Universidade Estadual de Santa Cruz

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Problemas, Sequências e Consequências

por

Alex Menezes Pereira*

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Germán Ignacio Gomero Ferrer

*Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes

obtido através da SBM.

Ilhéus

2013

Alex Menezes Pereira

Problemas, Sequências e Consequências

Ilhéus
2013

Alex Menezes Pereira

Problemas, Sequências e Consequências

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer

Universidade Estadual de Santa Cruz

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Ilhéus
2013

P436 Pereira, Alex Menezes.
Problemas, sequências e consequências / Alex Menezes Pereira. – Ilhéus : UESC/PROFMAT, 2013.
86f. : il.
Orientador : Germán Ignácio Gomero Ferrer.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Inclui referências + apêndices.

1. Matemática (ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Resolução de problemas (matemática). I. Ferrer, Germán Ignácio Gomero. II. Título.

CDD – 510.7

Alex Menezes Pereira

Problemas, Sequências e Consequências

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 11 de abril de 2013:

Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer
Orientador

Prof. Dr. Ricardo M Bentin

Prof. Dr. Jailson de Araújo Rodrigues

Ilhéus - 2013

DEDICATÓRIA

À minha mãe Maria do Carmo; ao meu pai Alício; às minhas irmãs: Juliana, Inez, Ana Paula e Hortênica; aos meus filhos: Alice, Arthur e Éric; e à Niuzéia.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

A Deus, em primeiro lugar, pela Salvação e por me carregar nos braços várias vezes. Em segundo, agradeço a minha mãe e a minha irmã Juliana pelo amor e pelas lições de vida. A todos os meus amigos e amigas que me motivaram nos momentos mais desgastantes deste trabalho, principalmente Almir, Rômulo e Zenilza. Aos meus irmãos da IBR (Igreja Batista Renovada em Pinheiros), em especial os integrantes do Grupo Arena da Graça e da Célula Haja Luz, que estiveram intercedendo por minha vida para que eu não me afastasse de Deus. A meu orientador Germán por me fazer mostrar o melhor de mim neste trabalho. A meu coordenador Sérgio por nunca ter duvidado de minha capacidade. A todos os professores que me ajudaram a construir meu saber. A todos os 19 colegas deste curso que me ensinaram um pouquinho mesmo antes de serem mestres: aos oito guerreiros que fizeram comigo a segunda qualificação e me mostraram que ninguém pode ser Mestre enquanto não começar aprender mais do que ensina; a Lucas, por ter sido meu primeiro amigo da turma; a Rodrigo e a Gustavo por terem se tornado meus irmãos; a Roque pelas oportunidades de aprendizado que ele me proporcionou e pela ajuda incondicional que sempre me prestou; a Messias pelos conselhos, sábios conselhos; e a Cíntia por me ensinar a usar o silêncio pra dizer tudo, sem dizer uma palavra. Por fim agradeço

À **Capes** pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

ABSTRACT

In this paper we present a propose approach to content, made through problems and using the numerical sequences, as the main tool to introduce students to polynomials and algebraic operations, in a simple and natural weight without having this content. We also propose that the student is led to make inferences, create their own problems while solving a major problem; these constructions made by the student during the resolution that is going to enrich your learning. Finally, here are some possibilities for continuation of work on the same line of research, namely: Fibonacci Numbers, Pascal's Triangle and counting processes, the Relation Euler and Space Geometry, Systems of Linear Equations, work with Sum, Arithmetic Progressions of Second Order, among others, that may arise naturally during troubleshooting.

Keywords: Problem Solving, Numerical Sequences, Polynomials.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma proposta de abordagem de conteúdo, feita através de problemas e utilizando as sequências numéricas, como principal ferramenta para apresentar aos alunos os polinômios e as operações algébricas, de uma forma simples e sem o peso natural que tem este conteúdo. Também propomos que o aluno seja levado a fazer inferências, criar seus próprios problemas durante a resolução de um problema principal; estas construções feitas pelo aluno durante a resolução é que vão enriquecer o seu aprendizado. Por fim, deixamos algumas possibilidades para continuidade de trabalhos nesta mesma linha de estudos, a saber: Números de Fibonacci, Triângulo de Pascal e os processos de contagem, a Relação de Euler e a Geometria Espacial, Sistemas de Equações Lineares, o trabalho com Somatórios, Progressões Aritméticas de Segunda Ordem, entre outros, que poderão surgir de forma natural durante a resolução de problemas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Sequências Numéricas, Polinômios.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Pensar é o trabalho mais pesado que existe. Talvez seja por isso que tão poucos o exercitem.

(Henry Ford)

Desde a antiguidade, a Resolução de Problemas sempre foi a base para o desenvolvimento da Matemática. Da vontade de resolver problemas práticos é que nascia a necessidade de formalizar os conceitos. Atualmente, a Resolução de Problemas é tida como uma técnica ensino de Matemática, uma forma de abordar os conteúdos sem que o aluno tenha que se preocupar inicialmente com conceitos e fórmulas, uma maneira de resgatar as raízes da essência de se aprender Matemática.

Entendendo ser a Resolução de Problemas uma linha consistente no que diz respeito a desenvolver nos alunos uma análise mais sistêmica das situações que lhes são postas, propusemos-nos buscar problemas que os possibilitassem experimentar desta sublime característica tão peculiar que encontramos em alguns deles, que é a possibilidade de poder resolvê-los de mais de uma forma, passando por caminhos bem distintos e, obtendo resultados durante este percurso, por vezes, mais interessantes que a própria resposta ao problema proposto.

Este trabalho consiste numa análise do potencial das sequências de números inteiros como ferramenta didática no ensino de Matemática no nível médio. Muitas sequências numéricas costumam surgir apenas como curiosidades matemáticas, enquanto outras surgem naturalmente no processo de resolução de problemas. Podemos citar como exemplo, nas duas situações, os números figurados, os números de Fibonacci e o Triângulo de Pascal, entre outros. Em qualquer caso, a manipulação destas sequências requer do conhecimento de tópicos de Matemática que fazem parte do currículo escolar básico; e a variedade destes tópicos é grande.

É importante salientar que os alunos podem trabalhar com sequências para resolver problemas mesmo que nunca tenham estudado sequências. Fazendo uma analogia com algumas situações reais, podemos dizer que pra aprender jogar futebol é necessário jogar futebol; pra aprender nadar é necessário começar a nadar. Podemos então, pensar em utilizar estas sequências numéricas como ferramenta didática para motivar o estudo destes tópicos, introduzir estes novos conceitos contextualizados em situações concretas e interessantes, e ilustrar o uso e aplicação destas ferramentas na resolução de problemas simples mas não triviais.

Entre alguns dos tópicos que podem ser abordados usando esta metodologia, estão as operações aritméticas, certas técnicas elementares de contagem, a álgebra de polinômios, os processos de indução e recursão e alguns casos, a resolução de sistemas lineares. Dentre estes itens, escolhemos abordar a álgebra dos polinômios, utilizando para isso problemas que de alguma forma também apresentassem em sua resolução alguns elementos de recorrência, e/ou em outros casos, a ideia intuitiva do princípio de indução. Outros problemas que fugiram a esta proposta foram alocados no Anexo A para que o leitor possa perceber outras abordagens distintas das que propomos como foco principal neste trabalho.

Objeto de estudo, motivação e definição do tema

A necessidade de desenvolver esta proposta para introduzir o conteúdo Polinômios e Equações Polinomiais usando problemas que envolvem sequências numéricas nasceu basicamente da minha experiência profissional. Percebíamos que faltava algo para fazer com que o aluno quisesse aprender, sempre que tínhamos que começar a trabalhar com conteúdos mais abstratos ou, que à primeira vista não tem uma utilidade prática, quando a introdução deste conteúdo era feita de forma direta, sem nenhuma preparação prévia da mente do aluno para receber tal conteúdo novo. É fruto também da percepção da dificuldade que alguns alunos demonstravam em entender certas definições e tantas operações associadas ao uso de polinômios de forma solta, sem ligação com outras áreas da matemática.

A confirmação de que não poderia deixar de falar sobre esta angústia que me acompanhava, se deu de uma forma bem particular durante a disciplina MA21, Resolução de Problemas, no Verão de 2012, tendo como texto norteador o Livro *"Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções"* de Krerley Irraciel Martins Oliveira e Adán José Corcho Fernández e ministrada pelo professor Germán Ignacio Gomero Ferrer. Durante as aulas, fomos levados a resolver diversos problemas e instigados a resolver tais problemas de quantas formas diferentes pudéssemos encontrar, usando o pensamento lateral. Isso me deu uma nova visão sobre o quão rica pode ser a Resolução de Problemas. Se esse processo for bem explorado, analisado nos mais simples detalhes, podemos extrair do problema muito mais do que uma resposta ou um resultado numérico qualquer.

Dentre os vários problemas que resolvemos naquele verão, alguns me chamaram mais a atenção pela sua beleza e simplicidade; dentre os quais se destacaram os que, de alguma forma, perpassavam por alguma sequência numérica. A forma com que as sequências e as conexões entre os grupos de números apareciam em minha mente realmente marcaram de forma muito impressionante aquela etapa de estudo. A partir dali comecei a manipular constantemente essas sequências e problemas já resolvidos, para buscar outras soluções tão belas quanto aquelas que já tínhamos conhecido. No anexo B destaco dois destes problemas e suas respectivas soluções, da forma que resolvi ali naquele curso de verão.

Quando chegou o tempo de definir os temas para a dissertação, não tive dúvida de que o trabalho deveria envolver sequências numéricas embora ainda não soubesse o que fazer e nem como fazer este trabalho. Foi quando, junto com o meu orientador, pensamos numa forma de usar este fascínio pelas sequências de maneira que isso se tornasse útil no aprendizado dos alunos na educação básica. Assim resolvemos que poderíamos usar sequências para abordar conteúdos que, por sua própria natureza, os alunos tivessem mais dificuldade. Foi quando percebemos que um destes conteúdos seria Polinômios.

Definido o tema que abordaria, procurei explorá-lo de forma que este estudo apresentasse não apenas mais um apanhado de problemas e suas soluções, mas um modelo de abordagem de conteúdo cuja estrutura destacasse as ligações entre tópicos de matemática aparentemete distintos uns dos outros.

Justificativa do tema

Nos últimos anos, com a defesa de um currículo escolar mais atraente para os alunos e a necessidade de que os conteúdos sejam abordados de forma que despertem seu interesse pelo estudo, vimos uma onda crescente em relação à busca de aplicações de conteúdos na prática e, à de contextualização de situações para o que se é ensinado nas disciplinas em geral e, em especial, as que compõem a área das Ciências Exatas. A Matemática por ser uma disciplina abstrata, traz mais dificuldades para o professor nesta busca, já que ela é ensinada de forma diferente do que foi construída. Em matemática, aprendemos a usar ferramentas que foram criadas para resolver problemas específicos; e que foram aperfeiçoadas e generalizadas com o passar do tempo.

Essa contextualização só é válida quando se sabe a medida do que se quer buscar. Quando sabemos o que o aluno traz do seu dia-a-dia, e que é algo que podemos aproveitar para introduzir determinado conteúdo. Só assim podemos ensiná-lo, usando para isso os tópicos que podem ser alicerçados em tais conhecimentos. Por exemplo:

- o valor de uma *"corrida"* de taxi observando determinadas distâncias como forma de mostrar a utilidade e/ou as aplicações das funções no dia-a-dia;
- o cálculo dos juros embutidos na prestações numa venda a prazo para justificar o aprendizado na matemática financeira, ou ainda;
- o cálculo da área da fachada das casas para mostrar uma aplicação do cálculo de áreas de figuras planas.

é claro que nem todo aluno preenche esses requisitos de conhecimento prévio para que se aprenda com mais facilidade esses tópicos.

Outra forma de iniciar um estudo é usar tópicos de fácil manipulação, como ferrementas numa construção, de maneira que o conhecimento formal e as definições envolvendo estes tópicos não sejam impecílio para seu uso e que o conteúdo que se deseja obter como produto apareça de forma natural mas ainda sem a formalidade e rigor matemático que se deseja. Isto será o primeiro contato do aluno com este conteúdo, num segundo momento (e não é nosso foco neste trabalho) pode-se trabalhar melhor as formalidades e a conceituação do conteúdo em sua totalidade.

Pensando desta maneira, estruturamos este trabalho para ser um modelo do que se pode fazer para começar a falar sobre os polinômios, usando para isso, problemas como fonte geradora, e as sequências numéricas e sua manipulação como o motor ou como engrenagens nesse processo, como ferramentas na construção do conhecimento.

Estrutura e Organização do trabalho

Além da presente Introdução, os capítulos deste trabalho encontram-se assim estruturados:

O primeiro capítulo traz uma abordagem sobre a Resolução de Problemas como linha de estudo e o seu uso, traz também um pouco sobre o que os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) falam sobre contextualização e aplicação, no dia-a-dia do aluno, do que lhe é ensinado.

O capítulo segundo traz uma rápida abordagem sobre sequências numéricas e recorrência ingrediente deste trabalho e fala também sobre as definições de polinômios e funções polinomiais. Este capítulo não tem nenhum cunho explicativo, ele serve apenas para que nos lembremos das ferramentas que podem ser usadas na resolução de problemas. Sabemos também que ele não encerra todas as abordagens dos tópicos que são apresentados, pois entendemos também que tal abordagem se faria desnecessária.

O capítulo terceiro mostra os problemas com as soluções nas quais usamos sequências numéricas para resolvê-los, e em algum instante da resolução, lançamos mão da manipulação algébrica e fazemos uso das operações com polinômios. As resoluções que apresentamos não encerram a gama de formas diferentes que tais problemas podem ser encarados, e sim mostram o quão diferentes podem ser os caminhos tomados na resolução de um mesmo problema, levando a descobertas distintas durante o processo e mesmo desta forma chegando ao lugar comum, qual seja a solução do problema enunciado. Destacamos que nem sempre a solução nos interessa, o importante é mostrar ao professor e ao seu aluno que os polinômios vão ganhando vida à medida que manipulamos as sequências e buscamos outras respostas que não são as que o problema inicial incita.

E anexo, abordamos dois tipos de situações.

No Anexo A, separamos alguns problemas e situações que encontramos no decorrer do trabalho por diferirem do que havíamos proposto inicialmente. Lá tratamos de forma sucinta estes problemas, já que poderão servir de base para estudos futuros, podendo ter esta mesma estrutura e foco, levando-nos a construir uma espécie de catálogo de problemas; sequências envolvidas e tópicos de matemática relacionados, que poderá ser ampliado com o passar do tempo com a contribuição de alunos e/ou ex-alunos do PROFMAT, ou outros que se interessarem por esta linha de estudos.

No Anexo B, expomos: dois dos problemas que resolvemos no verão, na disciplina MA21 - Resolução de Problemas, para mostrar como nasceu este fascínio pelas sequências numéricas que hoje é a base deste trabalho e um problema envolvendo Progressão Geométrica e Geometria Espacial, mais especificamente a Relação de Euller.

CAPÍTULO 1

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA

O professor pode tornar interessante o problema, concretizando-o.

(POLYA)

1.1 Fundamentação teórica

Nos últimos anos temos visto a Resolução de Problemas ganhar força nas escolas, e cada vez mais, ganhar adeptos entre os professores de matemática, pois, estes estão percebendo que além de ser uma ótima maneira de introduzir novos conteúdos, a Resolução de Problemas também ajuda a desenvolver o raciocínio lógico e, é claro, serve para dar sentido ao que estamos estudando e para motivar o aluno ao estudo da matemática.

Um dos maiores exemplos disso é o sucesso das Olimpíadas de Matemática, a OBM, a OBMEP e outras olimpíadas de matemática, sejam estaduais, municipais, institucionais (nas escolas e universidades); nacionais ou internacionais. Promovidas, aqui no Brasil, pela SBM e contando com o apoio do IMPA e esta última (OBMEP) também com o apoio do Governo Federal.

As Olimpíadas de Matemática são o que podemos chamar de *"a menina dos olhos"* de todo professor quando se fala em resolução de problemas, pois ela consegue, mesmo tendo um caráter de competição, desenvolver este lado que todos nós temos e que às vezes deixamos de praticar que é a parte mais gostosa da matemática: a sensação quase que *"orgásmica"* de resolver um problema, encontrar sua solução.

Os PCN's tratam da Resolução de Problemas e fazem uma análise desta questão na forma de como devem ser *"entregues"* os exercícios ou problemas aos alunos. Se desejamos desenvolver o pensamento crítico e a autonomia, dando oportunidades para que nossos alunos cresçam, devemos sempre colocá-los frente a desafios e problemas que exijam algum tipo de esforço além de uma simples busca na memória por um esquema pronto para lhe dar a resposta. Desejamos que nosso aluno seja capaz de fazer inferências, propor novas questões durante a resolução de um problema e isso não se consegue com exercícios de aplicação de conteúdos ou técnicas matemáticas.

Segundo o *PCN+*:

> ... na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido. (BRASIL, 2002, p.113)

Posto desta forma, a Resolução de Problemas constitui-se numa peça fundamental para ser utilizada em sala de aula, pois dará aos alunos que experimentarem-na a possibilidade de adquirir e/ou desenvolver estratégias para enfrentar situações adversas...

> ... planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 2000, p.52)

Tudo isso pode contribuir para que nossos alunos deixem de ser apenas espectadores e tornem-se agentes no processo de aprendizagem matemática.

Para que o trabalho com a resolução de problemas possa ser viabilizado é necessário que o professor promova situações em sala de aula que possibilitem aos alunos vivenciarem experiências nas quais eles estejam presentes dando-os oportunidade de resolverem problemas de uma forma mais prática. Além disso, é preciso oferecer experiências com problemas cujas soluções não sejam únicas, isto é, problemas que permitam várias respostas, vários caminhos, várias formas de se obter os mesmos resultados.

A manipulação de problemas deve ser algo comum na vida escolar do aluno, ele deve estar acostumado, ambientado a se deparar com problemas para que seja capaz de buscar respostas mesmo em situações mais complexas, pois o fato da experimentação estar presente em seu cotidiano fará com que a persistência e a vontade de buscar novas soluções, mesmo já tendo encontrado algumas, seja algo natural, e outro aspecto é que tendo esse processo de busca como algo comum, corriqueiro, ele adquirirá a autoconfiança necessária para não desistir frente aos obstáculos que poderão surgir durante a resolução dos problemas.

Falando sobre os benefícios da resolução de problemas para o desenvolvimento do nosso aluno, *POLYA*, faz uma analogia interessante dos alunos *"resolvedores"* de problemas com os atletas da natação:

> A resolução de problemas é uma competência prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer competência por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora da água e, finalmente, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus problemas e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (POLYA, 1995 p.6)

Só podemos aprender a resolver problemas, resolvendo-os; cada um de nós tem suas ferramentas, seus métodos; podemos aperfeiçoá-los, lapidá-los, mas ninguém pode nos dar receitas de como devemos resolver problemas, temos que descobrir. A descoberta é parte fundamental neste processo, é o maior prêmio que podemos receber.

Quando nos deparamos com um problema, o que mais desejamos é encontrar uma solução, o caminho que traçamos para alcançá-la depende muito das ferramentas que conhecemos e do grau de intimidade que temos com os conteúdos matemáticos, mas uma coisa imprescindível é a autocrítica; devemos sempre nos perguntar:

- *Será que poderíamos ter tomado outro caminho?*
- *Como chegaríamos a esta solução se nossa opção, em determinada parte deste processo, tivesse sido outra?*

Responder a estas e outras perguntas nos fará crescer e aumentar nosso repertório de ferramentas, nos dará mais recursos para encarar outros problemas.

Quando mostramos nossa solução, quando mostramos os passos que demos para encontrar determinada solução, estamos apenas tornando pública nossa maneira de pensar, não podemos exigir que outra pessoa resolva da mesma forma aquele problema que resolvemos. Para ensinar outra pessoa a encontrar seus próprios caminhos podemos lançar mão de perguntas que lhe propiciarão, mediante suas respostas, trilhar por caminhos próximos do que temos em mente.

Também é certo que não podemos dar todas as cartas, ensinar todos os caminhos, temos que deixar que o aluno se sinta o autor das descobertas, mesmo que tenhamos quase lhe mostrado o que ele estava em busca. Sobre isso *POLYA* nos diz:

> ... A melhor coisa que pode um professor fazer pelo seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa. As indagações e sugestões que passamos a discutir tendem a provocar tal ideia.
> Para sentir a posição do estudante, o professor deve pensar na sua própria experiência, nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou ao resolver problemas. (POLYA, 1995, p.9)

1.2 Estratégias de Resolução de Problemas

Como sugestões de estratégias didáticas para o ensino da Matemática através da resolução de problemas, podemos usar de algumas orientações e experiências comprovadas, vejamos:

1. Os Parâmetros Curriculares Nacionais - *PCN*, consideram que a resolução de problemas, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, pode ser fundamentada nos seguintes princípios:

   (a) a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;

   (b) o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é proposta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;

   (c) aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;

(d) um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;

(e) a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

2. Para se resolver e encaminhar a solução de um problema, segundo *POLYA*, um grande matemático e pesquisador do tema, quatro etapas principais podem ser empregadas:

   (a) Compreensão do problema - Para compreender um problema é necessário estimular o aluno a fazer perguntas: O que é solicitado? Quais são os dados? Quais são as condições? É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes ou não para determinar a solução? Faltam dados? Que relações posso estabelecer para encontrar os dados omitidos? Que fórmulas e/ou algoritmos posso utilizar? Neste processo de compreensão do problema, muitas vezes torna-se necessário construir figuras para esquematizar a situação proposta, destacando valores, correspondências e uso da notação matemática.

   (b) Construção de uma estratégia de resolução - É importante estimular o aluno a buscar conexões entre os dados e o que é solicitado, estimulando, também, que pensem em situações similares, a fim de que possam estabelecer um plano de resolução, definindo prioridades e, se necessário, investigações complementares para resolver o problema.

   (c) Execução de uma estratégia escolhida - Esta etapa é o momento de *"colocar as mãos na massa"*, de executar o plano idealizado. Se as etapas anteriores foram bem desenvolvidas, esta será, provavelmente, a etapa mais fácil do processo de resolução de um problema. Para que o aluno obtenha sucesso, deve ser estimulado a realizar cada procedimento com muita atenção, estando atento a cada ação desenvolvida, verificando cada passo. O aluno também deve ser estimulado a mostrar que cada procedimento realizado está correto, possibilitando a afirmação de seu aprendizado e a comunicação de sua produção.

(d) Revisão da solução - A revisão é um momento muito importante, pois propicia uma depuração e uma abstração da solução do problema. A depuração tem por objetivo verificar os procedimentos utilizados, procurando simplificá-los ou, buscar outras maneiras de resolver o problema de forma mais simples. A abstração tem por finalidade refletir sobre o processo realizado procurando descobrir a essência do problema e do método empregado para resolvê-lo, de modo a favorecer uma transposição do aprendizado adquirido neste trabalho para a resolução de outras situações-problema.

3. *Dante* sugere trabalhar com todos os alunos de uma mesma turma, apresentando um problema desafiador, real e interessante, e que não seja resolvido diretamente por um ou mais algoritmos. O autor recomenda que deva ser dado um tempo razoável para que os alunos leiam e compreendam o problema. Outros aspectos recomendados são:

   (a) Facilite a discussão entre eles ou faça perguntas para esclarecer os dados e condições do problema e o que nele se pede.

   (b) Procure certificar-se de que o problema está totalmente entendido por todos.

   (c) Lembre-se de que uma das maiores dificuldades do aluno ao resolver um problema é ler e compreender o texto.

   (d) Em seguida, dê um bom tempo para os alunos trabalharem no problema, porque a resolução não pode se transformar numa competição de velocidade, e elas precisam muito mais de tempo para pensar e trabalhar no problema do que de instruções específicas para resolvê-lo.

   (e) Procure criar entre os alunos um clima de busca, exploração e descobertas, deixando claro que mais importante que obter a resposta correta é pensar e trabalhar no problema durante o tempo que for necessário para resolvê-lo. Inventar problemas é uma forma de adquirir conhecimento e capacidades, esses problemas podem ser simples mais tem que ser interessantes para o aluno.

1.3 O pensamento lateral como estratégia na resolução de problemas

A aplicação de atividades voltadas à resolução de problemas em sala de aula deve ter a finalidade de proporcionar ao educando o desenvolvimento de sua postura crítica diante de situações complexas, bem como o desenvolvimento de iniciativa para busca de soluções. A criação de estratégias perpassa pelo amadurecimento criativo do educando.

Nessa perspectiva, a exploração do pensamento lateral constitui ferramenta de grande valor a ser aplicada no meio educacional, como estratégia ao desenvolvimento do potencial criativo do educando. A aplicação de situações problema que levem o aluno à busca de soluções não triviais, que exijam ao máximo da sua criatividade para a construção de soluções pertinentes, porém não óbvias, apresenta-se como recurso ao desenvolvimento da habilidade da resolução de problemas.

Em um mundo que muda constantemente e que apresenta novos desafios e ameaças, a criatividade se faz necessária na análise das situações. Dentro do ambiente escolar, a exploração de situações que propiciem o desenvolvimento do pensamento lateral proporcionarão ao educando o desenvolvimento de seu potencial criativo.

O pensamento lateral é aquele que nos leva a quebrar paradigmas, ou seja, ter um pensamento diferente do padrão habitual. Diante de um problema, muitas vezes necessitamos mudar nossa perspectiva para encontrar uma solução.

O pensamento lateral pode ser definido como uma heurística para solução de problemas, através da qual o problema é analisado por vários ângulos, ao invés de ser atacado de frente. Em oposição ao pensamento linear, tradicionalmente aplicado na escola básica, o pensamento lateral visa um processo não linear de raciocínio, para checar suposições, mudar perspectivas e gerar novas ideias.

Pensar por vários ângulos é uma ótima forma de abordagem quando desejamos resolver um problema de uma forma diferente. No pensamento lateral o que importa não é a solução, é a criatividade usada para se alcançar determinada solução, isto é muito salutar, pois apesar de muitos problemas não permitirem que busquemos respostas finais distintas, esta criatividade adquirida pode e deve ser usada como um trunfo na descoberta por novos caminhos para se obter uma nova resposta

Criado e desenvolvido por Edward de Bono, o termo pensamento lateral se refere a um processo de pensamento diferente do lógico linear argumentativo, também chamado de pensamento crítico. No pensamento crítico se procura por falhas na argumentação com o intuito de construir um argumento limpo. No pensamento crítico se procede a lógica e sequencialmente, um passo de cada vez. Assim, embora este tipo de pensamento possa ser usado para resolver problemas, ele não é muito eficiente para situações que requerem de criatividade. Já o pensamento lateral, por sua própria natureza, é um tipo de pensamento que fomenta a criatividade, pois neste processo deliberadamente se abandona o percurso linear e se ataca o problema pelos flancos. A prática do pensamento lateral consiste basicamente em se liberar de todos os pressupostos implícitos, que aparentemente fazem parte do problema, e que na realidade não são mais do que preconceitos.

O pensamento lateral é uma técnica que possui grande difusão na atualidade e se foca em produzir ideias que estejam fora do padrão de pensamento habitual que as pessoas executam.

Quando um problema é avaliado tende-se sempre a seguir um padrão natural ou habitual de pensamento, o qual gera limitação. Com o pensamento lateral rompe-se este padrão, vê-se através do mesmo, conseguindo obter ideias criativas e inovadoras. Em particular a técnica baseia-se em que, mediante provocações do pensamento, abandona-se o caminho habitual, o padrão de pensamento natural.

O Princípio básico do pensamento lateral está em obter uma perspectiva diferente sobre um problema, tentar separar os elementos e recombiná-los em um modo diferente, não linear, porém critico e criativo.

Em geral, dentro do processo educativo, o raciocínio usual ou a forma de pensamento tradicional usa de processos de análise, crítica e julgamento que são muito úteis em várias situações, mas que também limitam em inúmeras outras. Em geral é exercitado o raciocínio linear, vertical, de baixa flexibilidade e muito pouca exploração de novas alternativas.

Sem o recurso do pensamento lateral é muito fácil cair em pegadinhas. O pensamento lateral é o tipo de pensamento usado para resolver charadas. É, portanto, o tipo de pensamento natural nas crianças. Por algum motivo o pensamento lateral é deixado de lado pela maioria das pessoas em algum momento do seu crescimento.

Nesse sentido, desenvolver situações que propiciem aplicar o pensamento lateral, é um recurso propício ao ambiente educacional, a fim de permitir ativar a capacidade de exploração de novos caminhos de pensamento, de gerar alternativas, de desenvolver e implementar soluções com maior produtividade e deve ser exercitado a fim de que nos libertemos das amarras *"lineares"* que ficamos presos desde que perdemos a inocência e deixamos de lado a fase dos *"porquês"* e passamos a aceitar aquilo que nos diziam sem questionar tanto, como fazíamos quando éramos crianças na matemática.

Neste ponto, parafraseando Jesus, poderíamos dizer: *"Deixai vir a mim as criancinhas pois delas é o reino das descobertas"* ou ainda *"aquele que não se fizer como criança, aquele que não nascer de novo, não poderá ver as maravilhas da resolução de problemas"*

CAPÍTULO 2

SEQUÊNCIAS, RECORRÊNCIA E POLINÔMIOS

O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta

(POLYA)

Neste capítulo coletamos, de modo conciso, as definições e resultados básicos necessários para que se possa acompanhar o desenvolvimento deste trabalho. Muito do que expomos aqui são recortes de (LIMA, 2006, v.1) e (LIMA, 2006, v.3); do que estudamos nas disciplinas de MA11 e MA12 do PROFMAT e de apostilas preparadas para estudos de Iniciação Científica - PIC, da OBMEP, como a de *Indução Matemática, de Abramo Hefez, em 30/06/2009*.

2.1 Sequências Numéricas

Uma sequência, como sugere o nome, é uma *coleção de elementos* de natureza qualquer, ordenados. Na verdade, trata-se apenas de elementos de um conjunto etiquetados com os números naturais. Etiquetar com os números naturais os elementos de um conjunto A, significa dar uma função

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\to A \\ n &\mapsto a(n). \end{aligned}$$

A definição formal de uma sequência em um conjunto A é apenas uma função a de $\mathbb{N}$ em A.

Como uma função é dada quando se conhece a imagem de todos os elementos do seu domínio, uma sequência a pode ser representada como

$$a(1), a(2), ..., a(n), ...;$$

ou ainda, denotando $a(n)$ por a_n, podemos representá-la por

$$(a_n) : a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Quando dissermos que um conjunto A possui uma adição ou uma multiplicação satisfazendo às leis básicas da aritmética, estaremos supondo que em A está definida uma operação com propriedades semelhantes à correspondente operação nos reais.

Exemplo: Seja (a_n) uma sequência de elementos de um conjunto munido de uma adição sujeita às leis básicas da aritmética. Para dar sentido às somas

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

basta definir recorrentemente S_n.

Pomos $S_1 = a_1$ e, supondo S_n definido, definimos

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

Somas como S_n serão também denotadas com a notação de somatórios

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

que se lê como *somatório quando i varia de* 1 *até n de* a_i.

Progressão Aritmética

Chamamos de P.A. (Progressão Aritmética) uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de *razão* da progressão e representada pela letra r.

Exemplo: As sequências $(15, 18, 21, \ldots)$ e $(17, 15, 13, 11, \ldots)$ são progressões aritméticas cujas razões valem respectivamente 3 e -2.

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$, para avançar um termo basta somar a razão; para avançar dois termos basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_5 = a_3 + 2r$, pois para passar de a_3 para a_5, avançamos 2 termos; $a_{20} = a_{13} + 7r$, pois para passar de a_{13} para a_{20}, avançamos 7 termos e, de modo geral, $a_n = a_1 + (n-1)r$, pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n-1$ termos.

Se pensarmos numa progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano. Em outras palavras, a_n é uma progressão aritmética se, e somente, se os pontos do plano que têm as coordenadas $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), etc \ldots$ estão em linha reta.

Outra forma de definir uma Progressão Aritmética é a seguinte. Primeiro definimos o operador Δ, chamado de operador diferença, por $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$. Assim, uma sequência (a_n) é um progressão aritmética se e somente se Δ_n é constante.

Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência a_n na qual as diferenças $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética onde a razão é diferente de zero.

De modo geral, uma progressão aritmética de ordem k, onde $(k > 2)$, é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $k - 1$.

2.2 Recorrência

Uma recorrência é uma fórmula que define um elemento de uma sequência a partir de termos anteriores. Uma recorrência do tipo

$$x_n = x_{n-1} + a_0$$

onde a_0 é um número conhecido qualquer, é chamada de recorrência de ordem 1 e só permite determinar o elemento x_n se conhecermos o elemento anterior x_{n-1}, que, para ser calculado, necessita do conhecimento do elemento anterior, e assim por diante. Fica, portanto, univocamente definida a sequência quando é dado x_1.

Uma recorrência do tipo

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

é chamada de recorrência de ordem 2 e só permite determinar o elemento x_n se conhecermos os elementos anteriores x_{n-1} e x_{n-2}, que, para serem calculados, necessitam do conhecimento dos dois elementos anteriores, e assim por diante. Fica, portanto, univocamente definida a sequência quando são dados x_1 e x_2. A sequência de Fibonacci corresponde à recorrência citada acima, onde $x_1 = x_2 = 1$.

Quando é dada uma recorrência, um problema importante é determinar uma fórmula fechada para o termo geral da sequência, isto é, uma fórmula que não recorre aos termos anteriores. Durante a resolução dos problemas que propomos neste trabalho, vamos encontrar fórmulas fechadas para o termo geral das sequências que aparecerem mas não vamos nos ater aos métodos usados para encontrar tais fórmulas, pois julgamos ser desnecessária tal abordagem tendo em vista ser de fácil compreensão o método usado. Vamos determinar fórmulas que não dependam de termos anteriores nas recorrências que intuitivamente vão aparecer como objetos úteis para generalizar as soluções.

2.3 Função Polinomial e Polinômio

Função Polinomial

Diz-se que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função polinomial* quando existem números reais $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0. \tag{2.1}$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n. A soma e o produto de funções polinomiais são ainda funções polinomiais.

Seja p a função polinomial apresentada em (2.1). Para quaisquer x, α reais, temos

$$p(x) - p(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + ... + a_2(x^2 - \alpha^2) + a_1(x - \alpha)$$

como cada parcela do segundo membro é divisível por $(x - \alpha)$, podemos escrever, para todo $x \in \mathbb{R}$, $p(x) - p(\alpha) = (x - \alpha)q(x)$, onde q é uma função polinomial. Se p tem grau n, q tem grau $n - 1$. Em particular, se α é uma raiz de p, isto é, $p(\alpha) = 0$, $p(x) = (x - \alpha)q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A recíproca é óbvia.

Portanto, α é uma raiz de p se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $x-\alpha$. Mais geralmente $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ são raízes de p se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_k)q(x)$$

onde q é uma função polinomial de grau $n - k$ se p tem grau n. Dai resulta que *uma função polinomial de grau n não pode ter mais do que n raízes.*

Uma função polinomial p chama-se *identicamente nula* quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, p tem uma infinidade de raízes. (Todo número real é raiz de p). Então nenhum número natural n é grau de p, a fim de não contradizer o resultado acima. Isto significa que na expressão

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

todos os coeficientes $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são iguais a zero. Concluímos então que a única função polinomial identicamente nula é do tipo

$$p(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + 0x^{n-2} + ... + 0x^2 + 0x + 0.$$

Se nos ativermos à letra da definição, a função polinomial identicamente nula não tem grau, pois nenhum dos coeficientes é diferente de *zero*.

Dadas as funções polinomiais p e q, completando com zeros (se necessário) os coeficientes que faltam, podemos escrevê-las sob as formas

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e

$$q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

sem que isto signifique que ambas têm grau n, pois não estamos dizendo que $a_n \neq 0$ nem que $b_n \neq 0$.

Suponhamos que $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, que p e q sejam funções iguais. Então a diferença $d = p - q$ é a função identicamente nula, pois $d(x) = p(x) - q(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$d(x) = (a_n - b_n)x^n + ... + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

Pelo que acabamos de ver sobre funções polinomiais identicamente nulas, segue-se que $a_n - b_n = 0, ..., a_1 - b_1 = 0, a_0 - b_0 = 0$, ou seja

$$a_n = b_n, ..., a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

Portanto as funções polinomiais p e q assumem o mesmo valor $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, tem os mesmos coeficientes.

Polinômio

Chamamos de *polinômio* a uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + ... + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais e X é um símbolo, chamado de indeterminada. Quando dizemos *expressão formal* queremos dizer que, essencialmente, vemos um polinômio como a lista ordenada $(a_0, a_1, ..., a_n)$ de seus coeficientes e que somamos e multiplicamos polinômios através das regras usuais de multiplicação de monômios e adição de monômios semelhantes. Em particular, dizemos que dois polinômios são iguais quando possuem exatamente os mesmos coeficientes. A todo polinômio

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + ... + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

corresponde uma função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Aqui o conceito de polinômio contempla apenas a lista de seus coeficientes e a forma pela qual os somamos e multiplicamos; quando nos referimos à função polinomial, passamos a estar interessados na correspondência entre números reais estabelecida pelo valor que a função assume em cada ponto. É claro que todo polinômio corresponde a uma única função polinomial; por outro lado, vimos que duas funções polinomias só são iguais quando os polinômios a elas associados também são iguais. Assim, à função polinomial também corresponde um único polinômio. Desse modo, existe uma correspondência biunívoca entre funções polinomiais e polinômios, o que nos permite, sem risco de confusão, nos referirmos indistintamente ao polinômio p ou à função polinomial p. É conveniente muita vezes nos referirmos a um *polinômio* $p(x)$, especialmente em situações em que outros polinômios apareçam descritos apenas por sua expressão.

CAPÍTULO 3

PROBLEMAS E SOLUÇÕES

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema.

(POLYA)

Neste capítulo vamos focar na resolução de dois problemas básicos: O *problema de Gauss*, aquele que resolveu ainda muito jovem e, um que eu chamei de *problema do tabuleiro de xadrez*. Vamos trazer à tona o que for necessário para enriquecer a nossa proposta de resolução.

Para isso, quando for possível, vamos abordar um mesmo problema de duas maneiras distintas, para que, desta forma, possamos mostrar que maneiras diferentes de se pensar o mesmo problema podem, além de deixar em evidência que nem sempre determinado caminho escolhido para uma solução é o melhor do ponto de vista da simplicidade, por exemplo, mas que quanto mais pensamos numa forma diferente para resolver novamente o mesmo problema, isto nos dá mais do que uma simples resposta ao que foi pedido inicialmente.

Depois vamos trazer problemas semelhantes aos que propusemos inicialmente; semelhantes tanto na forma de resolver quanto nas ferramentas utilizadas.

3.1 O problema de Gauss

Agrupamos nesta seção os problemas que têm a mesma estrutura, no que diz respeito à semelhança na resolução em relação à forma com que Gauss resolveu o problema que lhe foi proposto pelo seu professor. Desta forma esta seção está estruturada da seguinte maneira:

3.1.1 **Resolução tradicional:** apresentamos a resolução ao problema de Gauss da forma que é apresentada segundo a história;

3.1.2 **Resolução alternativa - visual:** apresentamos a resolução como Gauss a fez só que usado elementos visuais para auxiliar no entendimento e na percepção geral, levando em consideração agora as conexões e questionamentos que poderão ser feitos tendo em vista um novo olhar sobre o problema de Gauss e sua solução;

- **Nos itens seguintes apresentamos problemas que, em determinados momentos de sua resolução, aplicamos as idéias de Gauss para resolvê-los;**

3.1.3 **Problema dos apertos de mãos:**

3.1.4 **Problema das torres de cartas:**

3.1.5 **Números Figurados ou Poligonais:**

3.1.6 **Números Poligonais Centrais:**

3.1.1 Resolução tradicional

A seguir adaptamos a resolução de um problema usando os textos contidos em (GOMERO) e (LIMA, 2006, v.2).

Quando o grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$ tinha sete anos de idade, dez anos segundo (EVES, 2004), seu professor lhe pediu que calculasse a soma dos inteiros de 1 até 100. O professor ficou supreso quando, depois de poucos minutos, o pequeno Gauss anunciou que o valor da soma era 5050. A resposta estava correta e, curioso, o professor lhe perguntou como conseguira fazer o cálculo tão rapidamente. Gauss explicou-lhe que somara primeiramente $1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, ...$, Assim obtivera 50 somas iguais a 101 e a resposta era $50 \cdot 101 = 5050$.

Observações importantes

Quais são as vantagens do método que Gauss usou para calcular a soma pedida pelo professor, comparado com o método que todos nós, "simples mortais", teriamos seguido? Uma vantagem óbvia é a rapidez com que calculou a soma. Mas a principal vantagem é que este método nos permite entender muito bem a pergunta feita e a resposta à pergunta. De fato, observe o seguinte.

1. O método de Gauss nos permite ter *certeza* de que a resposta obtida é correta. Já da maneira óbvia de calcular a soma, sempre ficaremos na dúvida de haver cometido um deslize em alguma das 99 somas realizadas. E não escapamos desta dúvida realizando as contas com uma calculadora pois, como ter certeza que não digitamos algum algarismo errado?

2. O método de Gauss pode ser aplicado a qualquer outra situação similar, por exemplo, calcular a soma
$$1 + 2 + 3 + ... + 999 + 1000 \ .$$
Alguns minutos de reflexão e uma conta simples num pedacinho de papel, e chegamos à resposta correta 500500. Ou seja, o método de Gauss pode ser *generalizado*.

3. Esta generalização permite obter uma *fórmula* para resolver *o problema genérico* de achar a soma
$$1 + 2 + 3 + ... + n \ .$$
Um pouco de reflexão e nenhuma conta, e chegamos à resposta $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

4. Esta generalização permite também formular novas perguntas (interessantes) relacionadas ao problema original.

    (a) Que acontece se a soma não começa em 1?

(b) Que acontece se a soma não é de números consecutivos, mas eles aumentam de *dois em dois*, de *três em três*, ou de *quatro em quatro*?

Aqui identificamos o quão importantes podem ser os questionamentos levantados sobre os caminhos tomados para obtermos uma determinada solução. As novas questões que surgem naturalmente quando aguçamos a curiosidade. Como dissemos inicialmente, quando buscar olhar o problema de outra forma ou quando procuramos encontrar uma resposta que generalize situações que tem o mesmo padrão de resolução.

3.1.2 Resolução alternativa - visual

Pensando como Gauss, mas usando elementos visuais como uma escada, onde cada degrau é representado por uma retângulo cuja base mede *um* e cuja altura tem medida igual a um dos números da soma, obtemos a seguinte estrutura.

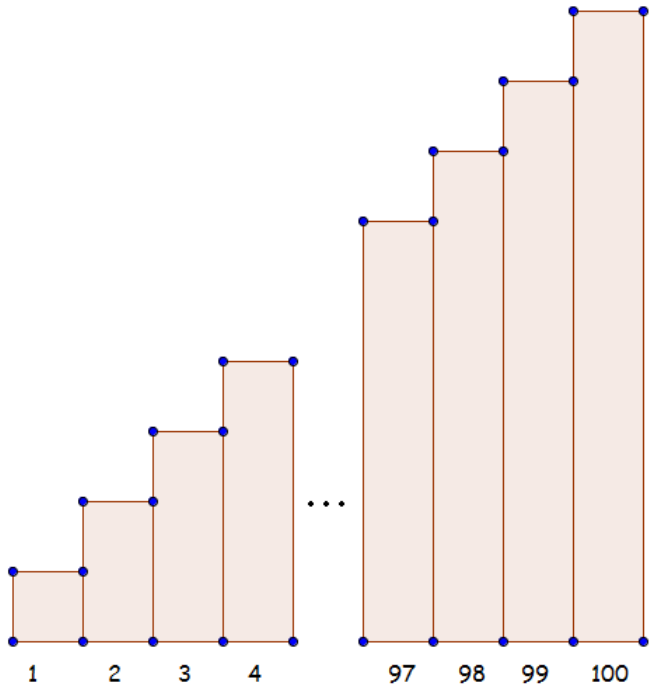


Figura 3.1: Escada original

Como a quantidade de degraus neste caso é par, podemos agrupá-los de dois em dois, colocando o primeiro degrau sobre o último, o segundo sobre o penúltimo, e assim por diante.

Teremos 50 retângulos cuja altura mede 101. Assim encontramos o mesmo valor que Gauss, $50 \cdot 101 = 5050$.

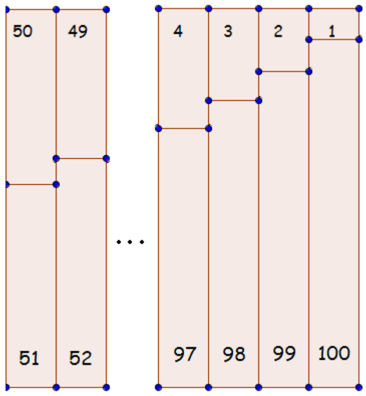


Figura 3.2: Empilhando degraus

Neste ponto podemos instigar o aluno a pensar em outras possibilidades de solução visual levando em consideração o fato de o número de degraus agora seja uma quantidade ímpar. Ele pode chegar à conclusão, por exemplo, que independente da quantidade de degraus, quando ele simplesmente dobra essa quantidade e coloca-os sobre os que já tem construído, ao final, basta dividir o resultado por 2

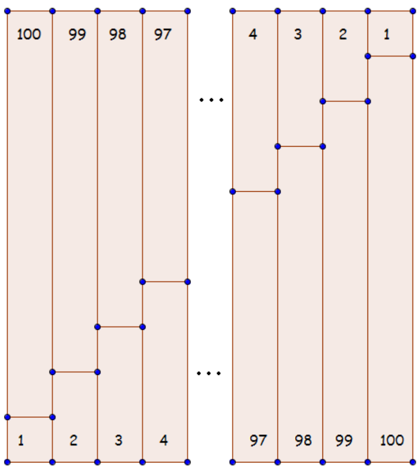


Figura 3.3: Empilhando o dobro de degraus

$$S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050.$$

Considerações sobre os próximos problemas

Nos dois próximos itens, **3.1.3** e **3.1.4**, as resoluções dos problemas são apresentadas de duas formas: uma analisando o problema em situações mais simples e usando a ideia empregada por Gauss para generalizar nossa solução, e outra usando recorrência aliada também ao processo que Gauss utilizou para obtermos a solução.

3.1.3 Problema dos apertos de mãos

Quantos apertos de mãos são dados por 20 pessoas se todos o fizerem apenas uma vez com cada uma das outras pessoas?

Resolução 1

A seguir analisamos a situação apresentada no problema tratando-o como pequenos problemas, acrescentando uma pessoa a mais em cada situação para que possamos perceber o que acontece em casos onde há uma quantidade maior de pessoas.

Número de pessoas	Apertos de mão						Total de apertos de mãos
2	P1 – P2						1
3	P1 – P2	P1 – P3 P2 – P3					1 + 2 = 3
4	P1 – P2	P1 – P3 P2 – P3	P1 – P4 P2 – P4 P3 – P4				1 + 2 + 3 = 6
5	P1 – P2	P1 – P3 P2 – P3	P1 – P4 P2 – P4 P3 – P4	P1 – P5 P2 – P5 P3 – P5 P4 – P5			1 + 2 + 3 + 4 = 10
6	P1 – P2	P1 – P3 P2 – P3	P1 – P4 P2 – P4 P3 – P4	P1 – P5 P2 – P5 P3 – P5 P4 – P5	P1 – P6 P2 – P6 P3 – P6 P4 – P6 P5 – P6		1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

Figura 3.4: Grupos de pessoas apertando as mãos

Observando o esquema representado na Figura 3.4 vemos que o total de apertos de mãos entre n pessoas é alcançado apenas fazendo uma soma de todos os inteiros consecutivos de 1 até $n-1$, como podemos perceber na Figura 3.5.

n	P1 – P2	P1 – P3 P2 – P3	P1 – P4 P2 – P4 P3 – P4	P1 – P5 P2 – P5 P3 – P5 P4 – P5	...	P1 – Pn P2 – Pn P3 – Pn .... P(n-1) – Pn	1 + 2 + 3 +...+ (n-1) = $\frac{(n\text{-}1).n}{2}$

Figura 3.5: n pessoas apertando as mãos

Assim, quando $n = 20$ o total de apertos de mãos é $a_{20} = \dfrac{20 \cdot (20-1)}{2} = 190.$

Resolução 2

Se observarmos que a cada nova pessoa que é incluída, o total de apertos de mãos é acrescido em uma unidade a menos que o novo total de pessoas.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\textit{pessoas} & 2p & 3p & 4p & 5p & 6p & 7p & 8p & \ldots \\
\textit{ordem} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\
\textit{apertos} & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & \ldots
\end{array}$$

Podemos reescrever a situação acima, assim

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1 & = & & & 1 & & & & \\
a_2 & = & a_1 & + & 2 & & & & \\
a_3 & = & a_2 & + & 3 & & & & \\
a_4 & = & a_3 & + & 4 & & & & \\
a_5 & = & a_4 & + & 5 & & & & \\
\vdots & = & \vdots & + & \vdots & & & & \\
a_{n-1} & = & a_{n-2} & + & (n-1) & & & & \\
\hline
a_{n-1} & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1).
\end{array}$$

Usando novamente um raciocínio semelhante ao que Gauss empregou, pois o problema poderia ser: *Quantos apertos de mãos são dados por 101 pessoas se todos o fizerem apenas uma vez com cada uma das outras pessoas?* Ao que Gauss teria respondido da mesma forma que o fez

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Assim, este problema resolveremos como ele

$$a_{20} = \frac{20 \cdot (20-1)}{2} = 190.$$

3.1.4 Problema das torres de cartas

Quantas cartas de baralho são necessárias para fazer uma torre de 10 andares no formato triangular tradicional?

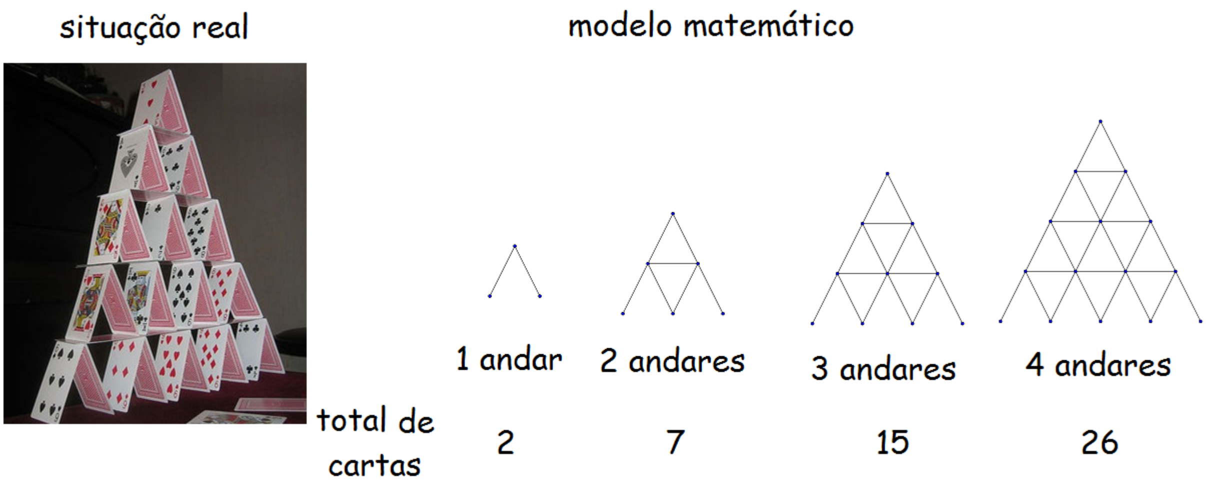


Figura 3.6: Castelo de cartas

Resolução 1

Sendo a_n o total de cartas na torre de n andares e observando a Figura 3.7, percebemos que cada termo é igual ao anterior somado com um termo de uma P.A. de razão 3, a saber $(2, 5, 8, 11, 14, \dots)$ cujo termo geral é $b_n = 3n - 1$. Logo o resultado que procuramos é obtido como resultado da soma termos desta P.A., assim

$$a_n \;=\; 2 \;+\; 5 \;+\; 8 \;+\; \dots \;+\; (3n-1).$$

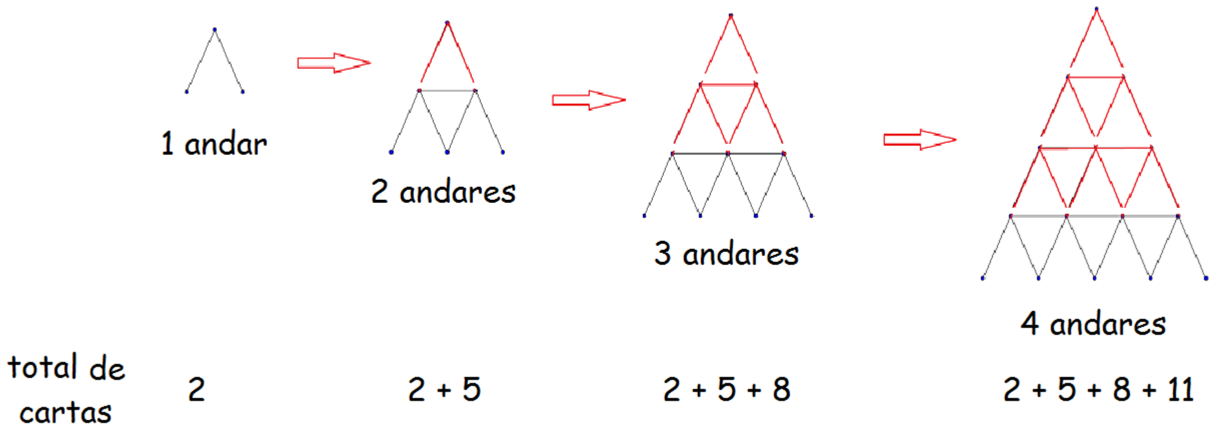


Figura 3.7: Castelo de cartas

Novamente resolveremos como Gauss

$$a_n = \frac{n \cdot (2 + 3n - 1)}{2} = \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

E como procuramos saber qual a quantidade de cartas numa torre de 10 andares, basta substituirmos o 10 na expressão que obtivemos, assim encontraremos

$$a_{10} = \frac{3 \cdot 10^2}{2} + \frac{10}{2} = \frac{3 \cdot 100}{2} + 5 = 155.$$

Resolução 2

Agora, vamos acrescentar cartas na parte inferior das torres como na Figura 3.8

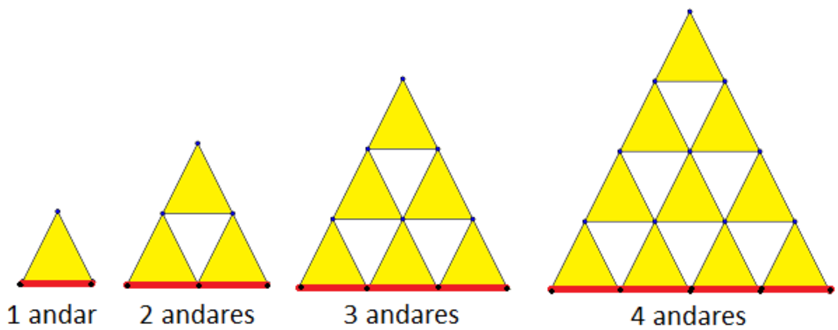


Figura 3.8: Castelo com cartas acrescentadas na parte inferior

e contar quantos triângulos amarelos aparecem nesta figura, depois vamos descontar as cartas que foram acrescentadas na parte inferior da pirâmide.

Desta forma, cada castelo da sequência tem a seguinte configuração. Primeiro observamos que a cada *n-ésimo* andar que acrescentamos a quantidade de triângulos aumenta n, e como cada triângulo é formado por 3 cartas chegamos à seguinte estrutura

$$\begin{array}{rcl}
a_1 & = & 3 & - & 1 \\
a_2 & = & 3\cdot(1+2) & - & 2 \\
a_3 & = & 3\cdot(1+2+3) & - & 3 \\
a_4 & = & 3\cdot(1+2+3+4) & - & 4 \\
\vdots & = & \vdots & - & \vdots \\
a_n & = & 3\cdot(1+2+3+\cdots+n) & - & n.
\end{array}$$

Assim obtemos o termo geral de nossa sequência de castelos de cartas

$$a_n = 3\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} - n = \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

3.1.5 Números Figurados ou Poligonais

As figuras apresentadas tanto neste item quanto no próximo foram adaptadas de (GABRIELLI, 2010). Lá encontramos uma abordagem semelhante à que fizemos aqui. O diferencial neste caso, é que conseguimos fazer aqui uma abordagem mais visual.

Os números figurados ou poligonais já eram conhecidos desde a Grécia antiga. Eles expressam a quantidade de pontos ou vértices em certas construções geométricas. Aqui eles vão servir para que possamos desenvolver, de uma forma mais visual, nossa percepção de sequências.

Mesmo sendo conhecidos desde a antiguidade, ainda hoje despertam a curiosidade quando são vistos pela primeira vez por mentes ávidas pelo conhecimento e pela magia que ele traz consigo. Vamos abordar os números poligonais triangulares, quadrangulares, pentagonais e hexagonais. Faremos uma generalização dos Poligonais Centrais semelhante ao que fizermos com os Números Figurados.

Números triangulares

Observando os números triangulares, como na Figura 3.9,

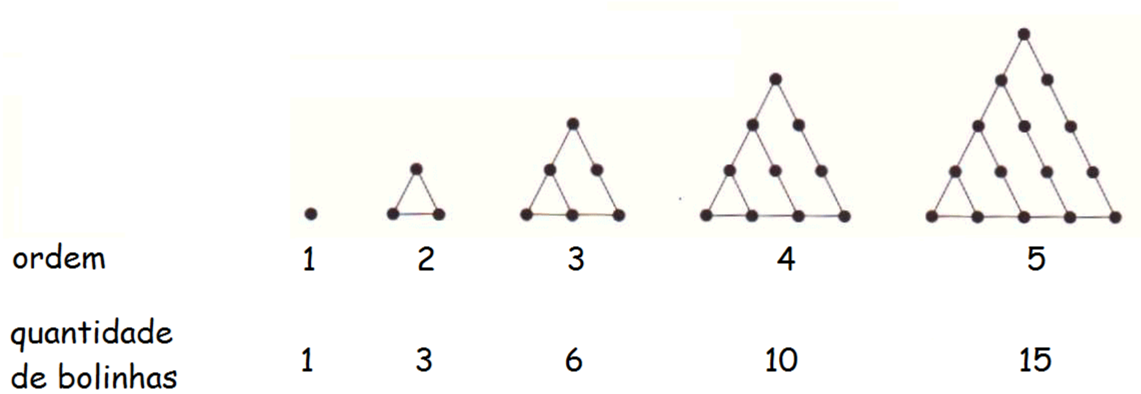


Figura 3.9: Triangulares

percebemos que cada termo de ordem n é a soma do termo anterior com n. Chamando então os números poligonais triangulares de ordem n de t_n, podemos escrevê-los assim: $t_n = t_{n-1} + n$. Escrevendo então alguns elementos desta sequência obtemos

$$\begin{array}{ccccccccccc}
t_1 & = & & & 1 & & & & & & \\
t_2 & = & t_1 & + & 2 & & & & & & \\
t_3 & = & t_2 & + & 3 & & & & & & \\
t_4 & = & t_3 & + & 4 & & & & & & \\
t_5 & = & t_4 & + & 5 & & & & & & \\
\vdots & = & \vdots & + & \vdots & & & & & & \\
t_n & = & t_{n-1} & + & n & & & & & & \\
\hline
t_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n.
\end{array}$$

Assim, como fez Gauss, obtemos o termo geral de nossa sequência de números triangulares:

$$t_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \tag{3.1}$$

Considerações sobre os próximos problemas

Nos próximos itens, as resoluções dos problemas são apresentadas de duas formas: uma usando recorrência aliada ao processo que Gauss utilizou para obtermos a solução e outra, usando o resultado obtido nos números triangulares para generalizar a solução.

Números quadrados - Resolução 1

Observando os números quadrados, como na Figura 3.10,

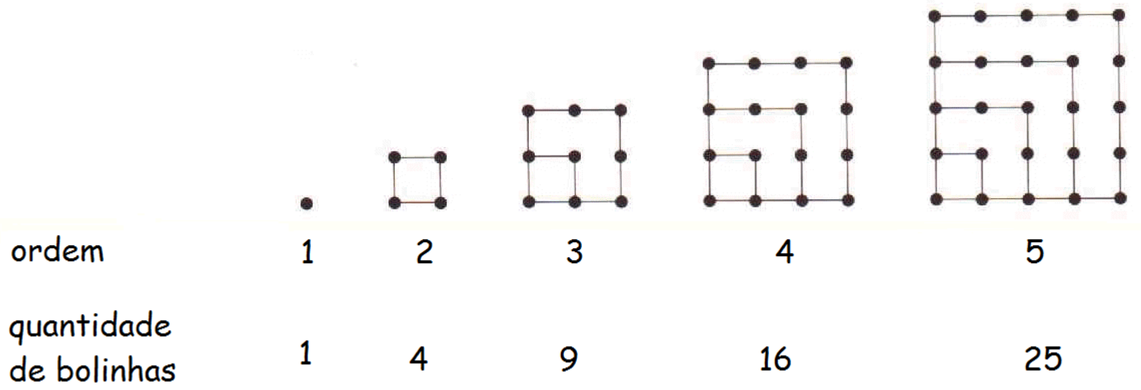


Figura 3.10: Números Quadrados

percebemos que cada termo de ordem n é a soma do termo anterior com um número ímpar de ordem n. Chamando então os números poligonais quadrados de ordem n de q_n, podemos escrevê-los assim: $q_n = q_{n-1} + (2n - 1)$, sendo $q_0 = 0$. Escrevendo então alguns elementos desta sequência obtemos

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
q_1 & = & & & 1 & & & & & & \\
q_2 & = & q_1 & + & 3 & & & & & & \\
q_3 & = & q_2 & + & 5 & & & & & & \\
q_4 & = & q_3 & + & 7 & & & & & & \\
\vdots & = & \vdots & + & \vdots & & & & & & \\
q_n & = & q_{n-1} & + & (2n-1) & & & & & & \\
\hline
q_n & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \ldots & + & (2n-1).
\end{array}
$$

Assim, como fez Gauss, obtemos o termo geral de nossa sequência de números quadrados

$$q_n = \frac{n \cdot (1 + (2n-1))}{2} = \frac{n \cdot (2n)}{2} = n^2.$$

Desta maneira, obtivemos uma forma de encontrar um quadrado de ordem n usando apenas números ímpares; basta efetuar a soma de todos os ímpares de 1 até o *e-nésimo* número ímpar

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1).$$

Números quadrados - Resolução 2

Observando os números quadrados como na Figura 3.11,

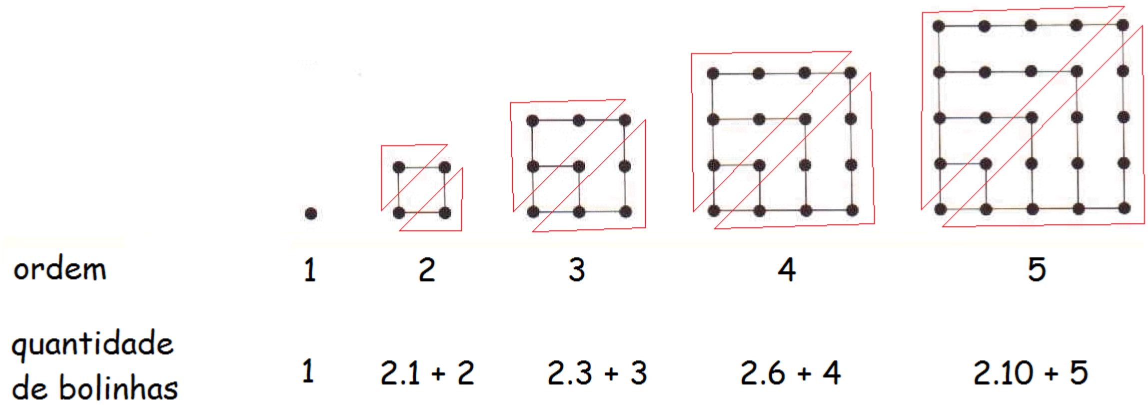


Figura 3.11: Usando triangulares para encontrar quadrados

percebemos que cada termo de ordem n é a soma do dobro do termo triangular anterior t_{n-1} com a ordem n. Então podemos escrevê-los assim

$$q_n = 2 \cdot t_{n-1} + n \tag{3.2}$$

substituindo (3.1) em (3.2)

$$q_n = 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n = n^2.$$

Números pentagonais - Resolução 1

Observando os números pentagonais como na Figura 3.12,

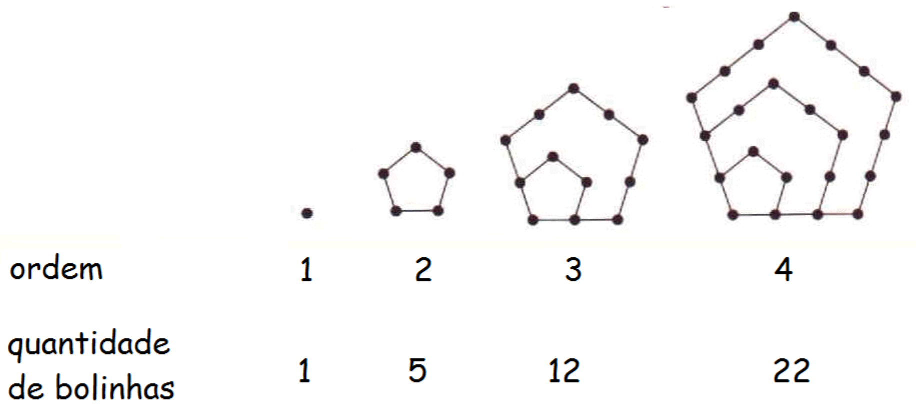


Figura 3.12: Números Pentagonais

percebemos que cada termo de ordem n é a soma do termo anterior com um dos números da P.A. $(1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 3n-2, \ldots)$ de ordem n. Chamando então os números poligonais pentagonais de ordem n de p_n, podemos escrevê-los assim: $p_n = p_{n-1} + (3n-2)$, sendo $p_0 = 0$. Escrevendo então alguns elementos desta sequência obtemos

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
p_1 & = & & & 1 & & & & & & \\
p_2 & = & p_1 & + & 4 & & & & & & \\
p_3 & = & p_2 & + & 7 & & & & & & \\
p_4 & = & p_3 & + & 10 & & & & & & \\
p_5 & = & p_4 & + & 13 & & & & & & \\
\vdots & = & \vdots & + & \vdots & & & & & & \\
p_n & = & p_{n-1} & + & (3n-2) & & & & & & \\
\hline
p_n & = & 1 & + & 4 & + & 7 & + & \ldots & + & (3n-2)
\end{array}
$$

Assim, como fez Gauss, obtemos o termo geral de nossa sequência de números quadrados

$$p_n = \frac{n \cdot (1 + (3n-2))}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

Números pentagonais - Resolução 1

Observando os números pentagonais como na Figura 3.13,

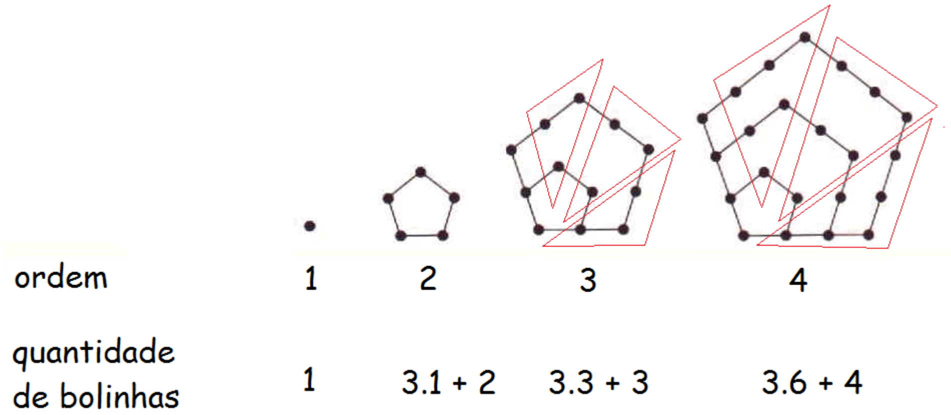


Figura 3.13: Usando triangulares para encontrar pentagonais

percebemos que cada termo de ordem n é a soma do triplo do termo triangular anterior t_{n-1} com a ordem n. Então podemos escrevê-los assim

$$p_n = 3 \cdot t_{n-1} + n. \tag{3.3}$$

substituindo (3.1) em (3.3)

$$p_n = 3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Números hexagonais - Resolução 1

Observando os números hexagonais como na Figura 3.14,

percebemos que cada termo de ordem n é a soma do termo anterior com um dos números da P.A. $(1, 5, 9, 13, 17, \ldots, 4n-3, \ldots)$ de ordem n. Chamando então os números poligonais pentagonais de ordem n de h_n, podemos escrevê-los assim: $h_n = h_{n-1} + (4n-3)$, sendo $h_0 = 0$. Escrevendo então alguns elementos desta sequência obtemos:

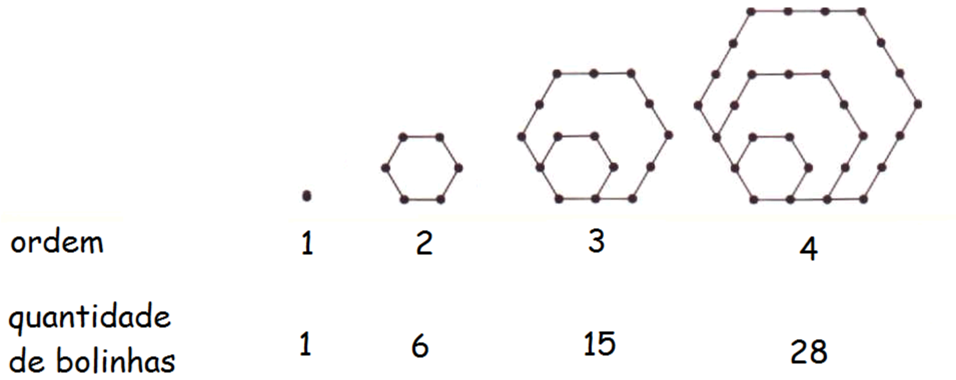


Figura 3.14: Números Pentagonais

$$\begin{array}{ccccccccccc}
h_1 & = & & & 1 & & & & & & \\
h_2 & = & h_1 & + & 5 & & & & & & \\
h_3 & = & h_2 & + & 9 & & & & & & \\
h_4 & = & h_3 & + & 13 & & & & & & \\
h_5 & = & h_4 & + & 17 & & & & & & \\
\vdots & = & \vdots & + & \vdots & & & & & & \\
h_n & = & h_{n-1} & + & (3n-2) & & & & & & \\
\hline
h_n & = & 1 & + & 5 & + & 9 & + & \ldots & + & (4n-3)
\end{array}$$

Assim, como fez Gauss, obtemos o termo geral de nossa sequência de números quadrados

$$h_n = \frac{n \cdot (1 + (4n-3))}{2} = 2n^2 - n.$$

Números hexagonais - Resolução 1

Observando os números hexagonais como na Figura 3.15,

percebemos que cada termo de ordem n é a soma do quadruplo do termo triangular anterior t_{n-1} com a ordem n. Então podemos escrevê-los assim

$$h_n = 4 \cdot t_{n-1} + n \tag{3.4}$$

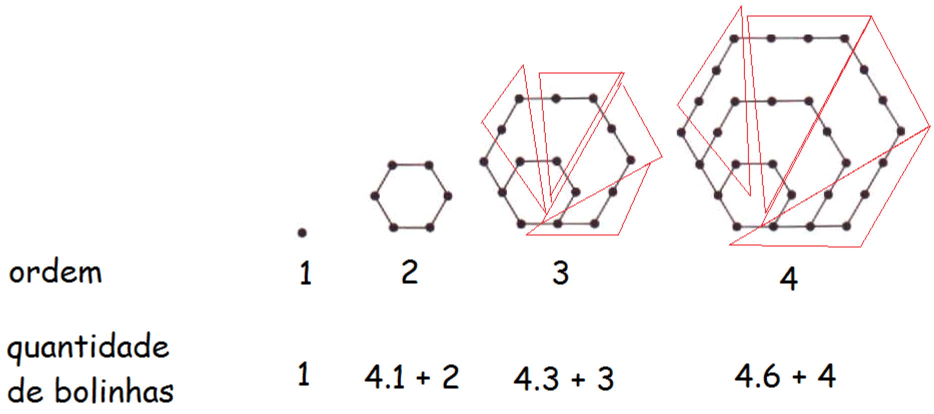


Figura 3.15: Números Hexagonais

substituindo (3.1) em (3.4)

$$h_n = 4 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n = 2n^2 - n.$$

Generalização

Observando a tabela da Figura 3.16 com os números poligonais agrupados, surge uma pergunta natural:

Será possível encontrar uma função polinomial que generalize todas estas que encontramos acima?

A pergunta é pertinente e tem fundamento, pois a forma com que encontramos as funções acima são bem semelhantes e isto nos dá a possibilidade de pensar nesta hipótese. Para tanto vamos analisar com mais atenção toda a tabela.

Chamando de m o tipo do número poligonal, nos triangulares, $m = 3$, nos quadrados, $m = 4$, nos pentagonais, $m = 5$, e assim por diante; observamos nas construções que fizemos acima que a quantidade de *números triangulares*, usados para compor o poligonal que estamos procurando, é sempre quantidade $m - 2$. Assim, para encontrar um número poligonal qualquer basta que multipliquemos $m - 2$ pelo termo triangular anterior t_{n-1} e somemos com a ordem n, como segue

$$P_{m,n} = (m-2) \cdot t_{n-1} + n$$

		n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8
Triangulares	m = 3	1	3	6	10	15	21	28	36
Quadrangulares	m = 4	1	4	9	16	25	36	49	64
Pentagonais	m = 5	1	5	12	22	35	51	70	92
Hexagonais	m = 6	1	6	15	28	45	66	91	120
Heptagonais	m = 7	1	7	18	34	55	81	112	148
Octogonais	m = 8	1	8	21	40	65	96	133	176
Eneagonais	m = 9	1	9	24	46	75	111	154	204
Decagonais	m = 10	1	10	27	52	85	126	175	232

Figura 3.16: Tabela com Poligonais

fazendo as devidas substituições, obtemos

$$P_{m,n} = (m-2) \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n = \frac{m-2}{2}n^2 - \frac{m-4}{2}n.$$

De acordo com esta notação que introduzimos para generalizar os números figurados, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} P_{3,n} &= t_n \\ P_{4,n} &= q_n \\ P_{5,n} &= p_n \\ P_{6,n} &= h_n. \end{aligned}$$

Ainda observamos que as diferenças entre os termos de cada uma das n ordens formam uma progressão aritmética, e mais, as razões e os primeiros termos, se olhados como sequência, são justamente os números triangulares, como podemos observar na Figura 3.17

a1 = 1	a1 = 3	a1 = 6	a1 = 10	a1 = 15	a1 = 21	a1 = 28	a1 = 36
r = 0	r = 1	r = 3	r = 6	r = 10	r = 15	r = 21	r = 28

Figura 3.17: Tabela com Poligonais

3.1.6 Números Poligonais Centrais

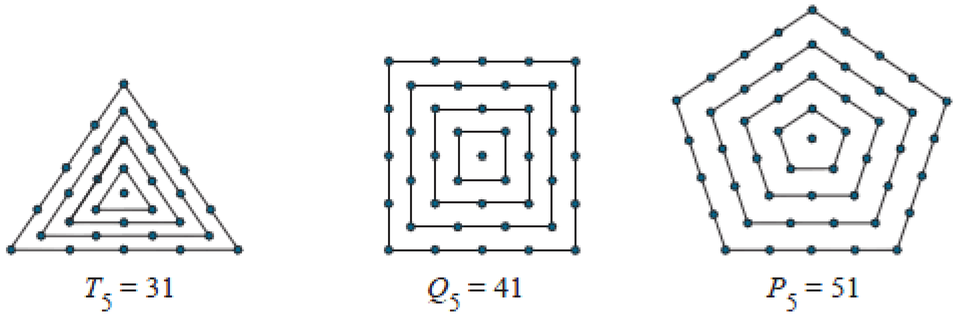


Figura 3.18: Poligonais Centrais

Na Figura 3.18 observamos a estrutura de formação de números poligonais triangulares centrais, quadrangulares centrais e pentagonais centrais. Tais estruturas nos dão ideia de que podemos generalizá-los da mesma forma como fizemos com os números figurados.

Generalização

Todo o procedimento que fizemos com os números poligonais, pode ser feito de forma análoga para os *centrais*. Desta forma, vamos apenas apresentar a função que resulta toda a análise e generaliza todos estes polinomias.

		n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8
Triangulares	m = 3	1	4	10	19	31	46	64	85
Quadrangulares	m = 4	1	5	13	25	41	61	85	113
Pentagonais	m = 5	1	6	16	31	51	76	106	141
Hexagonais	m = 6	1	7	19	37	61	91	127	169
Heptagonais	m = 7	1	8	22	43	71	106	148	197
Octogonais	m = 8	1	9	25	49	81	121	169	225
Eneagonais	m = 9	1	10	28	55	91	136	190	253
Decagonais	m = 10	1	11	31	61	101	151	211	281

Figura 3.19: Poligonais Centrais

Observando as regularidades entre os números em cada situação (linha) apresentada na tabela da Figura 3.19 obtemos a seguinte estrutura:

$$PC_{m,n} = 1 + m \cdot t_{n-1}$$

e, fazendo as devidas substituições, obtemos:

$$PC_{m,n} = 1 + m \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{m}{2}n^2 - \frac{m}{2}n + 1.$$

Como exemplo, podemos escrever a forma geral dos números poligonais hexagonais centrais assim

$$PC_{6,n} = 1 + 6 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 3n^2 - 3n + 1.$$

Usando letras maiúsculas para diferenciar os números figurados dos números poligonais centrais e usando também esta notação que introduzimos para generalizar os números poligonais centrais, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} P_{3,n} &= T_n \\ P_{4,n} &= Q_n \\ P_{5,n} &= P_n \\ P_{6,n} &= H_n. \end{aligned}$$

Agora, como no caso anterior, as diferenças entre os termos de cada uma das m linhas, formam uma progressão aritmética, como mostra a Figura 3.20.

a1 = 1	a1 = 3	a1 = 6	a1 = 10	a1 = 15	a1 = 21	a1 = 28	a1 = 36
r = 0	r = 1	r = 3	r = 6	r = 10	r = 15	r = 21	r = 28

Figura 3.20: Tabela com Poligonais

3.2 O problema do tabuleiro de xadrez

Considerações sobre os próximos problemas

Nos dois próximos itens, **3.2.1** e **3.2.2**, as resoluções dos problemas são apresentadas de duas formas: uma analisando o problema em situações mais simples e usando a ideia empregada por Gauss para encontrar nossa solução e outra, usando recorrência aliada também ao processo que Gauss utilizou para obtermos a solução.

No item **3.2.3** mostramos como nosso aluno pode usar dois processos de resolução distintos para encontrar outros resultados e até generalizar situações propostas. Neste caso, os resultados vão surgindo em cadeia, como que um dependendo do que foi obtido anteriormente. Cada questiomento proposto que é respondido pelo aluno, dá a ele a possibilidade de fazer novas descobertas.

No item **3.2.4** apresentamos um alcance ainda mais longo do que se pode obter com este tipo de abordagem através de problemas e direcionado por perguntas que, neste caso, levarão a fazer conexões e/ou ver aplicações em tópicos/conteúdo da Matemática.

Quantos quadrados há em um tabuleiro de xadrez cujas dimensões são 8x8?

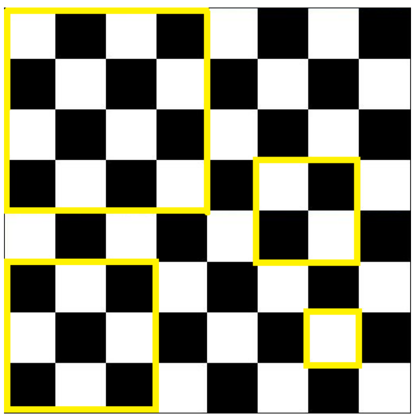


Figura 3.21: Tabuleiro de Xadrez

3.2.1 Resolução 1

Observando a Figura 3.21, observamos que o tabuleiro de xadrez possui quadradinhos de vários tamanhos, assim para contar todos eles vamos ter que analisar vários casos, cada um deles observando sempre quadradinhos de mesma área.

Enumerando cada um dos quadradinhos de um lado do tabuleiro assim

$$(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8)$$

teremos a seguinte configuração:

Primeiro vamos contar quantos quadradinhos de lado *"um"* cabem no tabuleiro, como em cada lado cabem 8 quadradinhos, no tabuleiro caberão $8 \cdot 8 = 64$ quadradinhos.

Observando que em cada lado do tabuleiro cabem 7 quadradinhos de lado 2 cujas medidas podem ser vistas como as somas abaixo

$$(l_1 + l_2), (l_2 + l_3), (l_3 + l_4), \ldots (l_7 + l_8)$$

obtemos seu total igual a $7 \cdot 7 = 49$.

Observando que em cada lado do tabuleiro cabem 6 quadradinhos de lado 3 cujas medidas podem ser vistas como as somas abaixo

$$(l_1 + l_2 + l_3), (l_2 + l_3 + l_4), \ldots (l_6 + l_7 + l_8)$$

obtemos seu total igual a $6 \cdot 6 = 36$.

Fazendo este mesmo procedimento seguidas vezes, vamos obter a seguinte soma, que nos dará a quantidade q de quadradinhos do tabuleiro todo

$$q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204.$$

3.2.2 Resolução 2

Chamando de x_n a quantidade de quadrados de um tabuleiro de lado nxn, vamos analisar o que acontece quando aumentamos uma unidade em cada lado e perceber alguma

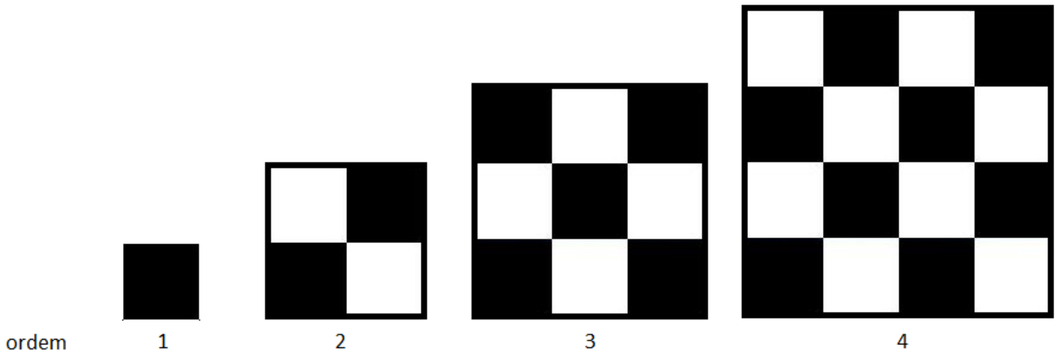


Figura 3.22: Quadradinhos de vários tamanhos

regularidade, caso exista. Vamos imaginar nosso problema analisando-o com o tabuleiro cujas dimensões sejam 1x1, 2x2, e assim por diante, como na Figura 3.22.

A pergunta a se fazer é a seguinte: *Quantos quadrados de ordem 1, ordem 2, ..., ordem n, cabem num quadrado de ordem n?*

$$x_1 = 1$$

Significa que em um quadrado de lado 1 cabe 1 quadrado de lado 1.

$$x_2 = 1 + (1 + 3)$$

Significa que em um quadrado de lado 2 cabem: 1 quadrado de lado 2 e $(1 + 3)$ quadrados de lado 1.

$$x_3 = 1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5)$$

Significa que em um quadrado de lado 3 cabem: 1 quadrado de lado 3, $(1 + 3)$ quadrados de lado 2 e $(1 + 3 + 5)$ quadrados de lado 1.

Continuando com este raciocínio, chegamos à seguinte conclusão

$$x_n = 1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \cdots + (1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

E a solução do nosso problema é obtida quando fazemos $n = 8$

$$x_8 = 1 + (1 + 3) + ... + (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15) = 204.$$

3.2.3 Quadrados, Cubos e Suas Somas

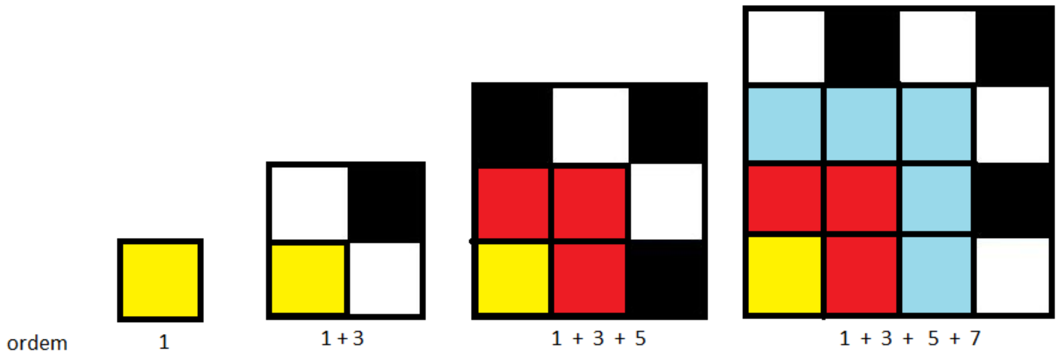


Figura 3.23: Quadradinhos de vários tamanhos

Observando a figura 3.23 vemos novamente que para encontrar o quadrado de um número n basta que somemos os ímpares de 1 até o *e-nésimo* ímpar $n^2 = 1+3+\cdots+(2n-1)$. Uma pergunta natural aqui seria: *Será possível encontrar o valor de n^3 usando sequências numéricas já conhecidas?*

Vamos nos embrenhar por este caminho e ver onde chegamos. Para tando, vamos escrever cada termo, a partir do segundo, como soma de parcelas obtidas da seguinte maneira: cada termo será escrito como o termo anterior somado com o a diferença entre eles

$$\begin{array}{lcl}
1^3 & = & 1 \\
2^3 & = & 1 + 7 \\
3^3 & = & 1 + 7 + 19 \\
4^3 & = & 1 + 7 + 19 + 37 \\
5^3 & = & 1 + 7 + 19 + 37 + 61.
\end{array}$$

Desta forma, notamos que cada número cúbico pode ser escrito como a soma de números poligonais hexagonais centrais. De uma forma geral, podemos escrever o *e-nésimo* número cúbico como sendo a soma dos n primeiros números poligonais hexagonais centrais

$$n^3 = 1 + 7 + \cdots + (3n^2 - 3n + 1).$$

De uma forma mais simples, escrevemos

$$n^3 = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 - 3i + 1).$$

Fazendo uma análise nesta estrutura, percebemos que podemos usá-la para determinar a soma dos n primeiros quadrados, da seguinte forma

$$n^3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

Isolando o termo $\sum_{i=1}^{n} i^2$ obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \tag{3.5}$$

Tendo em mente os resultados que obtivemos anteriormente, fazemos a seguinte análise:

1. A soma dos termos de uma P.A. de grau 1 deu um polinômio de grau 2 (exemplo: números triangulares);

2. A soma dos termos de uma P.A. de grau 2 teve como resultado um polinômio de grau 3 (exemplo: soma de quadrados em 3.5);

Estes resultados nos permitem chegar à seguinte conjectura:

Conjectura 3.2.1. *A soma dos termos de uma P.A., cujo termo geral é de grau n, tem como resultado um polinômio de grau (n+1).*

Uma pergunta pertinente agora seria: *Será possível encontrar o valor da soma dos n primeiros cubos usando sequências numéricas já conhecidas?*

Agora vamos apenas calcular as somas, manipulando de forma conveniente o que obtivermos, assim

$$\begin{array}{llllllll}
1^3 & = & 1 & = & 1^2 & = & 1^2 \\
1^3+2^3 & = & 1+8 & = & 3^2 & = & (1+2)^2 \\
1^3+2^3+3^3 & = & 1+8+27 & = & 6^2 & = & (1+2+3)^2 \\
1^3+2^3+3^3+4^3 & = & 1+8+27+64 & = & 10^2 & = & (1+2+3+4)^2.
\end{array}$$

Observando, em cada linha, o primeiro e o último membro, podemos generalizar este resultado (restando-nos apenas uma demonstração da veracidade de tal resultado, fato que julgamos ser desnecessário aqui por não ser o foco deste trabalho) da seguinte forma

$$1^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

Chamando de números consecutivos todos os números naturais de 1 a n, podemos então dizer que: *a soma dos cubos dos consecutivos é igual ao quadrado da soma dos consecutivos*

Usando a notação de somatório, também escrevemos

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4} \tag{3.6}$$

3.2.4 Somatórios e Sistemas lineares

Neste ponto fazemos uma parada para discutir as possibilidades que temos. Podemos usar aqui, a ideia de somatório associado à **Conjectura 3.2.1** para trabalhar uma aplicação ou uma abordagem envolvendo Sistema de Equações Lineares. A ideia é obter um polinômio semelhante ao que encontramos em (3.5) e (3.6).

Podemos começar tal abordagem de uma forma bem simples, como por exemplo $\sum_{i=1}^{n} i$

Baseados na **Conjectura 3.2.1** podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{n} i = An^2 + Bn + C.$$

Fazendo algumas contas, chegamos aos valores $A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{1}{2}$ e $C = 0$.

Poderemos instigar o aluno a buscar um polinômio para qualquer somatório de potências baseados nas ideias que usamos aqui. Por exemplo $\sum_{i=1}^{n} i^4$, ao que o aluno começaria pensando e escrevendo assim

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + F$$

teria um certo trabalho manual para obter tal polinômio, mas o mais importante já foi construído, todo o caminho que percorremos até chegar a este ponto, esta manipulação algébrica que vemos aqui é resultado de aplicações de ferramentas que construímos e isso o aluno tem que ter consciência, foi o trabalho de pensar lá no início que produziu este conhecimento que utilizamos aqui.

3.2.5 Números Piramidais

Outros problemas

Os problemas a seguir serão utilizados apenas para que possamos mostrar como fica simples resolver um problema quando aparecem elementos que já conhecemos da resolução de outros. É esta facilidade que queremos que nosso aluno perceba ao resolver muitos outros problemas envolvendo sequências numéricas.

Eles poderiam ser o ponto de partida para desenvolvermos um estudo semelhante ao que fizemos aqui. A ideia é que o professor tenha uma gama de problemas distintos que possam ser resolvidos usando o mesmo procedimento, as mesmas sequências.

Assim ele pode resolver um ou dois como base para que o aluno tenha uma noção do que pode usar e de, onde tais problemas poderão levá-lo. A seguir, o professor apresenta os outros problemas e deixa que o aluno experimente sozinho, que construa seus próprios caminhos.

Fazendo esta busca por problemas que tenham diferentes abordagens e agrupando aqueles que tenham o uso das mesmas ferramentas, sequências numéricas, o professor estará fazendo a construção do conhecimento por parte do aluno ser prazerosa, ter sentido, e ser menos enfadonha do que as abordagens tradicionais com definição/exemplo/atividade, e talvez nem seja.

Piramidais triangulares

Figura 3.24: Pirâmide de base triangular

Uma pirâmide de bolinhas de gude foi construída assim: a base tem formato de triângulo equilátero, como na Figura 3.24 preenchida totalmente com as bolinhas, na camada imediatamente superior as bolinhas são colocadas de forma que se apoiem em 3 bolinhas da camada inferior, e este procedimento foi repetido até que fosse colocada a última bolinha da última camada. Chamando de Pirâmide de ordem n uma pirâmide cuja base tem n bolinhas em cada lado do triângulo, pergunta-se:

Quantas bolinhas tem a pirâmide triangular de ordem 10?

Semelhante ao que foi feito em (CALIXTO, 2010) para calcular a quantidade de blocos que foram empilhados formando uma espécie de pirâmide triangular, vamos proceder aqui para resolver nosso problema, ou pelo menos aproveitar aquelas ideias para iniciarmos nossa análise à cerca dos procedimentos que adotaremos para resolver este.

Observando que cada camada da pirâmide é um número triangular poligonal, podemos concluir que o total de bolinhas de uma pirâmide de ordem n pode ser obtida quando somamos todos n primeiros números triangulares poligonais. Chamando de Pt_n o total de bolinhas de uma Pirâmide triangular de ordem n, obtemos:

$$Pt_n = 1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Pt_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$Pt_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n)$$

$$Pt_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$$

Respondendo ao que foi proposto pelo problema, obtemos que $Pt_{10} = 220$ bolinhas.

Piramidais quadrangulares

Pensando de forma semelhante ao que fizemos no caso anterior, e usando a Figura 3.25 como referência, podemos resolver o seguinte problema.

Quantas bolinhas tem a pirâmide quadrada de ordem 10?

Figura 3.25: Pirâmide de base quadrada

Chamando de Pq_n o total de bolinhas de uma Pirâmide quadrada de ordem n, obtemos:

$$Pq_n = 1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2$$

$$Pq_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Respondendo ao que foi proposto pelo problema, obtemos que $Pq_{10} = 385$ bolinhas.

CAPÍTULO 4

PROJETOS FUTUROS

Unir-se é um bom começo, manter a união é um progesso e trabalhar em conjunto é a vitória.

(Henry Ford)

4.1 Catalogando Problemas

Pretendemos continuar na busca por problemas do tipo que apresentamos neste trabalho, problemas simples do ponto de vista da compreensão do que se deseja obter e que envolvam, em sua resolução, algum processo de contagem ou generalização de sequências numéricas.

Acreditamos que este trabalho possa ter outras vertentes. Podemos garimpar problemas que tragam à tona outros conteúdos como Geometria Espacial, da forma como fizemos no Problema 3 do Apêndice B. Podemos também explorar mais os problemas que evidenciam as progressões aritméticas de segunda ordem como os números figurados. Podemos ainda, trabalhar com problemas para aperfeiçoar o uso de sistemas de equações e somatórios, pois neste trabalho apenas mencionamos o seu aparecimento sem nos ater muito a um desenvolvimento como tais tópicos merecem.

O uso de sequências numéricas como ferramenta foi uma escolha particular e que pode continuar sendo usada onde for possível mas isso não nos exime de buscar outras ferramentas de igual modo, simples e de fácil manuseio por parte do professor, e que continuem sendo de fácil compreensão por parte do aluno, para que a compreensão do conteúdo desejado não fique prejudicada ou se torne mais difícil pelo fato do aluno não saber utilizar tal ferramenta.

Estas pesquisas deverão ser colocadas em prática, agora já no início deste semestre letivo de 2013, através dos novos Trabalhos de Conclusão de Curso da segunda turma do PROFMAT. Esperamos chamar a atenção destes colegas para este campo que se apresenta como vasto e rico no que diz respeito às possibilidades de desenvolvimento e à aplicação em sala de aula.

4.2 Banco de Dados: problemas e conteúdos

A médio prazo, estando sendo realizada esta primeira etapa com os mestrandos da segunda turma, pretendemos dar início ao que chamamos de Banco de Dados, que nada mais é do que o agrupamento de todos os problemas que formos encontrando e/ou criando.

Os problemas serão classificados de acordo com:

- o tipo de ferramenta que é utilizada para resolvê-los;
- o tipo de conteúdo que apresenta e/ou introduz;
- pré-requisitos para que possam ser resolvidos.

A ideia é que consigamos alcançar o máximo de conteúdos do ensino médio. Não descartamos a possibilidade de que tenhamos trabalhos também direcionados ao ensino fundamental. Talvez estes sejam ainda mais desafiadores do que os que apresentamos aqui visto que o contato que nós professores, Licenciados e/ou Bacharéis em Matemática, temos com o ensino nas séries iniciais é quase nulo.

E está aí uma das grandes dificuldades que enfrentamos no ensino de matemática, fazer com que conhecimento que é adquirido nos Cursos de Mestrado e/ou Doutorado cheguem aos professores que trabalham com as séries iniciais de ensino. Visto que os professores responsáveis por esta etapa da aprendizagem de nossos alunos são, em grande parte, formados em Cursos de Pedagogia e acabam por não ter uma boa base no que diz respeito ao conteúdo que devem ensinar.

Como diz o professor Elon, *como podemos ensinar o que não sabemos?*. Temos que saber o conteúdo se quisermos ensinar alguma coisa. Uma das formas de fazer este conhecimento sair das salas de Mestrado, como no nosso caso, e chegar a este público é através de Cursos de Formação Continuada. Sabemos da quantidade de cursos deste tipo que cada vez mais estão sendo oferecidos aos nossos colegas. Isso só mostra que a necessidade de que eles continuem sendo oferecidos e que tenham ainda mais qualidade, é real.

Nós somos os responsáveis em levar este novo conhecimento, estas novas abordagens, estas novas ideias.

4.3 Linha de Pesquisa e Produção de Artigos

Numa visão um pouco mais ampliada, vislumbrando, lá na frente, a possibilidade de termos aqui em nossa universidade um curso de Doutorado, pensamos em continuar alimentando esta linha de pesquisa da forma que já abordamos no item anterior e que os frutos dos trabalhos que surgirem e da pesquisa em que estivermos inseridos, possam ser objeto para a publicação de artigos.

Desta forma, tendo uma linha de pesquisa sólida, com produção de artigos de relevância no tema, poderemos num futuro não tão distante ter uma linha de pesquisa para o Doutorado aqui na UESC.

Vontade não nos falta, campo para trabalhar não falta, ferramentas não faltam, falta mão de obra. Esperamos que ela chegue logo com os alunos das turmas do PROFMAT 2012 e 2013.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De que me irei ocupar no céu, durante a Eternidade se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?

(Augustin Louis Cauchy)

Usar Sequências Numéricas como ferramenta nas resoluções facilitou nosso estudo pois a forma com que cada um de nós observa uma sequência, seus termos e sua construção, faz com que seja mais simples visualizar caminhos distintos para a solução do problema original. Um dos objetivos foi alcançado aqui, pois desejávamos mostrar que a resolução de um problema pode nos mostrar mais do que a simples resposta que foi pedida. Também desejávamos mostrar, de uma forma natural, como consequência do desenvolver de nossas ideias, a manipulação algébrica e o trabalho com os polinômios. E isso foi alcançado, conseguimos mostrar os polinômios e as operações algébricas como *fruto* das generalizações que fizemos, como consequência de uma curiosidade natural, provocada pelos problemas e pelas possibilidades que estes nos davam em formalizar tais questões.

Para evidenciar tais resultados, podemos citar:

- o problema dos apertos de mãos, que comumente aparece em tópicos de contagem como aplicação de Combinação Simples, foi usado por nós como instrumento para aplicação das ideias de Gauss. Mesmo sendo baseado em um número de limitado de pessoas, pudemos encontrar uma forma geral para a solução este problema, e que agora fica mais simples até para que se justifique o uso direto como combinação simples. E a estrutura algébrica que obtivemos, uma função polinomial de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ nos fornece a quantidade de apertos de mãos entre um grupo com n pessoas

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1)}{2},$$

baseado apenas no valor de n;

- o problema com os números figurados, que, também usando a nossa ideia de *atacar* os problemas por mais de uma maneira para obter uma forma geral, em uma destas maneiras utilizamos os *triangulares*

$$t_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

para encontrar os *hexagonais*

$$hc_n = 3n^2 - 3n + 1,$$

mostrando que saber resolver um problema pode nos dar base para resolver outros semelhantes, seja pela forma de resolvê-lo ou mesmo pelos resultados que poderemos assumir como verdadeiros pois já os temos de nossa experiência com a resolução de outros problemas;

- as generalizações que pudemos inferir a partir dos resultados que obtivemos, como por exemplo, a soma de quadrados

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

que encontramos a partir das ideias que utilizamos para escrever o termo geral do cubo de um número qualquer,

$$n^3 = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 - 3i + 1),$$

e que nos levou à generalização da soma de cubos,

$$1^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Outros resultados que devem ser levados em consideração são os que obtivemos utilizando os Números de Fibonacci e o Triângulo de Pascal. Mesmo não sendo estes, o foco do nosso trabalho pois a estrutura na utilização das sequências como ferramenta diferiram do que julgamos como nosso resultado principal (que foi colocado no capítulo 3), sua abordagem e a sua pesquisa de uma forma mais direta e mais aprofundada pode render outras pesquisas e outros trabalhos.

Claro que também tivemos dificuldades durante o processo que foi o desenvolvimento deste trabalho. Dificuldades pessoais, a inexperiência na escrita, já que durante a graduação não tive a oportunidade de escrever nenhum trabalho ou produção que tivesse um cunho tão pessoal como tem que ser este, e que exigissem o rigor acadêmico que nos é imposto pelas *regras* regimentais ou pelas normas da ABNT. Outra dificuldade que encontrei, foi a falta de tempo para desenvolver o trabalho sem atropelos, devido ao mau aproveitamento do tempo que tive, mas este fato considero normal por ser uma característica pessoal, de trabalhar bem quando encontro-me sob pressão para estudar e/ou produzir. Quanto às dificuldades na parte de conteúdo do trabalho, podemos dizer que o que mais nos "tirou o sono"foi a falta de material, problemas e livros, em língua portuguesa, para que pudéssemos enriquecer mais o nosso trabalho na variedade de problemas. Destacamos aqui ser imprescindível o domínio da língua inglesa, ou no mínimo, a leitura, para que se possa pesquisar nos livros escritos em inglês, produzidos nesta linha de estudo.

Como consequência da abordagem que fizemos e do trabalho que ora se apresenta como produto deste estudo, enumeramos a seguir, pensando no que poderia ter facilitado o nosso trabalho se o tivéssemos feito, o que é importante que se tenha em mente para quem deseja continuar este trabalho e/ou fazer um trabalho semelhante: *saber (ler pelo menos) inglês; ter experiência na escrita de trabalhos acadêmicos como artigos ou monografia; disciplina para aproveitar o tempo destinado à pesquisa; ter um relacionamento quase que de "irmão mais velho"com o orientador, ele tem que saber ouvir suas ideias mas você vai ter que acatar seus conselhos pois, neste caso, na maior parte das vezes, ele vai ter razão no que diz. Por fim, não ter medo de perguntar e/ou sugerir mudanças caso não esteja satisfeito com o andamento dos trabalhos - a pesquisa é sua e tem que ter a "sua cara".*

Certos de estarmos iniciando um projeto que a médio e longo prazo pode render uma linha de pesquisa num Curso de Doutorado em Matemática aqui na UESC, encerramos aqui este trabalho, ansiosos por ver os desdobramentos que nossa pesquisa poderá ter nas mãos de nossos colegas de PROFMAT, e também com outros que poderão se interessar por trabalhar conosco na Resolução de Problemas.

REFERÊNCIAS

[1] BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. [A history of mathematics]. Elza F. Gomide (Trad.). 2ª edição. São Paulo: Edgard Blucher, 1999. 496 p.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2002.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais. Brasília: MEC, 1998.

[5] CALIXTO, Garcia. PAINEIS II: Empilhando Blocos. *RPM*, Rio de Janeiro, SBM, nº 69. 2º trimestre, 2010.

[6] DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de matemática*. 2ª edição. São Paulo: Ática, 1991.

[7] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática* / Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. 844 p.

[8] GABRIELLI, André Marchesini. Atividades com Números Poligonais e Sequências. *RPM*, Rio de Janeiro, SBM, nº 68. 1º trimestre, 2010.

[9] GOMERO, Germán Ignácio Ferrer. *Técnicas de Resolução de Problemas*, Notas de Aula–UESC/ILHÉUS(2012).

[10] LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo César Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. *A matemática no ensino médio.* volume 1. 9ª edição. Rio de Janeiro: SBM 2006. 237 p. (Coleção do Professor de Matemática; 13)

[11] LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo César Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. *A matemática no ensino médio.* volume 2. 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM 2006. 308 p. (Coleção do Professor de Matemática; 14)

[12] LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo César Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. *A matemática no ensino médio.* volume 3. 5ª edição. Rio de Janeiro: SBM 2006. 249 p. (Coleção do Professor de Matemática; 15)

[13] NELSEN, Roger B. *Proofs without words:* exercises in visual thinking (classroom resource materials). volume 1. Washington/DC: Editora MMA, 1993. 152 p.

[14] POLYA, George G., *A arte de resolver problemas:* um novo aspecto do método matemático; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciencia, 1995.

LISTA DE FIGURAS

APÊNDICE A

Vamos abordar problemas, que envolvem sequências numéricas distintas das que já falamos. O importante aqui não é a descoberta do novo mas sim a descoberta particular. Cada um tem direito de fazer suas próprias descobertas, de encontrar suas próprias fórmulas, de encontrar seus próprios caminhos. Pensando desta forma fizemos uma rápida esplanação para instigar a curiosidade e aguçar a busca por novas descobertas, sejam elas nestes itens ou mesmo em outros que possam surgir durante essa busca.

Vamos falar um pouco da Sequência de Fibonacci e do Triângulo de Pascal, da forma que fizemos anteriormente: envoltos em uma problema prático ou mesmo clássico, mostrando a relação que existe entre eles.

O Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal como objeto, é constituído por linhas e colunas; começando com o número 1 na primeira coluna em todas as linhas, cada novo elemento (número) é obtido como a soma do número imediatamente da linha superior na mesma coluna com o antecessor deste número nesta mesma linha superior.

A seguir vamos ver como estes números podem ser observados em três situações problema distintas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1															
1	1	1														
2	1	2	1													
3	1	3	3	1												
4	1	4	6	4	1											
5	1	5	10	10	5	1										
6	1	6	15	20	15	6	1									
7	1	7	21	35	35	21	7	1								
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1							
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

Figura 1: Triângulo de Pascal

O Problema dos caminhos para a casa da namorada

A figura 2 mostra parte do mapa de uma cidade. João mora na esquina da Rua 1 com o Caminho 1 e sua namorada Ana mora na esquina da Rua 6 com o Caminho 5. João decide visitar Ana seguindo cada dia um caminho diferente, mas usando apenas os caminhos mais curtos possíveis. Quantos visitas vai realizar João antes que tenha que repetir os caminhos? Adaptado de (GOMERO, 2012)

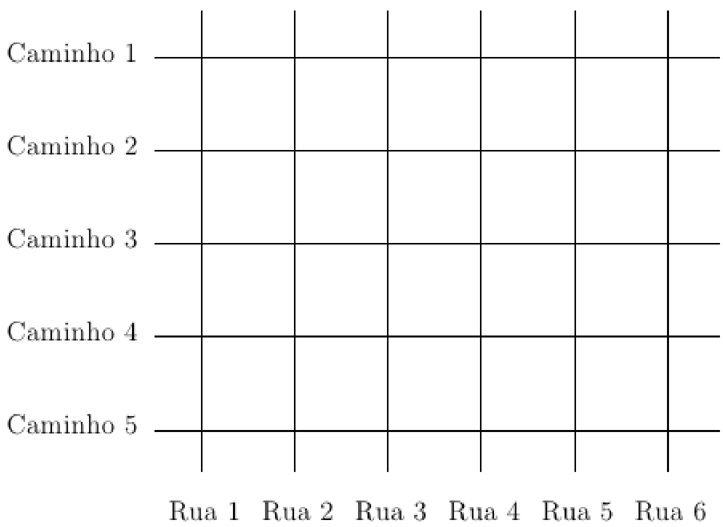


Figura 2: Visitando a namorada

Na figura 3, cada ponto tem um número associado a ele, estes números representam a quantidade de maneira que temos para *chegar* naquele ponto quando saimos do ponto C, que representa a casa do rapaz, em direção ao ponto N, que representa a casa de sua namorada. Desta forma, a quantidade de possibilidade para se chegar a determinado ponto é obtida atraves da soma da quantidade de caminhos possíveis para se chegar nos pontos anteriores a ele (um acima e/ou um à esquerda).

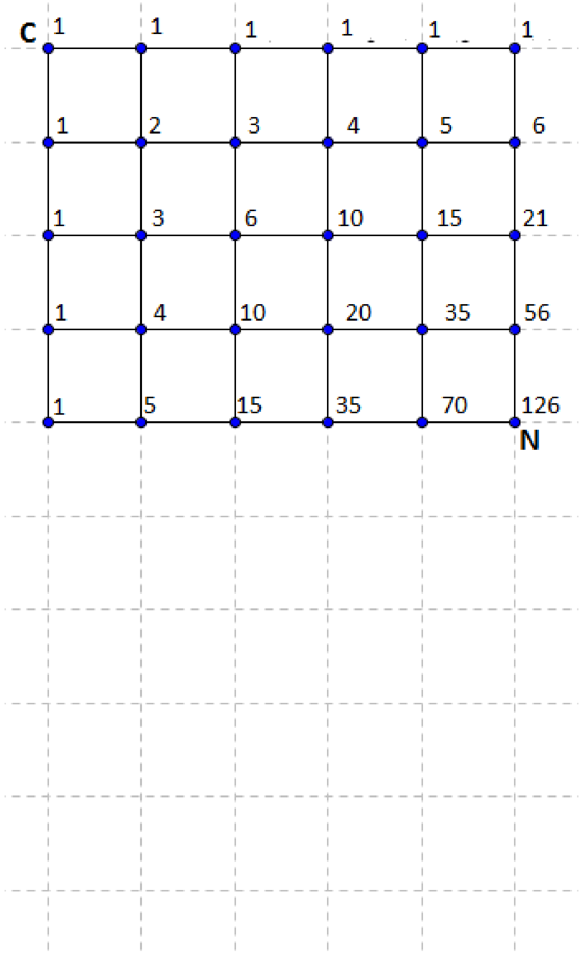


Figura 3: Ponto de vista tradicional

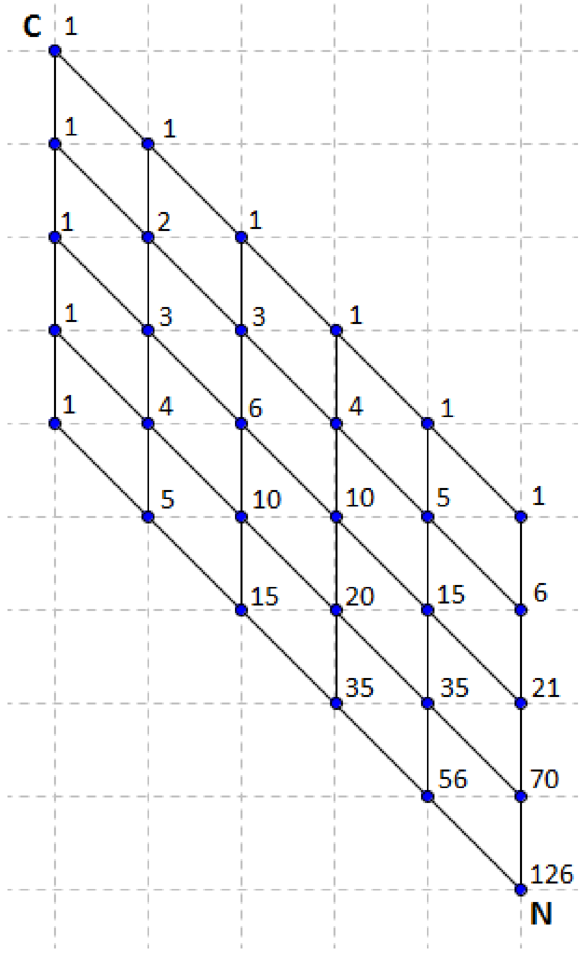


Figura 4: Ponto de vista conveniente

Manipulando a direção das ruas de forma a manter a mesma regularidade com a situação anterior, como nas figuras 3, 4 e 5, percebemos que a solução do nosso problema é um número do Triângulo de Pascal.

Mais precisamente: se observamos m ruas horizontais e n ruas verticais, basta observar o número no Triângulo de Pascal na linha $m+n-1$ e a coluna n.

Como no Triângulo de Pascal as linhas e as colunas começam a ser contadas de 0 podemos encontrar nossa resposta observando a linha cujo valor é $m+n-2$ e a coluna cujo valor é $n-1$

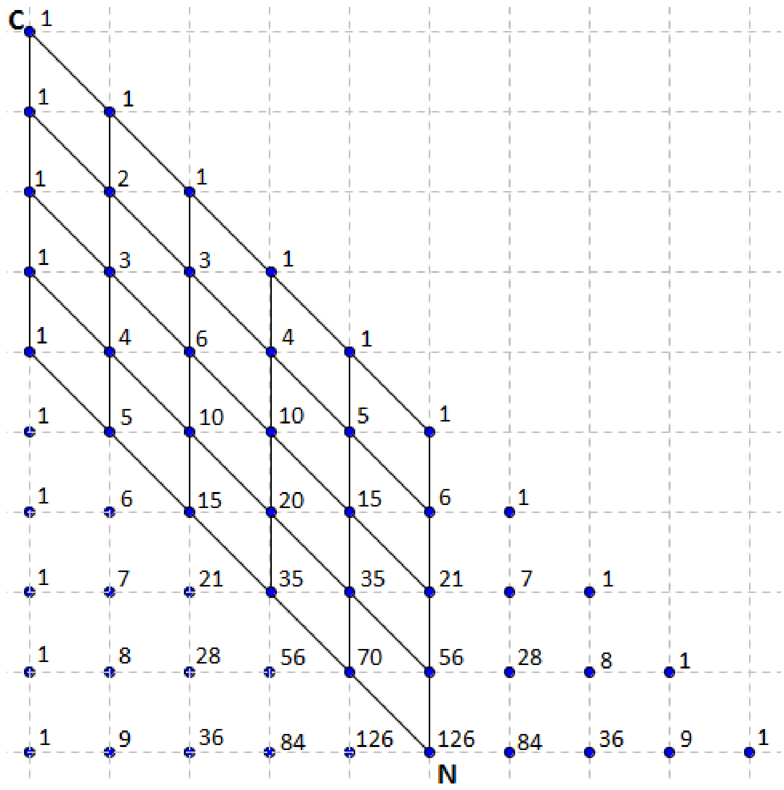


Figura 5: Obtendo o Triangulo de Pascal

O Problema do lançamento de moedas

Ao lançar ao ar uma moeda honesta quatro vezes, qual a probabilidade de saírem duas caras?

Zero caras	Uma cara	Duas caras	Três caras	Quatro caras
KKKK	CKKK KCKK KKCK KKKC	KKCC KCKC KCCK CKKC CKCK CCKK	KCCC CKCC CCKC CCCK	CCCC
1	**4**	**6**	**4**	**1**

Figura 6: Analisando o lançamento das 4 moedas

A figura 6 representa um sistematização de uma resolução, contemplando o caso de não saírem caras, sair apenas uma cara, duas caras, três caras ou saírem quatro caras.

Em termos de resolução da situação proposta, dos 16 casos possíveis, apenas 6 são favoráveis a saírem duas caras, pelo que a probabilidade de isso ocorrer é de apenas $0,375$.

Percebemos que os dezesseis casos possíveis coincidem com os valores existentes na quinta linha do triângulo de Pascal.

Face a esta observação será interessante testar a seguinte conjectura: *os valores da linha seguinte do triângulo de Pascal representam os casos possíveis de saírem zero caras, uma cara, duas caras, três caras, quatro caras ou cinco caras, ao lançar-se uma moeda honesta ao ar cinco vezes.* As figuras 1 e 7 nos mostram que isso é verdade.

Zero caras	Uma cara	Duas caras	Três caras	Quatro caras	Cinco caras
KKKKK	CKKKK KCKKK KKCKK KKKCK KKKKC	CCKKK CKCKK CKKCK CKKKC KCCKK KCKCK KCKKC KKCCK KKCKC KKKCC	CCCKK CCKCK CCKKC CKCCK CKCKC CKKCC KCCCK KCCKC KCKCC KKCCC	CCCCK CCCKC CCKCC CKCCC KCCCC	CCCCC
1	5	10	10	5	1

Figura 7: Analisando o lançamento das 5 moedas

Podemos dizer então que, de forma geral, os números do Triângulo de Pascal também expressam o seguinte: *A e- nésima linha sempre vai nos mostrar a quantidade de casos que podemos observar quando jogamos uma moeda honesta n vezes, sendo que a e-mésima coluna vai nos mostrar, por exemplo, a quantidade de casos que podemos observar o evento: sair m caras*

O Problema dos subconjuntos de um conjunto

Quantos são os subconjuntos de um conjunto com 5 elementos?

Resolução 1

Vamos usar um raciocínio semelhante ao que foi usado para resolver o problema das moedas.

Separando os conjuntos de acordo com a quantidade de elementos que possuem (sendo no máximo n), percebemos que estes valores são exatamente os numeros que aparecem em uma das linhas do Triângulo de Pascal, pra ser mais exato, a quantidade de grupos separados de acordo com a quantidade de elementos em cada conjunto é exatamente a *e-nésima* linha do Triângulo de Pascal.

Assim, basta-nos efetuar efetuar a soma dos números que aparecem na linha determinada para encontrarmos a resposta para nosso problema.

Número de elementos	Conjuntos	Quantidade de subconjuntos
0	{ }	1
1	{ } - {1}	1+1 = 2
2	{ } - {1} {2} - {1,2}	1+2+1 = 4
3	{ } - {1}{2}{3 } - {1, 2}{1, 3}{2,3} - {1, 2, 3}	1+3+3+1 = 8

Figura 8: Analisando a formação dos conjuntos

Como $n = 5$, o resultado será obtido pela seguinte soma $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$.

Resolução 2

Número de elementos	Conjuntos	Quantidade de subconjuntos
0	{ }	1
1	{ } {1}	2
2	{ }, {1} {2}, {1,2}	4
3	{ }, {1}, {2}, {1, 2} {3 }, { 1, 3 }, {2, 3}, {1, 2, 3}	8

Figura 9: Analisando a formação dos conjuntos

Observando agora que, a cada elementos que acrescentamos no conjunto a quantidade de subsconjuntos obtida no caso anterior dobra. Podemos usar recorrência para encontrar o termo geral que este problema gera e consequentemente o caso particular que ora buscamos.

$$
\begin{array}{rcr}
a_0 & = & 1 \\
a_1 & = & 2a_0 \\
a_2 & = & 2a_1 \\
a_3 & = & 2a_2 \\
\vdots & = & \vdots \\
a_n & = & 2a_{n-1} \\
\hline
a_n & = & \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^n}
\end{array}
$$

Assim obtemos que um conjunto com n elementos tem exatamente 2^n subconjuntos. Consequentemente, quando $n = 5$ obtemos $2^5 = 32$ subconjuntos.

Os números de Fibonacci

O Problema dos Coelhos

Um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento

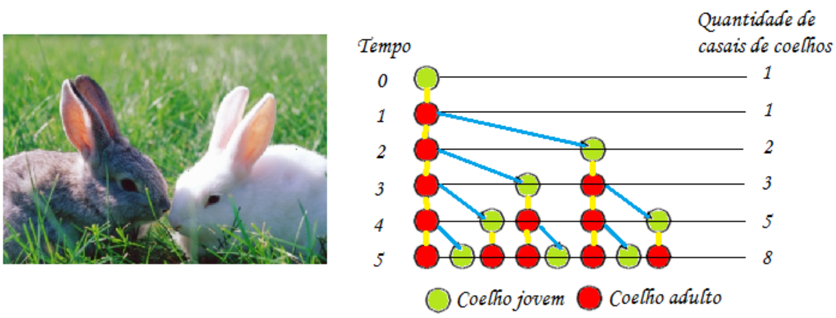


Figura 10: Números de Fibonacci

Como o par adulto produz um par novo a cada 30 dias, no início do segundo mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par de adultos e outro de coelhos jovens, assim no início do primeiro mês existirão dois pares: um par adulto mais e par recém- nascido.

No início do terceiro mês o par adulto produzirá de novo mais um par enquanto que o par jovem terá completado um mês de vida e ainda não estará apto a produzir, assim no início do terceiro mês existirão três pares de coelhos, sendo: um par adulto, um par de coelhos com em mês de idade e um par recém-nascido.

No início do quarto mês, existirão dois pares adultos sendo que cada um já produziu um novo par e um par novo que completou em mês, logo teremos cinco pares: dois pares adultos, um par com um mês e dois pares recém-nascidos.

Tal processo continua através dos diversos meses até completar um ano. Observa-se esta formação no gráfico com círculos, mas também pode-se perceber que a sequência numérica, conhecida como a sequência de Fibonacci, indica o número de pares ao final de cada mês:

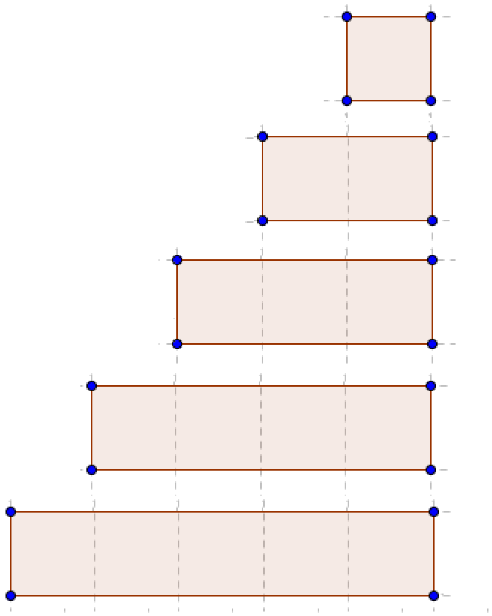
$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...)$$

Fibonacci no Triangulo de Pascal

O Problema da passarela

(Discursiva nº 3 do Exame de acesso ao PROFMAT de 2012) Um engenheiro fará uma passarela de 10 metros de comprimento, ligando a porta da casa ao portão da rua. A passarela terá 1 metro de largura e ele, para revestí-la, dispõe de 10 pedras quadradas de lado 1 metro e 5 pedras retangulares de 1 metro por 2 metros. Todas as pedras são da mesma cor, as pedras de mesmo tamanho são indistinguíveis umas das outras e o rejunte ficará aparente, embora com espessura desprezível. De quantas maneiras ele pode revestir a passarela?

Analisando o problema por etapas, ou seja, pensando em problemas mais simples até chegar no problema original, como sugere a figura 11, conseguiremos resolver nosso problema.



Dimensão da calçada	Ladrilhos de cada tipo (1x1) e (2x1)	Quantidade de maneira que podemos organizá-los	Soma
1x1	1 e 0	1	1
2x1	2 e 0 0 e 1	1 1	2
3x1	3 e 0 1 e 1	1 2	3
4x1	4 e 0 2 e 1 0 e 2	1 3 1	5
5x1	5 e 0 3 e 1 1 e 2	1 4 3	8

Figura 11: Passarelas de várias dimensões

Podemos pensar na dimensão da passarela aumentando gradativamente e observarmos quantas pedras de cada tamanho esta sendo usado em cada etapa, e de quantas maneiras distintas eles podem ser usados.

Assim percebemos que a solução para nosso problema é um número dasequência de Fibonacci,

$$(1, 2, 3, 5, 8, ...)$$

mais precisamente, será o 10º número nesta sequência, ou seja, 89.

Agora, se ao invés de escrever os números que representam a quantidade de maneiras de organizar as pedras em colunas, colocássemo-los em linhas, eles ficariam assim:

1

1 1

1 2

1 3 1

1 4 3

1 5 6 1

Olhando por diagonais, como na figura 12 e 13, percebemos claramente os números do Triâgulo de Pascal e os números de Fibonacci.

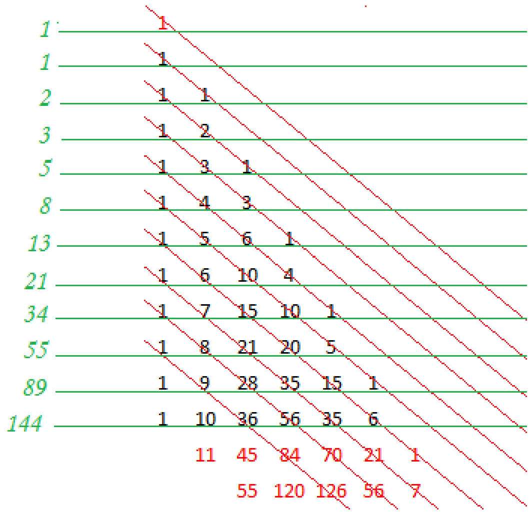


Figura 12: Fibonacci no Triângulo de Pascal

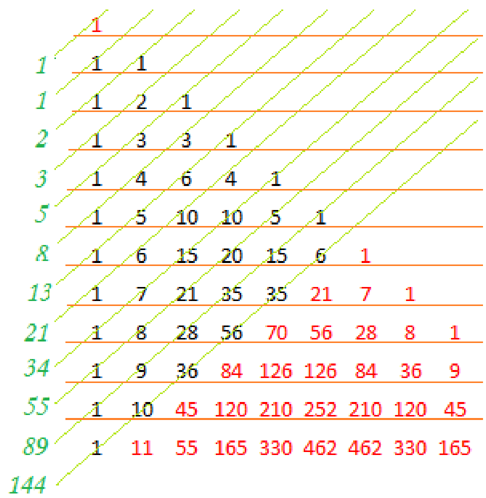


Figura 13: Fibonacci no Triângulo de Pascal

APÊNDICE B

Aqui, disponibilizamos a resolução de dois dos problemas, da forma que os resolvi durante a disciplina MA21 - *Resolução de Problemas* no verão de 2012; também coloco um terceiro problema, criado durante uma das muitas viagens de volta pra casa, envolvendo elementos de Geometria Espacial com termos de uma Progressão Geométrica.

PROBLEMA 1

Temos que provar que a *lei de formação* da sequência

$2 - 3 - 5 - 6 - 7 - 8 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 17 - 18 - 19 - 20 - ...$

é $a_n = [n + \frac{1}{2} + \sqrt{n}]$**, para** $n > 0$**.**

Resolução

1ª tentativa

Num primeiro olhar analisamos que esta sequência pode ser construída por recorrência com um condicional, fazendo os quadrados perfeitos não aparecerem na sequência de naturais.

$$2 - 3 - 5 - 6 - 7 - 8 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 17 - 18 - 19 - 20 - ...$$

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 6, a_5 = 7, a_6 = 8, a_7 = 10, a_8 = 11, ...$$

Baseado na posição que cada elemento ocupa, podemos estabelecer a seguinte recorrência,

$$a_1 = 2$$

e

$$a_n = \begin{cases} a_{(n-1)} + 1, & \text{se } a_{(n-1)} + 1 \neq a^2 \\ a_{(n-1)} + 2, & \text{se } a_{(n-1)} + 1 = a^2 \end{cases}$$

para todo $a \in \mathbb{N}$, onde $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$

Por ora a única desvantagem da construção acima é que fica difícil determinar um a_n qualquer, pois teríamos a princípio que construir toda a sequência até o termo $a_{(n-1)}$.

2ª tentativa

Outra forma de construir esta sequência é pensar da seguinte maneira.

De forma geral quem é um a_n qualquer, sabendo que n é um natural maior que zero?

Como a_n não pode ser quadrado perfeito e se associarmos o valor de a_n ao valor de n, poderíamos dizer que $a_n = n+$ *(quantidade de quadrados perfeitos de* 1 *até* n*)*, pois como estão sendo retirados estes quadrados a sequência de naturais tem sido *adiantada* em relação a n.

Assim poderíamos dizer que $a_n = n + [\sqrt{n}]$.

Pois $[\sqrt{n}]$ serve para dizer a quantidade de quadrados perfeitos de 1 até n.

Mas este número ainda não está bom pois tem algumas falhas. A seguir vamos calcular alguns destes números e ver como podemos corrigir estas falhas.

$a_1 = 1 + [\sqrt{1}] = 1 + 1 = 2$

$a_2 = 2 + [\sqrt{2}] = 2 + 1 = 3$

$a_3 = 3 + [\sqrt{3}] = 3 + 1 = 4$

$a_4 = 4 + [\sqrt{4}] = 4 + 2 = 6$

$a_5 = 5 + [\sqrt{5}] = 5 + 2 = 7$

$a_6 = 6 + [\sqrt{6}] = 6 + 2 = 8$

$a_7 = 7 + [\sqrt{7}] = 7 + 2 = 9$

$a_8 = 8 + [\sqrt{8}] = 8 + 2 = 10$

$a_9 = 9 + [\sqrt{9}] = 9 + 3 = 12$

$a_{10} = 10 + [\sqrt{10}] = 10 + 3 = 13$

$a_{11} = 11 + [\sqrt{11}] = 11 + 3 = 14$

$a_{12} = 12 + [\sqrt{12}] = 12 + 3 = 15$

$a_{13} = 13 + [\sqrt{13}] = 13 + 3 = 16$

$a_{14} = 14 + [\sqrt{14}] = 14 + 3 = 17$

$a_{15} = 15 + [\sqrt{15}] = 15 + 3 = 18$

$a_{16} = 16 + [\sqrt{16}] = 16 + 4 = 20$

$a_{17} = 17 + [\sqrt{17}] = 17 + 4 = 21$

$a_{18} = 18 + [\sqrt{18}] = 18 + 4 = 22$

$a_{19} = 19 + [\sqrt{19}] = 19 + 4 = 23$

$a_{20} = 20 + [\sqrt{20}] = 20 + 4 = 24$

$a_{21} = 21 + [\sqrt{21}] = 21 + 4 = 25$

$a_{22} = 22 + [\sqrt{22}] = 22 + 4 = 26$

$a_{23} = 23 + [\sqrt{23}] = 23 + 4 = 27$

$a_{24} = 24 + [\sqrt{24}] = 24 + 4 = 28$

$a_{25} = 25 + [\sqrt{25}] = 25 + 5 = 30$

Existe uma falha crescente na construção à medida que aumentamos o valor de n. A falha é a seguinte, se $n = p^2 - p + 1$ então $a_n = p^2$.

E para os $p-2$ termos seguintes a n o erro é de posicionamento ou *valor*. Todos estes $p-1$ deveriam ter seus valores aumentados em uma unidade para que pudessem completar a sequência da maneira correta.

Também percebemos que entre dois números

a_{q^2} e $a_{(q+1)^2}$, onde $q \in \mathbb{N}$ a quantidade de termos é par e é justamente esta metade mais próxima de $a_{(q+1)^2}$ que está com uma unidade a menos do que deveria ter.

Este problema apareceu pois a função $f(x) = [\sqrt{n}]$, *despreza* a parte decimal dos termos fato que não aconteceria se ao invés de *truncar* usássemos uma função para arredondar. Para sanar este pequeno problema técnico basta adicionar o número $\frac{1}{2}$ em todos os números $\sqrt{n}$, pois os que estão *na primeira metade* entre os números a_{q^2} e $a_{(q+1)^2}$ não serão afetados já que suas partes decimais são inferiores a $0,5$. Já os que estão *na segunda metade* entre os números a_{q^2} e $a_{(q+1)^2}$ terão suas partes decimais acrescidas em $0,5$ e passarão à próxima unidade pois suas partes decimais tem valores superiores a $0,5$.

Assim chegamos à estrutura

$$a_n = n + \left[\frac{1}{2} + \sqrt{n}\right]$$

para $n > 0$.

E como o valor de n é natural e não interfere na parte decimal de $\left[\frac{1}{2} + \sqrt{n}\right]$ concluímos que

$$a_n = \left[n + \frac{1}{2} + \sqrt{n}\right]$$

para $n > 0$.

PROBLEMA 2

Começando com 2 e 7, a sequência 2–7–1–4–7–4–2–8–... é formada multiplicando-se dois termos consecutivos e colocando os dígitos no final da sequência. Prove que o número 6 aparece uma quantidade infinita de vezes.

Resolução

$$2–7–1–4–7–4–2–8–...$$

Iniciando por 2 e 7, observamos que a partir de certo momento aparecerão na sequência os termos –4–7–4 e a partir destes teremos uma sequência que nos leva a uma infinidade de números 6. Vejamos:

$4 - 7 - 4 - ... \rightarrow ... - 2 - 8 - 2 - 8 - ... \rightarrow ... - 1 - 6 - 1 - 6 - 1 - 6 - ...$

$\rightarrow ... - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - ... \rightarrow ... - 3 - 6 - 3 - 6 - 3 - 6 - 3 - 6 - ...$

$\rightarrow ... - 1 - 8 - 1 - 8 - 1 - 8 - 1 - 8 - 1 - 8 - 1 - 8 - 1 - 8 - ...$

$\rightarrow ... - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - ...$ (13 vezes o número 8)

$\rightarrow ... - 6 - 4 - 6 - 4 - ... - 6 - 4 - 6 - 4 - ...$ (12 vezes o número 64)

$\rightarrow ... - 2 - 4 - 2 - 4 - ... - 2 - 4 - 2 - 4 - ..$ (23 vezes o número 24)

$\rightarrow ... - 8 - 8 - 8 - 8 - ... - 8 - 8 - 8 - 8 - ...$ (45 vezes o número 8)

A partir deste ponto este padrão de repetição continua com este ciclo aumentando cada vez mais a quantidade de números 6 que aparecem no 64.

A quantidade de 6, representada a partir de agora por (#6), em cada grupo é dada por

$$(\#6) = (\#8) - 1.$$

A quantidade de 8 é dada por

$$(\#8) = 2.(\#24) - 1.$$

A quantidade de 24 é dada por

$$(\#24) = 2.(\#64) - 1.$$

Agrupando por recorrência obtemos a expressão que nos dá a quantidade de 6 em cada grupo baseada na quantidade 6 do grupo anterior

$$(\#6) = (2.(2.(\#64) - 1) - 1) - 1 = 4.(\#64) - 4 = 4.((\#64) - 1).$$

Melhorando a escrita, fazemos $(\#64) = (\#6)_n$, onde $(\#6)_n$ representa a quantidade de 6 de um grupo n, assim concluímos que

$$(\#6)_n = 4.((\#6)_{n-1}).$$

De outra forma podemos escrever

$$a_{(n+1)} = 4.(a_n - 1). \tag{1}$$

Quando $n = 1$ (o primeiro grupo de 6), obtemos $a_1 = 12$ e assim $a_2 = 44$.

Uma justificativa

Se observarmos uma função associada à recorrência (1), teríamos $y = 4(x - 1)$.

Assim vemos que $x_1 > x_0 \to y_1 > y_0$, isso nos diz no nosso problema que $a_{n+1} > a_n$ para todo n, assim para que tenhamos a_{n+1} tão grande quanto queiramos, basta que a_n seja grande o suficiente.

Assim concluímos que a quantidade de 6 na sequência citada é infinita.

Outra justificativa

De outra forma, podemos analisar os termos da recorrência e generalizá-la.

$a_1 = 12$

$a_2 = 4(a_1 - 1) = 4a_1 - 4$

$a_3 = 4(a_2 - 1) = 4((4a_1 - 4) - 1) = 4^2a_1 - 4^2 - 4$

$a_4 = 4(a_3 - 1) = 4((4^2a_1 - 4^2 - 4) - 1) = 4^3a_1 - 4^3 - 4^2 - 4$

$a_5 = 4(a_4 - 1) = 4((4^3a_1 - 4^3 - 4^2 - 4) - 1) = 4^4a_1 - 4^4 - 4^3 - 4^2 - 4$

$a_{n+1} = 4(a_n - 1) = 4^na_1 - 4^n - 4^{n-1} - \cdots - 4^2 - 4$

$$a_{n+1} = 4^na_1 - (4^n + 4^{n-1} + ... + 4^2 + 4)$$

Fazendo $S_n = 4^n + 4^{n-1} + ... + 4^2 + 4$ e observando que $a_1 = 4$ e $q = 4$, com as devidas substituições, obtemos

$$S_n = 4.\frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{4^{n+1} - 4}{3}$$

e

$$a_{n+1} = 4^na_1 - \frac{4^{n+1} - 4}{3}.$$

Fazendo $a_1 = 12$, obtemos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 12.4^n - \frac{4^{n+1} - 4}{3} \\ &= 3.4^{n+1} - \frac{4^{n+1}}{3} + \frac{4}{3} \\ &= \frac{8.4^{n+1}}{3} + \frac{4}{3} \\ &= \frac{2.4^{n+2}}{3} + \frac{4}{3} \\ &= \frac{2^{2n+5}}{3} + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Novamente obtemos que o a_n fica tão grande quanto desejemos, assim concluímos que a quantidade de 6 na sequência citada, é infinita.

Problema 3

O Tetraedro e a Relação de Euller

Tomemos um tetraedro inscrito em uma esfera. Em cada uma das suas faces tomemos um ponto, o incentro, por exemplo. Agora observemos o novo poliedro que será formado com os vértices do tetraedro e estes novos *vértices* obtidos da projeção perpendicular dos *incentros* na superfície da esfera. Repetindo este processo várias vezes, vamos obter vários poliedros. O que nos interessa aqui é analisar o que acontece com a quantidade de arestas, vértices e faces em cada etapa destas construções.

A seguir apresentamos uma ideia do que sejam tais poliedros:

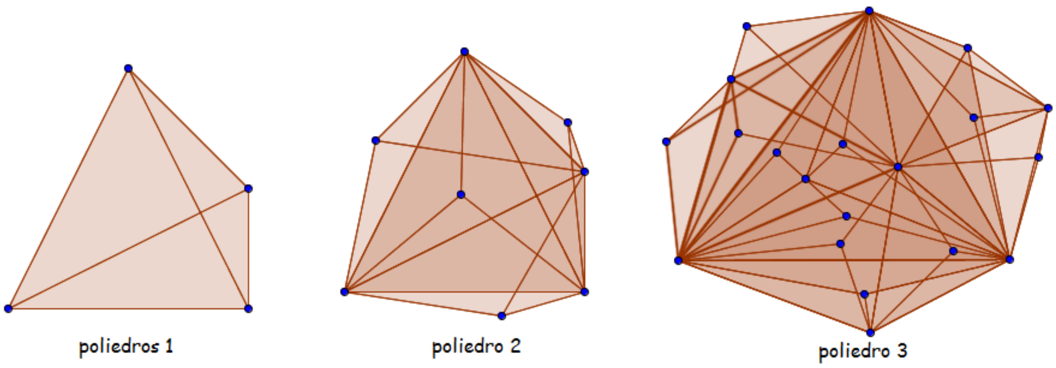


Figura 14: Sequência de Poliedros

Poliedros	Faces	Vértices	Arestas
Número 1	4	4	6
Número 2	12	8	18
Número 3	36	20	54
Mesmo sem conseguir esboçar a figura por falta de recursos, é fácil perceber o que acontece com os próximos poliedros			
Número 4	108	56	162
Número 5	324	164	486
Número 6	972	488	1458

Figura 15: Relação entre aresta, vértice e face

Observando a tabela da figura 15 percebemos que a primeira e a terceira coluna, são formadas por termos de sequências de progressões geométricas, e a segunda pode ser obtida a partir da terceira, a saber:

$$\begin{array}{cc} \text{Face} & (4, 12, 36, 108, 324, 972, ...) \\ \text{Aresta} & (6, 18, 54, 162, 486, 1458, ...) \\ \text{Vértice} & (4, 8, 20, 56, 164, 488, ...) \end{array}$$

Podemos reescrever cada sequência acima deixando em evidência o termo geral de cada uma delas, da seguinte forma:

$$\begin{array}{cc} \text{Face} & (4 \cdot 3^0, 4 \cdot 3^1, 4 \cdot 3^2, 4 \cdot 3^3, ..., 4 \cdot 3^{n-1}, ...) \\ \text{Aresta} & (2 \cdot 3^1, 2 \cdot 3^2, 2 \cdot 3^3, 2 \cdot 3^4, ..., 2 \cdot 3^n, ...) \\ \text{Vértice} & (2 + 2 \cdot 3^0, 2 + 2 \cdot 3^1, 2 + 2 \cdot 3^2, 2 + 2 \cdot 3^3, ..., 2 + 2 \cdot 3^{n-1}, ...) \end{array}$$

Para termos uma melhor visualização do que podemos encontrar manipulando os números destas sequências, vamos usar seus termos gerais, colocando-os com o mesmo expoente na base 3.

$$\begin{aligned} cccF &= 4 \cdot 3^{n-1} \\ A &= 2 \cdot 3^n \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} \\ &= 6 \cdot 3^{n-1} \\ V &= 2 + 2 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

Desta forma chegamos à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} F + V &= 4 \cdot 3^{n-1} + 2 + 2 \cdot 3^{n-1} \\ &= 2 + (4 + 2) \cdot 3^{n-1} \\ &= 2 + 6 \cdot 3^{n-1} \\ &= 2 + A \end{aligned}$$

que nos revela a Relação de Euler:

$$F + V = 2 + A$$

Lembrando que este resultado não constitui uma prova da relação de Euler. Este problema serve de *pontapé inicial* para instigarmos o aluno a querer buscar esta mesma relação em outros poliedros, como por exemplo o cubo e o octaedro, usando a mesma ideia que propusemos com o tetraedro. Para que num processo posterior de generalização ele consiga fazer uma demonstração formal da Relação de Euler.