

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL - PROFMAT**

**DOUGLAS FRANCISCO DARIO**

**GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS: ELÍPTICA E HIPERBÓLICA NO  
ENSINO MÉDIO**

**DISSERTAÇÃO**

**PATO BRANCO - PR**

**2014**

DOUGLAS FRANCISCO DARIO

## **GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS: ELÍPTICA E HIPERBÓLICA NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Pato Branco. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Fredy Maglorio Sobrado Suárez

Co-orientador: João Biesdorf

PATO BRANCO – PR

2014

D218g Dario, Douglas Francisco.  
Geometrias não euclidianas: elíptica e hiperbólica no ensino médio /  
Douglas Francisco Dario. -- 2014.  
55 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Fredy Maglorio Sobrado Suárez  
Coorientador: Prof. Dr. João Biesdorf  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.  
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.  
Pato Branco, PR, 2014.  
Bibliografia: f. 54 – 55.

1. Geometria não euclidiana. 2. Geometria elíptica. 3. Geometria  
hiperbólica. 4. Quinto postulado de Euclides. I. Sobrado Suárez, Fredy  
Maglorio, orient. II. Biesdorf, João, coorient. III. Universidade Tecnológica  
Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional. IV. Título.

CDD (22. ed.) 510

Ficha Catalográfica elaborada por  
Suélem Belmudes Cardoso CRB9/1630  
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

Título da Dissertação No. 001

## “Geometrias não-euclidianas: Elíptica e Hiperbólica no Ensino Médio”

por

**Douglas Francisco Dario**

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 09h do dia 24 de março de 2014. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

---

Prof. Fredy Maglorio Sobrado Suárez, Dr.  
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

---

Prof. Valdeni Soliani Franco, Dr.  
(UEM/Maringá)

---

Prof. João Biesdorf, Dr.  
(UTFPR/Branco)

---

Prof. Carlos Alexandre Ribeiro Martins,  
Dr.  
(UTFPR/Branco)

---

Prof. Ivan Italo Gonzales Gargate, Dr.

Visto da coordenação:

---

Prof. João, Dr.  
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

À minha esposa Maria Helena, pelo apoio incondicional.

## **AGRADECIMENTOS**

Reverencio os Professores Doutores Fredy Maglorio Sobrado Suárez e João Biesdorf pela disposição, pela dedicação, pelos momentos de aprendizado e pela orientação deste trabalho.

Agradeço aos Professores Doutores Carlos Alexandre Ribeiro Martins, Ivan Italo Gonzales Gargate e Valdeni Soliani Franco, da banca examinadora, pela atenção e pelas valiosas contribuições e sugestões dedicadas a este trabalho.

Agradeço ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, à Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR e aos professores do curso, pela formação acadêmica.

Agradeço aos amigos que fiz na turma PROFMAT 2012 – Pato Branco/PR, pela troca de experiências e aprendizado.

## RESUMO

DARIO, Douglas Francisco. GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS: ELÍPTICA E HIPERBÓLICA NO ENSINO MÉDIO. 55f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. Pato Branco – PR, 2014.

Este trabalho tem como objetivo colaborar na inserção do ensino das Geometrias Não Euclidianas no ensino médio. Para tanto, fizemos uma pesquisa bibliográfica sobre o surgimento de tais Geometrias, em seguida apresentamos uma sequência de conteúdos para o ensino das Geometrias Elíptica e Hiperbólica, abordando os principais tópicos elencados pelas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, comparando-as sempre que possível com a Geometria Euclidiana. Esclarecemos que onde citamos Geometria Elíptica, estamos realmente tratando da Geometria da Superfície Esférica, para que este trabalho fique compatível com as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná. Apesar de haver algumas proposições e suas provas, em grande parte do trabalho não há teoria e demonstrações com o rigor exigido pela matemática, buscamos apenas apresentar os principais conceitos e usar uma linguagem que possa ser compreendida por qualquer profissional que esteja disposto a compreender e depois de estudar, ensinar estas geometrias. Em novembro de 2013, na XVII Semana da Matemática e III Encontro de Ensino de Matemática do Câmpus de Pato Branco – PR da UTFPR, aplicamos um minicurso com parte deste conteúdo. Ao final do minicurso aplicamos um questionário sobre o conhecimento inicial do tema e a atual situação de ensino destas geometrias. Tal questionário visou identificar o interesse sobre o tema e sobre a real possibilidade de inserção destas geometrias nas salas de aula, cujos resultados encontram-se no texto.

**Palavras-chave:** Geometria Não Euclidiana. Geometria Elíptica. Geometria Hiperbólica. Quinto Postulado de Euclides.

## ABSTRACT

DARIO, Douglas Francisco. NON-EUCLIDEAN GEOMETRY: ELLIPTIC AND HYPERBOLIC IN HIGH SCHOOL. 55f. Dissertation – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. Pato Branco – PR, 2014.

This work aims to contribute in including teaching of Non-Euclidean Geometry in high school. For this, a bibliographic research was made about the appearance of such geometries and introduce content for teaching of Elliptical and Hyperbolic Geometries, addressing the main topics listed by Curriculum Guidelines of Paraná, comparing them with Euclidean Geometry. Clarify that where quoted elliptic geometry, we are really dealing with Surface Spherical Geometry, for that this work be compatible with the Curriculum Guidelines of the State of Paraná. Although there are some propositions and their proofs, in most part of the work there aren't theoretical studies and statements with all rigors mathematics requires, we seek to show the main concepts and use a language that can be understood by any person who is willing to understand and after studying, teach these geometries in school. In November 2013, during the XVII Semana de Matemática and III Encontro de Ensino de Matemática Câmpus de Pato Branco – PR of UTFPR, a mini-course was applied with part of this content to some participants. At the end of the mini-course a questionnaire was applied inquiring the basic knowledge, the current teaching situation of these geometries and aim to identify the interest in this issue and the real possibility of inclusion in the classrooms, the results can be found in the following work.

**Keywords:** Non-Euclidean Geometry. Elliptical Geometry. Hyperbolic Geometry. Euclid's Fifth Postulate.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Quinto Postulado.....	13
Figura 2.2 – Triângulos Congruentes .....	14
Figura 2.3 – Teorema do Ângulo Externo .....	15
Figura 2.4 – Proposição 27 dos Elementos.....	16
Figura 2.5 – Proposição 28 dos Elementos.....	16
Figura 2.6 – Proposição 28 dos Elementos II.....	16
Figura 2.7 – Quadrilátero de Saccheri.....	18
Figura 2.8 – Proposição 2.10 .....	19
Figura 2.9 – Proposição 2.10 II .....	20
Figura 2.10 – Proposição 2.10 III .....	20
Figura 2.11 – Proposição 2.11 .....	20
Figura 2.12 – Corolário 2.1.....	22
Figura 2.13 – Johann Bolyai.....	23
Figura 2.14 – Nicolai Lobachevski.....	24
Figura 2.15 – Bernhard Riemann .....	25
Figura 3.1 – Curvas.....	26
Figura 3.2 – Ponto que se move no espaço.....	26
Figura 3.3 – Circunferências .....	27
Figura 3.4 – Curva “s” .....	28
Figura 3.5 – Superfície .....	28
Figura 3.6 – Superfície II.....	29
Figura 3.7 – Superfície III .....	29
Figura 3.8 – Plano .....	30
Figura 3.9 – Elipsoide e Esfera .....	30
Figura 3.10 – Sela.....	31
Figura 3.11 – Pseudoesfera .....	31
Figura 5.1 – Experiência Geodésica I .....	35
Figura 5.2 – Experiência Geodésica II .....	35
Figura 5.3 – Experiência Geodésica III .....	36
Figura 5.4 – Intersecção de Geodésicas.....	37
Figura 5.5 – Globo Terrestre .....	37
Figura 5.6 – Meridianos e Paralelos.....	37
Figura 5.7 – Biângulo .....	38
Figura 5.8 – Triângulo Esférico .....	38
Figura 5.9 – Área de Triângulos Esféricos .....	39
Figura 5.10 – Triângulo Birretângulo .....	40
Figura 5.11 – Quadrilátero Esférico.....	40
Figura 6.1 – Retas Paralelas .....	42
Figura 6.2 – Pseudoesfera .....	43
Figura 6.3 – Sela .....	44
Figura 6.4 – Batata Pringles.....	44
Figura 6.5 – Vuvuzela .....	44
Figura 6.6 – Triângulo Hiperbólico .....	45
Figura 6.7 – Triângulo Hiperbólico II .....	45
Figura 6.8 – Quadrilátero de Saccheri (caso agudo).....	45
Figura 6.9 – Ângulos do topo e base.....	46

Figura 6.10 – Quadrilátero de Lambert .....	46
Figura 6.11 – Triângulo Retângulo .....	46
Figura 6.12 – Triângulo Retângulo II .....	47
Figura 6.13 – Triângulo Qualquer.....	47
Figura 7.1 – Questionário do Minicurso.....	50

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	10
2 GEOMETRIA DE EUCLIDES E O SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS .....	12
3 INTRODUÇÃO À CURVATURA DE CURVAS E SUPERFÍCIES.....	26
4 DIRETRIZES CURRICULARES DO ESTADO DO PARANÁ E O USO DE TECNOLOGIAS PARA O ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS.....	32
5 GEOMETRIA ELÍPTICA.....	34
6 GEOMETRIA HIPERBÓLICA.....	42
7 MINICURSO.....	49
8 CONCLUSÃO .....	53
REFERÊNCIAS.....	54

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo colaborar na inserção do ensino das Geometrias Não Euclidianas no ensino médio. Para tanto, fizemos uma pesquisa bibliográfica sobre o surgimento de tais Geometrias. Em seguida apresentamos uma sequência de conteúdos para o ensino das Geometrias Elíptica e Hiperbólica, abordando os principais tópicos elencados pelas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, comparando-as sempre que possível com a Geometria Euclidiana. Esclarecemos que onde citamos Geometria Elíptica, estamos realmente tratando da Geometria da Superfície Esférica, para que este trabalho fique compatível com as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná. Apesar de haver algumas proposições e suas provas, em grande parte do trabalho não há teoria e demonstrações com o rigor exigido pela matemática, buscamos apenas apresentar os principais conceitos e usar uma linguagem que possa ser compreendida por qualquer profissional que esteja disposto a compreender e depois de estudar, ensinar estas geometrias.

O segundo capítulo traz uma breve discussão sobre o quinto postulado de Euclides e, como a desconfiança sobre sua essência e as tentativas de prova possibilitaram a descoberta de outras geometrias, além de uma melhor compreensão da própria geometria euclidiana. Além disso, neste capítulo estão relacionadas algumas propriedades que Euclides demonstrou sem o uso do quinto postulado e alguns substitutos que foram usados na tentativa de demonstração do quinto postulado.

O terceiro capítulo trata de uma introdução sobre o significado da curvatura de superfícies, objetivando transmitir ao leitor uma ideia de curvaturas positivas, negativas e nulas. Superfícies estas que dão um lar (servem de modelo) às geometrias, como exemplo, a Geometria Hiperbólica, que quando descoberta existia apenas na mente de seus criadores.

O quarto capítulo apresenta a principal justificativa deste trabalho, a inserção das Geometrias Não Euclidianas nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná. A relação dos conteúdos destas Diretrizes norteiam os temas a serem pesquisados e abordados neste trabalho.

Os capítulos cinco e seis tratam das Geometrias Elíptica e Hiperbólica, respectivamente. Tentamos manter um enfoque didático para que o conteúdo sirva de

apoio para o ensino destas geometrias na educação básica, porém incluindo, mesmo sem o rigor necessário, algumas demonstrações que julgamos necessárias e possíveis, apenas com matemática básica.

No sétimo e último capítulo, discutimos sobre o minicurso ministrado em novembro de 2013, na XVII Semana da Matemática e III Encontro de Ensino de Matemática do Câmpus de Pato Branco – PR da UTFPR, onde foi apresentado parte do conteúdo dos capítulos cinco e seis. Ao final do minicurso aplicamos um questionário sobre o conhecimento inicial do tema e a situação atual de ensino destas geometrias. Tal questionário visou identificar o interesse sobre o tema e a real possibilidade de inserção nas salas de aula, cujos resultados encontram-se neste capítulo.

## 2 GEOMETRIA DE EUCLIDES E O SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

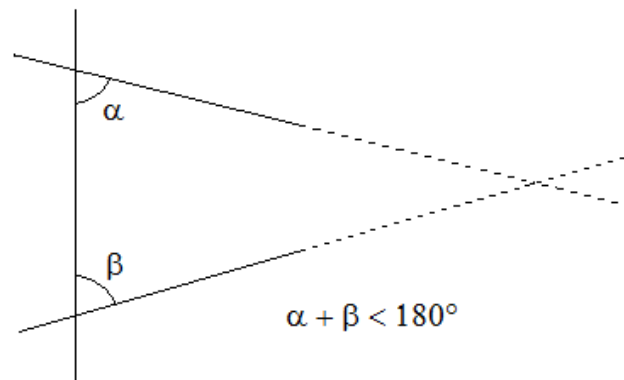
No ensino básico, aprendemos sobre geometria plana e geometria espacial. Estas geometrias, unidas, também são conhecidas como geometria euclidiana. Leva este nome porque foi escrita, de maneira axiomática e dedutiva pelo matemático grego Euclides de Alexandria, na obra Elementos, aproximadamente no ano 300 a.C., e permaneceu durante dois milênios como livro base para o ensino da geometria.

Os Elementos de Euclides estão baseados em cinco axiomas, a partir dos quais, Euclides demonstra 465 propriedades. Uma das razões pela qual esta obra é tão grandiosa, é o fato de tanto ter sido deduzido de tão pouco. Estes axiomas, também chamados de postulados. São eles:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p. 98)

Estes postulados merecem algumas considerações: O primeiro, na linguagem atual é equivalente a, por dois pontos distintos é possível traçar uma única reta, o segundo tem a seguinte interpretação, dado um segmento qualquer de reta, é possível prolongá-lo de maneira única, infinitamente, sobre uma reta, em qualquer direção. O terceiro diz que sempre é possível traçar um círculo, dado um ponto como centro e uma distância que servirá de raio. Como Euclides não usava instrumentos de medição, o quarto postulados foi usado para designar o ângulo que é igual ao seu suplementar, Euclides estabeleceu que todos os ângulos com essa propriedade são iguais, ou seja, o ângulo de  $90^\circ$ .

Ninguém duvida que por dois pontos pode-se traçar uma reta, nem que dados dois ângulos retos, eles são iguais. Porém, o quinto postulados merece mais atenção. Durante séculos, vários matemáticos ficaram intrigados com este postulados, que não é tão óbvio quanto os anteriores, inclusive pelo seu tamanho, que é muito maior. A Figura 2.1 ilustra o quinto postulados:



**Figura 2.1 – Quinto Postulado**  
**Fonte: Autores**

Um postulado deve ser uma sentença óbvia, que não é provada ou demonstrada, e por isso se torna um consenso universal, que é usado para a dedução de uma determinada teoria.

Para que um conjunto de postulados seja consistente, de acordo com Braz (2009), é preciso que tenha as três propriedades seguintes:

- a) Completude: tudo que será usado na teoria está apropriadamente contido nos axiomas, de maneira que não haja hipóteses implícitas
- b) Consistência: é impossível deduzir dois teoremas contraditórios dos axiomas
- c) Independência: nenhum axioma é consequência de alguma combinação dos demais. (BRAZ, 2009, p.13)

O quinto postulado gerou muita polêmica, pelo fato de parecer mais com um teorema e, desta forma, ao longo de anos, vários matemáticos acreditaram que o conjunto de postulados de Euclides não era independente, pois acreditavam que fosse possível demonstrar o quinto postulado a partir dos quatro primeiros.

Acredita-se que o próprio Euclides não gostava muito do quinto postulado, pois postergou sua utilização ao máximo, utilizando-o somente na proposição 29 dos Elementos. As 28 primeiras proposições, não dependem do quinto postulado. Exibimos a seguir, algumas destas proposições e algumas outras que serão necessárias para o prosseguimento deste trabalho.

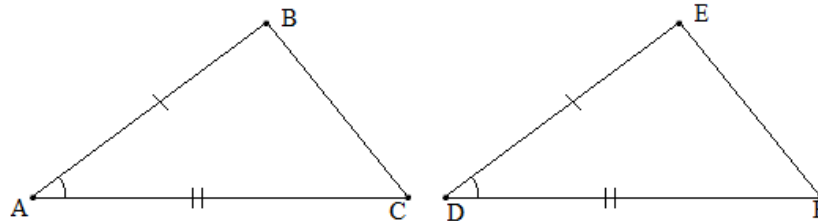
### **Proposição 2.1 (Proposição 4 dos Elementos)**

Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais. (EUCLIDES, 2009, p. 101)

Esse é o famoso caso LAL (lado – ângulo – lado), usado para verificar a congruência de triângulos e para deduzir os outros casos de congruência. Seu

enunciado é equivalente a:

“Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.” (MUNIZ NETO, 2012, p. 34)



**Figura 2.2 – Triângulos Congruentes**  
Fonte: Autores

No conjunto de axiomas mais aceitos pelos matemáticos, proposto por David Hilbert (1862-1943), que pode ser visto em Hilbert (1950), esta proposição é enunciada como axioma, e assim não é demonstrada. Nos Elementos, Euclides demonstra esta proposição, sugerindo que se faça a sobreposição das figuras, com os seguintes passos:

- Coloca-se o ponto A sobre o ponto D
- Alinhando-se as retas que passam por AB e por DE, os pontos B e E coincidem, pois  $\overline{AB} = \overline{DE}$ .
- Os segmentos AC e DF também ficariam ajustados pois  $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$  e  $\overline{AC} = \overline{DF}$ . Dessa forma os pontos C e F também coincidem.
- Logo  $\overline{BC} = \overline{EF}$ , pois os pontos correspondentes coincidem e só há uma reta que passa por dois pontos distintos, conforme o primeiro postulado. ■

**Proposição 2.2 (Proposição 8 dos Elementos)** “Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham também a base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais.” (EUCLIDES, 2009, p. 104)

Este é o caso de congruência LLL (lado – lado – lado).

**Proposição 2.3 (Proposição 11 dos Elementos)** “Traçar uma linha reta em ângulos retos com a reta dada a partir do ponto dado sobre ela.” (EUCLIDES, 2009, p. 106)

**Proposição 2.4 (Proposição 13 dos Elementos)** “Caso uma reta, tendo sido



alteada sobre uma reta, faça ângulos, fará ou dois retos ou iguais a dois retos.” (EUCLIDES, 2009, p. 108)

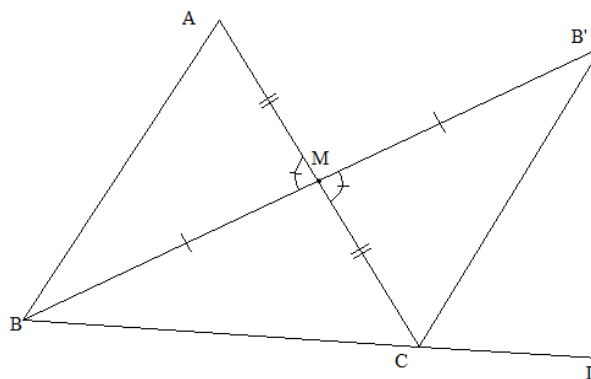
**Proposição 2.5 (Proposição 15 dos Elementos)** “Caso duas retas se cortem, fazem os ângulos no vértice iguais entre si.” (EUCLIDES, 2009, p. 109)

Esta proposição é equivalente a dizer que ângulos opostos pelo vértice – OPV – são iguais.

**Proposição 2.6 (Proposição 16 dos Elementos)** “Tendo sido prolongados um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é maior do que cada um dos ângulos interiores e opostos.” (EUCLIDES, 2009, p. 110)

Este é o teorema do ângulo externo, é equivalente a dizer que: “Em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é maior que as medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.” (MUNIZ NETO, 2012, p. 49)

**Demonstração:** Seja  $ABC$  um triângulo e  $M$  o ponto médio do segmento  $AC$ . Prolonguemos o segmento  $BM$  até  $B'$ , de modo que  $\overline{BM} = \overline{MB'}$ . Da proposição 2.5,  $\widehat{AMB} = \widehat{CMB'}$ . Segue, pela proposição 2.1 que os triângulos  $AMB$  e  $CMB'$  são congruentes. Dessa forma  $\widehat{BAM} = \widehat{B'CM}$ , e como  $\widehat{ACD} > \widehat{B'CM}$ , temos  $\widehat{ACD} > \widehat{BAM}$ .



**Figura 2.3 – Teorema do Ângulo Externo**  
Fonte: Autores

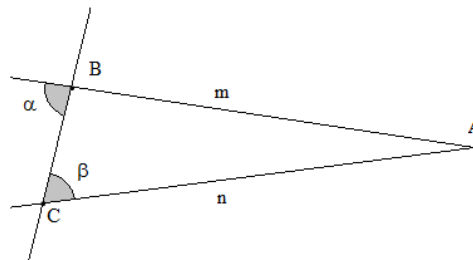
De maneira análogo mostra-se que  $\widehat{ACD} > \widehat{CBA}$ . ■

**Proposição 2.7 (Proposição 17 dos Elementos)** “Os dois ângulos de todo triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, são menores do que dois retos.” (EUCLIDES, 2009, p. 111)

**Demonstração:** Seja  $ABC$  um triângulo e  $\alpha$  um ângulo externo com vértice em  $C$ . Pela proposição 2.6,  $\alpha > \widehat{B}$ . Como  $\alpha + \widehat{C} = 180^\circ$ , segue que  $\widehat{B} + \widehat{C} < \alpha + \widehat{C} = 180^\circ$ . ■

**Proposição 2.8 (Proposição 27 dos Elementos)** “Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos alternos iguais entre si, as retas serão paralelas entre si.” (EUCLIDES, 2009, p. 119)

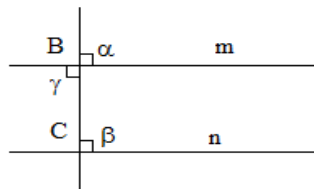
**Demonstração:** Suponha por absurdo que  $\alpha = \beta$  e  $m \cap n = A$ , conforme Figura 2.4 abaixo:



**Figura 2.4 – Proposição 27 dos Elementos**  
Fonte: Autores

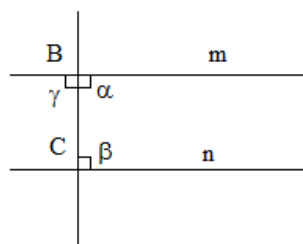
Referente ao triângulo ABC, temos que  $\alpha$  é ângulo externo, logo  $\alpha > \beta$  (proposição 2.6), absurdo. Portanto  $m \cap n = \emptyset$ , ou seja, m é paralela a n. ■

**Proposição 2.9 (Proposição 28 dos Elementos)** “Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça o ângulo exterior igual ao interior e oposto e no mesmo lado, ou os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos, as retas serão paralelas.” (EUCLIDES, 2009, p. 119)



**Figura 2.5 – Proposição 28 dos Elementos**  
Fonte: Autores

**Demonstração:** Suponha que  $\alpha = \beta = 90^\circ$ , temos, pela proposição 2.5, que  $\gamma = \alpha = 90^\circ$ . Segue imediatamente da proposição 2.8 que m e n são paralelas.



**Figura 2.6 – Proposição 28 dos Elementos II**  
Fonte: Autores

Suponha agora que  $\alpha = \beta = 90^\circ$ , temos, pela proposição 2.4, que  $\gamma = \alpha = 90^\circ$ . Segue imediatamente da proposição 2.8 que  $m$  e  $n$  são paralelas. ■

Euclides demonstrou 28 proposições sem usar o quinto postulado. Dessa forma, apenas com os quatros primeiros postulados, conseguiu mostrar a existência das paralelas, conforme proposições 27 e 28, porém não conseguiu mostrar que se fosse dado uma reta e um ponto externo a esta reta, era possível traçar uma única paralela à reta dada, passando pelo ponto externo dado.

Ao longo do tempo vários matemáticos tentaram demonstrar o quinto postulado como se fosse um teorema, usando como premissas os quatro primeiros. Nesse contexto destacam-se os matemáticos gregos Ptolomeu (90-168) e Proclus (412-485), o árabe Nasiredin (1201-1274) e o britânico John Wallis (1616-1703).

Segundo Barbosa (1995), uma das consequências da busca da prova do quinto postulado, foi a produção de um grande número de substitutos do quinto postulado. Estes substitutos são proposições equivalentes ao quinto postulado, ou seja, usando-se os quatro primeiros postulados mais o substituto é possível desenvolver a mesma geometria euclidiana. Para que uma proposição seja considerada um substituto, é necessário que:

1. A proposição a ser usada faça parte da geometria euclidiana, ou seja, que a proposição possa ser demonstrada com os cinco postulados originais.
2. Usando os quatro primeiros postulados originais mais o substituto, é possível demonstrar o quinto postulado.

O substituto mais conhecido é axioma de Playfair:

- Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

Citamos abaixo, alguns dos substitutos, conforme menciona Barbosa (1995):

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.
- Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.
- Existe um par de retas equidistantes.
- Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.
- Se três ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último também é reto.

- Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.
- Duas retas paralelas a uma mesma reta são paralelas.
- Se uma reta corta uma de duas paralelas, então, corta a outra.
- Existe um ângulo inscrito em um semicírculo que é reto.

Na tentativa de demonstração do quinto postulado, apenas com os quatro primeiros, geralmente os matemáticos acabavam usando, mesmo sem perceber, algum destes substitutos. Alguns morreram pensando que haviam conseguido a prova, porém o que fizeram foi apenas reescrever a geometria de Euclides, alterando somente a formulação do quinto postulado.

Os substitutos acima nos permitem antecipar algumas conclusões. Por exemplo, a relação de semelhança, quando as duas figuras não são congruentes, como pode ser visto em Barbosa (1995), só vale na geometria euclidiana, assim como o teorema de Pitágoras e a soma dos ângulos internos dos triângulos ser igual a  $180^\circ$ . Dessa forma, qualquer um dos substitutos, vale apenas na Geometria Euclidiana.

Voltando as tentativas de prova do quinto postulado, pode-se dizer que nenhum dos matemáticos já citados deram contribuições tão importantes quanto o padre jesuíta Girolamo Saccheri (1667-1733). Ele apresentou uma tentativa de prova do quinto postulado diferente dos seus antecessores. Saccheri, usou o método mais usado pelo próprio Euclides em suas demonstrações, o método de prova pela redução ao absurdo.

Segundo Barbosa (1995), Saccheri considerou um quadrilátero ABCD, com os lado AB e DC congruentes e perpendiculares ao lado BC, como na Figura 2.7.



**Figura 2.7 – Quadrilátero de Saccheri**  
**Fonte: Autores**

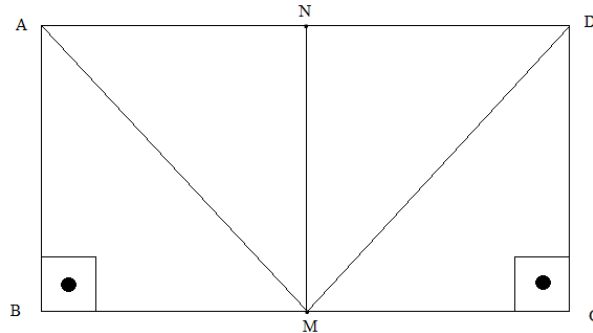
De acordo com Braz (2009), O trabalho de Saccheri consistia em três passos:

- I. Provar que os ângulos A e D são congruentes;
- II. Provar que o quinto postulado equivale com a hipótese do ângulo reto e
- III. Provar que o fato dos ângulos A e D serem agudos ou obtusos entra em contradição com uma das 28 primeiras proposições dos Elementos de Euclides (BRAZ, 2009, p.19)

Para o primeiro passo, inicialmente Saccheri mostrou a seguinte proposição:

**Proposição 2.10:** A reta que liga os pontos médios da base e do topo do quadrilátero de Saccheri é perpendicular ao topo e a base, e os ângulos do topo ( $\widehat{BAD} = \widehat{ADC}$ ) são congruentes.

**Demonstração:** Marcamos os pontos M e N, pontos médios da base e do topo, respectivamente, traçamos os segmentos AM, DM e MN, conforme Figura 2.8.



**Figura 2.8 – Proposição 2.10**  
Fonte: Autores

Pela proposição 2.1, os triângulos ABM e DCM são congruentes. Dessa forma, já que os segmentos AM e DM são congruentes, os triângulos ANM e DNM, pela proposição 2.2 (LLL), também são congruentes.

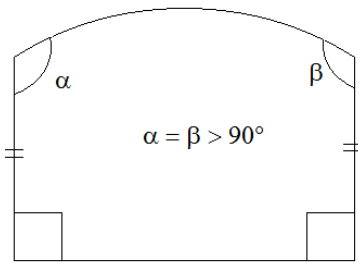
Assim, como  $\widehat{BAM} = \widehat{CDM}$  e  $\widehat{NAM} = \widehat{NDM}$ , temos que  $\widehat{BAN} = \widehat{BAM} + \widehat{NAM} = \widehat{CDM} + \widehat{NDN} = \widehat{NDC}$ , portanto os ângulos do topo são iguais.

Ainda, pela proposição 2.4,  $\widehat{ANM} = \widehat{DNM} = 90^\circ$ , assim como  $\widehat{BMN} = \widehat{CMN} = 90^\circ$ . ■

Para provar que o quinto postulado equivale com a hipótese do ângulo reto, bastava usar um dos substitutos “Se três ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último também é reto” ou “Existe um par de retas equidistantes”.

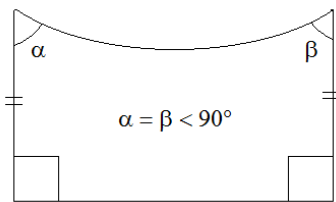
Restava a Saccheri mostrar que estes ângulos obrigatoriamente eram retos e dessa forma o quinto postulado estaria demonstrado. Usando o método de demonstração por redução ao absurdo, Saccheri considerou as possibilidades:

- Que a soma dos dois ângulos era superior a  $180^\circ$ .



**Figura 2.9 – Proposição 2.10 II**  
**Fonte: Autores**

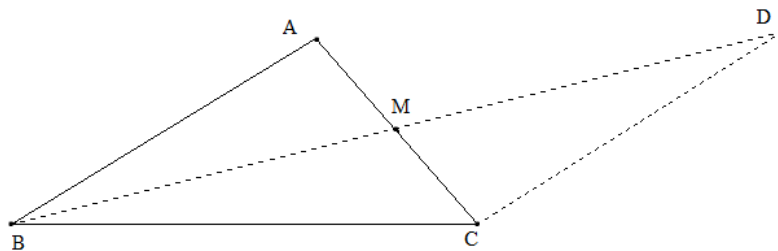
- Que a soma dos dois ângulos era inferior a  $180^\circ$  (Quadrilátero de Saccheri).



**Figura 2.10 – Proposição 2.10 III**  
**Fonte: Autores**

Saccheri conseguiu descartar a primeira hipótese com os resultados abaixo:

**Proposição 2.11:** Seja  $ABC$  um triângulo, como na Figura 2.11. Existe um triângulo  $BCD$  tal que a soma dos ângulos internos é a mesma soma dos ângulos do triângulo  $ABC$  e o triângulo  $BCD$  possui um ângulo cuja medida é menor ou igual à metade de um dos ângulos do triângulo  $ABC$ .



**Figura 2.11 – Proposição 2.11**  
**Fonte: Autores**

**Demonstração:** Seja  $ABC$  um triângulo, sendo o ângulo  $\widehat{B}$  menor do que os outros dois. Seja  $M$  o ponto médio de  $AC$ . Seja  $D$  o ponto da semirreta com origem em  $B$  e passando por  $M$  tal que  $\overline{BM} = \overline{MD}$ . Pelas proposições 2.5 e 2.1, os triângulos  $AMB$  e  $CMD$  são congruentes.

Assim, como  $\widehat{A} = M\widehat{C}D$  e  $A\widehat{B}M = \widehat{D}$  temos que:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = M\widehat{C}D + (A\widehat{B}M + M\widehat{B}C) + \widehat{C}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = M\widehat{B}C + (\widehat{C} + M\widehat{C}D) + \widehat{D}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = M\widehat{B}C + B\widehat{C}D + \widehat{D}$$

Logo, a soma dos ângulos do triângulo ABC é igual à soma dos ângulos do triângulo BCD.

Como  $\widehat{B} = A\widehat{B}M + M\widehat{B}C$  e  $A\widehat{B}M = \widehat{D}$ , temos  $\widehat{B} = \widehat{D} + M\widehat{B}C$ . Se  $\widehat{D} \leq M\widehat{B}C$  temos  $\widehat{D} \leq \widehat{B}/2$ . Se  $\widehat{D} \geq M\widehat{B}C$ , temos  $M\widehat{B}C \leq \widehat{B}/2$ . Dessa forma, ou  $\widehat{D}$ , ou  $M\widehat{B}C$ , são menores ou iguais a metade de  $\widehat{B}$ . ■

**Proposição 2.12 (Saccheri – Legendre):** A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre menor ou igual a  $180^\circ$ .

**Demonstração:** Suponha, por absurdo, que exista um triângulo ABC cuja soma dos ângulos internos seja maior do que  $180^\circ$ , ou seja  $180^\circ + \alpha$ , com  $\alpha > 0$ . Pela proposição 2.11, podemos encontrar outro triângulo  $A_1B_1C_1$  satisfazendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ + \alpha \\ \widehat{A}_1 \leq \frac{1}{2}\widehat{A} \end{array} \right.$$

Seguindo indutivamente podemos encontrar um triângulo  $A_nB_nC_n$  satisfazendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A}_n + \widehat{B}_n + \widehat{C}_n = 180^\circ + \alpha \\ \widehat{A}_n \leq \frac{1}{2^n}\widehat{A} \end{array} \right.$$

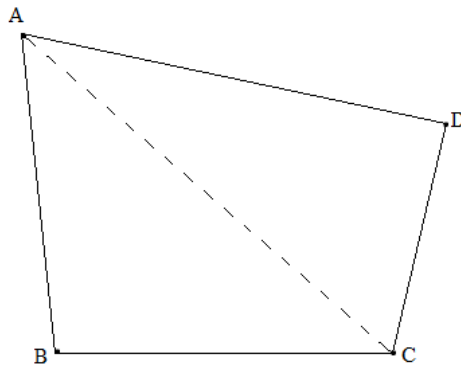
Tomando  $n_0$  suficientemente grande, de modo que  $\widehat{A}/2^{n_0} < \alpha$ , teremos um triângulo  $A_{n_0}B_{n_0}C_{n_0}$  tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A}_{n_0} + \widehat{B}_{n_0} + \widehat{C}_{n_0} = 180^\circ + \alpha \\ \widehat{A}_{n_0} < \alpha \end{array} \right.$$

Isso implica que  $\widehat{B}_{n_0} + \widehat{C}_{n_0} = 180^\circ + \alpha - \widehat{A}_{n_0} > 180^\circ$  contradizendo a proposição 2.7. Logo, só pode ser  $\widehat{A}_n + \widehat{B}_n + \widehat{C}_n \leq 180^\circ$ . ■

**Corolário 2.1:** A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero

qualquer é sempre menor ou igual a  $360^\circ$ .



**Figura 2.12 – Corolário 2.1**  
**Fonte: Autores**

**Demonstração:** Basta dividir o quadrilátero em dois triângulos. Como a soma das medidas dos ângulos internos de cada um deles deve ser menor ou igual a  $180^\circ$ , a soma das medidas dos ângulos internos dos dois triângulos deve ser menor ou igual a  $360^\circ$ . ■

**Corolário 2.2:** A soma dos ângulos não retos do quadrilátero de Saccheri é menor ou igual a  $180^\circ$ .

**Demonstração:** Como a soma da medida dos ângulos da base do quadrilátero de Saccheri mede  $180^\circ$  e a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer é menor ou igual a  $360^\circ$  (Corolário 2.1), temos que a soma da medida dos ângulos não retos do quadrilátero de Saccheri é menor ou igual a  $180^\circ$ . ■

Assim, Saccheri mostrou que a soma da medida dos ângulos não retos de seu quadrilátero era menor ou igual a  $180^\circ$ . Segundo Barbosa (1995), ao procurar uma contradição para a hipótese de que a soma da medida dos ângulos era extremamente inferior a  $180^\circ$ , Saccheri provou uma série de resultados coerentes com todos os postulados da Geometria Euclidiana, exceto o quinto. Tentou outras maneiras de encontrar alguma contradição, mas novamente não obteve sucesso.

De acordo com Braz (2009), mesmo com todos os resultados obtidos, Saccheri não acreditou na existência de uma nova geometria, supostamente devido à grande influência religiosa da época. Apesar disso, contribuiu imensamente para o desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas.

Porém, resultados como estes, instigavam mais e mais a curiosidade de grandes matemáticos. Johann Bolyai (1802-1860), jovem matemático húngaro, vinha estudando fortemente o problema das paralelas, mas seu pai Wolfgang Bolyai (1775-



1856), também grande matemático de sua época, numa narrativa de sua experiência e na tentativa de desencorajar seu filho, disse:

Você não deve tentar esta abordagem das paralelas. Conheço este caminho em toda sua extensão. Atravessei esta noite sem fim, que extinguiu toda a luz a alegria da minha vida. Suplico-lhe, esqueça a ciência das paralelas [...] Pensei que me sacrificaria em benefício da verdade. Estava pronto para me tornar o mártir que removeria a falha da Geometria e a devolveria purificada à humanidade. Tive um trabalho monstruoso, enorme; minhas criações são muito melhores do que as dos outros mas ainda assim não atingi completa satisfação [...] Eu desisti quando vi que nenhum homem pode chegar ao fim desta noite. Desisti, inconsolável, compadecido por mim e por toda a humanidade.

[...] Admito que esperei pouco do desvio de suas linhas. Parece-me que estive nessas regiões; que viajei passando por todos os recifes deste Mar Morto infernal e que sempre voltei com o mastro quebrado e a vela rasgada. (MECHKOWSKI, 1964, p. 32 e 33 apud GAZIRE, 2000)

Apesar da tentativa de seu pai, Johann Bolyai não desistiu. Estudou o problema das paralelas com o mesmo raciocínio de Saccheri, usando uma das negações do quinto postulado, tentando chegar a uma contradição, assumiu, contrariando o substituto dado pro Playfair, que dada uma reta e um ponto fora dela, passam pelo menos duas retas paralelas.

Bolyai, cansado de procurar em vão por contradições, foi um dos primeiros a considerar a hipótese de haver outra geometria. Estudou e desenvolveu a teoria da geometria hiperbólica, usando como base os quatro primeiros postulados de Euclides, e no lugar do quinto, assumiu a existência de pelo menos duas paralelas. Mostrou que esta nova geometria era tão consistente quanto a geometria euclidiana. “Do nada eu criei um novo e estranho universo”. (BARBOSA, 1995, p. 42)



**Figura 2.13 – Johann Bolyai**

Fonte: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Bolyai>> Acesso em 23/02/2014

De acordo com Eves (2011), Bolyai teve que dividir os créditos desta descoberta com Nicolai Ivanovitch Lobachevski (1793-1856), grande matemático russo. Na verdade, Lobachevski publicou seus resultados em 1829, três anos antes de Bolyai, porém sua obra só ficou conhecida muitos anos depois quando ele próprio

publicou um pequeno livro em alemão, intitulado Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas. (EVES, 2011, p. 543)



**Figura 2.14 – Nicolai Lobachevski**

**Fonte:** <<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Lobachevsky.html>> Acesso em 23/02/2014

Apesar de Bolyai e Lobachevski terem levado os créditos pela descoberta, não podemos deixar de citar que o grande interesse pelo tema e a origem das ideias são, supostamente, devidas a Carl Friedrich Gauss (1777-1855). De acordo com Mlodinow (2010), Gauss era grande amigo de Wolfgang Bolyai (pai de Johann) e estudou durante anos com Johann M. C. Bartels (1769-1836), com os quais discutia suas ideias sobre o espaço não-euclidiano. Bartels foi professor de Lobachevski na Rússia. Segundo Barbosa (1995), quando Gauss ficou sabendo dos textos de Bolyai e Lobachevski, afirmou que os resultados obtidos por eles já eram de seu conhecimento, pois já havia desenvolvido esta geometria curiosa, a ponto de resolver qualquer problema nela. Porém, como Gauss não tornou público seus trabalhos, supostamente por medo da repercussão que causaria, não foi reconhecido em vida pela glória desta descoberta.

De fato, a Geometria descoberta por estes matemáticos demorou para ser aceita pela comunidade matemática, pois não havia qualquer aplicação até então e não havia uma superfície na qual as propriedades pudessem ser vistas como na geometria euclidiana. Esta geometria era chamada de imaginária, pois só existia na mente dos matemáticos e estas ideias, apesar de consistentes, contrariavam o raciocínio humano desde a criação da geometria. Pois, como pode haver mais de uma paralela se sabemos que há apenas uma? Como a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser inferior a  $180^\circ$  se sempre estudamos que a soma destes ângulos é  $180^\circ$ ?

Algumas respostas começaram a surgir quando o matemático alemão Georg

Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), estudou a variação em que dada uma reta e um ponto fora dela, não há reta paralela à reta dada que passe pelo ponto. Esta hipótese contradiz alguns dos primeiros postulados de Euclides, como o conceito de que por dois pontos distintos passa uma única reta e que a reta pode ser prolongada infinitamente. Porém, de acordo com Eves (2011), Riemann mostrou que se fosse descartada a infinitude da reta, mas admitindo-se que a reta é ilimitada e com outros ajustes necessários, esta outra geometria torna-se totalmente consistente e acima de tudo, muito útil. Esta geometria, anos depois recebeu o nome de Geometria Elíptica.



**Figura 2.15 – Bernhard Riemann**

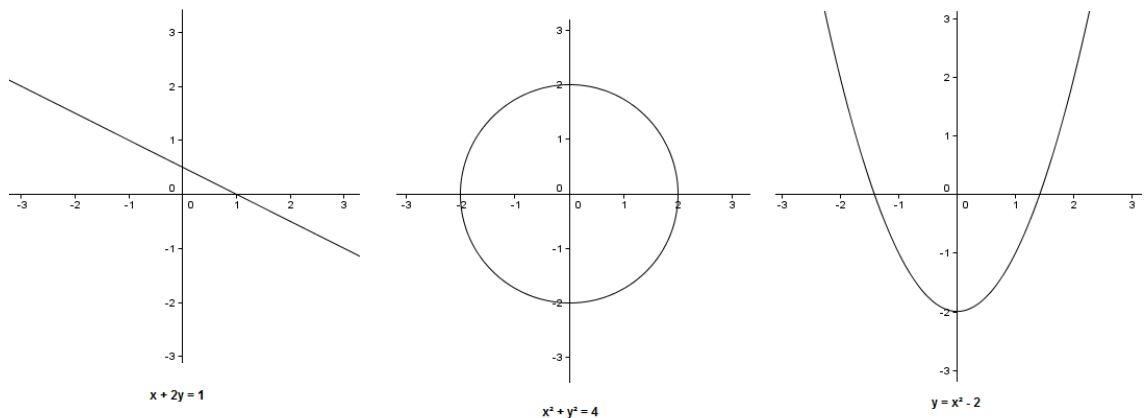
**Fonte:** <[httppt.wikipedia.org/wikiBernhard\\_Riemann](http://pt.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann)>  
**Acesso em 23/02/2014**

Estas geometrias, hiperbólica e elíptica, são consistentes, porém, a grande diferença para que possamos compreender seus conceitos está na superfície em que as observamos. Pois no plano, se pensarmos em retas euclidianas, não faz sentido pensarmos que há mais de uma paralela, ou que não há paralelas se sabemos que elas existem. Veremos nos próximos capítulos que a geometria hiperbólica faz sentido em superfícies de curvatura negativa, enquanto a geometria elíptica faz sentido em superfícies com curvatura positiva. Para isso, introduziremos a seguir algumas ideias do que são superfícies com curvaturas positivas, negativas e nulas.

### 3 INTRODUÇÃO À CURVATURA DE CURVAS E SUPERFÍCIES

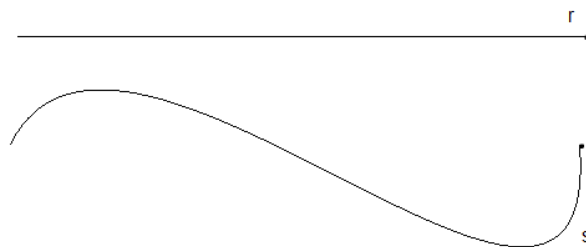
Para entendermos as Geometrias Elíptica e hiperbólica, precisamos compreender sobre as superfícies em que suas propriedades são válidas. Falamos no capítulo anterior, que a geometria elíptica faz sentido sobre superfícies de curvatura positiva, enquanto a geometria hiperbólica, faz sentido sobre superfícies de curvatura negativa. Mas, o que é curvatura de superfície? Como ela é definida? Para facilitar o entendimento, introduziremos primeiramente as ideias de curvatura para curvas e posteriormente apresentaremos ideias de curvatura para superfícies.

Quando falamos em curva, devido à nossa experiência com Geometria Euclidiana e Analítica, já vem em nossa mente, por exemplo, uma reta  $x + 2y = 1$ , ou uma circunferência,  $x^2 + y^2 = 4$ , ou uma parábola,  $y = x^2 - 2$ , como na Figura 3.1:



**Figura 3.1 – Curvas**  
Fonte: Autores

Porém, existe outra maneira de pensarmos em curva, como o caminho traçado por um ponto que se move no espaço.



**Figura 3.2 – Ponto que se move no espaço**  
Fonte: Autores

Mas o que faz a reta  $r$  acima ser diferente da curva  $s$ ?

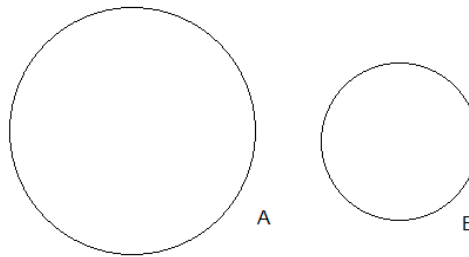
A curva  $s$  é “torta” e a reta  $r$  não é. Segundo Seara da Ciência (s.d.), a curva  $s$  tem alguma propriedade que a reta não tem. Essa propriedade recebe o nome de curvatura.

De acordo com Minhós (2011), ao procurar, intuitivamente, uma medida da curvatura de uma curva, devemos observar algumas intuições:

1 – A curvatura de uma linha reta deve ser zero, e

2 – A curvatura de uma circunferência deve ser constante, e inversamente proporcional ao seu raio.

De fato, a circunferência, aparentemente, tem curvatura igual em todos os pontos e ainda, a curvatura da circunferência A da Figura 3.3, parece ser menor do que a curvatura da circunferência B.



**Figura 3.3 – Circunferências**  
**Fonte: Autores**

Ou seja, quanto maior for o raio da circunferência, menor será sua curvatura. Dessa forma, intuitivamente, a curvatura  $C$  é inversamente proporcional ao raio  $R$  da circunferência.

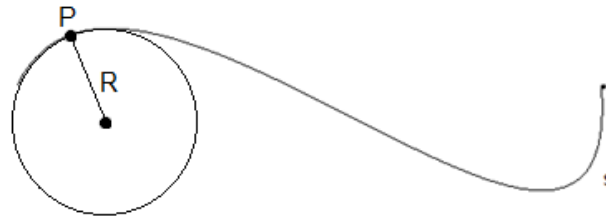
Assim definimos:

$$C = \frac{1}{R}$$

Se tivermos uma circunferência muito grande, com o raio tendendo ao infinito, a curvatura  $C$  tenderá a zero, ou seja, tenderá a uma linha reta. Quanto menor for o raio da circunferência, maior será a curvatura, ou seja, se o raio tender a zero, a curvatura tenderá ao infinito.

Porém, voltando a curva  $s$  da Figura 3.2, como é possível medir sua curvatura, já que aparentemente a curvatura não é igual em todos os pontos?

Para encontrar a curvatura de um ponto  $P$  na curva  $s$ , desenhemos a circunferência de maior raio possível que a tangencia em seu lado côncavo:



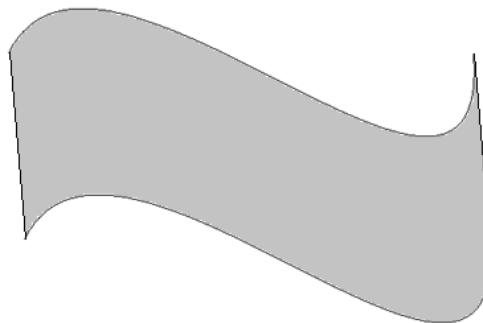
**Figura 3.4 – Curva “s”**  
**Fonte: Autores**

Essa circunferência recebe o nome de Círculo Osculante. A palavra osculante, vem do verbo oscular, que significa beijar. Logo, círculo osculante, parece significar círculo que beija a curva.

Neste caso, a curvatura  $C$  do ponto  $P$  da curva  $s$ , será  $C_{(P)} = 1/R_{(P)}$ , pois  $R_{(P)}$  é o raio do círculo osculante no ponto  $P$ .

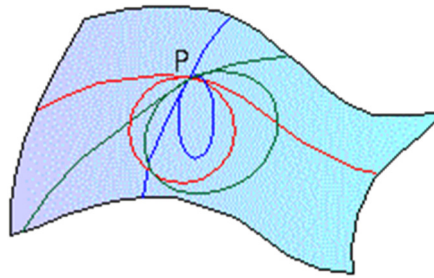
Dessa forma, podemos medir a curvatura de qualquer ponto de qualquer curva, basta encontrar o raio da maior circunferência que tangencia a curva no ponto  $P$ , em seu lado côncavo e encontrar o inverso do raio desta circunferência.

Já sabemos como encontrar a curvatura de uma curva. E para uma superfície? Por exemplo, a superfície da Figura 3.5:



**Figura 3.5 – Superfície**  
**Fonte: Autores**

Não podemos simplesmente usar um círculo osculante, pois por um ponto  $P$  da superfície, temos várias curvas contidas na superfície que contêm o ponto  $P$ , e essas curvas, podem possuir circunferências osculantes com raios diferentes, conforme pode ser visto na Figura 3.6. Dessa forma teríamos mais de um valor de curvatura para cada ponto  $P$ . O que, do aspecto prático, seria inútil.



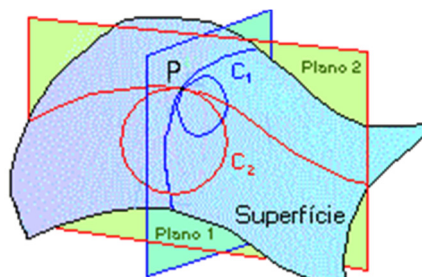
**Figura 3.6 – Superfície II**

Fonte:<<http://www.seara.ufc.br/donafifi/gausseeuler/gausseuler2.htm>> Acesso em 23/02/2014

Como podemos então definir a curvatura da superfície em um ponto qualquer?

De acordo com Seara da Ciência (s.d.), seja  $P$  um ponto qualquer da superfície (Figura 3.7). Traçamos um plano intersectando a superfície e passando por  $P$ . Esta interseção do plano com a superfície determina uma curva, que sabemos encontrar sua curvatura. Fizemos este processo repetidas vezes até encontrar o plano que determina a curva que contém o maior círculo osculante possível. Portanto, esta curva será a de maior curvatura entre aquelas que estão na superfície e que passam por  $P$ . Repetimos o processo até encontrar a curva de menor curvatura. Digamos então, que a curvatura máxima seja  $C_{1(P)}$  e a curvatura mínima seja  $C_{2(P)}$ . Definimos então, a curvatura no ponto  $P$ , simplesmente como o produto das curvaturas  $C_{1(P)}$  e  $C_{2(P)}$ . Isto é:

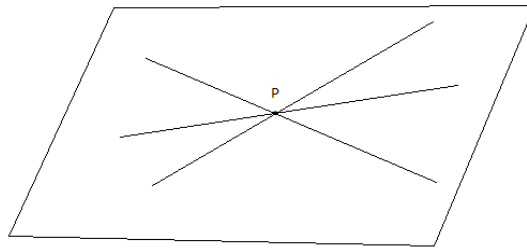
$$C_{(P)} = C_{1(P)} \times C_{2(P)}.$$



**Figura 3.7 – Superfície III**

Fonte:<<http://www.seara.ufc.br/donafifi/gausseeuler/gausseuler2.htm>> Acesso em 23/02/2014

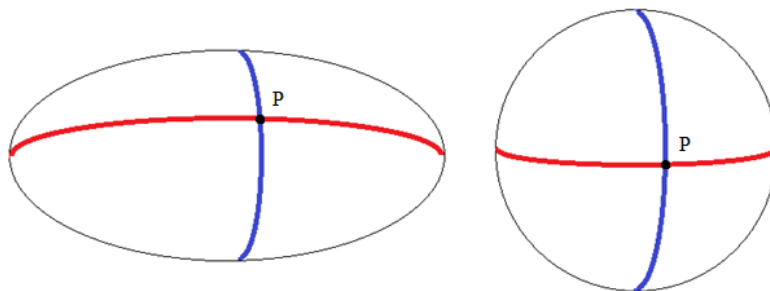
Assim, podemos encontrar a curvatura em qualquer ponto de qualquer superfície. Por exemplo, se a superfície é um plano, todas as interseções de planos que passam por  $P$  serão retas, logo, terão curvatura nula. Portanto, o plano tem curvatura zero ou nula.



**Figura 3.8 – Plano**  
**Fonte: Autores**

Porém, pode haver superfícies que contenham curvatura positiva ou negativa. Para que  $C = C_1 \times C_2$  seja positivo, basta que  $C_1$  e  $C_2$  tenham o mesmo sinal, ou seja, tenham as curvas de máxima e mínima curvatura para o mesmo lado da superfície. Exemplos clássicos são a esfera e a elipsoide.

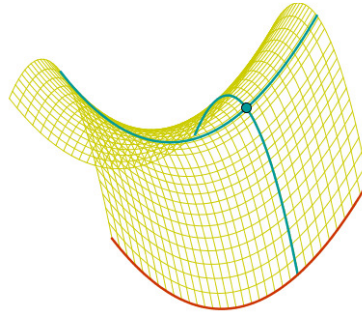
No caso da elipsoide (Figura 3.9), a linha vermelha representa a curva de mínima curvatura do ponto  $P$ , enquanto a linha azul representa a curva de máxima curvatura. Como ambas tem curvatura para o mesmo lado da superfície, o produto é positivo. O mesmo acontece com a esfera.



**Figura 3.9 – Elipsoide e Esfera**  
**Fonte: Autores**

Para que  $C$  seja negativo, basta que uma curva seja encurvada para um lado, e a outra para o outro lado da superfície. Ou seja, os círculos osculantes devem ficar em lados opostos. Exemplo de superfícies com curvatura negativa são a sela e a pseudoesfera.

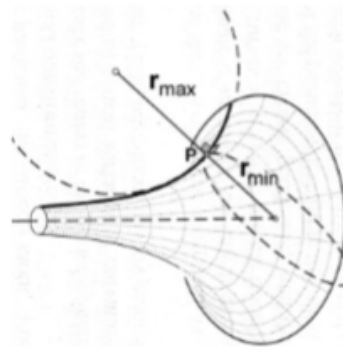




**Figura 3.10 – Sela**

Fonte:

<[sushieletrico.blogspot.com.br/2010/08/matematica-e-natureza-paraboloide.html](http://sushieletrico.blogspot.com.br/2010/08/matematica-e-natureza-paraboloide.html)> Acesso em 23/02/2014



**Figura 3.11 – Pseudoesfera**

Fonte:<[www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica5.htm](http://www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica5.htm)> Acesso em 23/02/2014

Nos capítulos cinco e seis veremos que a Geometria Elíptica pode ser modelada em superfícies de curvatura positiva enquanto que a Geometria Hiperbólica pode ser modelada em superfícies de curvatura negativa.

#### 4 DIRETRIZES CURRICULARES DO ESTADO DO PARANÁ E O USO DE TECNOLOGIAS PARA O ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

O tema “Geometrias Não Euclidianas” é citado nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica, da Secretaria de Estado da Educação do Paraná, de 2008, como parte do conteúdo estruturante “Geometrias”. Este documento sugere o estudo de noções básicas de geometrias não euclidianas, pois, de acordo com este documento, “muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas geometrias não euclidianas”. (PARANÁ, 2008, p. 56)

Um exemplo muito simples desta afirmação é o de calcular a menor distância entre duas cidades, ou dois países, ou simplesmente entre dois pontos quaisquer sobre o globo terrestre. Esta distância certamente não é uma reta euclidiana.

Estas diretrizes recomendam que para o ensino médio, sejam trabalhadas as geometrias: elíptica, hiperbólica e dos fractais. Para a geometria elíptica, deve-se abordar:

postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: polos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento. (PARANÁ, 2008, p. 57)

Para a geometria hiperbólica, deve-se abordar: “postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudoesfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos”. (PARANÁ, 2008, p. 57)

Para a geometria fractal, deve-se abordar: “o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades.” (PARANÁ, 2008, p. 57)

Neste trabalho apresentaremos uma breve introdução das Geometrias Elíptica e Hiperbólica, não trataremos da Geometria Fractal.

É difícil imaginar uma forma de ensinar geometria não euclidiana sem usar alguma ferramenta tecnológica. Ainda mais com os atuais avanços tecnológicos, em que, pelo menos no Estado do Paraná, grande maioria dos alunos tem acesso a computadores ou *tablets*.

O uso de tecnologias para o ensino das Geometrias tem-se mostrado muito eficiente, como pode ser visto em Dueli (2013), que usa uma ferramenta do *Google Earth* para medir a distância entre dois pontos, para mostrar que a menor distância entre dois pontos no globo é um arco de circunferência e não uma reta euclidiana.

Citamos também o livro *Noções de Geometrias Não Euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais*, de Karolina Barone Ribeiro da Silva que usa o software livre Régua e Compasso, para introduzir os conceitos e elementos da Geometria Hiperbólica, tornando tais conhecimentos mais compreensíveis e imagináveis.

Neste trabalho sugerimos, além dos recursos já citados, o uso de arquivos com extensão CDF, que são executados pelo *software* livre Wolfram CDF Player, disponível para *download* em <<http://www.wolfram.com/cdf-player/>>. Estes arquivos são de uso gratuito e que podem ser usados em experiências que ajudam na compreensão dos conceitos das geometrias elíptica e hiperbólica.

Tais recursos possibilitam ao aluno fazer experimentos concretos, tantas vezes quanto for necessário para que os conceitos possam ser plenamente compreendidos.

O ensino destas Geometrias com o uso de recursos tecnológicos, proporciona ao aluno mais um elo entre a matemática e sua vida, pelo fato de vivermos em uma esfera, num espaço curvo e termos formas fractais a nossa volta. O ensino destas geometrias estará contribuindo para despertar o interesse nessa ciência, tornando-a mais cheia de significados e mais próxima do dia-a-dia do estudante.

## 5 GEOMETRIA ELÍPTICA

Esclarecemos que a Geometria que será tratada neste capítulo, é a Geometria da Superfície Esférica. Porém reservamos o direito de chamá-la de Geometria Elíptica - apesar de não ser, para que este trabalho fique compatível com as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, que também chama a Geometria da Superfície Esférica de Geometria Elíptica.

Nesta Geometria, ao invés do plano, estudaremos os objetos na superfície esférica, que como vimos, possui curvatura positiva.

A mesma ideia de ponto da Geometria Euclidiana se aplica nesta geometria, porém o conceito de reta é um pouco diferente. Para entendermos o que é uma reta na Geometria Elíptica, precisamos lembrar uma propriedade fundamental da reta na Geometria Euclidiana, a propriedade de que o caminho mais curto entre dois pontos é o único segmento de reta determinado por eles.

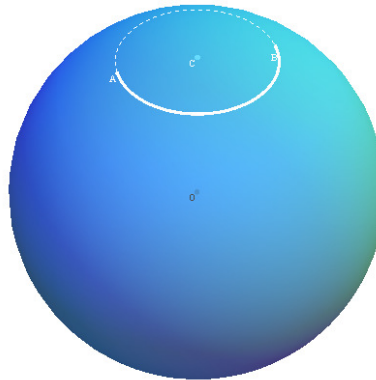
Para isso, considerando o Planeta Terra como uma esfera perfeita, imaginemos duas cidades, A e B, e uma pessoa que fará uma viagem a pé, de uma cidade a outra. Qual é o caminho mais curto que a pessoa poderá percorrer? Poderá ser uma reta euclidiana?

Neste momento, o “mundo” da pessoa é somente a superfície da esfera, ou seja, somente a “casca”. Assim, o menor caminho entre as cidades não pode ser uma reta euclidiana, pois, se fosse, a pessoa precisaria passar pelo interior do planeta, que não pertence ao seu “mundo”. Dessa forma, o menor caminho entre as duas cidades, deve ser uma curva pertencente à superfície da esfera.

Para resolver este problema e discutir o conceito de geodésica, sugerimos uma experiência que pode ser feita com o uso do arquivo esfera\_azul-2ciclo.cdf, disponível em: <http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino/index.htm>, acesso em 08/10/2013, que simula a intersecção de uma esfera de raio 6.371 km, aproximadamente o raio do Planeta Terra, com um plano que passa por dois pontos quaisquer A e B pertencentes a esfera. Podemos criar várias circunferências que passam pelos pontos A e B. Deixamos a seguir, alguns exemplos destas intersecções.

Na primeira intersecção, conforme Figura 5.1, o plano que intersecta a esfera está muito distante do centro O da esfera, e comprimento do menor arco entre A e B

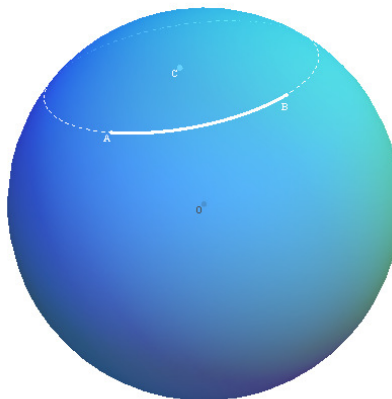
tem o comprimento de 6.966,51 km.



Comprimento do arco AB = 6966.51 Km

**Figura 5.1 – Experiência Geodésica I**  
**Fonte: Autores**

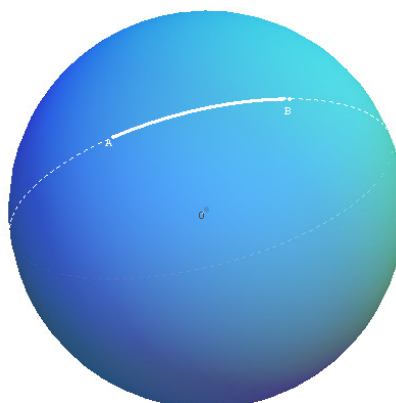
Na segunda intersecção, ilustrada na Figura 5.2, o plano intersecta a esfera um pouco mais próximo do centro, o comprimento do menor arco entre A e B tem o comprimento de 4.824,04 km.



Comprimento do arco AB = 4824.04 Km

**Figura 5.2 – Experiência Geodésica II**  
**Fonte: Autores**

Na terceira intersecção, Figura 5.3, usamos o plano que passa pelo centro da esfera. Verificamos que o comprimento do menor arco que passa pelos pontos A e B diminuiu para 4.648,39 km.



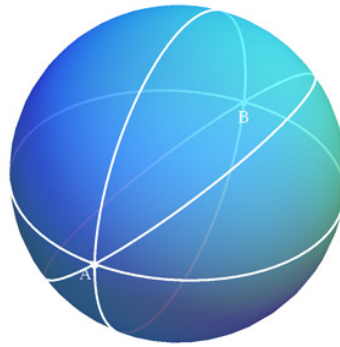
Comprimento do arco AB = 4648.39 Km

**Figura 5.3 – Experiência Geodésica III**  
**Fonte: Autores**

Os professores podem usar este arquivo para fazer inúmeras experiências, até convencer os alunos de que a menor distância entre dois pontos numa esfera é dado pelo comprimento do menor arco da circunferência que passa por estes dois pontos e pelo centro da esfera. Estas circunferências, definidas pela intersecção de planos com o centro da esfera, por terem a propriedade de indicar o menor caminho entre dois pontos, serão as retas da Geometria Elíptica, também conhecidas como Geodésicas. Todos os círculos que representam geodésicas são chamados de círculos máximos, e qualquer outro círculo, como os das Figuras 5.1 e 5.2 são chamados de círculos menores.

Outra experiência pode ser realizada usando bolas de isopor, alfinetes e elástico. Marcando dois pontos sobre uma bola de isopor, cortamos um pedaço de elástico de tamanho menor que a distância entre os pontos. Prendemos as pontas do elástico com os alfinetes sobre os pontos definidos. Observaremos que quando tentamos deslocar o elástico para outra posição, o elástico volta a formar um arco que pertence a geodésica que passa pelos pontos definidos, reforçando o conceito de que a menor distância entre eles é definida por um arco da geodésica que passa por eles.

Desenhando duas geodésicas quaisquer na esfera, elas sempre se intersectarão em dois pontos, chamados pontos antipodais pertencentes a um diâmetro da esfera. Ou seja, nesta Geometria, tomando duas retas quaisquer, elas sempre terão pontos em comum, o que implica na não existência de retas paralelas.

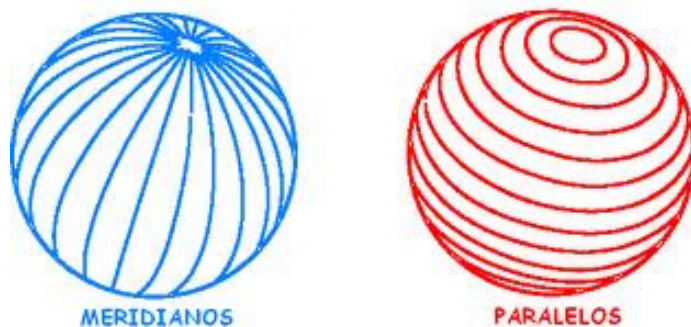


**Figura 5.4 – Intersecção de Geodésicas**  
 Fonte: <[www.atractor.pt/mat/GeomEsf/rectas\\_paralelas.htm](http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/rectas_paralelas.htm)> Acesso em 23/02/2014.

Esta geometria satisfaz o Postulado Riemann, que consiste em uma das formas de negação do substituto dado por Playfar ao quinto postulado de Euclides, dada por: “Quaisquer duas retas distintas têm um ponto de encontro”.



**Figura 5.5 – Globo Terrestre**  
 Fonte: <[www.atractor.pt/mat/GeomEsf/urso2.htm](http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/urso2.htm)> Acesso em 23/02/2014.

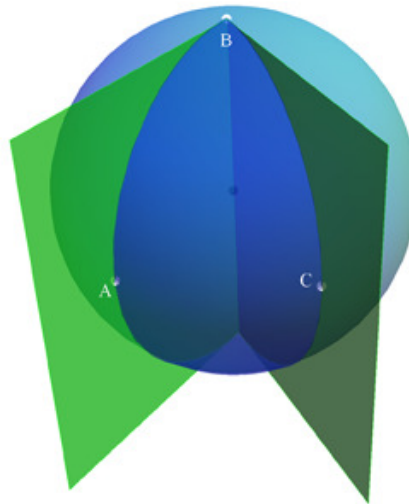


**Figura 5.6 – Meridianos e Paralelos**  
 Fonte: <[andreane22.blogspot.com.br/2014/02/meridianos-e-paralelos-by-caroline-s.html](http://andreane22.blogspot.com.br/2014/02/meridianos-e-paralelos-by-caroline-s.html)> Acesso em 23/02/2014.

No globo terrestre, temos exemplos dos conceitos acima. Os meridianos são geodésicas que se intersectam nos polos norte e sul. Conforme Figura 5.6, qualquer meridiano forma ângulos de  $90^\circ$  com o equador, onde têm sua máxima separação e converge para os polos. Os paralelos determinam circunferências que são a intersecção de planos paralelos ao plano que passa pela linha do equador, porém não

determinam retas na superfície esférica por representar círculos menores e não possuir a propriedade de determinar a menor distância entre dois pontos. Com exceção da linha do equador, que é uma geodésica, todos os paralelos são círculos menores.

Quando traçamos geodésicas na esfera, a intersecção determina figuras geométricas. A intersecção entre duas geodésicas determina uma figura curiosa que não existe na Geometria Euclidiana Plana, o biângulo ou diedro:



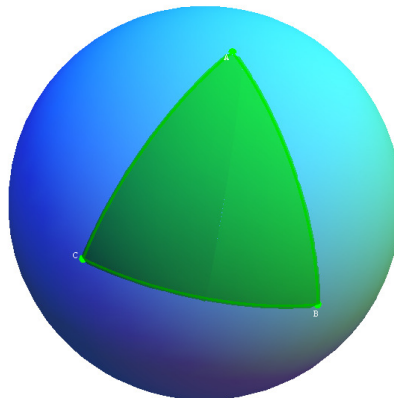
**Figura 5.7 – Biângulo**

Fonte: <[www.atractor.pt/mat/GeomEsf/saber\\_2-1.htm](http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/saber_2-1.htm)>  
Acesso em 23/02/2014.

O ângulo formado entre os planos que determinam o biângulo é chamado de ângulo esférico. O biângulo determina uma fração da área da superfície esférica. Supondo que o ângulo entre os planos seja  $\widehat{B}$ , temos a seguinte relação:

$$\text{Área}_{\text{biângulo}} = \left( \frac{\widehat{B}}{2\pi} \right) 4\pi r^2 = 2\widehat{B}r^2$$

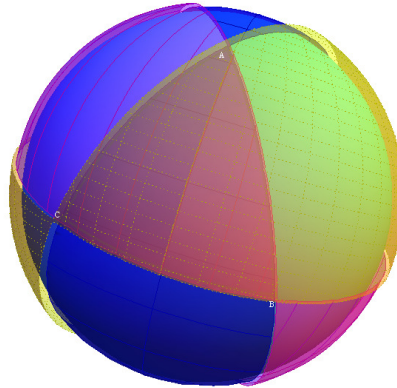
A intersecção entre três geodésicas determina triângulos esféricos.



**Figura 5.8 – Triângulo Esférico**  
Fonte: Autores.



Como sabemos a relação entre a área do biângulo e a área da esfera, podemos usar o arquivo `area_de_um_triangulo.cdf`, disponível em <http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino/index.htm>, acesso em 08/10/2013, para introduzir aos alunos uma forma de calcular a área do triângulo considerando as áreas dos biângulos de vértices A, B e C.



**Figura 5.9 – Área de Triângulos Esféricos**  
Fonte: Autores.

Se considerarmos as áreas dos biângulos com vértices em A, B e C, cobrimos toda a superfície esférica, porém estamos somando a área do triângulo em demasia. Na verdade, estamos somando seis vezes, considerando o triângulo oposto, formado pelos pontos antipodais a A, B e C. Dessa forma, temos que descontar quatro vezes a área do triângulo. Assim, temos a seguinte relação:

$$2\text{Área}_{\text{biângulo A}} + 2\text{Área}_{\text{biângulo B}} + 2\text{Área}_{\text{biângulo C}} - 4\text{Área}_{\text{triângulo ABC}} = \text{Área}_{\text{esfera}}$$

Como a área da superfície esférica é dada por:

$$\text{Área}_{\text{esférica}} = 4\pi r^2$$

Temos:

$$4\hat{A}r^2 + 4\hat{B}r^2 + 4\hat{C}r^2 - 4\text{Área}_{\text{triângulo ABC}} = 4\pi r^2$$

$$\text{Área}_{\text{triângulo ABC}} = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)r^2$$

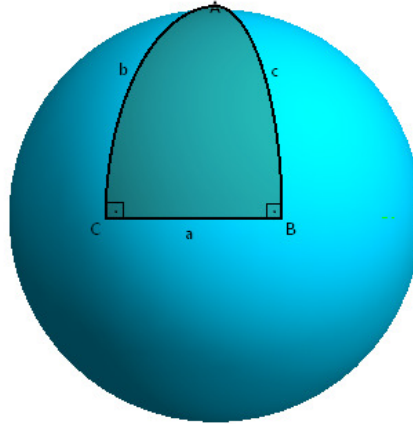
Como a área do triângulo e  $r^2$  são positivos, seu quociente também será, assim concluímos que:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi.$$

Ou seja, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo na superfície esférica é maior que  $180^\circ$ . Informação curiosa na comparação com a Geometria Euclidiana, onde a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a  $180^\circ$ .

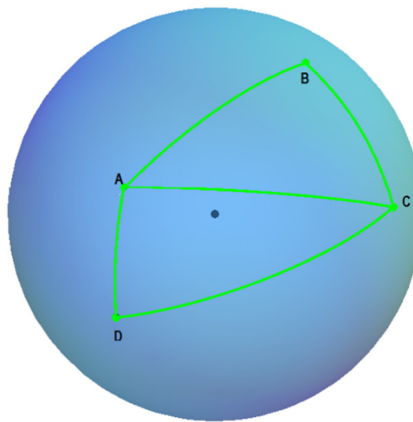
Um exemplo fácil de visualizar um triângulo com mais de  $180^\circ$ , é o da Figura

5.10, que possui dois vértices na linha do equador, e um vértice no polo norte. Este triângulo contém dois ângulos retos, obviamente com a soma dos ângulos internos superior a  $180^\circ$ .



**Figura 5.10 – Triângulo Birretângulo**  
Fonte: Autores.

Como qualquer triângulo nesta superfície possui mais de  $180^\circ$ , e como qualquer quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos, temos que qualquer quadrilátero possui mais de  $360^\circ$ .



**Figura 5.11 – Quadrilátero Esférico**  
Fonte: Autores.

Na Geometria Euclidiana os triângulos são classificados quanto:

- À medida de seus lados:

**Triângulo equilátero:** possui os três lados com medidas iguais.

**Triângulo isósceles:** possui dois lados com medidas iguais.

**Triângulo escaleno:** possui os três lados com medidas diferentes.

- À medida de seus ângulos :

**Triângulo acutângulo:** possui todos os ângulos com medidas menores que  $90^\circ$ .

**Triângulo retângulo:** possui um ângulo com medida igual a  $90^\circ$ .

**Triângulo obtusângulo:** possui um ângulo obtuso, maior que  $90^\circ$ .

Na Geometria Elíptica os triângulos são classificados, quanto a medida de seus ângulos como: retângulo, birretângulo ou trirretângulo, caso possua um, dois ou três ângulos retos, respectivamente. Também são classificados, quanto a medida de seus lados, como: birretilátero e trirretilátero, caso possua dois ou três lados com o mesmo comprimento, respectivamente.

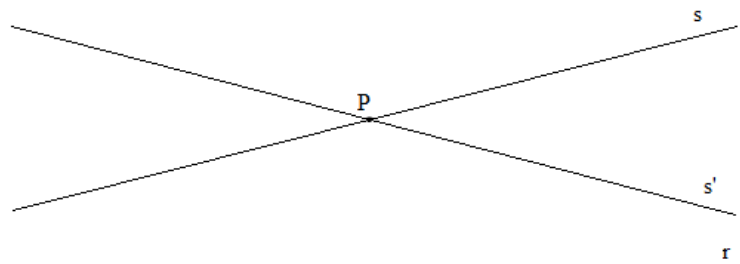
## 6 GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Começamos este capítulo falando do Postulado de Lobachevski. Como apresentamos no segundo capítulo, Lobachevski e Bolyai estudaram a geometria resultante da junção dos quatro primeiros postulados de Euclides, com a variação do substituto criado por Playfar “por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada”, supondo, no lugar do quinto postulado de Euclides, que “por um ponto fora de uma reta pode-se traçar mais do que uma reta paralela à reta dada” ou “por um ponto fora de uma reta, podem ser traçados pelo menos duas retas que não encontram a reta dada”.

Nesta geometria, como veremos, dado um ponto fora de uma reta, é possível traçar infinitas retas paralelas a reta, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que  $180^\circ$  e por consequência, qualquer quadrilátero terá a soma de seus ângulos internos menor que  $360^\circ$ .

Infelizmente, não podemos demonstrar todos os fatos mencionados, pois o conteúdo necessário para isso foge do escopo deste trabalho. Na medida do possível, apresentaremos algumas ilustrações que dão uma ideia de como seria a demonstração das propriedades.

Não é difícil imaginar que se existem duas paralelas, existem infinitas.



**Figura 6.1 – Retas Paralelas**  
**Fonte: Autores**

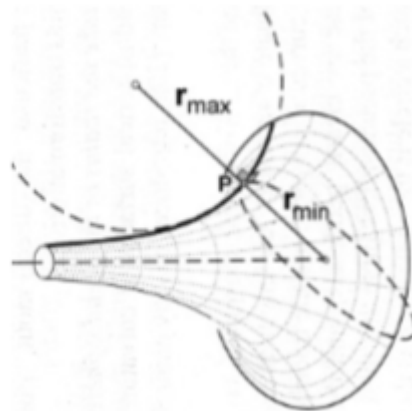
Na Figura 6.1, seja  $P$  um ponto fora da reta  $r$ , e sejam  $s$  e  $s'$  duas paralelas a reta  $r$ . A reta  $r$  está totalmente contida em um dos ângulos formados pelas retas  $s$  e  $s'$ . As retas que passam por  $P$  e estão totalmente contidas no par de ângulos opostos pelo vértice, dos quais nenhum contém a reta  $r$  são exemplos de retas paralelas à reta  $r$ . Como sabemos, existem infinitas delas.

Devemos analisar alguns pontos sobre estas paralelas. É possível mostrar (o

que não será feito aqui) que dada uma reta  $r$ , e um ponto fora dela, existe exatamente duas retas que passam pelo ponto  $P$  e que separam o conjunto das retas que intersectam a reta  $r$  do conjunto das retas que não intersectam  $r$ . Assim, tomando como exemplo a figura acima, as retas  $s$  e  $s'$  poderiam ser um exemplo de retas que fazem esta separação. Dizemos que a reta  $s'$  tem direção de paralelismo à direita, enquanto a reta  $s$  tem direção de paralelismo à esquerda.

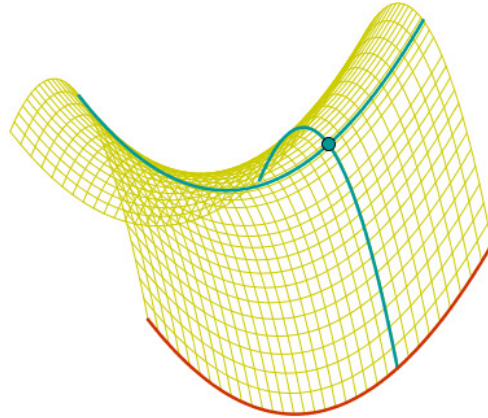
Segundo Barbosa (1995), um ponto ideal nesta geometria, seria equivalente ao conceito de  $-\infty$  e  $+\infty$  das retas da geometria euclidiana. Desse modo, a reta teria dois destes pontos, um localiza-se antes de todos os seus pontos e outro localiza-se depois de todos os seus pontos. Assim admitiremos que estes pontos existem de tal modo que retas paralelas tenham em comum um ponto ideal na direção do paralelismo. Este ponto, geralmente é representado pela letra grega  $\Omega$ .

As propriedades desta geometria podem ser observadas em superfícies de curvatura negativa. São exemplos clássicos a pseudoesfera e a sela.



**Figura 6.2 – Pseudoesfera**

Fonte: <[www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolic a5.htm](http://www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolic a5.htm)> Acesso em 23/02/2014



**Figura 6.3 – Sela**

Fonte: <[sushieletrico.blogspot.com.br/2010/08/matemática-e-natureza-paraboloide.html](http://sushieletrico.blogspot.com.br/2010/08/matemática-e-natureza-paraboloide.html)> Acesso em 23/02/2014

Estas superfícies, em qualquer ponto, apresentam os círculos osculantes de maior e menor raio em lados opostos da superfície, logo sua curvatura é negativa. Para a sala de aula, podemos encontrar exemplos de objetos que possuem esta curvatura, como as batatas *Pringles* e a vuvuzela:



**Figura 6.4 – Batata Pringles**

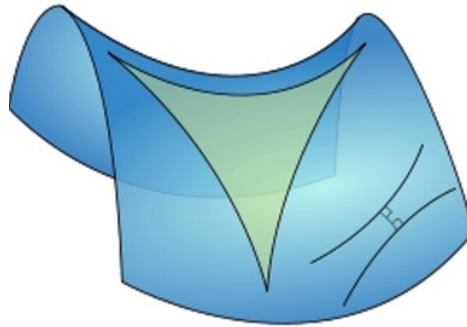
Fonte:<[gastronomiacontemporanea.wordpress.com/2011/10/04/everything-pops-with-pringles/](http://gastronomiacontemporanea.wordpress.com/2011/10/04/everything-pops-with-pringles/)> Acesso em 23/02/2014



**Figura 6.5 – Vuvuzela**

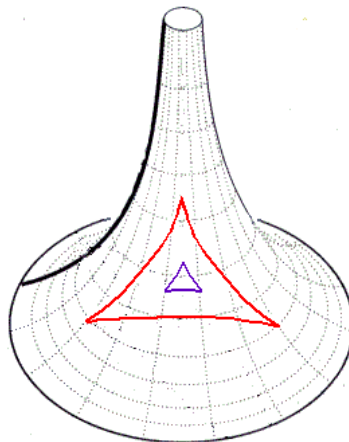
Fonte: <[profissionaladm.com.br/?attachment\\_id=35](http://profissionaladm.com.br/?attachment_id=35)> Acesso em 23/02/2014

A intersecção de três geodésicas dessa superfície (retas hiperbólicas) formam o triângulo hiperbólico, cuja soma dos ângulos internos é menor que  $180^\circ$ :



**Figura 6.6 – Triângulo Hiperbólico**

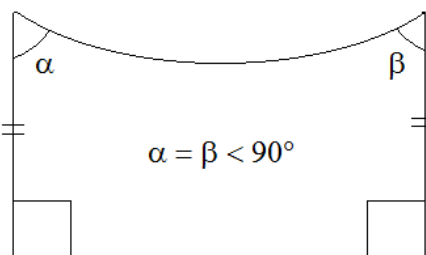
Fonte: <[www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/detalhe.php?foto=535&evento=3](http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/detalhe.php?foto=535&evento=3)> Acesso em 23/02/2014



**Figura 6.7 – Triângulo Hiperbólico II**

Fonte: <[www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica5.htm](http://www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica5.htm)> Acesso em 23/02/2014

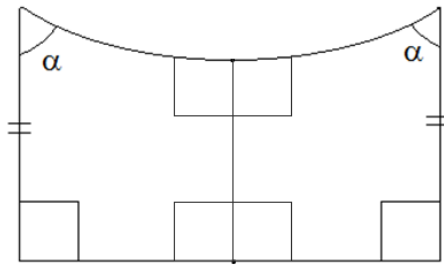
Para verificar este fato, precisamos voltar ao quadrilátero de Saccheri e conhecer o quadrilátero de Lambert. Nesta geometria, assume-se que os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são agudos:



**Figura 6.8 – Quadrilátero de Saccheri (caso agudo)**

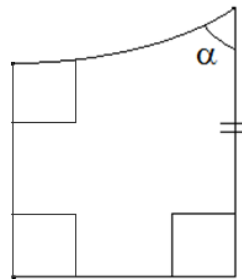
Fonte: Autores

Como verificamos no segundo capítulo, os ângulos do topo são iguais, e, se ligarmos os pontos médios da base e do topo deste quadrilátero, os ângulos formados com a base e o topo serão retos.



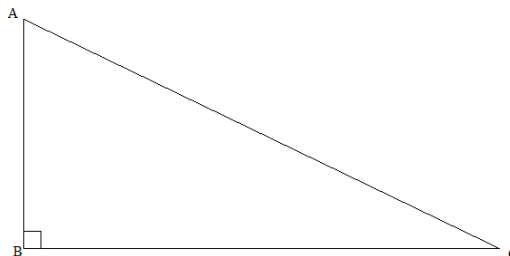
**Figura 6.9 – Ângulos do topo e base**  
**Fonte: Autores**

Dessa forma, nesta geometria, a partir do quadrilátero de Saccheri, obtemos dois quadriláteros chamados quadriláteros de Lambert. Observe que os quadriláteros de Lambert possuem três ângulos retos e um ângulo agudo. Assim, verifica-se que se em um quadrilátero três ângulos forem retos, o outro será necessariamente agudo. Este quadrilátero recebe este nome, devido ao matemático Johann Heinrich Lambert (1728-1777), que estudou profundamente a variação das paralelas, usando como figura fundamental o quadrilátero da figura 6.10.



**Figura 6.10 – Quadrilátero de Lambert**  
**Fonte: Autores**

Voltando para a análise da soma dos ângulos internos do triângulo, consideramos o triângulo retângulo ABC da Figura 6.11:

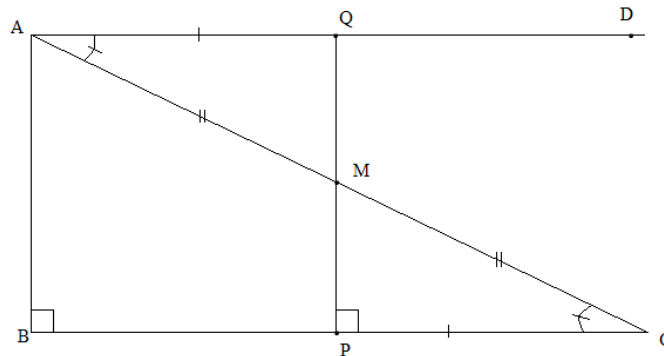


**Figura 6.11 – Triângulo Retângulo**  
**Fonte: Autores**

Marquemos M, o ponto médio do segmento AC e tracemos o segmento AD de modo que os ângulos  $\widehat{ACB}$  e  $\widehat{CAD}$  sejam iguais. Baixemos a perpendicular MP ao lado BC e marquemos o ponto Q pertencente ao segmento AD de modo que  $\overline{AQ} =$



$\overline{PC}$ .

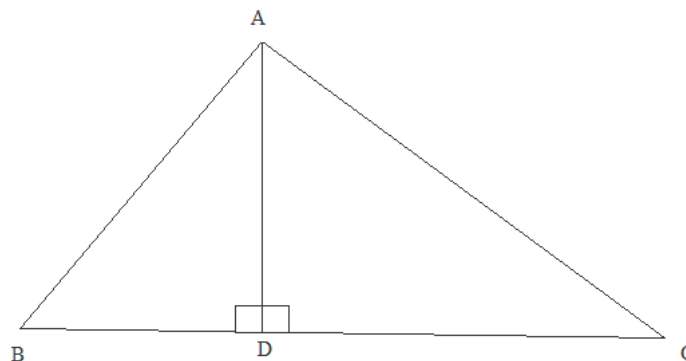


**Figura 6.12 – Triângulo Retângulo II**  
**Fonte: Autores**

Pela proposição 2.1 LAL (Proposição 4 dos Elementos), os triângulos AQM e CPM são congruentes, e dessa forma o ângulo  $\widehat{AQM}$  é reto e os pontos Q, M e P são colineares, já que os ângulos  $\widehat{AMQ}$  e  $\widehat{CMP}$  são iguais, pela proposição 2.5 OPV. Lembramos que as proposições 2.1 à 2.9 do Capítulo 2, são válidas neta geometria, pois não dependem do quinto postulado.

O quadrilátero ABPQ é um quadrilátero de Lambert, com ângulo agudo no vértice A, pois os ângulos  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{P}$  e  $\widehat{Q}$  são retos. Assim a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é equivalente a soma dos ângulos dos vértices A e B do quadrilátero, ou seja, menor que  $180^\circ$ .

Como, nesta geometria, qualquer triângulo pode ser dividido em dois triângulos retângulos, devido a proposição 2.3, podemos generalizar a afirmação para qualquer triângulo ABC:



**Figura 6.13 – Triângulo Qualquer**  
**Fonte: Autores**

Como  $\widehat{BAD} + \widehat{B} + \widehat{BDA} < 180^\circ$  e  $\widehat{DAC} + \widehat{C} + \widehat{ADC} < 180^\circ$ , temos

$$(\widehat{BAD} + \widehat{DAC}) + (\widehat{BDA} + \widehat{ADC}) + \widehat{B} + \widehat{C} < 360^\circ, \quad \text{logo} \quad \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + 180^\circ < 360^\circ, \text{ ou seja } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ.$$

## 7 MINICURSO

Nos dias 25 a 29 de novembro de 2013, no Câmpus Pato Branco da UTFPR, foi realizada a XVII Semana da Matemática e III Encontro de Ensino de Matemática. Este evento ocorre anualmente e visa o intercâmbio entre pesquisadores, acadêmicos, professores e alunos da escola básica, constituindo um ambiente de integração científica de grande importância para a divulgação de pesquisas em matemática e em educação matemática no sudoeste do Paraná.

Neste evento, no dia 29, às 16 horas, apresentamos um minicurso com duração de duas horas intitulado Introdução as Geometrias Não Euclidianas: Elíptica e Hiperbólica, com o objetivo de propiciar aos acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática deste Câmpus e aos professores de educação básica, um primeiro contato com as Geometrias Não Euclidianas, apresentando inicialmente um relato histórico sobre o surgimento, as particularidades de cada geometria (elíptica e hiperbólica) e sua comparação com a geometria euclidiana, cujo texto base encontra-se distribuído neste trabalho. Visamos com este minicurso despertar a curiosidade dos professores e futuros professores sobre o tema Geometrias Não Euclidianas e dessa forma estimular o estudo e pesquisa sobre este assunto, buscando contribuir para a real inserção destas geometrias no ensino médio.

Ao final do minicurso, aplicamos o questionário da Figura 7.1 abaixo, indagando sobre o conhecimento inicial do tema, a situação de ensino atual destas geometrias, visando identificar o interesse sobre o tema e a real possibilidade de inserção destas geometrias nas salas de aula. O questionário foi respondido voluntariamente e anonimamente pelos vinte e três participantes do minicurso.



Você é:

- professor  
 aluno

Antes do minicurso, você sabia que o conteúdo "Geometrias Não-Euclidianas" estava presente nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná?

- não  
 sim

Você, na situação atual, concorda que este conteúdo seja trabalhado na educação básica?

- sim  
 mais ou menos  
 não

Você, tendo condições ideais (material didático, tempo) concorda que este conteúdo seja trabalhado na educação básica?

- sim  
 mais ou menos  
 não

O tópico de Geometria Não-Euclidiana já fez parte do conteúdo programático de alguma disciplina em sua formação acadêmica?

- não  
 sim, em disciplina obrigatória  
 sim, em disciplina optativa



**Figura 7.1 – Questionário do Minicurso**  
**Fonte: Autores**

O tópico de Geometria Não-Euclidiana já fez parte do conteúdo programático de algum evento ou estudo extracurricular que você fez ou participou?

- não  
 sim, com uma carga entre 5 e 20 horas  
 sim, com uma carga maior de 20 horas

Na escola onde você estudou, ou onde você trabalha, está sendo trabalhado o conteúdo de Geometrias Não-Euclidianas?

- não está sendo trabalhado  
 pouco  
 razoável

Você conhece algum material didático de Geometrias Não-Euclidiana que possa ser usado no ensino básico?

- sim e adequado  
 sim, mas não adequado  
 não

Você usaria o material usado neste minicurso em sala de aula?

- sim  
 mais ou menos  
 não

Você gostaria de ter um curso mais completo, com uma carga horária maior, de Geometria Não-Euclidiana?

- sim  
 não

Em alguma situação, você já usou Geometria Não-Euclidiana, sem saber que estava usando a mesma?

- sim  
 não

Após análise das respostas, chegamos as seguintes conclusões:

Dos participantes, 8 (oito) são professores e 15 (quinze) são alunos. Do total, 17 (dezesete) declararam não saber que o conteúdo “Geometrias Não Euclidianas” está presente nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná. Porém, supondo que houvesse condições ideais para o ensino destas geometrias, como tempo suficiente e material didático, 16 (dezesesseis) participantes concordaram plenamente que estas geometrias sejam ensinadas na educação básica. Referente a quinta pergunta, se este conteúdo já fez parte do conteúdo programático de alguma disciplina da sua formação acadêmica, 21 (vinte e um) entrevistados responderam que não e ainda 17 (dezesete) responderam não haver participando de nenhum evento ou estudo extracurricular, mesmo com pouca carga horária. Verificamos ainda que 22 (vinte e dois) participantes declararam que na escola onde estudou, ou na escola onde trabalha atualmente, não está sendo trabalhado o conteúdo “Geometria Não Euclidianas” e 21 (vinte e um) não conhece qualquer material didático que possa ser usado no ensino básico. Por fim, 21 (vinte e um) participantes responderam que gostaria de participar de um curso mais completo, com uma carga horária maior, sobre os conteúdos de Geometria Não Euclidiana.

Os resultados mostram claramente a falha na inserção do conteúdo “Geometrias Não Euclidianas” no ensino básico e médio. O grande problema, está na verificação da quase totalidade dos participantes não ter cursado esta disciplina em sua formação acadêmica e nem haviam participado de eventos ou atividades extracurriculares.

Percebe-se que as noções de geometrias não-euclidianas têm sido negligenciadas nas aulas de matemática pela maioria dos professores, tanto no ensino fundamental como no ensino médio, não pelo descaso do professor, mas sim pelo fato dos mesmos não terem tido contato com essas geometrias em sua formação, considerando que a maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática, não contempla este conteúdo em suas estruturas curriculares. (FRANCO e VEJAN, 2008, p. 2 e 3)

Como um professor poderá ensinar algo que não conhece? Esta falta na formação se reflete na constatação de que, em mais de 95% das escolas que compõe as escolas onde os participantes cursaram a educação básica, ou onde atualmente são professores, estão deixando estes conteúdos de lado, privando a oportunidade de contato dos alunos com este tópico.

Como um professor poderá ensinar sem ter material didático adequado? Mais de 90% dos participantes responderam que não conhecem materiais didáticos que

possam ser usados no ensino destas geometrias.

Na tentativa de colaborar com este problema, melhoramos o conteúdo apresentado no minicurso e o distribuimos no corpo deste trabalho, tendo em vista que o material apresentado no minicurso omitia alguns conteúdos apresentados nas DCE e continha algumas falhas, sendo que apenas 63,67% dos participantes responderam que usariam o material do minicurso para dar aula no ensino básico.

Certamente a falta de conhecimento e de material são as principais barreiras para o ensino destas geometrias. Porém há outros pontos a se observar. Como, por exemplo, a grande quantidade de conteúdo destinado para a disciplina de matemática em contraste com pouco tempo disponível para esta disciplina, assunto que foge dos objetivos deste trabalho. Além disso, observamos que a maioria dos participantes não sabiam que o ensino das Geometrias Não Euclidianas fazem parte das DCE do Paraná.

Apesar das dificuldades até aqui apresentadas, mais de 90% dos participantes responderam que gostariam de participar de um curso mais completo sobre Geometria Não Euclidiana, como por exemplo, uma disciplina na graduação. E ainda, quase 70% responderam que concordam com a inclusão do ensino destas geometrias no ensino básico.

Deixamos a sugestão para a UTFPR, Câmpus de Pato Branco, que reflita a possibilidade de inclusão de uma disciplina de introdução as Geometrias Não Euclidianas para o curso de Licenciatura em Matemática, mesmo que optativa, contendo principalmente os tópicos descritos nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, ou seja, geometria projetiva, topológica, dos fractais, hiperbólica e elíptica.

Esperamos ter despertado interesse sobre o assunto aos leitores desta dissertação e aos participantes do minicurso, e que estes sintam-se dispostos a pesquisar, aprender e ensinar aos alunos do ensino médio, conforme orientam as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná.

## 8 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo principal, contribuir para a inserção das Geometrias Não Euclidianas no ensino médio, através de uma primeira apresentação destas Geometrias para professores e futuros professores do ensino médio e da disponibilização de material com linguagem acessível. Buscamos despertar o interesse de pesquisa e aplicação destes conteúdos em sala de aula.

Produzimos este texto, buscando traduzir para uma linguagem de fácil entendimento os pontos principais das Geometrias Elíptica e Hiperbólica que aparecem como requisito nas DCE do Paraná. Apresentamos um minicurso na XVII Semana da Matemática e III Encontro de Ensino de Matemática do Câmpus de Pato Branco - PR da UTFPR, o qual nos mostrou um alto grau de interesse pelo tema, completando o número máximo possível de participantes e ao final deste, em resposta ao questionário, 90% dos participantes demonstraram interesse de participar de algum curso mais completo nesta área, atingindo nosso objetivo de despertar interesse no aprendizado deste tema.

A principal dificuldade na realização desta pesquisa foi o tempo escasso para sua realização, tendo em vista que ocorreu simultaneamente com a realização de disciplinas obrigatórias do PROFMAT. Outra grande dificuldade, foi a falta de conhecimento inicial sobre o tema do próprio pesquisador, que nunca havia participado de nenhuma disciplina ou evento que tratasse deste assunto.

Por fim, esclarecemos que este trabalho limitou-se a discutir sobre as Geometrias Elíptica e Hiperbólica, apresentando as principais propriedades que podem ser comparadas com a Geometria Euclidiana. Buscaremos aprofundar estes conteúdos, num curso de geometria diferencial, em um futuro Doutorado.

## REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Hiperbólica**. 1. Ed. – Rio de Janeiro: IMPA, 1995.

BRAZ, F. M. **História da Geometria Hiperbólica**. 2009. Monografia (Curso de Especialização em Matemática para Professores) – UFMG, Belo Horizonte – MG, 2009. Disponível em: [http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia\\_FernandaMartins.pdf](http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_FernandaMartins.pdf). Acesso em: 05/02/2014.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não euclidianas**. 2. Ed. – Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

DUELI, L. J. **Geometria Esférica: Propostas de Sequências Didáticas Interdisciplinares**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). UFJF, Juiz de Fora – MG, 2013. Disponível em: <http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/handle/123456789/159>. Acesso em 05/12/2013.

EUCLIDES, **Os elementos**; tradução e introdução de Irineu Bicudo. 1. Ed. – São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**; tradução Hygino H. Domingues. 5ª Ed. – Campinas – SP: Editora da Unicamp, 2011.

FRANCO, V.S; VEJAN, M. P. **Geometria não euclidiana/geometria dos fractais**. Artigo (Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná – PDE). 2008. Disponível em: [http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes\\_pde/2008\\_uem\\_mat\\_artigo\\_margareth\\_pangoni.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2008_uem_mat_artigo_margareth_pangoni.pdf). Acesso em 02/02/2014.

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias**. Tese de doutorado (Faculdade de Educação). UNICAMP, Campinas – SP, 2000. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000218945>. Acesso em 15/10/2013.

HILBERT, D., **The Foundations of Geometry**, Authorized Translation by E. J. Townsend. – La Salle/Illinois: The Open Court Publishing Comprany, 1950. Disponível em: <http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf> Acesso em: 19/12/2013.



MINHÓS, F., **Análise Matemática III**, 2011, Disponível em: <[https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4270/1/Ap\\_AMIII\\_2010-2011.pdf](https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4270/1/Ap_AMIII_2010-2011.pdf)> Acesso em: 23/02/2014.

MLODINOW, L., **A janela de Euclides: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço**; tradução de Enézio E. de Almeida Filho. 6. Ed. – São Paulo: Geração Editorial, 2010.

MUNIZ NETO, A. C., **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**. 1. Ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática**. Curitiba – PR: SEED, 2008. Disponível em: <<http://www.nre.seed.pr.gov.br/irati/arquivos/File/matematica.pdf>>. Acesso em: 14/10/2013.

SEARA DA CIÊNCIA, Órgão de divulgação científica e tecnológica da Universidade Federal do Ceará. **A CURVATURA DE GAUSS E O NÚMERO DE EULER**, s.d. Disponível em <<http://www.seara.ufc.br/donafifi/gausseeuler/gausseuler.htm>>. Acesso em: 23/02/2014.

SILVA, K. B. R. da. **Noções de geometrias não euclidianas; hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais**. 1. Ed. – Curitiba/PR: CRV, 2011.

**XVII Semana da Matemática e III Encontro de Ensino de Matemática**. 2013. Disponível em: <[www.pb.utfpr.edu.br/semanadamatematica/semat2013/Home.html](http://www.pb.utfpr.edu.br/semanadamatematica/semat2013/Home.html)>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2014.