conteúdos ou não conseguem aplicar, no dia a dia, estes conteúdos aprendidos, chegando a, muitas das vezes, questionar seu professor de "qual a necessidade aprender está grade de conteúdos se nem sei em que aplicá-los". Segundo Bassanezi (2012) em seu artigo "Modelagem matemática: uma disciplina emergente nos programas de formação de professores" [3] ele afirma:

Na verdade, a produção matemática tem ocorrido de modo supostamente desvinculado de um contexto sócio-cultural-político e com pouca preocupação em tornar-se utilitária ou mais bem definida em suas metas – o que, de certo modo, diferencia a matemática de outras Ciências. De fato, tal produção apresenta-se como fruto exclusivo da mente humana, resultando numa linguagem que almeja essencialmente elegância e rigor. (BASSANEZI, 2002, p. 1)

Afirma também que:

Na verdade, grande parte do conhecimento matemático tem sido construído somente dentro do terreno da matemática, a partir da ação de um profissional que em geral não formula questões como: "para que serve isso?". Este sentimento de inutilidade, no campo da matemática, tem sido decididamente apontado neste século e seus defensores – intitulados puristas – em geral, consideram a matemática aplicada uma produção inferior e deselegante. (BASSANEZI, 2002, p. 1-2)

Trouxemos em nosso trabalho uma série de jogos lúdicos e modelos matemáticos na tentativa de despertar o interesse de nossos alunos para analisar, criar e reinventar situações cotidianas. Mostrar, abordando um conteúdo específico, que são as equações de diferenças, o quanto a matemática pode ser aplicável no dia a dia. De acordo com Polya (1975) em seu livro "A arte de resolver problemas" [15] ele fala:

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas a sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mais se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais,

numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (POLYA, 1975, p. V)

A abordagem de equações de diferenças e alguns modelos, trazida na presente dissertação, tem a intenção de promover um tema bastante interessante para trabalharmos em projetos educacionais e pesquisas em nível de ensino básico como o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Junior (PIBIC Jr), estimulando o aluno-pesquisador a desenvolver e aplicar o conhecimento obtido no ambiente em que está inserido como, por exemplo, o orçamento familiar em sua casa, conforme foi apresentado na subseção Orçamento Familiar.

Na busca de resolvermos equações de diferenças, fizemos uma analogia na resolução de recorrências de primeira e segunda ordem, considerando já sabido pelo leitor a ideia de progressão algébrica (PA) e progressão geométrica (PG), onde, no capítulo sobre recorrência, trouxemos o conteúdo de forma clara e coesa, com uma grande quantidade de questões de fixação e questões contextualizadas, no intuito de incentivar os professores do ensino básico na reimplantação do assunto de recorrência em seus planejamentos de ensino, visto que o papel do professor é preparar seus alunos para uma aprendizagem permanente, que tenha continuidade mesmo após o término de sua vida escolar. Portanto, neste trabalho, vemos que existem vários modelos matemáticos que são facilmente formados por recorrência, onde simula uma situação cotidiana ajudando-o a tomar determinadas decisões.

Referências Bibliográficas

- [1] **A Matemática e o Cotidiano.** Disponível em: <<http://adriaciavenancio.blogspot.com.br/2013/12/a-matematica-e-o-cotidiano.html>>. Acesso em: 18 abr. 2014.
- [2] BASSANEZI, R. C. **Equações Diferenciais Ordinárias. *Um curso introdutório*.** Coleção BC&T. São Paulo: UFABC, 2012.
- [3] BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática – Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores.** In: XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 1999, Santos. Biomatemática IX. Campinas: IMECC, 1999. v.9. p.9 – 22.
- [4] BOYCE, William. DIPRIMA, Richard. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 9ª edição. Rio de Janeiro: GEN – LTC, 2010.
- [5] **Calculadora do cidadão.** Disponível em: <<https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/publico/calcularFinanciamentoPrestacoesFixas.do>>. Acesso em: 21 jan. 2014.
- [6] **Criação.** Disponível em: <<http://invernada.com.br/criacao>>. Acesso em: 02 fev. 2014.
- [7] **Criação de escargots.** Disponível em: <<http://www.sebrae-sc.com.br/leis/default.asp?vcdtexto=3818&^>>. Acesso em: 02 fev. 2014.
- [8] **Edouard Lucas.** Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm12/Mat_cf.htm#Francois%20Edouard%20Anatole>. Acesso em: 06 fev. 2014.
- [9] HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática.** Rio de Janeiro: PIC - OBMEP, 2009.
- [10] **Jakob Steiner.** Disponível em: <<http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/JakobSte.html>>. Acesso em: 06 fev. 2014.
- [11] JESUS, E. A. *et al.* **Relações de Recorrência.** 35 f. Monografia (Iniciação Científica)-Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

- [12] LIMA, E. L. *et al.* **A Matemática do Ensino Médio v.2.** 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [13] LIMA, E. L. *et al.* **A Matemática do Ensino Médio: *Enunciados e Soluções dos Exercícios* v.4.** Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- [14] MOREIRA, Carlos G. T. A. Sequências Recorrentes. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina.** Santa Catarina, no.4, p. 53-69, 2007.
- [15] POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- [16] VASCONCELOS, Yuri. **Por que os escargots são tão caros?** Disponível em: <<http://mundoestranho.abril.com.br/materia/por-que-escargots-sao-tao-caros>>. Acesso em: 02 fev. 2014.