Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Curso de Pós-graduação em Matemática

Walter Araújo Rocha Júnior

Recorrências Lineares e Algumas Aplicações

Teresina
2014

Walter Araújo Rocha Júnior

Recorrências Lineares e Algumas Aplicações

Dissertação apresentada ao Curso de Matemática da UFPI, como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Jurandir de Oliveira Lopes

Doutor em Matemática - UFPI

Teresina

2014

Júnior, Walter

Recorrências Lineares e Algumas Aplicações / Walter Júnior - 2014

xx.p

1.Modelagem Matemática 2. Matemática Discreta. I.Título.

CDU 517

Walter Araújo Rocha Júnior

Recorrências Lineares e Algumas Aplicações

Dissertação apresentada ao Curso de Matemática da UFPI, como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 27 de Fevereiro de 2014

BANCA EXAMINADORA

Jurandir de Oliveira Lopes

Doutor em Matemática - UFPI

Jefferson Cruz dos Santos Leite

Doutor em Matemática - UFPI

Arnaldo Silva Brito

Doutor em Matemática - UESPI

Aos meus avós, mãe e tios que tanto me incentivaram.

Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por ter me dado muita força e saúde para enfrentar as dificuldades e superá-las.

A toda minha família, por sempre estarem comigo nos momentos difíceis e que souberam me dar apoio pra continuar minha trajetória.

Ao professor Jurandir de Oliveira Lopes pela orientação, amizade e principalmente pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores do PROFMAT pelos seus ensinamentos repassados com louvor durante esses dois anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

A CAPS pelo apoio financeiro, pois sem esse auxílio não seria possível.

Aos meus amigos de mestrado Ricardo Ribeiro e Veríssimo Ducarmo, pelos inúmeros dias de estudos afincos, em que houve muitas dificuldades, mas por fim superadas pelo apoio que um dava ao outro.

Por fim, a pessoa que sem ela nada disso teria sentido, minha avó, por sempre acreditar em mim e ter priorizado minha educação.

"A imaginação é mais importante que a ciência, porque a ciência é limitada, ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro".

Albert Einstein

Resumo

A presente dissertação de mestrado apresentou alguns conceitos matemáticos pertinentes às equações de recorrências, dando ênfase nas recorrências lineares, onde se concentram a grande maioria dos problemas contextualizados. Este trabalho teve o objetivo de explicitar algumas de suas aplicações com suas soluções bem elaboradas sobre recorrências lineares, visando uma fácil compreensão para os alunos de ensino médio, como também para os alunos de graduação e pós-graduação. Foram apresentadas algumas estratégias para a resolução dos problemas das recorrências lineares de primeira e segunda ordem, deixando bem claro os casos homogêneos e não-homogêneos, contendo vários exemplos resolvidos. Foram trabalhadas as fórmulas referente as soluções, deixando-as mais objetivas na montagem das soluções dos problemas sobre recorrências lineares. Neste trabalho foram apresentadas algumas aplicações pertinentes à própria Matemática, como por exemplo, os números de Fibonacci, a pizza e o queijo de Steinner, e no que se diz respeito aos jogos matemáticos, envolvemos a Torre de Hanói. Também foram trabalhadas as recorrências em outras áreas, como na Biologia, envolvendo o crescimento populacional dos coelhos.

Palavras-chaves: Recorrências Lineares, Problemas, Soluções.

Abstract

This dissertation presented some mathematical concepts relevant to equations recurrences, with emphasis on linear recurrences, which concentrates the majority of contextualized problems. This study aimed to clarify some of its applications with its elaborate solutions on linear recurrences, seeking to an easy understanding for high school students, but also for students of undergraduation and post-graduation courses. Some strategies for solving the problems of linear recurrences of first and second order are presented, making clear the homogeneous and non-homogeneous cases containing various solved examples. The formulas of each solution were worked, leaving them more objective in assembling solutions of problems on linear recurrences. In this paper some relevant applications to mathematics itself were presented, such as the Fibonacci numbers, Steinner pizza and cheese, and about mathematical games, we worked with the Tower of Hanoi. Recurrences in other areas were also broached, such as Biology, involving the population growth of rabbits.

Keywords: Linear Recurrences, Problems, Solutions.

Sumário

1 Introdução

Ao longo do estudo da Matemática existem alguns tópicos em que os alunos do ensino médio e até mesmo dos cursos de graduação em Matemática tem bastante dificuldade, como por exemplo, a análise combinatória que faz parte da Matemática discreta, em que as recorrências ajudam na resolução de diversos problemas que envolvem essas áreas, dando uma contribuição importante para sanar as dificuldades de aprendizados nesses conteúdos. O presente estudo sobre recorrências lineares aplicada ao ensino médio e superior, busca produzir um texto que possa fornecer ferramentas para utilização na resolução de problemas ligados a educação básica e superior, bem como estimular o leitor a aprofundar-se e prosseguir com o estudo do tema na graduação ou nas pós-graduações de Matemática e em todas as áreas correlatas.

A recorrência nada mais é do que uma equação proviniente das idéias recursivas de uma determinada situação Matemática, em que podem ser linear ou não, mas que nem sempre é de fácil observação, por isso merece um estudo aprofundado enfatizando todos os seus detalhes na sua construção e resolução. As recorrências lineares de primeira ordem, segunda ordem, ordem maior e o método geral de resolução das referidas recorrências, tanto nos casos homogêneos e não-homogêneos, serão trabalhados visando uma fundamentação teórica, para facilitar a aplicação nas resoluções de problemas associados à educação básica, mas sem deixar de lado o ensino superior. Abordaremos os problemas que envolvem a uma fácil compreensão para fixar os resultados, em seguida trabalharemos com os problemas contextualizados na geometria, análise combinatória, nos jogos matemáticos e nas questões que envolvem as sequências numéricas, em especial as progressões aritméticas e geométricas, dentre outros contextos matemáticos, sem esquecer de dar contra-exemplos das recorrências não-lineares.

Neste trabalho, iremos abordar principalmente problemas clássicos com objetivo de mostrar o processo evolutivo dessa teoria. Além disso, iremos contextualizar e demonstrar os incentivos e as motivações que levaram ao estudo das recorrências, pois é um tema que aparece com muita frequência durante o desenvolvimento histórico da Matemática e nas áreas correlatas. Introduziremos problemas simples e direto para fixar e facilitar a compreensão do processo recursivo, em seguida, os problemas contextualizados envolvendo várias áreas da Matemática, para então o leitor conseguir absorver a idéia principal e assim conseguir resolver os problemas que virá de aparecer na sua vida acadêmica, mas principamente, fazer uma ligação com as situações reais, ou seja, aplicá-los no cotidiano.

Os conceitos de recorrência que serão abordados nesta dissertação terão como público alvo os alunos do ensino médio, das graduações e pós-graduações em Matemática. Será demonstrada a importância das recorrências para a resolução de inúmeros problemas, provas indutivas e busca de padrões em variados conteúdos da Matemática. Podemos concluir que a recorrência é um tema fundamental para consolidação de algumas habilidades necessárias, por isso deve ser usado de forma sistematizada, facilitando assim o processo de ensino-aprendizagem de alguns conteúdos da grade curricular da educação básica, como também para estudos avançados em outras áreas ligados a Matemática, como por exemplo, na Física [6], Química e Biologia [6], Computação [5], dentre outras. Por fim, será proposta uma sequência de atividades fundamentadas em situações contextualizadas, primando sempre pela interdisciplinaridade. Tais atividades deverão motivar os colegas professores a elaborarem mais situações problemas, cujas resoluções dependerão de modelos matemáticos permeados pelo raciocínio recursivo.

2 Recorrências Lineares

O objetivo neste capítulo é obter as melhores formas de compreensão das recorrências lineares com suas respectivas soluções gerais, mais para isso iremos construir a idéia das recorrências lineares de ordem k, com o número natural $k > 0$, em seguida, recorrências de primeira ordem e de segunda ordem, dando assim a noção para as demais ordens. Com isso, definiremos uma fórmula fechada chamada de *solução da recorrência de ordem* k.

2.1 Recorrência Linear de Ordem k

Definição 2.1.1. Dizemos que uma recorrência linear é de *ordem* $(k > 0)$ quando o termo x_n depende do(s) termo(s) $x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_{n-i+1}$ que o antecede assumindo o formato

$$f_1(n)x_n + f_2(n)x_{n-1} + f_3(n)x_{n-2} + \cdots + f_i(n)x_{n-i+1} = f(n), \tag{2.1}$$

com $i \in \{1, 2, 3, \ldots, k, k+1\}$, onde $f_1(n), f_2(n), \ldots, f_i1(n), f(n)$ são funções reais com domínio natural e $f_1(n); f_i(n) \neq 0$.

Definição 2.1.2. A solução geral da recorrência (2.1) é uma fórmula fechada que nos permite escrever x_n apenas em função de n e das condições iniciais $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$.

Com tal solução é possível encontrar o valor de qualquer termo sem necessidade de determinarmos os termos que o antecedem.

Exemplo 2.1.1. Algumas recorrências lineares de ordem maior:

i) $x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + x_{n-4} = e^n$;

ii) $x_n = x_{n-2} + x_{n-4}$;

iii) $x_n + nx_{n-1} + x_{n-3} = (n-1)!$.

2.2 Recorrência Linear de Primeira Ordem

Definição 2.2.1. Dizemos que uma recorrência linear é de *primeira ordem* quando um termo x_n depende somente do termo x_{n-1} que o antecede assumindo o formato da equação

$$f_1(n)x_n + f_2(n)x_{n-1} = f(n), \tag{2.2}$$

onde $f_1(n), f_2(n), f(n)$ são funções reais com domínio natural e $f_1(n), f_2(n) \neq 0$.

Exemplo 2.2.1. Algumas recorrências lineares de primeira ordem:

i) $x_n = nx_{n-1}$ com $x_0 = 1$;

ii) $x_n + (n-1)!x_{n-1} = 2$;

iii) $(n+1)x_n + nx_{n-1} = 2n - 1$;

iv) $x_n = x_{n-1} + 2$ com $x_0 = 0$, onde x_n é a sequência dos números pares.

2.3 Recorrência Linear de Segunda Ordem

Definição 2.3.1. Dizemos que uma recorrência linear é de *segunda ordem* quando um termo x_n depende dos termos x_{n-1} e x_{n-2} que o antecede assumindo o formato da equação

$$f_1(n)x_n + f_2(n)x_{n-1} + f_3(n)x_{n-2} = f(n), \tag{2.3}$$

onde $f_1(n), f_2(n), f_3(n), f(n)$ são funções reais com domínio natural e $f_1(n), f_3(n) \neq 0$.

Exemplo 2.3.1. Algumas recorrências lineares de segunda ordem:

i) $x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2})$, onde $n > 2$ e $x_1 = 0; x_2 = 1$ chamada de Permutação Caótica, ver [2];

ii) $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$;

iii) $nx_n + x_{n-1} + 2^n x_{n-2} = n!$.

Observação 2.3.1. Existem recorrências não-lineares, no qual, é toda recorrência que não atende a Definição 2.1.1, nas quais citaremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.3.2. Algumas recorrências não-lineares:

i) $x_n = x_{n-1}x_{n-2}$;

ii) $x_n + x_{n-1}^2 = n!$;

iii) $x_n^2 + x_{n-1} + x_{n-3} = 2^n$;

iv) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}}$.

Não aprofundaremos neste de tipo de recorrência, pois está fora do objetivo desta dissertação. Entretanto, para melhor detalhar sobre recorrências não-lineares, ver [6], páginas 49 a 68. Nos próximos capítulos iremos abordar somente recorrências lineares com coeficientes constates, dando total ênfase aos de primeira e segunda ordem, pois na grande maioria dos problemas contextualizados envolvem especificamente esse tipo de recorrência.

3 Recorrência Linear de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes

Definição 3.0.2. Definimos como recorrência linear de primeira ordem com coeficientes constantes toda recorrência que assume o formato da equação (2.2), onde as funções $f_1(n)$ e $f_2(n)$ são constantes reais em que $f_1(n), f_2(n) \neq 0$.

Portanto a recorrência com $f_1(n) = p \neq 0$ e $f_2(n) = q$ é

$$px_n + qx_{n-1} = f(n),$$

dividindo a equação acima por p e organizando, obtemos

$$x_n = -\frac{q}{p}x_{n-1} + \frac{f(n)}{p},$$

fazendo $a = -\dfrac{q}{p}$ e $g(n) = \dfrac{f(n)}{p}$, daí, resulta outro formato da recorrência linear de primeira ordem com coeficientes constantes

$$x_n = ax_{n-1} + g(n). \tag{3.1}$$

Exemplo 3.0.3. Alguns exemplos de recorrências (3.1), como as progressões aritméticas (P.A.), progressões geométricas (P.G.) e outras abaixo citadas.

i) $x_n = x_{n-1} + r$, onde r é a razão da P.A;

ii) $x_n = qx_{n-1}$, onde q é a razão da P.G;

iii) $x_n = x_{n-1} + n$;

iv) $x_n = 2x_{n-1} + 2^n$.

3.1 Recorrência Linear Homogênea

Quando uma recorrência linear de primeira ordem com coeficientes constantes possui $g(n) = 0$, então essa recorrência é chamada de homogênea, assim a equação (3.1) assume o formato

$$x_n = ax_{n-1}. \tag{3.2}$$

Note que a recorrência (3.2) é uma progressão geometrica, pois $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = a \neq 0$, onde a é a razão da P.G., assumindo portanto, solução geral para todo x_0 real não-nulo

$$x_n = x_0 a^n. \tag{3.3}$$

Exemplo 3.1.1. Algumas recorrências lineares que são progressões geométricas com suas respectivas soluções:

i) A recorrência $x_n = 3x_{n-1}$, tem solução geral $x_n = x_0 3^n$ com $x_0 \in \mathbb{R}^*$;

ii) A recorrência $x_n = -\dfrac{x_{n-1}}{2}$ com $x_0 = 3$, tem solução geral $x_n = 3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3.2 Recorrência Linear Não-Homegênea

Quando uma recorrência linear de primeira ordem com coeficientes constantes possui $g(n) \neq 0$, então essa recorrência é chamada de não-homogênea, assim a equação (3.1) não muda, continua assumindo o mesmo formato.

Agora, iremos encontrar a solução geral para a equação (3.1) no caso $a = 1$, em que fica da seguinte forma

$$x_n = x_{n-1} + g(n). \tag{3.4}$$

Vamos substituir na equação (3.4) os valores de $1, 2, 3, \ldots, m$ e gerar as relações entre seus termos, daí, se segue

$$\begin{gathered}
x_1 = x_0 + g(1) \\
x_2 = x_1 + g(2) \\
x_3 = x_2 + g(3) \\
\vdots \\
x_{m-1} = x_{m-2} + g(m-1) \\
x_m = x_{m-1} + g(m),
\end{gathered}$$

somando todas as equações membro a membro e organizando, obtemos a seguinte equação

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{m-1}+x_m = x_0+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{m-1}+g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(m),$$

fazendo os cancelamentos adequados na expressão acima, resulta em

$$x_m = x_0 + g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(m),$$

assim

$$x_m = x_0 + \sum_{k=1}^{m} g(k),$$

trocando m por n na solução acima, obtemos como solução geral para a recorrência (3.4)

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} g(k). \tag{3.5}$$

Note que a equação (3.5) fica em uma forma mais simples e descomplicada para o aluno, dependendo apenas do valor inicial x_0 e do somatório das imagens da função $g(k)$, onde o domínio varia de 1 a n.

Agora vamos encontrar a solução da equação (3.1), mas para isso, vamos fazer uso do teorema abaixo.

Teorema 3.2.1. *Sempre que z_n for uma solução não-nula da recorrência linear homogênea $x_n = h(n)x_{n-1}$, então a equação $x_n = h(n)x_{n-1} + g(n)$ é transformada em $y_n = y_{n-1} + \dfrac{g(n)}{z_n}$, fazendo uma substituição do tipo $x_n = z_n y_n$.*

Demonstração. Fazendo a substituição $x_n = z_n y_n$ na equação $x_n = h(n)x_{n-1} + g(n)$, daí, resulta a seguinte equação

$$z_n y_n = h(n) z_{n-1} y_{n-1} + g(n). \tag{3.6}$$

Por hipótese, z_n é solução da equação de recorrência homogênea $x_n = h(n)x_{n-1}$, então

$$z_n = h(n) z_{n-1}. \tag{3.7}$$

Substituindo a equação (3.7) em (3.6), obtemos

$$z_n y_n = z_n y_{n-1} + g(n), \tag{3.8}$$

como $z_n \neq 0$ de acordo com a hipótese, então podemos dividir toda a equação (3.8) por z_n, obtendo

$$y_n = y_{n-1} + \frac{g(n)}{z_n}, \tag{3.9}$$

assim fica provado o teorema. □

Teorema 3.2.2. *Toda recorrência $x_n = ax_{n-1} + g(n)$ tem solução geral dada por*

$$x_n = a^n x_0 + a^n \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{a^k}. \tag{3.10}$$

Demonstração. Note que $h(n) = a$, logo a equação homogênea $z_n = az_{n-1}$ tem solução geral do tipo $z_n = z_0 a^n$, de acordo com a solução da recorrência (3.2) e se $z_0 = 1$, assume uma solução particular $z_n = a^n$. Pelo Teorema 3.2.1, iremos tranformar a recorrência (3.1) na nova equação da forma

$$y_n = y_{n-1} + \frac{g(n)}{z_n},$$

sendo $z_n = a^n$ temos

$$y_n = y_{n-1} + \frac{g(n)}{a^n}. \tag{3.11}$$

Note que a equação de recorrência (3.11) tem os mesmos parâmetros de solução da equação (3.4), logo, segue a solução na forma

$$y_n = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{a^k}. \tag{3.12}$$

Como $x_n = z_n y_n = a^n y_n$, implica que $x_0 = y_0$, então basta substituir a solução $z_n = a^n$ e a equação (3.12) na recorrência abaixo, para encontrar a solução geral da equação (3.1), segue que:

$$\begin{aligned} x_n &= z_n y_n \\ &= a^n y_n \\ &= a^n y_0 + a^n \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{a^k} \end{aligned}$$

lembrando que $x_0 = y_0$, daí, segue-se que

$$x_n = a^n x_0 + a^n \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{a^k}.$$

□

Assim, podemos resolver diversos problemas sobre recorrências, sem a necessidade do intermédio de outra recorrência.

Exemplo 3.2.1. Encontre a solução geral da recorrência $x_n = x_{n-1} + 2^n$ com $x_0 = 2$.

Solução: Note que a equação acima tem o modelo da recorrência (3.4), logo $g(n) = 2^n$ e possui uma solução geral no formato da equação (3.5), donde temos

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + \sum_{k=1}^{n} g(k) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n} 2^k \\ &= 2 + (2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n) \\ &= 2 + 2\left[\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right] \\ &= 2 + 2^{n+1} - 2. \end{aligned}$$

Logo

$$x_n = 2^{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 3.2.2. Encontre a solução geral da recorrência $x_n - 3x_{n-1} = 9^n$ com $x_0 = 1$.

Solução: Note que a recorrência $x_n - 3x_{n-1} = 9^n$ pode ser organizada na forma $x_n = 3x_{n-1} + 3^{2n}$, ficando assim no formato da recorrência (3.1) onde $a = 3$ e $g(n) = 3^{2n}$, em que a solução da recorrência encontra-se nos moldes da equação (3.10), com efeito, resulta

$$\begin{aligned}
x_n &= a^n x_0 + a^n \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{a^k} \\
&= 3^n 1 + 3^n \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{2k}}{3^k} \\
&= 3^n + 3^n \sum_{k=1}^{n} 3^k \\
&= 3^n + 3^n(3 + 9 + 27 + 81 + \cdots + 3^n) \\
&= 3^n + 3^n 3 \left(\frac{3^n - 1}{3 - 1} \right) \\
&= 3^n + 3^{n+1} \left(\frac{3^n - 1}{2} \right) \\
&= 3^n + \frac{3^{2n+1}}{2} - \frac{3^{n+1}}{2} \\
&= 2\frac{3^n}{2} + \frac{3^{2n+1}}{2} - 3\frac{3^n}{2}.
\end{aligned}$$

Logo

$$x_n = \frac{3^{2n+1} - 3^n}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

4 Recorrência Linear de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Neste capítulo, trabalharemos as seguintes situações: os casos *homogêneos* e *não-homogêneos* das recorrências de segunda ordem. Vamos apresentar como obter a solução das recorrências lineares de segunda ordem, quando os coeficientes forem constantes.

4.1 Recorrência Linear Homogênea de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Definição 4.1.1. Definimos como recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes toda equação que assume o formato (2.3), em que as funções $f_1(n), f_2(n)$ e $f_3(n)$ são constantes reais em que $f_1(n), f_3(n) \neq 0$ e $g(n) = 0$.

Portanto o formato das recorrências lineares homogêneas de segunda ordem é

$$ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0, \tag{4.1}$$

onde a, b e c são constantes reais, com a e c não-nulos.

Como por exemplo, os números de Fibonacci, de acordo com os autores em [2] e [12], além de outras recorrências abaixo citadas.

i) $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, onde $n > 2$ e $x_1 = x_2 = 1$ (Recorrência de Fibonacci);

ii) $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0$;

iii) $x_n = 9x_{n-2}$.

4.2 Equação Característica

Nos casos homogêneos, cada recorrência está associada a uma equação, denominada *Equação Característica*. No geral, os autores em [2], [4] e [5] apresentam uma maneira de obter tal equação a partir de uma solução particular do tipo $x_n = k^n$, onde k é um número complexo não-nulo, bastando substiuir essa solução na equação de recorrência (4.1), daí resulta

$$\begin{aligned} ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} &= 0 \\ a.k^n + b.k^{n-1} + c.k^{n-2} &= 0 \\ k^{n-2}.(ak^2 + bk + c) &= 0. \end{aligned}$$

Da solução particular $x_n = k^n$ com $k \neq 0$, implica que $k^{n-2} \neq 0$, daí, têm-se

$$ak^2 + bk + c = 0 \tag{4.2}$$

onde a, b e c são constantes reais, com a e c não-nulos.

Observação 4.2.1. Como a e c dados em (4.1) são não-nulos, implica $\frac{c}{a} \neq 0$, onde o mesmo é o produto das raízes da equação característica $ak^2 + bk + c = 0$, portanto as raízes k_1 e k_2 são não-nulas.

A equação Característica é uma equação do segundo grau, o que fica condicionado ao discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$), pois podemos ter três situações, o que acarreta em três tipos de soluções distintas para a recorrência homogênea com coeficientes constantes.

Teorema 4.2.1. *Sejam k_1 e k_2 as raízes da equação característica $ak^2 + bk + c = 0$, resultante da recorrência $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0$. Então $x_n = c_1{k_1}^n + c_2{k_2}^n$ é solução da recorrência, com c_1 e c_2 constantes.*

Demonstração. Por hipótese k_1 e k_2 são as raízes da equação característica $ak^2+bk+c = 0$, então $a{k_1}^2 + bk_1 + c = 0$ e $a{k_2}^2 + bk_2 + c = 0$, daí, basta substituir $x_n = c_1{k_1}^n + c_2{k_2}^n$ na recorrência e mostrar que o resultado será 0. De fato

$$\begin{aligned} ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} &= a(c_1{k_1}^n + c_2{k_2}^n) + b(c_1{k_1}^{n-1} + c_2{k_2}^{n-1}) + c(c_1{k_1}^{n-2} + c_2{k_2}^{n-2}) \\ &= c_1{k_1}^{n-2}(a{k_1}^2 + bk_1 + c) + c_2{k_2}^{n-2}(a{k_2}^2 + bk_2 + c) \\ &= c_1{k_1}^{n-2}.0 + c_2{k_2}^{n-2}.0 = 0 \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.2.1. A equação de recorrência $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0$ tem $k^2 - 5k + 6 = 0$ como equação característica, cuja as raízes são 2 e 3. Pelo Teorema 4.2.1 a solução geral da recorrência é $x_n = c_1 2^n + c_2 3^n$.

A seguir, iremos mostrar as construções dessas soluções em relação as raízes encontradas na equação característica, fazendo o uso de alguns teoremas em que os demonstraremos.

4.2.1 Raízes Distintas da Equação Característica

Nessa seção, usaremos o teorema abaixo para nos dar suporte para o formato da solução da recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes.

Teorema 4.2.2. *Sejam k_1 e k_2 as raízes distintas não-nulas da equação característica $ak^2 + bk + c = 0$, resultante da recorrência $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0$. Então toda solução da recorrência é da forma $x_n = c_1 {k_1}^n + c_2 {k_2}^n$, com c_1 e c_2 constantes.*

Demonstração. Por hipótese temos $k_1 \neq k_2$ e que $k_1, k_2 \neq 0$. Considerando y_n uma solução da recorrência $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0$ e sejam c_1 e c_2 constantes, tais que

$$\begin{cases} c_1 k_1 + c_2 k_2 = y_1 \\ c_1 {k_1}^2 + c_2 {k_2}^2 = y_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima obtemos

$$c_1 = \frac{k_2 y_1 - y_2}{k_1(k_2 - k_1)} \text{ e } c_2 = \frac{y_2 - k_1 y_1}{k_2(k_2 - k_1)}.$$

Garantiremos que todas as soluções são da forma $y_n = c_1 {k_1}^n + c_2 {k_2}^n$ para todo n natural e que possui c_1 e c_2 constantes únicas (*unicidade dos coeficientes*). Para isso considere uma outra solução $a_n = y_n - b_1 {k_1}^n - b_2 {k_2}^n$ com b_1 e b_2 constantes quaisquer, ou seja, substituindo a_n na recorrência $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2}$ é igual a 0, de fato

$$\begin{aligned} aa_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} &= a(y_n - b_1 {k_1}^n - b_2 {k_2}^n) + b(y_{n-1} - b_1 {k_1}^{n-1} - b_2 {k_2}^{n-1}) \\ &+ c(y_{n-2} - b_1 {k_1}^{n-2} - b_2 {k_2}^{n-2}) \\ &= (ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2}) - b_1 {k_1}^{n-2}(a{k_1}^2 + bk_1 + c) \\ &- b_2 {k_2}^{n-2}(a{k_2}^2 + bk_2 + c). \end{aligned}$$

Note que y_n é solução da recorrência $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0$, logo obtemos $ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2} = 0$ e como k_1 e k_2 são as raízes distintas da equação característica $ak^2 + bk + c = 0$, então $a{k_1}^2 + bk_1 + c = 0$ e $a{k_2}^2 + bk_2 + c = 0$, daí

$$\begin{aligned} aa_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} &= 0 - b_1{k_1}^{n-2}.0 - b_2{k_2}^{n-2}.0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $a_n = y_n - b_1{k_1}^n - b_2{k_2}^n = 0$ o que implica $y_n = b_1{k_1}^n + b_2{k_2}^n$ e pela unicidade das constantes, temos que $b_1 = c_1$ e $b_2 = c_2$, segue-se que

$$y_n = c_1{k_1}^n + c_2{k_2}^n. \tag{4.3}$$

□

Exemplo 4.2.2. Para encontrar a solução da equação de recorrência de segunda ordem $x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, basta resolver a sua equação característica $k^2 + k - 2 = 0$, cuja as raízes são 1 e -2. Pelos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2 a solução geral da recorrência é $x_n = c_1 1^n + c_2(-2)^n$, ou seja, $x_n = c_1 + c_2(-2)^n$ com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Exemplo 4.2.3. Outro exemplo bastante curioso, são os números de Fibonacci dado pela sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)$, em que possui a recorrência $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ com $x_0 = x_1 = 1$. Para encontrar a solução da recorrêcia basta resolver a sua equação característica $k^2 - k - 1 = 0$, cuja as raízes são $k_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $k_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Pelos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2 a solução geral da recorrência é

$$x_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para encontrar as constantes arbitrárias c_1 e c_2, basta substituir os valores iniciais $x_0 = x_1 = 1$ na solução geral, encontramos o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1.\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2.\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos as constantes $c_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ e $c_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$, com efeito

$$x_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

e por fim a solução final

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

4.2.2 Raízes Iguais da Equação Características

Considerando as raízes iguais e reais da equação característica, o teorema a seguir, mostra o modelo de solução para a recorrência linear com coeficientes constantes.

Teorema 4.2.3. *Sejam $k_1 = k_2$ raízes não-nulas da equação característica $ak^2+bk+c = 0$ resultante da recorrência $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0$. Então $x_n = c_1{k_1}^n + c_2n{k_1}^n$ é solução da recorrência, para quaisquer valores das constantes c_1 e c_2.*

Demonstração. Por hipótese, $k_1 = k_2$ são as raízes reais não-nulas da equação característica $ak^2 + bk + c = 0$, portanto o discriminante $(b^2 - 4ac)$ é igual a 0 e possui como raíz dessa equação $k_1 = k_2 = -\dfrac{b}{2a}$ e ainda $a{k_1}^2 + bk_1 + c = 0$, daí, basta substituir a solução $x_n = c_1{k_1}^n + c_2n{k_1}^n$ na recorrência e mostrar que o resultado será 0. De fato

$$\begin{aligned}
ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} &= a(c_1{k_1}^n + c_2n{k_1}^n) + b\left[c_1{k_1}^{n-1} + c_2(n-1){k_1}^{n-1}\right] \\
&+ c\left[c_1{k_1}^{n-2} + c_2(n-2){k_1}^{n-2}\right] \\
&= c_1{k_1}^{n-2}\left(a{k_1}^2 + bk_1 + c\right) + c_2n{k_1}^{n-2}(a{k_1}^2 + bk_1 + c) \\
&+ c_2{k_1}^{n-2}\left(-bk_1 - 2c\right) \\
&= c_1{k_1}^{n-2}.0 + c_2n{k_2}^{n-2}.0 + c_2{k_1}^{n-2}\left[-b\left(-\frac{b}{2a}\right) - 2c\right] \\
&= 0 + 0 + c_2{k_1}^{n-2}\left(\frac{b^2-4ac}{2a}\right) \\
&= c_2{k_1}^{n-2}\left(\frac{0}{2a}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.4. *Sejam $k_1 = k_2$ raízes não-nulas da equação característica $ak^2+bk+c = 0$ resultante da recorrência $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0$. Então toda solução da recorrência é da forma $x_n = c_1{k_1}^n + c_2n{k_1}^n$ com c_1 e c_2 constantes quaisquer.*

Demonstração. Por hipótese temos $k_1 = k_2 \neq 0$. Considerando y_n uma solução da recorrência $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0$ e sejam c_1 e c_2 constantes, tais que

$$\begin{cases} c_1k_1 + c_2k_1 = y_1 \\ c_1{k_1}^2 + 2c_2{k_1}^2 = y_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima obtemos

$$c_1 = 2\frac{y_1}{k_1} - \frac{y_2}{{k_1}^2} \text{ e } c_2 = \frac{y_2 - k_1y_1}{{k_1}^2}.$$

Assim, fica garantido que todas as soluções das recorrências que assume a forma $y_n = c_1{k_1}^n + c_2n{k_1}^n$ para todo n natural, possui c_1 e c_2 constantes únicas (*unicidade dos coeficientes*). Para isso considere uma outra solução $a_n = y_n - b_1{k_1}^n - b_2n{k_1}^n$ com b_1 e b_2 constantes quaisquer, ou seja, basta substituir a_n na recorrência $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2}$ e mostrar que é igual a 0. De fato

$$\begin{aligned} aa_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} &= a(y_n - b_1{k_1}^n - b_2n{k_1}^n) + b\left[y_{n-1} - b_1{k_1}^{n-1} - b_2(n-1){k_1}^{n-1}\right] \\ &+ c\left[y_{n-2} - b_1{k_1}^{n-2} - b_2(n-2){k_1}^{n-2}\right] \\ &= (ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2}) - b_1{k_1}^{n-2}(a{k_1}^2 + bk_1 + c) \\ &- b_2n{k_1}^{n-2}(a{k_1}^2 + bk_1 + c) - b_2{k_1}^{n-2}(-bk_1 - 2c). \end{aligned}$$

Note que y_n é solução da recorrência, portanto $ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2} = 0$ e como $k_1 = k_2 = -\dfrac{b}{2a}$ são as raízes da equação característica $ak^2 + bk + c = 0$, então $a{k_1}^2 + bk_1 + c = 0$, da última expressão acima resulta

$$\begin{aligned} aa_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} &= 0 - b_1{k_1}^{n-2}.0 - b_2n{k_1}^{n-2}.0 - b_2{k_1}^{n-2}\left[-b\left(-\frac{b}{2a}\right) - 2c\right] \\ &= 0 - 0 - 0 + c_2{k_1}^{n-2}\left(\frac{b^2 - 4ac}{2a}\right) \\ &= c_2{k_1}^{n-2}\left(\frac{0}{2a}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $a_n = y_n - b_1{k_1}^n - b_2n{k_1}^n = 0$, o que implica $y_n = b_1{k_1}^n + b_2n{k_2}^n$ e pela unicidade dos coeficientes, temos que $b_1 = c_1$ e $b_2 = c_2$, daí

$$y_n = c_1{k_1}^n + c_2n{k_1}^n. \tag{4.4}$$

□

Exemplo 4.2.4. Para achar a solução da equação de recorrência $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, basta resolver a sua equação característica $k^2 - 6k + 9 = 0$, cuja as raízes $k_1 = k_2 = 3$. Pelos Teoremas 4.2.3 e 4.2.4 a solução geral da recorrência é $x_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n$, com c_1 e c_2 constantes quaisquer.

4.2.3 Raízes Complexas da Equação Característica

Nesta seção, vamos usar o fato de que a equação caracteristica com raízes complexas são distintas, logo basta adaptar a solução, fazendo o uso da fórmula de Moivre.

Teorema 4.2.5. *Sejam k_1 e k_2 as raízes complexas não-nulas da equação característica $ak^2 + bk + c = 0$, resultante da recorrência $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0$. Então a solução da recorrência tem a forma $x_n = c_1\rho^n cos(n\theta) + c_2\rho^n sen(n\theta)$, onde ρ, θ são respectivamente, o módulo e o argumento das raízes complexas, com c_1 e c_2 constantes quaisquer.*

Demonstração. Pelos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2, temos que todas as soluções são da forma $x_n = w_1{k_1}^n + w_2{k_2}^n$, com w_1 e w_2 constantes quaisquer . Por hipótese, temos as raízes complexas da seguinte maneira

$$k_1 = \rho(cos\theta + isen\theta) \text{ e } k_2 = \rho(cos\theta - isen\theta).$$

Pela fórmula de Abraham de Moivre obtemos

$${k_1}^n = \rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)]; \tag{4.5}$$

$${k_2}^n = \rho^n[cos(n\theta) - isen(n\theta)], \tag{4.6}$$

substituindo as equações (4.5) e (4.6) na solução x_n resulta em

$$\begin{aligned} x_n &= w_1{k_1}^n + w_2{k_2}^n \\ &= w_1\rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)] + w_2\rho^n[cos(n\theta) - isen(n\theta)] \\ &= \rho^n[w_1cos(n\theta) + iw_1sen(n\theta)] + \rho^n[w_2cos(n\theta) - iw_2sen(n\theta)] \\ &= \rho^n[(w_1 + w_2)cos(n\theta) + i(w_1 - w_2)sen(n\theta)] \\ &= (w_1 + w_2)\rho^n cos(n\theta) + i(w_1 - w_2)\rho^n sen(n\theta). \end{aligned}$$

Fazendo $w_1 + w_2 = c_1$ e $i(w_1 - w_2) = c_2$, obtemos

$$x_n = c_1\rho^n cos(n\theta) + c_2\rho^n sen(n\theta). \tag{4.7}$$

□

Exemplo 4.2.5. A equação de recorrência $x_n - 2x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0$ tem $k^2 - 2k + 2 = 0$ como equação característica, cuja as raízes complexas são $k_1 = 1 + i$ e $k_2 = 1 - i$ e possui módulo $\rho = \sqrt{2}$ e argumento $\theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$. Pelo Teorema 4.2.5 a solução geral da recorrência é

$$\begin{aligned} x_n &= c_1\left(\sqrt{2}\right)^n cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + c_2\left(\sqrt{2}\right)^n sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= c_1\left(\sqrt{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c_2\left(\sqrt{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{c_1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} + \frac{c_2}{2}\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

fazendo $\left(\dfrac{c_1 + c_2}{2}\right) = c$, segue que

$$x_n = c\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}.$$

4.3 Recorrência Linear Não-Homogênea de Segunda Ordem

O objetivo desta seção é encontrar a solução geral da recorrência linear de segunda ordem no caso não-homogêneo, ou seja, $g(n) \neq 0$. Para isso, vamos separar em dois passos:

$i)$ Resolver a equação característica em busca da solução da recorrência homogênea y_n;

$ii)$ Encontrar uma solução z_n da recorrência não-homogênea, em que a mesma tem a estrutura de $g(n)$ e não pode ter o fomato de y_n;

Logo a solução geral da recorrência não-homogênea é da forma

$$x_n = y_n + z_n. \tag{4.8}$$

O teorema abaixo mostra esse resultado.

Teorema 4.3.1. *Se z_n é uma solução da equação de recorrência $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = g(n)$, entao, fazendo a sustituição $x_n = y_n + z_n$, transforma a recorrência em $ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2} = 0$.*

Demonstração. Iremos fazer a substituição $x_n = y_n + z_n$ na recorrência $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = g(n)$, daí, resulta

$$\begin{aligned} g(n) &= ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} \\ &= a(z_n + y_n) + b(z_{n-1} + y_{n-1}) + c(z_{n-2} + y_{n-2}) \\ &= az_n + ay_n + bz_{n-1} + by_{n-1} + cz_{n-2} + cy_{n-2} \\ &= (az_n + bz_{n-1} + cz_{n-2}) + (ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2}). \end{aligned}$$

Mas por hipótese, z_n é uma solução da equação de recorrência não-homogênea, então $az_n + bz_{n-1} + cz_{n-2} = g(n)$, concluímos que

$$g(n) = g(n) + (ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2}).$$

Logo

$$ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2} = 0.$$

Assim fica provado o teorema. □

Exemplo 4.3.1. Resolva a recorrência $x_n + 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2^n$ com os valores iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

Solução: A recorrência homogênea $x_n + 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0$ tem equação caraterística $k^2 + 5k + 6 = 0$, onde suas raízes são $k_1 = -2$ e $k_2 = -3$. Pelos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2 a solução geral da recorrência homogênea é $y_n = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n$ com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Agora vamos encontrar uma solução da recorrência não-homogênea, em que possui a forma de $g(n) = 2^n$, é claro que essa solução tem a estrutura básica $z_n = p2^n$, basta então substituir z_n na recorrência não-homogênea para encontrar o coeficiente p, no que resulta

$$\begin{aligned}
z_n + 5z_{n-1} + 6z_{n-2} &= 2^n \\
p2^n + 5p2^{n-1} + 6p2^{n-2} &= 2^n \\
(p + 5p2^{-1} + 6p2^{-2})2^n &= 1.2^n,
\end{aligned}$$

comparando os coeficientes do termo 2^n e resolvendo as potências, segue que

$$\begin{aligned}
p + \frac{5p}{2} + \frac{6}{4} &= 1 \\
\frac{2p + 5p + 3p}{2} &= 1 \\
5p &= 1 \\
p &= \frac{1}{5},
\end{aligned}$$

portanto

$$z_n = \frac{1}{5}2^n.$$

Pelo Teorema 4.3.1, temos $x_n = y_n + z_n$, então nossa solução geral é

$$x_n = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n + \frac{1}{5}2^n.$$

Vamos agora encontrar as constantes c_1 e c_2, para isso, iremos substituir $n = 0$ e $n = 1$ na solução geral da recorrência, usando respectivamente os valores iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{5} = 1 \\ -2c_1 - 3c_2 + \frac{2}{5} = 2 \end{cases}$$

Organizando o sistema anterior obtemos

$$\begin{cases} 3c_1 + 3c_2 = \frac{12}{5} \\ -2c_1 - 3c_2 = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear acima, encontramos $c_1 = 4$ e $c_2 = -\frac{16}{5}$, portanto a solução geral de valores inicias dados é

$$x_n = 4.(-2)^n - \frac{16}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}.2^n.$$

Exemplo 4.3.2. Encontre a solução geral da recorrência $x_n - 10x_{n-1} + 25x_{n-2} = 5^n$.

Solução: A recorrência homogênea $x_n - 10x_{n-1} + 25x_{n-2} = 0$ tem equação caraterística $k^2 - 10k + 25 = 0$, onde suas raízes são iguais $k_1 = k_2 = 5$. Pelos Teoremas 4.2.3 e 4.2.4 a solução geral da recorrência homogênea é $y_n = c_1 5^n + c_2 n 5^n$ com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Agora vamos encontrar uma solução da recorrência não-homogênea, em que possui $g(n) = 5^n$. Note que as soluções particulares da recorrência homogênea tem a mesma estrutura de $g(n)$, logo a solução z_n da recorrência não-homogênea não pode assumir as formas $p5^n$ e $pn5^n$, pois se ambas as soluções particulares forem substituidas na recorrência não-homogênea, iriamos encontrar $0 = 5^n$, o que é um absurdo, pois $5^n > 0$ para todo n natural. Assim, é fácil ver que a estrutura básica da não-homogênea é no formato $z_n = pn^2 5^n$, onde p é uma constante que iremos determiná-la, bastando substituir z_n na recorrência, donde resulta

$$\begin{aligned}
z_n - 10z_{n-1} + 25z_{n-2} &= 5^n \\
pn^2 5^n - 10p(n-1)^2 5^{n-1} + 25p(n-2)^2 5^{n-2} &= 5^n \\
[n^2 - 2(n^2 - 2n + 1) + (n^2 - 4n + 4)]p5^n &= 5^n \\
(n^2 - 2n^2 + 4n + 2 + n^2 - 4n + 4)p5^n &= 5^n \\
6p5^n &= 1.5^n,
\end{aligned}$$

comparando os coeficientes do termo 5^n, segue que

$$\begin{aligned}
6p &= 1 \\
p &= \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

portanto

$$z_n = \frac{1}{6} n^2 5^n.$$

Pelo Teorema 4.3.1, temos $x_n = y_n + z_n$, então nossa solução geral é

$$x_n = c_1 5^n + c_2 n 5^n + \frac{1}{6} n^2 5^n.$$

5 Aplicações das Recorrências Lineares

Neste capítulo, iremos resolver problemas contextualizados que envolve as recorrências lineares no âmbito da geometria, da análise combinatória e dos jogos matemáticos, utilizando as idéias recursivas para construir as recorrências, fazendo o uso das fórmulas apresentadas nos capítulos anteriores.

Exemplo 5.0.3. Determine o número máximo de pedaços que uma pessoa pode dividir uma pizza, dando cortes em linha reta. (*Pizza de Steiner*)

Solução: Inicialmente os cortes a serem dados na pizza para que obtenham o número máximo de pedaços, tem que se interceptarem em pontos distintos e lembrando que se forem dados n cortes, iremos obter x_n pedaços. Se não for dado nenhum corte, teremos a pizza inteira, portanto um pedaço, então $x_0 = 1$. Iremos construir uma tabela para simbolizar a quantidade de cortes e o numero de pedaços.

Nº de Cortes	Nº de Pedaços	Recorrência
0	1	$x_0 = 1$
1	2	$x_1 = x_0 + 1 = 2$
2	4	$x_2 = x_1 + 2 = 4$
3	7	$x_3 = x_2 + 3 = 7$
4	11	$x_4 = x_3 + 4 = 11$

Note que para encontrarmos x_n pedaços da pizza é necessário cortarmos todos os pedaços anteriores x_{n-1} e que surgirão n novos pedaços, portanto a nossa recorrência será

$$x_n = x_{n-1} + n,\, n \geq 1.$$

Para resolvermos a recorrência acima utilizaremos a solução da equação (3.4), lembrando e observando que $g(n) = n$ e que $x_0 = 1$, temos que

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + \sum_{k=1}^{n} g(k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Melhorando a equação acima, obtemos como solução geral

$$x_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

A referida recorrência com sua solução está provada sua validade por pelo Principio da Indução Matemática, ver em [3] ou [5].

Exemplo 5.0.4. Vamos estudar agora a Torre de Hanói, um quebra-cabeça criado pelo matemático francês Edouard Lucas em 1883, que consiste em uma base contendo três pinos, onde em um deles são dispostos oito discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor.

> Lucas anexou ao jogo uma lenda: no começo dos tempos, Deus criou a Torre de Brahma, que continha três pinos de diamante e colocou no primeiro pino 64 discos de ouro maciço. Deus então chamou seus sacerdotes e ordenou-lhes que transferissem todos os discos para o terceiro pino, seguindo as regras acima. Os sacerdotes então obedeceram e começaram o seu trabalho, dia e noite. Se e quando eles terminarem, a Torre de Brahma irá ruir e o mundo acabará, de acordo com [5] e [10].

Qual é a quantidade mínima de movimentos para que dadas três varetas e n discos de tamanhos distintos, colocados na primeira vareta em ordem de tamanho (do menor ao maior), tendo que mover estes n discos desde a vareta inicial até a terceira usando a segunda como auxiliar, sem colocar um disco de tamanho maior sobre um de tamanho menor? (*As Torres de Hanói*)

Solução: Se x_n é a quantidade de movimentos para levar os n discos da primeira a terceira torre, então podemos contruir a recorrência ao analisar como são distribuídos os movimentos. x_{n-1} é a quantidade de movimentos de $n-1$ discos que levam da primeira a segunda torre, sobrando assim, apenas o maior disco na primeira torre que gasta apenas um movimento pra terceira torre, basta entao tranferir $n-1$ disco que estão na segunda para terceira torre em que gastará a mesma quantidade de movimentos que houve da primeira pra segunda torre que é x_{n-1} movimentos. Daí resulta a recorrência

$$x_n = x_{n-1} + 1 + x_{n-1}$$
$$x_n = 2x_{n-1} + 1 \text{ com } n > 0.$$

Iremos resolver a recorrência acima usando a solução geral que possui equação da forma da equação (3.10), pois tem os mesmos padrões. Note que se não tiver disco $(n = 0)$ não há movimentos, entao $x_0 = 0$ e pela recorrência (3.1) temos $a = 2$ e $g(k) = 1$. segue que

$$\begin{aligned}
x_n &= a^n x_0 + a^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{a^{k-1}} \\
&= 2^n.0 + 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\
&= 0 + 2^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&= 2^{n-1} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{2^{n-1} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \\
&= 2\left(2^{n-1} - \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

portanto

$$x_n = 2^n - 1 \text{ para todo } n \geq 0.$$

Ilustração da Torre de Hanói

A figura abaixo está situada em [11].

Figura 5.1: Torre de Hanói

Na Figura 5.1, possui 7 discos de tamanhos distintos, logo temos $n = 7$ e a quantidade de mínima de movimentos é x_7. Usando o resultado final da Torre de Hanói, obtem-se

$$x_n = 2^n - 1,$$

segue que

$$\begin{aligned} x_7 &= 2^7 - 1 \\ &= 128 - 1 \\ &= 127. \end{aligned}$$

Logo 7 discos de tamanhos distintos na Torre de Hanói são necesários no mínimo 127 movimentos para tranferí-lo da primeira para a terceira torre passando pela segunda torre.

Exemplo 5.0.5. Determine o número máximo de pedaços que uma pessoa pode dividir um queijo com n cortes planificados. (*Queijo de Steiner*)

Solução: x_n é o número máximo de pedaços a serem dados por n cortes planificados no queijo. É necessário e suficiente que exista uma única reta de interseção para apenas dois planos distintos, só assim, podemos ter o número máximo de pedaços do queijo. Se não for dado nenhum corte, teremos o queijo inteiro, portanto um pedaço, então $x_0 = 1$. Iremos construir uma tabela para simbolizar a quantidade de cortes e o número de pedaços.

Nº de Cortes	Nº de Pedaços	Recorrência
0	1	$x_0 = 1$
1	2	$x_1 = x_0 + 1 = 2$
2	4	$x_2 = x_1 + 2 = 4$
3	8	$x_3 = x_2 + 4 = 8$
4	15	$x_4 = x_3 + 7 = 15$

Note que é tendencioso imaginar que com 4 cortes teriamos 16 pedaços e levando a conclusão que a recorrência seria $x_n = 2^n$, mas isso não acontece, pois no quarto corte, não tem como dar um corte planificado passando pelos 8 pedaços anteriores do queijo, o que gerariam 16 pedaços. Para encontrarmos x_n pedaços do queijo é necessário todos os x_{n-1} pedaços anteriores e os r_{n-1} novos pedaços que surgirão dos $n-1$ cortes, onde r_n é o número máximo de regiões, com as mesmas característica da *Pizza de Steiner*, daí, temos a seguinte recorrência

$$x_n = x_{n-1} + r_{n-1} \text{ para } n \geq 1.$$

A recorrência acima tem a estrututura da recorrência (3.4), portanto nosso $g(n) = r_{n-1}$ e admite solução no formato da equação (3.5), logo resulta

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} g(k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} r_{n-1}.$$

Lembrando que $r_n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$, pois tem a mesma solução da *Pizza de Steiner*, então $r_{n-1} = 1 + \dfrac{(n-1)n}{2}$, assim podemos ter

$$
\begin{aligned}
x_n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\left[1+\frac{(n-1)n}{2}\right] \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\left[1+\frac{n^2-n}{2}\right] \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k.
\end{aligned}
$$

Os somatórios tem os seguintes resultados, de acordo com o capítulo 1, exemplos 11 e 18 da bibliografia [2], exceto o caso trivial

$$\sum_{k=1}^{n}1=(1+1+\cdots+1)=1.n=n(trivial)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Substituindo os resultados dos somatórios na recorrências x_n, vamos obter

$$
\begin{aligned}
x_n &= 1+n+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{12+12n+2n^3+n^2+2n^2+n-3n^2-3n}{12} \\
&= \frac{2n^3+10n+12}{12},
\end{aligned}
$$

logo

$$x_n=\frac{n^3+5n+6}{6}, n\geq 0.$$

A referida recorrência com sua solução está provada sua validade por pelo Principio da Indução Matemática, ver em [5].

Exemplo 5.0.6. Suponha que um casal de coelhos recém-nascidos é colocado em uma gaiola, e que eles não produzem descendentes até completarem dois meses de idade. Uma vez atingida esta idade, cada casal de coelhos produz exatamente um outro casal de coelhos por mês. Qual seria o número de casais de coelhos na ilha após seis meses, supondo que nenhum dos coelhos tenha morrido e não haja migração deste período? Encontre recursivamente a recorrência para tal sequência e encontre sua solução geral para n meses.

Solução: Iremos construir uma tabela para os 6 primeiros meses onde cada casal de coelho é representado por uma letra, lembrando que iremos denominar os filhotes sendo os casais recém nascidos, os jovens sendo os casais com um mês e por fim os casais com dois ou mais meses sendo os adultos, dessa forma segue a tabela

Meses	Filhotes	Jovens	Adultos	Total	Recorrência
0	a			1	$x_0 = 1$
1		a		1	$x_1 = 1$
2	b		a	2	$x_2 = 1 + 1 = 2$
3	c	b	a	3	$x_3 = 1 + 2 = 3$
4	d,e	c	a, b	5	$x_4 = 2 + 3 = 5$
5	f, g, h	d, e	a, b, c	8	$x_5 = 3 + 5 = 8$
6	i, j, l, k, m	f, g, h	a, b, c, d, e	13	$x_6 = 5 + 8 = 13$

Portanto, teremos 13 casais de coelho após seis meses. Agora, iremos analisar a tabela e retirar recursivamente a recorrência, note que da terceira linha em diante temos sempre a soma das duas linhas anteriores, logo temos

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \text{ com } x_0 = x_1 = 1.$$

A recorrência encontrada, nada mais é do que a recorrência de Fibonacci, em que possui solução de acordo com o exemplo (4.2.3), daí, segue que

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}, n \geq 0.$$

Exemplo 5.0.7. Quantas são as palavras de n letras, pertencentes ao conjuntos $\{a, b, c\}$, que não possuem duas letras consecutivas iguais a c?

Solução: Iremos construir uma tabela que envolva as letras $\{a, b, c\}$ e as palavras que elas formam, para melhor entendimento.

Nº de Letras	Palavras	Quantidade de Palavras
1	a, b, c	$x_1 = 3$
2	aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb	$x_2 = 8$
3	aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, baa, bab, bac, bba, bbb,bbc, bca, bcb, caa, cab, cac, cba, cbb, cbc	$x_3 = 22$

Chamando de x_n a quantidade de palavras com n letras em que não possuem dois c consecutivos, o valor de x_{n+2} será a soma de:

i) O número de palavras com $n+2$ letras que começam com as letras a ou b e não possuem dois c consecutivos é exatamente igual a $2x_{n+1}$, pois a primeira letra só pode ser a ou b, de fato, pois foi determinada a primeira letra, daí temos $n+1$ letras a ser encontradas o que pode ser feito de x_{n+1} modos para cada escolha da primeira letra;

ii) O número de palavras com $n+2$ letras que começam com a letra c e não possuem dois c consecutivos é exatamente igual $2x_n$, pois a segunda letra só pode ser a ou b, de fato, pois foi determinada as duas primeiras letras, daí temos n letras a ser encotrada o que pode ser feito de x_n modos para cada escolha da segunda letra.

Logo obtemos a seguinte equação de recorrência

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n. \tag{5.1}$$

Iremos resolver a recorrência (5.1) fazendo uma troca de n por $n-2$, assim, obtemos uma nova recorrência em que possui a mesma solução da anterior, pois a equação característica permanece a mesma. Segue-se que

$$x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2},$$

organizando a equação acima, resulta

$$x_n - 2x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0. \tag{5.2}$$

A equação característica da recorrência (5.2) é $k^2 - 2k - 2 = 0$ em que suas raízes são $k_1 = 1 + \sqrt{3}$ e $k_2 = 1 - \sqrt{3}$. Pelos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2 a solução geral da recorrência é

$$x_n = c_1(1+\sqrt{3})^n + c_2(1-\sqrt{3})^n$$

Para encontrar as constantes arbitrárias c_1 e c_2, basta substituir os valores iniciais $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$ na solução acima, o que resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} (1+\sqrt{3})c_1 + (1-\sqrt{3})c_2 = 3 \\ (1+\sqrt{3})^2 c_1 + (1-\sqrt{3})^2 c_2 = 8 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} (1+\sqrt{3})c_1 + (1-\sqrt{3})c_2 = 3 \\ (4+2\sqrt{3})c_1 + (4-2\sqrt{3})c_2 = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos as constantes $c_1 = \dfrac{3+2\sqrt{5}}{6}$ e $c_2 = \dfrac{3-2\sqrt{5}}{6}$, e por fim, a solução final para todo $n > 0$

$$x_n = \left(\frac{3+2\sqrt{5}}{6}\right)(1+\sqrt{3})^n + \left(\frac{3-2\sqrt{5}}{6}\right)(1-\sqrt{3})^n.$$

6 Conclusão

O presente trabalho se caracteriza pelo assunto que foi abrangido durante seu desenvolvimento, integrando conceitos vistos em diversificadas disciplinas presente no curso de Mestrado em Matemática (*Profmat*), em especial a disciplina Matemática Discreta, pois nela foram concentrados o estudo principal deste trabalho. Também foi levada em consideração as diversas formas das resoluções dos problemas ligados as recorrências lineares que foram resolvidos em sala de aula, tanto pelo professor, quanto pelos alunos, no intúito de uma nova abordagem das formas já vistas.

As técnicas usadas para a generalização aqui estudada, foram trabalhadas de forma sistemática e gradativa, envolvendo equações de primeira e segunda ordem, no que se mostraram promissoras quanto a possibilidade de extensão destes resultados, tornando-se assim um tema interessante para futuras investigações científicas. Foi observado, que o estudo das recorrências podem ser encontradas em outras áreas ligadas a Matemática, como na Física, na Biologia e na Química de acordo com [6], páginas 78 - 84, e na Computação quando se fala de representação binária, ver páginas 16 - 18 de [5], dentre outras, onde precisa-se dos conhecimentos básicos de cada área, para então ter a estrutura Matemática.

A atividade evidenciou a importância de o professor buscar melhores formas de abranger o conteúdo, ou seja, melhor metodologia, a criteriosa seleção dos recursos didáticos a serem utilizados durante a aplicação do conteúdo o qual propõe ensinar, pois nos exemplos contextualizados desta dissertação, foram envolvidos vários problemas no qual têm-se a necesssidade de um material concreto, principalmente na parte que envolvemos a geometria, pois é de fácil visualização para os problemas que foram propostos. No tocante à formação dos professores de matemática, vários são os aspetos a considerar, tendo em conta a exigência do papel do professor nos diferentes contextos profissionais. Sua formação envolve, na verdade, fatores diversificados. A redação final do trabalho certamente tem um dos seus principais objetivos, definido no projeto do qual se originou: produzir um material introdutório que apresentasse os conceitos básicos sobre recorrências de forma inteligível e detalhada, contendo vários exemplos resolvidos, seções dedicadas às definições e demonstrações dos teoremas como também às aplicações em atividades que podem e devem ser trabalhadas em sala de aula. Em nenhum momento, procurou-se exaurir um determinado assunto, mas apresentar os conceitos fundamentais de cada tema, respeitando o nível de conhecimento prévio e a capacidade de assimilação do público alvo ao qual se destinou.

Espera-se que o material produzido possa ser uma opção de leitura ao colega professor que desejar introduzir o ensino das equações de recorrência em seu planejamento, e que possa servir de estímulo para que os alunos consigam introduzir tal conhecimentos na sua vida pessoal e acadêmica.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E.L. et al. *A Matemática do ensino médio* – volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] LIMA, E.L. et al. A Matemática do ensino médio – volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[3] OLIVEIRA, K. I. M., Fernández, A. J. C. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[4] PINHEIRO, T. A. Soluções Não Clássicas para problemas da OBMEP. Dissertação de mestrado apresentada na Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2013.

[5] JESUS, E. A. de; SILVA, E. F. S. Relações de recorrência. Monografia (proposta de apresentação de trabalho nas Jornadas de Iniciação Científica) – Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Belo Horizonte, 2006.

[6] PACHECO, Adriano M. Modelagem Matemática no ensino de equações de recorrências. Dissertação de mestrado apresentada na Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT, Cuiabá, Mato Grosso, 2013.

[7] BASSANEZI, Rodney C. Ensino aprendizagem com modelagem matemática. 3a ed. São Paulo: São Paulo, 2011.

[8] SANTOS, J.Plínio O., MELLO, Margarida P., MURARI, Idani T.C. Introdução à Análise Combinatória. 2 ed. Campinas,São Paulo: UNICAMP, 1998.

[9] HEFEZ, Abramo, Indução matemática. Programa de iniciação científica – OBMEP. Rio de Janeiro, [s.n], 2012.

[10] GRAHAM, R. J., KNUTH, D. E., PATASHNIK, O. Concrete Mathematics: a foundation for computer science . 2th ed. Addison-Wesley. Disponível em: http://www.matematica.net/ portal/ e-books. Acesso em 03/01/2014.

[11] HANOI, TORRE DE. Matemática Curiosa Online. Disponível em: http://www.matematicacuriosaonline.blogspot.com.br/2013/06/torre-de-hanoi-no-grande-templo-de.html. Acesso em 05/01/2014.

[12] MOREIRA, Carlos Gustavo. Sequências Recorrentes. Disponível em: http://www.bienasbm.ufba.br/M55.pdf. Acesso em 14/02/2014.