
Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PROMAT

A função seno na educação básica e
uma discussão acerca da inclusão de
abordagens alternativas

por

Gilvan Andrade Santos

Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Fábio dos Santos

Agosto de 2013

Gilvan Andrade Santos

A função seno na educação básica e uma discussão acerca da inclusão de abordagens alternativas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio dos Santos

São Cristóvão-SE

Agosto de 2013

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Santos, Gilvan Andrade
S237f A função seno na educação básica e uma discussão acerca da
inclusão de abordagens alternativas / Gilvan Andrade Santos ;
orientador Fábio dos Santos. – São Cristóvão, 2014.
76 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal
de Sergipe, 2014.

1. Trigonometria – estudo e ensino. 2. Funções (Matemática) –
estudo e ensino. 3. Matemática - Prática de ensino. I. Santos,
Fábio dos, orient. II. Título.

CDU 514.116:37.02

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

A função seno na educação básica e uma discussão acerca da inclusão de abordagens alternativas

por

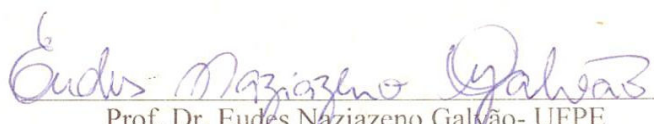
Gilvan Andrade Santos

Aprovada pela Banca Examinadora:



Prof. Dr. Fábio dos Santos - UFS

Orientador



Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão - UFPE

Primeiro Examinador



Prof. Dr. Allysson dos Santos Oliveira - UFS

Segundo Examinador

São Cristóvão, 30 de agosto de 2013

Dedicatória

Aos professores que, assim como eu, estão na profissão por opção. A eles dedico este trabalho

Agradecimentos

- A Deus, por nunca me abandonar.
- Ao meu filho, Mateus, por sua existência.
- Ao professor Dr. Fábio dos Santos, por sua paciência e orientação.
- A meu amigo Márcio, que sempre me incentivou.
- Aos grandes amigos do profmat, em especial, a André, pois sem ele eu não teria conseguido.
- Aos meus pais, irmãos e minha esposa que sempre estão ao meu lado.
- Aos professores, Dr. Allyson Dos Dantos Oliveira e Dr. Eudes Naziazeno Galvão , por comporem a banca examinadora.

Resumo

Neste trabalho iremos mostrar como é apresentada a função seno para os alunos da educação básica. E, em seguida, apresentaremos definições alternativas com o objetivo de levantar um debate a cerca da possibilidade da inserção desta nova abordagem no currículo das escolas brasileiras.

Nesse contexto iremos fazer uma reflexão apresentando os prós e os contras de definir a função seno de uma forma que se por um lado responde perguntas deixadas em aberto pela definição tradicional por outro traria consigo outros conceitos necessários para o seu entendimento carregando ainda mais um currículo que já é por demais criticado pelo excesso de conteúdos. Conteúdos estes que apesar de serem importantes para a matemática, muitas vezes não acrescentam muito para o aluno no seu dia a dia.

Por fim, baseados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), concluímos que essa nova abordagem contribui significativamente para o processo de ensino-aprendizagem; o que justifica utilizá-la, uma vez que mostraremos que é possível incorporar algumas das novas definições da função seno apresentadas, desde que observados alguns aspectos de caráter didático.

Palavras Chaves: Função seno, educação básica, séries, trigonometria, matemática.

Abstract

This paper intend to show how the sine function is presented to students of elementary education and then it will be shown the alternative definitions in order to raise a debate about the possibility of insertion of this new approach on course of brazilian schools.

Furthermore reflection has been done showing pros and cons of defining the sine function such as answering possibly questions by traditional definition. On the other hand, it would bring itself others necessary concepts to its understanding about the criticized course because of the excess of contents. Although these contents are very important to math many times they don't add much to students as citizen.

Finally based on PCN's this new approach contribute meaningfully to the learning teaching process what is reason to use it once that is completely possible incorporate some of new definitions of sine function presented, provided that some aspects of didactic nature been observed.

Keywords: Sine function, basic education, series, trigonometry, mathematics.

Introdução

Problemática e objetivos

A motivação do presente trabalho surgiu a partir de nossa prática, tanto como discente quanto como docente, no estudo e no ensino da matemática respectivamente.

Ainda na época de estudante já percebíamos algumas lacunas existentes na forma como nos foi apresentado o seno como razão trigonométrica e posteriormente a função seno de domínio real. De onde vinha aquela tábua contendo os valores do seno, cosseno e tangente para ângulos de 0° a 90° e como era feita, ou seja como era calculado, por exemplo o seno de 18° . Pensando na função $f(x) = \sin x$ de domínio real a situação ficava ainda mais complexa dificultando ainda mais o entendimento da tabela e da própria função. Mas tarde, já como aluno universitário, descobrimos que a forma como fora definida a função seno no ensino médio, embora resolvesse muitas situações problemas, não permitia solucionar tais questionamentos. O algoritmo usando pela calculadora científica para encontrar o seno de um número real não usa a definição do seno baseada no ciclo trigonométrico, muito menos a que se baseia no triângulo retângulo. Existem outras formas de se fazer isso. A calculadora, por exemplo, usa um truncamento da série de Maclaurin do seno.

Como professor, lecionando para alunos da educação básica e já com um olhar mais técnico, pudemos ver o quanto omitir informações necessárias prejudica o processo de aprendizagem. A pouca importância que os livros didáticos, e por consequência os professores, dão à substituição do grau pelo radiano na

definição da função seno através do ciclo trigonométrico faz parecer que não há motivação para isso o que, como veremos aqui, não é verdade.

Percebemos, então que a abordagem feita na educação básica da função seno tem limitações que atrapalham o melhor entendimento da mesma. Sendo assim, por que não usamos outras formas para defini-la? Os alunos não estão preparados para trabalhar com essa nova abordagem que usa conteúdos vistos até então apenas na universidade? O currículo não comporta o acréscimo destes novos conteúdos? Pretendemos com esse trabalho debater sobre a possibilidade de inserir definições alternativas para a função seno com o objetivo de tornar seu aprendizado mais eficaz, uma vez que é sabido a dificuldade de alunos e professores com o tema.

Descrição do trabalho

No primeiro capítulo mostramos um resumo da história da trigonometria com enfoque no seno. Nele podemos observar que o seno surge como uma razão trigonométrica para ser aplicado na astronomia e no cálculo de distâncias inacessíveis e que depois é ampliado através da definição da função seno no ciclo trigonométrico e é exatamente nessa sequência que ela é apresentada aos alunos da educação básica, como razão trigonométrica no 9º ano e como função no 1º ano do ensino médio. Mas historicamente o seno continuou evoluindo e foi incorporado pela análise através da contribuição de Euler.

No segundo capítulo falamos sobre os PCN's que subsidiaram nosso trabalho. Nele estão pressupostos que usamos para concluir acerca da possibilidade de inclusão de novas abordagens para a função seno na educação básica.

A forma como é mostrado o seno para o estudante da educação básica é o assunto abordado no terceiro capítulo. Nele mostramos que no 9º ano do ensino fundamental os alunos veem o seno de um ângulo agudo, medido em graus, como a razão entre as medidas do cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa do triângulo retângulo no qual o ângulo pertence. É mostrado também algumas propriedades desta razão trigonométrica e um exemplo de sua principal aplicação. Continuando a abordagem do seno na educação básica, agora já no 1º ano do ensino médio (em algumas escolas em outra série), os alunos veem a lei dos senos e também o seno como função pela primeira vez, com o uso do ciclo trigonométrico, na verdade uma ampliação das definições anteri-

ores. A partir daí o seno vira função e tem domínio real e novas propriedades e a unidade de medida dos ângulos agora é o radiano e não mais o grau. A razão dessa mudança não justificada pela maioria dos livros do ensino médio, e desconhecida de muitos professores, finaliza o capítulo.

Os próximos três capítulos são dedicados à apresentação de definições alternativas para a função seno, todas preservando a maioria das propriedades dela e usando uma linguagem simples e acessível. Começaremos o capítulo IV falando sobre sequências e séries, definimos série de potências, polinômio de Taylor e de Maclaurin, raio de convergência, teorema do resto entre outros conceitos necessários para o entendimento da definição da função seno pela série de Maclaurin que é o objetivo deste capítulo.

No capítulo V definimos a função seno usando a função exponencial de domínio complexo. Por isso, nele também falamos sobre a exponencial complexa e a função exponencial complexa. No capítulo VI definimos a função seno usando equações diferenciais, antes, porém, expomos um pouco da teoria necessária à compreensão desta definição.

A discussão sobre as possibilidades de abordagem dessas definições alternativas na educação básica é o assunto que trataremos no capítulo VII. Uma vez que a abordagem feita atualmente deixa lacunas, é pertinente pensar sobre uma abordagem que venha a complementar a já trabalhada, desde que haja viabilidade para incorporá-la no currículo.

Antes de começar, gostaríamos de frisar que apesar de falarmos somente da função seno, essas definições poderiam ser estendidas para as demais funções, assim como também a própria função seno poderia ser trabalhada por completo com essas novas abordagens, porém aqui nos limitaremos à sua definição.

Sumário

Dedicatória	5
Agradecimentos	6
Resumo	7
Abstract	8
Introdução	9
1 Parte histórica	14
2 Fundamentação Teórica	18
3 A função seno	23
3.1 Função seno no ensino fundamental	23
3.2 Definição da função seno vista no ensino médio	33
3.2.1 Conceitos Iniciais	34
3.2.2 Função de Euler	35
3.2.3 A função seno	35
3.3 O porquê de se medir em radianos	37
4 Definição por série	42
4.1 Definição da função seno usando a série de Maclaurin	50
5 A função seno definida usando a exponencial complexa	52
6 A função seno definida através de uma equação diferencial	58

<i>INTRODUÇÃO</i>	13
7 Discursão acerca das várias definições da função seno e a possibilidades de utilizá-las	65
Conclusão	70
A Demonstração da lei dos senos	72
B Demonstração das propriedades do resto da série Taylor	73
C Enunciado do Teorema do Confronto	75
Bibliografia	77

Capítulo 1

Parte histórica

Ao que tudo indica os rudimentos de uma trigonometria surgiram no Egito e na Babilônia, a partir de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. Mas segundo Boyer (2001, p.108) muitos foram os povos que contribuíram para o seu desenvolvimento, O conceito de ângulo e a forma como medi-lo surgiram na china onde os triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Também há indícios que os chineses conheciam as relações trigonométricas embora não se sabe os nomes dados por eles para estas relações assim como também não se sabe como eles mediam os ângulos nem que unidades usavam para fazê-lo.

A Grécia, que seguiu os ensinamentos dos egípcios, logo superou os mesmos e com eles a matemática e por consequência a trigonometria se desenvolveram consideravelmente. Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Eratóstenes, os gregos estudaram as relações entre retas e círculos impulsionados pelos problemas oriundos da astronomia como era comum até então. Não se tinha uma trigonometria sistemática. Foi então que Hiparco de Nicéia (por volta de 180 -125 a.c) compilou a primeira tabela trigonométrica e que por isso foi chamado de “ o pai da trigonometria”. “Ele observou que num dado circulo a razão do arco para a corda diminui de 180° para 0° . Resolveu então associar a cada corda de um arco o ângulo central correspondente”... O Almagesto de Ptolomeu foi uma obra onde além de apresentar tabelas trigonométricas expunha métodos utilizados para construí-las, como expõe Boyer:

“...De importância central para o cálculo das cordas de Ptolomeu era Uma proposição geométrica ainda hoje conhecida como “teorema de Ptolomeu”: se ABCD é um quadrilátero (convexo) inscrito num círculo (1), então $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$; isto é, a soma dos Produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao Produto das diagonais[...] outro, e mais útil, caso especial do teorema de geral de Ptolomeu é Aquele em que um lado, digamos AD, é diâmetro do círculo (Fig. 10.8). Então se $AD = 2r$, temos $2r \cdot BC = AB \cdot CD = AC \cdot BD$. Se fizermos arco $BD = 2a$ e arco $CD = 2b$, então $BC = 2r \operatorname{sen}(a - b)$, $AB = 2r \operatorname{sen}(90 - a)$, $BD = 2r \operatorname{sen} a$, $CD = 2r \operatorname{sen} b$ e $AC = 2r \operatorname{sen}(90 - b)$. O teorema de Ptolomeu, Portanto, leva ao resultado $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$. Raciocínio Semelhante leva à fórmula $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$, e ao par Análogo $\cos(ab) = \cos a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ [...] Outra fórmula que lhe foi muito útil foi a equivalente de nossa para metade do ângulo. Dada a corda de um arco num círculo, Ptolomeu achava a corda da metade do arco como segue. Seja D o ponto médio do arco BC num círculo com diâmetro $AC = 2r$ (Fig. 10.9), seja $AB = AE$, e tomemos DF bissectando (perpendicularmente) EC. Então não é difícil mostrar eu $FC = \frac{2r - AB}{2}$. Mas Da geometria elementar sabemos que $DC^2 = AC \cdot FC$, donde resulta que $(DC)^2 = r(2r - AB)$. Se pomos $\operatorname{arc} BC = 2a$, então $DC = 2r \operatorname{sen} \frac{a}{2}$ e $AB = 2r \cos a$, Donde resulta a formula familiar $\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \cos \alpha} / 2$.”

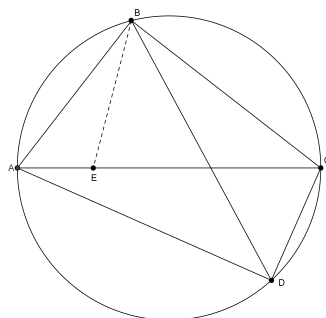


Figura 1.1:

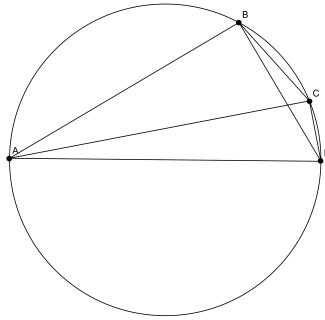


Figura 1.2:

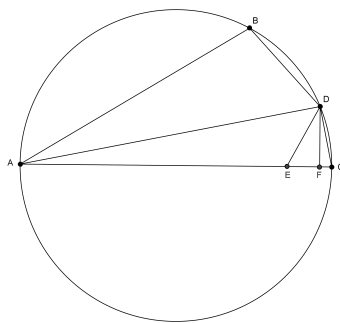


Figura 1.3:

Os hindus substituíram a tabela grega de cordas por uma equivalente da função seno que, aparentemente, foi a precursora da função trigonométrica moderna que chamamos seno de um ângulo hoje. Enquanto Ptolomeu relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes os hindus fizeram uma correspondência entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles de Jiva, o que possibilitou visualizar um triângulo na circunferência, como mostra a figura (1)

Eles definiam o Jiva como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

Os árabes tiveram quase toda sua trigonometria baseada na função seno, uma herança dos hindus. Nos estudos de Al Battani ele introduziu, genialmente, o círculo de raio unitário e com isso demonstrou que a razão Jiva é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa.

Antes da trigonometria ser incorporada pela Análise Matemática tivemos ainda contribuições importantes na Europa do século XIV. As noções de quantidades variáveis e de função são expressas, uma nova tábua de senos foi construída, surgiu o primeiro trabalho impresso em trigonometria “ Tabula Di-

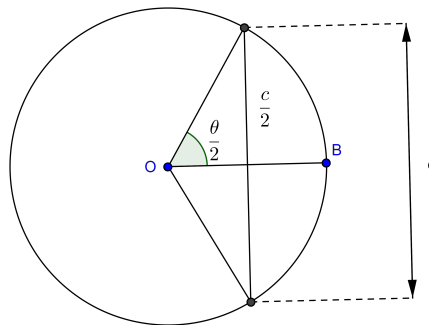


Figura 1.4:

rectionum” de Regiomontanus, publicado em Nurember antes de 1485 e não poderíamos deixar de mencionar Viète(1540–1603) que adicionou um tratamento analítico a trigonometria. John Wallis (1616 – 1703) que expressou fórmulas usando equações em vez de proporções e também trabalhou com séries infinitas. Issac Newton (1642–1727) foi outro que trabalhou com as séries infinitas paralelamente ao estudo de cálculo infinitesimal, tendo expandido $\arcsen x$ em série e, por reversão, deduzido a série para $\text{sen} x$. Newton comunicou a Leibniz a forma geral para $\text{sen}(nx)$ e $\text{cos}(nx)$.

Porém foi com Euler(1707 – 1783) que a trigonometria toma a forma que conhecemos hoje. Ele adotou a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito. Também mostrou que

$$\text{sen } x = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})}{2i} \text{ e } \text{cos } x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})}{2}$$

onde i é a unidade imaginária. No decorrer deste trabalho veremos mais detalhadamente estas descobertas de Euler.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Como este trabalho propõe uma discussão a cerca da possibilidade de uma nova abordagem para a função seno optamos por ampará-lo nos PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCNs) visto que eles foram elaborados após um amplo debate e reflexão de muitas pessoas como deixa claro o ministro da Educação à época, Paulo Renato Souza na mensagem ao professor que faz abrindo o texto dos PCNs.

“Para fazer chegar os PARÂMETROS à sua casa um longo caminho foi percorrido. Muitos participaram dessa jornada...

...Esta soma de esforços permitiu que eles fossem produzidos no contexto das discussões pedagógicas mais atuais. Foram elaborados de modo a servir de referencial para o seu trabalho, respeitando a sua concepção pedagógica e a pluralidade cultural brasileira.(BRASIL, 1997, p.9)

Não obstante sabermos, como aponta Arroyo (1999, p. 138), que há divergências de concepções entre os responsáveis pela elaboração das políticas educacionais, os pesquisadores e os professores que estão na escola, o que faz com que os PCNs não sejam um consenso na comunidade escolar, mas pelos motivos já citados e também por ser os PCNs um documento oficial que trata de tema escolhemos usá-lo como fundamentador do trabalho.

A versão preliminar dos PCN's foi apresentada pelo MEC a diferentes instituições e especialistas no final de 1995. Após receber cerca de 700 pareceres, que vieram a embasar a revisão do texto, delegacias do MEC promoveram reuniões com suas equipes técnicas, o Conselho Federal de Educação organizou deba-

tes regionais que tiveram a participação de algumas universidades. Toda essa mobilização subsidiou a produção dos PCN's para 1ª à 4ª série em sua versão final que foi aprovada pelo Conselho Federal de Educação em 1997 e lançado em Brasília em 15 de outubro do mesmo ano. Enquanto professores de todo o país passaram a receber os PCN's para 1ª à 4ª série o MEC iniciou a elaboração dos PCN's para 5ª à 8ª que foi lançado no ano seguinte. Os PCN's para o ensino médio viriam a ser lançados um pouco depois, em 2000.

Desta forma os PCN's ficaram divididos assim

1. Ensino Fundamental – 1.ª à 4.ª serie Os PCN de 1.ª à 4.ª série estão divididos em:

- Volume 1 — Introdução aos PCN
- Volume 2 — Língua Portuguesa
- Volume 3 — Matemática
- Volume 4 — Ciências Naturais
- Volume 5.1 — História e Geografia
- Volume 5.2 — História e Geografia
- Volume 6 — Arte
- Volume 7 — Educação Física
- Volume 8.1 — Temas Transversais — Apresentação
- Volume 8.2 — Temas Transversais — Ética
- Volume 9.1 — Meio Ambiente
- Volume 9.2 — Saúde
- Volume 10.1 — Pluralidade Cultural
- Volume 10.2 — Orientação Sexual

2. Educação Ambiental

Em 27 de abril de 1999, foi sancionada a lei n.º 9.795, que instituiu a Política Nacional de Educação Ambiental para garantir que a Educação Ambiental seja uma prática nacional em todas as escolas. Foi criado também o PCN em Ação – Educação Ambiental, guia de orientações metodológicas desenvolvido para formação de educadores, além de projetos

e programas que visam construir um processo permanente de educação ambiental nas escolas e comunidades de todo Brasil.

3. Ensino Fundamental — 5.^a à 8.^a série

- Volume 1 — Introdução aos PCN
- Volume 2 — Língua Portuguesa
- Volume 3 — Matemática
- Volume 4 — Ciências Naturais
- Volume 5 — Geografia
- Volume 6 — História
- Volume 7 — Arte
- Volume 8 — Educação Física
- Volume 9 — Língua Estrangeira
- Volume 10.1 — Temas Transversais — Apresentação
- Volume 10.2 — Temas Transversais — Ética
- Volume 10.3 — Temas Transversais — Pluralidade Cultural
- Volume 10.4 — Temas Transversais — Meio Ambiente
- Volume 10.5 — Temas Transversais — Saúde
- Volume 10.6 — Temas Transversais — Orientação Sexual
- Volume 10.7 — Temas Transversais — Trabalho e Consumo
- Volume 10.8 — Temas Transversais — Bibliografia

Os PCN para o Ensino Médio estão organizados em três grandes áreas: Línguas, Códigos e suas Tecnologias (reunindo questões referentes ao ensino de Língua Portuguesa, Literatura, Línguas Estrangeiras, Arte, Educação Física e Informática); Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (Biologia, Física, Matemática e Química); Ciências Humanas e suas Tecnologias (Filosofia, Geografia, História e Sociologia).

É bom que se frise que a formulação de um currículo não é só definir temas e conteúdos de aprendizagem. Para termos um currículo eficiente temos que considerar diferentes aspectos e concepções acerca de como e o que se deveria ou não ensinar aos alunos. Um currículo quando elaborado deve ter por base o

papel do aluno e professor no processo de ensino aprendizagem favorecendo o trabalho do professor e viabilizando a obtenção das competências e habilidades esperadas do aluno.

É nesse contexto que os parâmetros curriculares nacionais abrangem práticas de organização de conteúdos, formas de abordagem dos materiais com os alunos, a aplicação prática das lições ensinadas e a melhor conduta a ser adotada pelos educadores em situações diversas.

Objetivando orientar a construção de novos referenciais curriculares, partindo de uma base nacional comum de conteúdos, o PCN de Matemática apresenta novas concepções e tendências referentes ao processo de ensino aprendizagem. Nele são apresentadas novas perspectivas em relação ao papel do aluno e do professor, assim como o tratamento dos conteúdos matemáticos. Mudar um currículo não implica retirar ou acrescentar conteúdos somente, mas também trabalhar um componente que já faz parte deste currículo de forma diferente, em outro contexto, que favoreça o aprendizado e a autonomia do aluno.

Os PCN's apontam o papel da Matemática como fundamental

... na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação aos problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. (BRASIL, 1997, p.29)

Porém, o documento destaca que o ensino da Matemática demonstra-se ineficaz ao tratar a aprendizagem como a capacidade de reproduzir procedimentos e acumular informações, em que o ensino dos conteúdos matemáticos é feito através da exposição de definições, exemplos e demonstrações, seguidos de exercícios de aplicação.

Para mudar essa realidade o professor deve ter uma nova postura diante dos diferentes papéis que deve assumir para ensinar matemática. Deve planejar e promover as situações de aprendizagem, fornecer diversos recursos para que os alunos avancem em suas descobertas, deve também suscitar debates e estimular a elaboração de sínteses e a cooperação entre os alunos.

Nesse contexto é que apresentamos neste trabalho definições alternativas para a função seno com o intuito de abrir o debate sobre as vantagens da

incorporação destas definições no currículo das escolas de educação básica desse país.

Capítulo 3

A função seno

3.1 Função seno no ensino fundamental

O primeiro contato do estudante brasileiro com o seno acontece no 9º ano da educação básica. Os principais livros de matemática deste ano o definem usando o triângulo retângulo baseado na semelhança de triângulos como mostramos a idéia a seguir

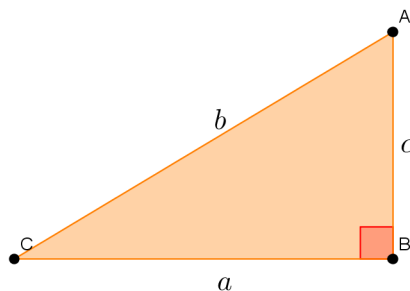


Figura 3.1:

Dado o triângulo ABC retângulo em B da figura (3.1) e considerando os seguimentos de retas $\overline{B_1A_1}, \overline{B_2A_2}, \overline{B_3A_3}, \dots, \overline{B_nA_n}$ todos paralelos ao segmento \overline{AB} (com B_1, B_2, \dots, B_n pertencentes à semirreta \overrightarrow{CB} e A_1, A_2, \dots, A_n pertencentes a semirreta \overrightarrow{CA}) temos vários triângulos semelhantes, pelo caso AA, já que o ângulo C é comum a todos eles e todos são retângulos no ponto B, B_1, B_2, \dots, B_n respectivamente.

Por consequência destas semelhanças temos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C} = \frac{A_2B_2}{A_2C} = \dots = \frac{A_nB_n}{A_nC}$$

Observem que $\overline{AB}, \overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \dots$ são catetos dos triângulos, opostos ao ângulo C e $\overline{AC}, \overline{A_1C}, \overline{A_2C}, \dots$ são as hipotenusas destes triângulos.

Intuitivamente temos que para todo triângulo retângulo com ângulo C as razões

$$\frac{c.o.C}{H}, \text{ onde } c.o.C \text{ é o cateto oposto ao ângulo } c \text{ e } h \text{ é a hipotenusa}$$

são todas iguais e a chamamos de seno do ângulo C ou simplesmente $senC$.

De maneira semelhante podemos definir o cosseno do ângulo c como sendo a razão

$$\frac{c.a.C}{H}, \text{ onde } c.a.C \text{ é o cateto adjacente ao ângulo } C$$

e a tangente do ângulo C como sendo a razão

$$\frac{c.o.C}{c.a.C}$$

Com essas razões podemos resolver muitos problemas que envolvam triângulos retângulos com um ângulo agudo e um dos seus lados conhecido como ilustraremos com o problema retirado do livro *Matemática e Realidade* de Gelson Iezzi.

Jorginho estava empinando pipa. Quando ele soltou os 50 m de linha, o vento estava tão forte que a linha ficou inclinada 60° em relação ao chão. Nesse momento, qual era a altura da pipa?

Além de resolver problemas como este, usando a razão seno também é possível encontrar os valores do seno para os ângulos de 30° , 45° e 60° .

Se considerarmos a figura (3.2) e traçarmos a altura do triângulo equilátero obtemos dois outros triângulos, estes retângulos e congruentes, de lados $L, \frac{L}{2}$ e x

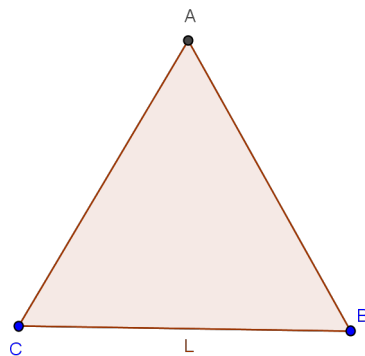


Figura 3.2:

Usando o teorema de Pitágoras encontramos x em função de L

$$L^2 = x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{L}{2}\sqrt{3}$$

E aplicando a definição do seno no triângulo da figura, temos

$$\text{sen}30 = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}60 = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Agora vamos encontrar o $\text{sen } 45^\circ$ usando o quadrado da figura 3.3

Tomemos o triângulo formado por sua diagonal e dois dos seus lados e, em seguida, aplicando novamente o teorema de Pitágoras temos

$$d^2 = L^2 + L^2 \Rightarrow d = L\sqrt{2}$$

E usando a definição do seno temos

$$\text{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para encontrar o seno de outros ângulos, por exemplo, do ângulo de 37° , teoricamente, precisaríamos construir um triângulo retângulo com um ângulo

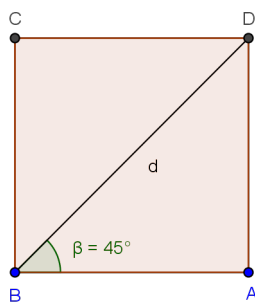


Figura 3.3:

agudo de 37° (para isso usaríamos um transferidor e régua) depois com a régua mediríamos o cateto oposto ao ângulo de 37° e a hipotenusa do triângulo efetuando, em seguida, a divisão das medidas. Encontrando assim o $\text{sen}37^\circ$.

Evidentemente a precisão deste cálculo deixaria a desejar pois nele estão incluídos uma série de aproximações (medida do ângulo, medida do cateto e da hipotenusa). Na verdade, o valor calculado poderia se aproximar mais do seno de outro ângulo que do seno do ângulo de 37° . Porém, na prática, quando queremos o seno de qualquer ângulo "não notável"recorremos a uma tabela onde constam todos os valores para o seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos naturais.

Usando as razões seno e cosseno de um ângulo agudo de um triângulo podemos demonstrar algumas propriedades como mostraremos a seguir.

Afirmção 3.1.1 *Se $x + y = 90^\circ$ com x e y pertencentes ao conjunto dos ângulos agudos, então: $\text{sen}x = \text{cos}y$.*

Demonstração: Dado um triângulo retângulo de ângulos x , y e 90 e lados opostos a estes ângulos X , Y e H , respectivamente. Temos nossa hipótese garantida pois

$$x + y + 90 = 180 \Rightarrow x + y = 90.$$

Por definição temos que:

$$\text{sen}x = \frac{X}{H} \text{ e } \text{cos}y = \frac{X}{H} \Rightarrow \text{sen}x = \text{cos}y.$$

■

Temos também a seguinte propriedade:

Afirmção 3.1.2 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, com x sendo um ângulo agudo.

Demonstração: Considerando um triângulo retângulo cujos ângulos agudos são x e y , respectivos lados opostos sendo X e Y e hipotenusa H temos pela definição do seno e cosseno:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{X^2}{H^2} + \frac{Y^2}{H^2} = \frac{x^2 + Y^2}{H^2} = 1$$

pois, pelo teorema de Pitágoras

$$X^2 + Y^2 = H^2.$$

Observe que tanto o cosseno quanto o seno são positivos, pois são definidos como a razão entre duas medidas e, portanto não teremos problemas com duplicidade de valores quando usarmos a fórmula acima.

A lei dos senos

A trigonometria no triângulo é retomada no 2º ano do ensino médio, ampliando o seno para triângulos quaisquer e não só para os retângulos, como visto no ensino fundamental. Ainda sem estudá-lo como função podemos agora, usando a lei dos senos, calcular o seno de ângulos obtusos.

Muitos dos livros de matemática voltados para o segundo ano como, por exemplo, o de Dante, antes de falar sobre a lei dos senos apresenta a propriedade que diz que o seno de um ângulo é igual ao seno do seu suplemento e o cosseno igual ao oposto do seu suplemento, ou seja:

$$\sin x = \sin(180^\circ - x) \text{ e } \cos x = -\cos(180^\circ - x).$$

Com estas propriedades é possível, por exemplo, determinar o $\sin 150^\circ$, pois

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Antes de definir a lei dos senos, como já é uma tendência, uma boa parte dos autores costumam colocar uma situação problema como iremos exemplificar com o problema retirado do livro de Dante.

Uma empresa de fornecimento de energia, ao instalar a rede elétrica numa fazenda, precisou colocar dois postes em lados opostos de um lago para permitir a passagem da fiação. Com isso surgiu um pequeno problema: para fazer o projeto da rede, seria necessário saber a distância entre os postes, e a presença do lago impedia a medição direta dessa distância.

Um dos engenheiros posicionou-se em um local onde era possível visualizar os dois postes e medir a distância entre eles. Com um aparelho apropriado, ele mediu o ângulo entre a linha de visão dele e os postes, obtendo 120° . Um auxiliar mediu a distância do poste mais afastado do engenheiro e obteve 100 m; um outro auxiliar mediu o ângulo entre a linha do poste mais próximo do engenheiro e a linha entre os postes, obtendo 45° . Com essas informações, o engenheiro sorriu. Ele já conseguiria calcular a distância entre os postes...

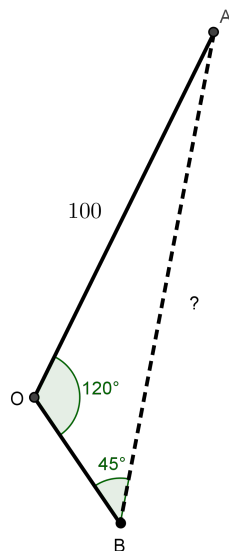


Figura 3.4:

Veja a figura(3.1) que representa a situação descrita. Os pontos A e B estão representando os postes e o ponto O o engenheiro.

O engenheiro provavelmente sorriu por que conhecia a lei dos senos que diz o seguinte:

Afirmação 3.1.3 *Em qualquer triângulo ABC, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, ou seja:*

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

para o qual a , b e c são as medidas dos lados do triângulo e A , B e C são os respectivos ângulos opostos.

Demonstração: Para demonstrar a lei dos senos consideraremos três casos.

Caso 1: Triângulo acutângulo.

Consideremos o triângulo acutângulo ABC da figura 3.1 e duas de suas altu-

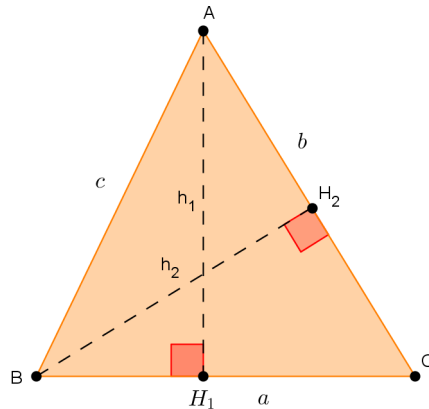


Figura 3.5: Triângulo acutângulo

ras: $\overline{AH_1}$ e $\overline{BH_2}$.

- No triângulo ACH_1 , retângulo em H_1 , temos:

$$\text{sen}C = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen}C$$

- No triângulo ABH_1 , retângulo em H_1 , temos:

$$\text{sen}B = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \text{sen}B$$

Daí vem que

$$b \text{sen}C = c \text{sen}B \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} \quad (3.1)$$

- No triângulo BCH_2 , retângulo em H_2 , temos:

$$\text{sen}C = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \text{sen}C$$

- No triângulo ABH_2 , retângulo em H_2 , temos:

$$\text{sen}A = \frac{h_2}{c} \Rightarrow h_2 = c \cdot \text{sen}A$$

Daí vem que

$$a \cdot \text{sen}C = c \cdot \text{sen}A \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C} \quad (3.2)$$

De 3.1 e 3.2 concluímos que

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Caso 2: Triângulo obtusângulo

Consideremos o triângulo ABC da 3.1 e duas de suas alturas: $\overline{AH_1}$ e $\overline{BH_2}$.

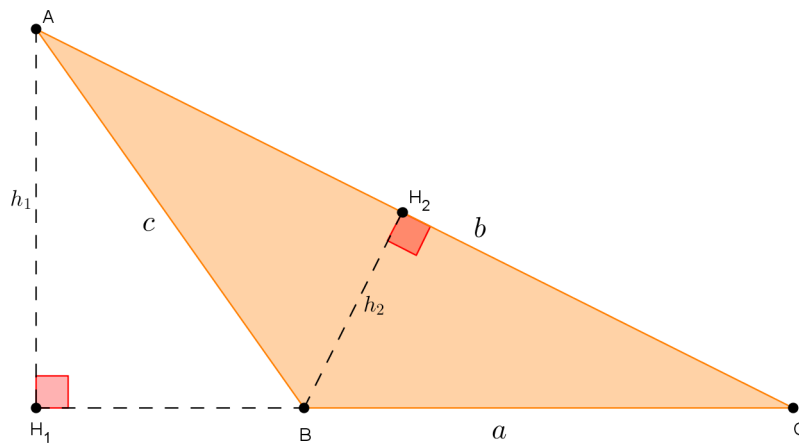


Figura 3.6: Triângulo obtusângulo

- No triângulo ABH_2 , retângulo em H_2 , temos:

$$\text{sen}A = \frac{h_2}{c} \Rightarrow h_2 = c \cdot \text{sen}A$$

- No triângulo BCH_2 , retângulo em H_2 , temos:

$$\text{sen}C = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \text{sen}C$$

Comparando, temos

$$c \cdot \text{sen}A = a \cdot \text{sen}C \Rightarrow \frac{c}{a \cdot \text{sen}C} = \frac{a}{\text{sen}A} \quad (3.3)$$

- No triângulo ABH_1 , retângulo em H_1 , temos:

$$\text{sen}(180^\circ - B) = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \text{sen}(180^\circ - B)$$

Como $\text{sen}(180^\circ - B) = \text{sen}B$, pois $180^\circ - B$ e B são ângulos complementares, vem que

$$h_1 = c \cdot \text{sen}B$$

- No triângulo ACH_1 , retângulo em H_1 , temos:

$$\text{sen}C = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen}C$$

Comparando, temos:

$$c \cdot \text{sen}B = b \cdot \text{sen}C \Rightarrow \frac{c}{\text{sen}C} = \frac{b}{\text{sen}B} \quad (3.4)$$

De 3.3 e 3.4, concluímos que:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Caso 3: Triângulo retângulo

Consideremos o triângulo ABC da 3.1.

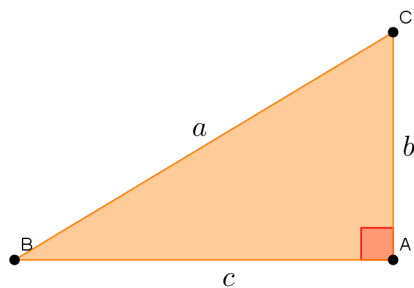


Figura 3.7: Triângulo retângulo

- No triângulo ABC , retângulo em A , temos:

$$\text{sen}B = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\text{sen}B}$$

e

$$\operatorname{sen}C = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

Comparando, temos:

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} \quad (3.5)$$

Como o ângulo $A = 90^\circ$ e $\operatorname{sen}90^\circ = 1$ temos que $\operatorname{sen}A = 1$ e podemos reescrever 3.5 da seguinte forma:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

■

Caso tenhamos um triângulo inscrito em uma circunferência temos que as razões da lei dos senos é igual a $2r$ onde r é o raio desta circunferência, ou seja:

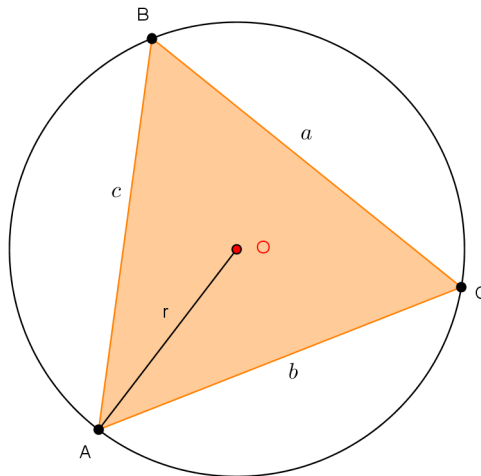


Figura 3.8: Triângulo inscrito numa circunferência

Dado o triângulo ABC da 3.8 inscrito na circunferência de raio r , temos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} = 2r$$

A prova desta afirmação está no apêndice.

O seno também é aplicado na educação básica para se determinar a área de um triângulo qualquer através do seguinte teorema:

Teorema 3.1.4 *A área de um triângulo qualquer é igual a metade do produto entre o produto de dois de seus lados pelo seno do ângulo entre eles.*

Demonstração: Provaremos aqui para o triângulo acutângulo. A prova para os demais triângulo é feita de maneira semelhante e está no apêndice.

Consideremos o mesmo triângulo ABC da figura 3.1. Dela obtivemos que:

$$h_1 = b \cdot \text{sen}C \text{ e } h_1 = c \cdot \text{sen}B.$$

Como a área S do triângulo ABC é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1$$

vem que:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}C \text{ e } S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen}B$$

A área do triângulo ABC também é dado por

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_2$$

e como também encontramos que

$$h_2 = a \cdot \text{sen}C \text{ e } h_2 = c \cdot \text{sen}A$$

temos que:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \text{sen}C \text{ e } S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}A.$$

■

3.2 Definição da função seno vista no ensino médio

Embora no 9º ano (antiga 8ª série), quando o aluno estuda o seno de um ângulo, ele já tenha estudado funções, não se faz a conexão entre esses dois conteúdos. Essa ligação só é feita pela primeira vez no 1º ano do ensino médio quando já se define o seno de uma forma mais ampla, usando o ciclo trigonométrico o que permite falar em seno de ângulos negativos, maiores que 90º entre outras coisas. Antes de definir a função seno no ensino médio a maior parte (se não todos) dos livros didáticos fala sobre arcos, ângulos e o ciclo trigonométrico conceitos importantes para se entender a definição como é colocada

3.2.1 Conceitos Iniciais

Arcos e ângulos

Definição 3.2.1 (*Arco geométrico*) Arco geométrico é cada uma das duas partes da circunferência delimitada por dois de seus pontos, inclusive.

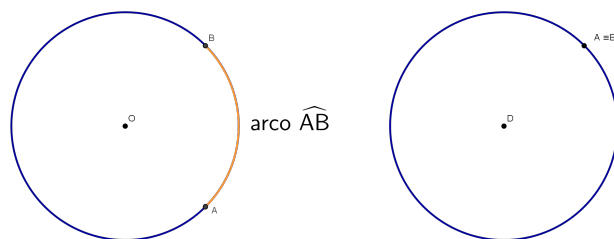


Figura 3.9: Arco AB

Arco e ângulo central

Todo arco de circunferência tem um ângulo central que o subtende e este tem o vértice no centro desta circunferência

Medida de um arco

- Grau é o arco unitário que equivale a $1/360$ da circunferência que o contém.
- Radiano é o arco cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém.

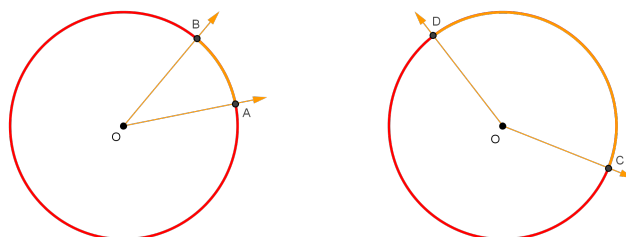


Figura 3.10: Ângulo Central

Circunferência trigonométrica

Os eixos Ox e Oy do plano cartesiano dividem a circunferência, de centro na origem e raio unitário, em quatro arcos de mesma medida $\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Esses eixos também dividem o plano em quatro regiões, denominadas quadrantes, e numeradas no sentido anti-horário como mostra a figura 3.2.1

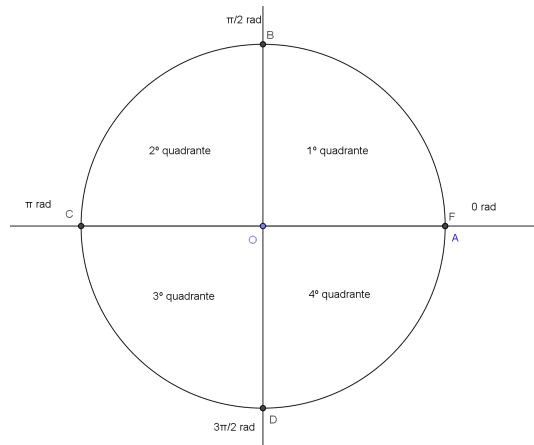


Figura 3.11: Circunferência trigonométrica

3.2.2 Função de Euler

Definição 3.2.2 A função $E : \mathbb{R} \rightarrow W$ que associa a cada número real um ponto P localizado na circunferência W , de centro na origem e raio unitário, conforme ilustrado na figura 3.12 é chamada função de Euler.

É claro que essa associação é possível, pois na prática ela consiste em “enrolar” a reta R sobre a circunferência W de modo que o zero da reta coincida com o ponto $A(1, 0)$, e que o sentido positivo da “reta enrolada” seja o sentido positivo do ciclo, ou seja, o anti-horário.

3.2.3 A função seno

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x , conforme definido na função de Euler. Considerando a projeção ortogonal de P no eixo vertical, a ordenada y_P do ponto P é o seno do arco de medida x .

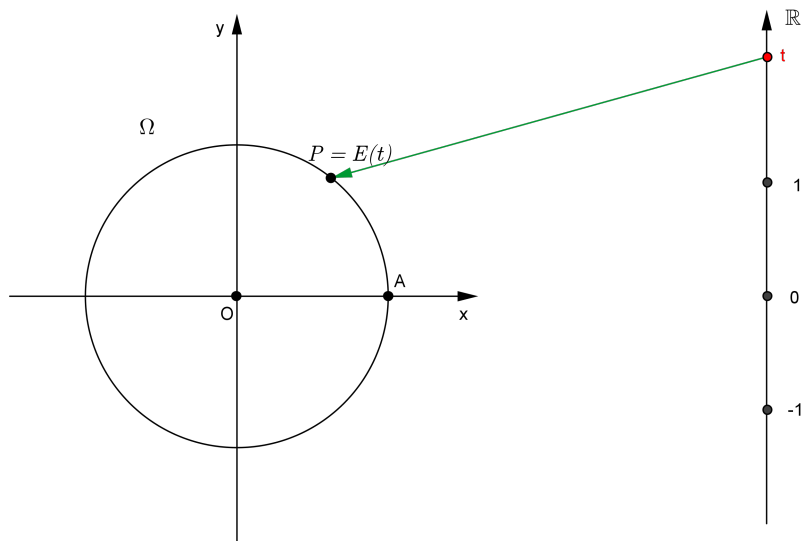


Figura 3.12: Função de Euler

Definição 3.2.3 A função seno é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $y_P = \text{sen}x$, ou seja, $f(x) = \text{sen}x$.

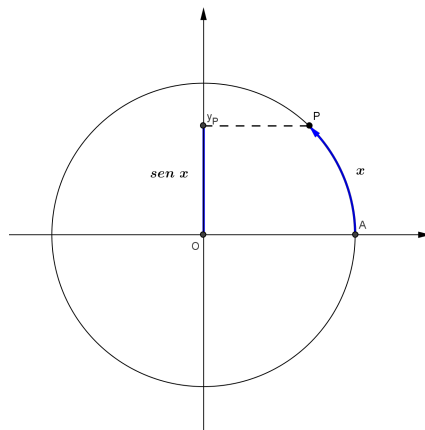


Figura 3.13: Função Seno

Devemos destacar que poucos são os livros do ensino médio que definem a função de Euler e, portanto poucos definem a função seno usando-a, o que acaba deixando uma lacuna, pois, não fica claro a associação entre o ângulo e o número real (o que define o domínio real da função seno). Também não é claro o motivo pelo qual trabalhamos com o ângulo em radianos e não em

grau. Nos livros do ensino médio parece apenas uma troca de unidades de medida de ângulo mas há muito mais que isso por trás desta mudança. É de suma importância que o professor saiba os reais motivos desta troca por esse motivo a seguir falaremos sobre o assunto.

3.3 O porquê de se medir em radianos

Por que quando saímos da geometria do triângulo retângulo e passamos para a trigonometria no círculo trigonométrico deixamos de usar o grau para usar o radiano para medir ângulos e arcos? Sendo mais específico, porque quando definimos o seno como razão usamos o grau para medir e quando definimos a função seno no ciclo trigonométrico usamos o radiano como unidade de medida?

No ensino médio essa “troca” é feita sem justificativas dando a entender que não há motivo algum que a justifique tratando-se apenas de mero capricho. Os livros didáticos não tratam do assunto. Consequentemente os professores, que o tem como referência, também não. E pior: muitos deles desconhecem o motivo da troca e consequentemente suas consequências.

O que vamos falar aqui se estende para as demais funções trigonométricas, mas nos limitaremos a função seno, nosso objeto de estudo.

Vamos começar falando de duas funções distintas, mas que em nossas aulas chamamos ambas de seno.

Com o auxílio de uma calculadora científica construímos a Tabela 3.1, contendo valores da função seno (aqui também estamos chamando as duas de seno, embora como veremos elas são diferentes) em graus e em radianos respectivamente.

x	f(x)	x	g(x)
0,1	0,00174	0,1	0,099
0,2	0,00349	0,2	0,198
0,3	0,00524	0,3	0,295
0,5	0,00873	0,5	0,479
1,0	0,01745	1,0	0,841

Tabela 3.1:

Quando definimos a função seno no ensino médio fazemos isso compondo

a função que, ao número x real associa um ponto P da circunferência com a função que a esse ponto P associa sua respectiva ordenada. Porém quando associamos um número real x a um ponto P da circunferência medimos o arco AP de duas maneiras: em graus e em radianos.

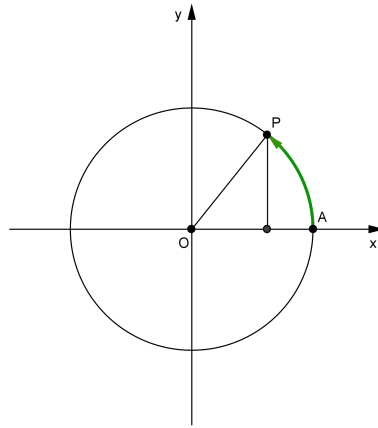


Figura 3.14: Arco AP

O problema de se medir o arco AP (figura 3.14)em graus está no fato de que assim a derivada da função seno é igual a $\frac{\pi}{180} \cdot \cos$ causando assim um desconforto na hora de fazer cálculos, uma vez que equações diferenciais são por demais usadas na modelagem de fenômenos nas mais diversas áreas. Já quando medimos em radianos a derivada da função seno é igual ao cosseno, facilitando os cálculos. Vejamos como isso ocorre. Seja $f(x) = \text{sen}x$ Daí vem que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}x}{h}$$

Usando a fórmula $\text{sen}x - \text{sen}y = 2 \cdot \text{sen} \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ para transformar a subtração acima em produto , temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \text{sen} \frac{x+h-x}{2}}{h} \cdot \cos \frac{x+h+x}{2}$$

que arrumando e usando a propriedade do limite do produto fica

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{2x+h}{2}$$

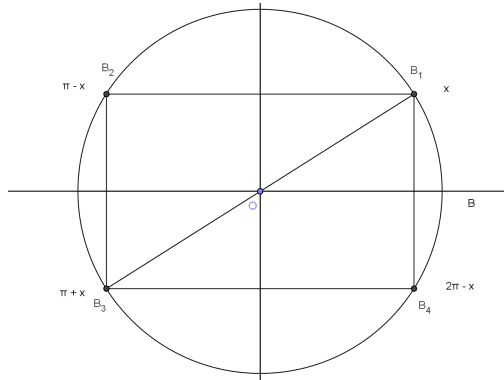


Figura 3.15: Ciclo trigonométrico

Mas,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1 \text{ se } x \text{ é medido em radiano e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = \frac{\pi}{180} \text{ se } x \text{ é medido em grau}$$

Daí resulta que a derivada do $\text{sen}x$ é o $\text{cos}x$ se x está em radiano e $\frac{\pi}{180} \text{cos}x$ se x está em grau. Por isso usamos o radiano e não o grau na definição da função seno.

O gráfico da função seno

Vamos considerar no ciclo trigonométrico os arcos cujas medidas sejam x , $\pi - x$, $\pi + x$ e $2\pi - x$, como mostra a figura 3.3

Tais medidas ocorrem devido a simetria existente das extremidades das extremidades (B_1, B_2, B_3 e B_4) em relação aos eixos e em relação a origem, o que implica em:

$$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}x,$$

$$\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}x, \text{ e}$$

$$\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen}x$$

Portanto para todo $x \geq \frac{\pi}{2}$ sempre existirá um x_1 , pertencente ao 1º quadrante tal que:

$$|\text{sen}x| = \text{sen}x_1$$

Observe que dado um arco θ , o arco $(\theta + 2\pi)$ tem a mesma extremidade e,

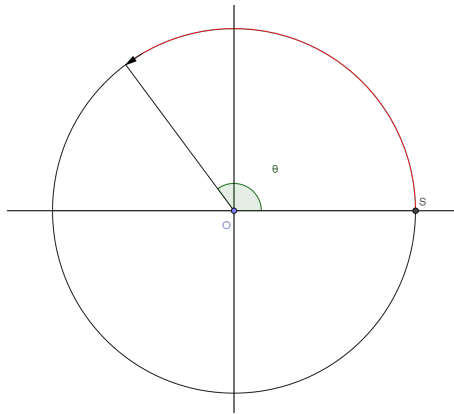


Figura 3.16: Periodicidade da função seno

portanto,

$$\text{sen}\theta = \text{sen}(\theta + 2\pi)$$

.

Se partindo da extremidade do arco θ for dada uma volta completa no ciclo trigonométrico novamente estaremos com um arco que tem a mesma extremidade do θ como mostra a figura 3.3. De maneira geral, temos:

$$\text{sen}\theta = \text{sen}(\theta + 2k\pi)$$

onde k é um número inteiro.

É possível observar através da definição da função seno no ciclo trigonométrico que a função $f(x) = \text{sen}x$ é:

- Crescente nos intervalos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$;
- Decrescente no intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Com todas essas características, e sabendo que

$$-1 \leq \text{sen}x \leq 1,$$

podemos traçar o gráfico da função seno. Para isso construiremos uma tabela contendo arcos notáveis.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
\sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Marcando esse valores no plano obtemos o grafico da função. Observe que pudemos estender o gráfico pois a função seno é periódica de período 2π

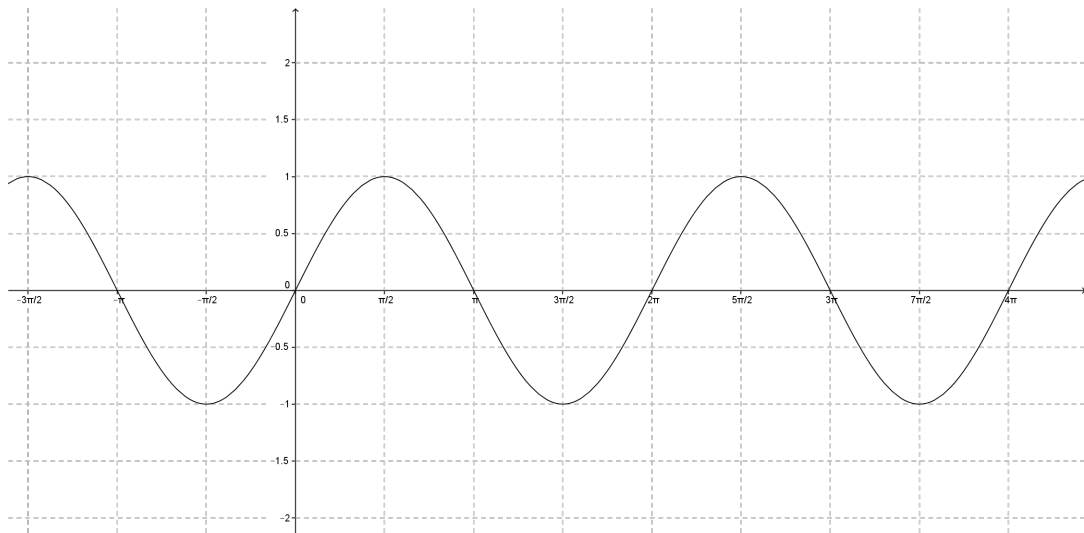


Figura 3.17: Gráfico da função seno

Observe que pudemos estender o gráfico pois a função seno é periódica de período 2π

Capítulo 4

Definição por série

Neste capítulo definimos a função seno como uma série de Maclaurin. Antes disso, porém, abordaremos conceitos necessários para a compreensão desta definição.

Sequências

Podemos pensar em sequência como uma lista ordenada de elementos. Idéia essa que está presente em muitas situações da vida cotidiana como listamos algumas abaixo.

A sequência dos meses do ano

(janeiro, fevereiro, março, ..., dezembro)

A sequência dos números naturais

$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots)$

A sequência dos quatro primeiros múltiplos de 5

$(0, 5, 10, 15)$

A sequência constante

$(2, 2, 2, 2)$

Observe que em todas essas sequências $\{a_n\}$ temos uma certa ordem nos

seus elementos. Assim, por exemplo, o terceiro elemento (a_3) da primeira sequência é março, o da segunda sequência é 2 e o da terceira é 10.

Note que nestes exemplos podemos ver que as sequências podem ser numéricas ou não e com uma quantidade finita ou não de elementos (termos). Desta forma podemos observar que para cada inteiro positivo n , existe um número correspondente a_n e, portanto podemos definir uma sequência numérica infinita da seguinte forma:

Definição 4.0.1 *Uma sequência numérica infinita é uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos e o contradomínio é formado pelos termos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tal que $f(n) = a_n$ e indicada por $\{a_n\}$ ou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Séries

As vezes precisamos somar os termos de uma sequência e nesse caso temos o que chamamos de série.

Definição 4.0.2 *Dada uma sequência numérica infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ denominamos a soma dos seus termos, ou seja, $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ de série infinita.*

Mas quando somamos os termos de uma sequência infinita, o senso comum leva a crer que, as somas parciais $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ se tornam cada vez maiores a medida que aumentamos o número n de termos. Porém se isso fosse verdade a fração geratriz da dízima periódica 0,444... não seria $\frac{4}{9}$ uma vez que 0,444... corresponde a série infinita

$$0,4 + 0,44 + 0,444 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{10^n}$$

Entretanto as somas parciais desta série formam uma nova sequência cujo limite é $\frac{4}{9}$. De maneira geral temos

Definição 4.0.3 *A série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é convergente se $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$ existir como um número real, onde $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$. Caso contrário, a série é dita divergente. S é a soma da série.*

Em geral é difícil encontrar uma fórmula simples para a n -ésima soma parcial S_n que permita encontrar uma soma exata para a série. Mas existem vários testes que permitem determinar, sem encontrar sua soma explicitamente, se

uma dada série é ou não convergente. Não trataremos dela aqui pois nos focaremos apenas na série de interesse para o nosso objeto de estudo e em tudo que é importante para o seu entendimento.

Série de Potências

Definição 4.0.4 *Uma série de potências é uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n \quad (4.1)$$

Onde C_n 's são constantes chamadas coeficiente da série e x é uma variável. Se x for substituído por $x-x_0$ em 4.1, então a série resultante tem a forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_n(x-x_0)^n + \dots \quad (4.2)$$

Que é chamada de série de potências em $x-x_0$ ou série de potências centrada em x_0 ou série de potências em torno de x_0 .

Observe que para cada x fixado as séries (4.1) e (4.2) é uma série de constantes que pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros. Veja que a série de potências é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

Diferente de um polinômio por ter infinitos termos.

Polinômio de Taylor

A idéia do polinômio de Taylor surgiu com o objetivo de aproximar funções. Para obtê-lo pense no seguinte problema.

Dada uma função f diferenciável n vezes em um ponto x_0 , ache um polinômio p de grau n com a propriedade de que o valor de p e suas n primeiras derivadas coincidam com aqueles de f em x_0 . Para facilitar os cálculos iremos expressar o polinômio p em potências de $x-x_0$, ao invés de potências de x , isto

é

$$P(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_n(x-x_0)^n \quad (4.3)$$

Então, queremos encontrar um polinômio dessa forma tal que

$$f(x_0) = P(x_0), f'(x_0) = P'(x_0), f''(x_0) = P''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0) \quad (4.4)$$

Mas

$$P(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_n(x-x_0)^n$$

$$P'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \dots + nc_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$P''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-x_0) + \dots + n \cdot (n-1) \cdot c_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$P'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot c_n(x-x_0)^{n-3}$$

$$P^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot c_n$$

Portanto, para satisfazer (4.3) devemos ter

$$f(x_0) = P(x_0) = c_0$$

$$f'(x_0) = P'(x_0) = c_1$$

$$f''(x_0) = P''(x_0) = 2 \cdot c_2 = 2!c_2$$

$$f'''(x_0) = P'''(x_0) = 3 \cdot 2c_3 = 3!c_3$$

$$f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot c_n = n!c_n$$

Logo os coeficientes de $P(x)$ são:

$$C_0 = f(x_0), c_1 = f'(x_0), c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

O polinômio que obtemos pela substituição destes coeficientes em (4.4) é chamado de n -ésimo polinômio de Taylor em torno de x_0 .

Definição 4.0.5 Se f puder ser diferenciada n vezes em x_0 , então

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

é definido como o n -ésimo polinômio de Taylor em torno de x_0 . No caso em que $x_0 = 0$ o polinômio fica

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

E neste caso, chamaremos de polinômio de Maclaurin.

Usando a convenção de que $f^{(0)}(x_0)$ denota $f(x_0)$ e a notação $f^{(k)}(x_0)$ para

denotar a k -ésima derivada de f em torno de x_0 podemos definir as séries de Taylor e de Maclaurin.

Definição 4.0.6 Se f tiver derivadas de todas as ordens em x_0 então chamamos a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \dots$$

De série de Taylor para f em torno de x_0 . Em particular, quando $x_0 = 0$, a série fica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \dots$$

E neste caso, chamaremos de série de Maclaurin para f em torno de zero.

Raio de Convergência

Quando substituimos a variável x em uma série de potências por um valor numérico, então a série passa a ser numérica. Precisamos então determinar para quais valores de x a série converge.

Teorema 4.0.7 Para uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$ apenas uma das afirmações seguintes é verdadeira.

- A série converge apenas para $x = x_0$.
- A série converge para todos os valores de x .
- Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - x_0| < R$ e diverge se $|x - x_0| > R$

O número R no caso (c) é chamado raio de convergência da série. Com ele fica definido o intervalo de convergência de uma série de potências que consiste em todos os valores de x para os quais a série converge. Nos casos (a) e (b), por convenção, os raios de convergência são $R = 0$ e $R = \infty$ respectivamente o que acarreta num intervalo de convergência que consiste apenas num único ponto x_0 em (a) e $(-\infty, \infty)$ em (b). Já no caso (c) temos quatro intervalos de convergência possíveis:

$$(x_0 - R, x_0 + R), [x_0 - R, x_0 + R], [x_0 - R, x_0 + R) \cup (x_0 - R, x_0 + R]$$

Convergência da série de Taylor

Seja uma função f que possui derivadas de todas as ordens. Para ilustrar, consideremos a função $g(x) = e^x$ que possui esta característica. Observe o gráfico da função g e os polinômios de Taylor ($T_n(x)$) de graus 1, 2, e 3 para esta função em torno de zero:

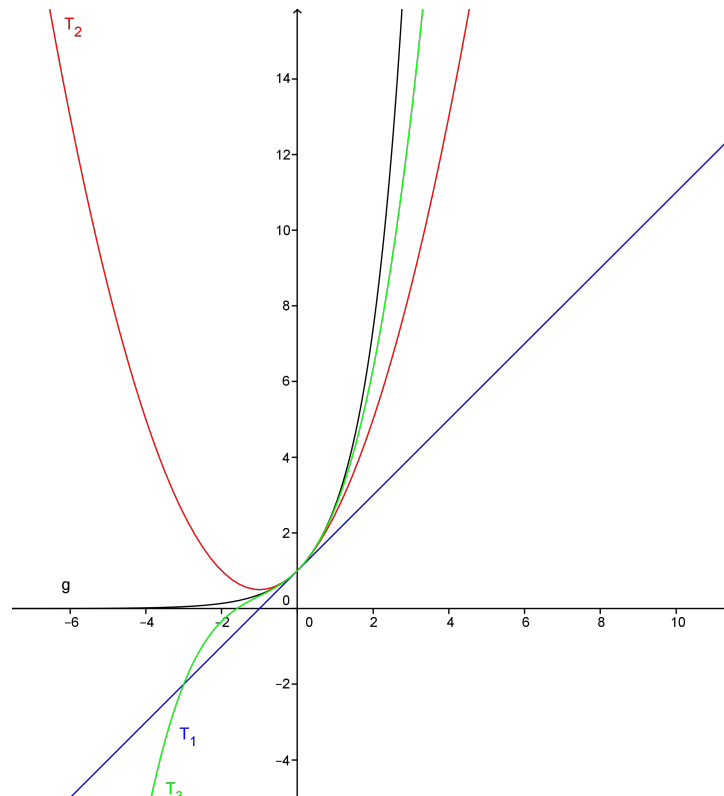


Figura 4.1:

Quando n aumenta, $T_n(x)$ parece aproximar a função g . Isso sugere que e^x é igual a soma de sua série de Taylor, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$.

Mas o n -ésimo polinômio de Taylor é a n -ésima soma parcial da série de Taylor. Desta forma podemos afirmar que a série de Taylor para a função g em torno de zero converge no ponto x para $g(x)$.

Generalizando, $f(x)$ é a soma de sua série de Taylor se

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \quad (4.5)$$

Se considerarmos a diferença entre $f(x)$ e seu n -ésimo polinômio de Taylor em torno de x_0 e chamarmos de n -ésimo resto (R_n) para f em torno de x_0 denotada

por

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

que podemos escrever como

$$f(x) = R_n(x) + T_n(x)$$

ou ainda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [T_n(x) + R_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} R_n(x)$$

Logo, se $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ então $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ e portanto $f(x)$ é a soma de sua série de Taylor. Temos então o seguinte Teorema

Teorema 4.0.8 *Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de grau n de f em x_0 , e $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ para $|x - x_0| < R$, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - x_0| < R$.*

Geralmente para mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ usamos a desigualdade de Taylor

Teorema 4.0.9 *Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x - x_0| \leq d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \text{ para } |x - x_0| \leq d.$$

Para demonstrar esse teorema usaremos as seguintes propriedades de $R_n(x)$. Elas estão demonstradas no apêndice

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0 \quad (4.6)$$

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \text{ para todo } x \text{ em } I \quad (4.7)$$

Por hipótese, f pode ser diferenciada $n+1$ vezes em um intervalo I contendo o ponto x_0 e que

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad (4.8)$$

para todo x em I . Queremos mostrar que

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

para todo x em I , onde

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Consideraremos $x \geq x_0$ para simplificar. O cálculo para o outro caso é feito de maneira semelhante.

De (4.8), temos

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M$$

e usando (4.7), obtemos

$$R_n^{(n+1)}(x) \leq M$$

o que implica

$$-M \leq R_n^{(n+1)}(x) \leq M$$

integrando de x_0 a x temos

$$\int_{x_0}^x -M dt \leq \int_{x_0}^x R_n^{(n+1)}(t) dt \leq \int_{x_0}^x M dt \quad (4.9)$$

De (4.6) tem-se que $R_n^n = 0$, portanto

$$\int_{x_0}^x R_n^{(n+1)} dt = R_n^n(x) - R_n^n(x_0) = R_n^n(x)$$

Logo fazendo as integrações em (4.9), obtemos

$$-M(x - x_0) \leq R_n^n(x) \leq M(x - x_0) \quad (4.10)$$

Substituindo x por t em (4.10) e integrando de x_0 até x temos

$$\frac{-M}{2}(x - x_0)^2 \leq R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(x_0) \leq \frac{M}{2}(x - x_0)^2$$

Mas , novamente de 4.6 temos que $R_n^{(n-1)}(x_0) = 0$, logo

$$\frac{-M}{2}(x-x_0)^2 \leq R_n^{(n-1)}(x) \leq \frac{M}{2}(x-x_0)^2$$

Continuando esse processo, após $n + 1$ integrações iremos obter

$$\frac{-M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \leq R_n(x) \leq \frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (4.11)$$

Como, por hipótese, $x \geq x_0$, temos

$$|x-x_0| = x-x_0$$

e portanto a desigualdade (4.11) pode ser escrita assim

$$\frac{-M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \leq R_n(x) \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}$$

ou ainda

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}$$

4.1 Definição da função seno usando a série de Maclaurin

Como a função seno e suas derivadas existem para $x = x_0$ podemos representá-la pela série de Maclaurin. Para isso basta calcular suas derivadas e o valor destas para $x = 0$.

$$f(x) = \text{sen } x \implies f(0) = 0$$

$$f'(x) = \text{cos } x \implies f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\text{sen } x \implies f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\text{cos } x \implies f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \text{sen } x \implies f^{(4)}(0) = 0$$

⋮

⋮

Logo, a série de Taylor no ponto $x = 0$, ou seja a série de Maclaurin, de $\text{sen} x$ é

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (4.12)$$

Agora vamos mostrar que ela representa a função $\text{sen} x$. Como $|\cos x| \leq 1$, $|\text{sen} x| \leq 1$ e $f^{(n+1)}(x)$ é $\cos x$ ou $\text{sen} x$ temos que $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ para todo x . Tomemos então $M = 1$ na desigualdade de Taylor:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

pelo Teorema do confronto (enunciado no apêndice)

$$|R_n(x)| \rightarrow 0.$$

Donde segue que

$$R_n(x) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

e portanto, pelo teorema (4.0.9)

$\text{sen} x$ é igual à soma de sua série de Maclaurin.

Capítulo 5

A função seno definida usando a exponencial complexa

Exponencial complexa

Nosso objetivo nessa seção é dar significado para a expressão e^z quando $z = x + iy$ ou um número complexo. Vamos aplicar a série de Maclaurin que vimos no capítulo anterior para a função e^x . Note que:

$$f(x) = e^x \implies f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \implies f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \implies f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \implies f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \implies f^{(4)}(0) = 1$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \implies f^{(n)}(0) = 1$$

Como

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Para $f(x) = e^x$, temos:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + 1 \cdot x + \frac{1 \cdot x^2}{2!} + \frac{1 \cdot x^3}{3!} + \frac{1 \cdot x^4}{4!} + \dots + \frac{1 \cdot x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

E chegamos a função e^x expressa por uma série de potências. Euler conhecia esse resultado e também o trabalho de De Moivre sobre números complexos, então trocou o expoente x por ix , onde i é a unidade imaginária, e assim obteve:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots + \frac{(ix)^n}{n!}$$

logo

$$e^{ix} = 1 + x \cdot i - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}i + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}i - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!}i + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

Podemos escrever também

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

Como sabemos que:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots \quad \text{e} \quad \text{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

chegamos em:

$$e^{ix} = \cos x + i \text{sen} x$$

Sabemos que $e^{q+h} = e^q \cdot e^h$ se q e h forem reais. Estendendo essa propriedade para q e h complexos e usando o fato de que $e^{iy} = \cos y + i \text{sen} y$ temos que:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \text{sen} y)$$

Podemos então definir a exponencial complexa

Definição 5.0.1 Dado o complexo $z = x + iy$, definimos a exponencial de z por

$$e^z = e^x (\cos y + i \text{sen} y)$$

A função exponencial complexa

Nesta seção vamos, usando o que vimos na seção anterior, definir a função esponencial complexa e mostrar algumas de suas propriedades. Com a definição de exponencial complexa visto na seção anterior odemos definir a função exponencial complexa:

Definição 5.0.2 A função exponencial é a função $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\exp z = e^z$$

É uma consequência direta da definição:

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}z} = e^x$$

para todo $z = x + iy$ complexo, donde $\operatorname{Re}z$ é a parte real de z o que implica que

$$\exp z \neq 0$$

para todo z complexo.

Veja algumas das propriedades da função exponencial complexa:

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w$$

para todo z e w complexos.

Vejam

I) Sendo $z = x + iy$ e $w = a + ib$, temos que:

$$\begin{aligned} \exp(z + w) &= e^{(z+w)} = e^{(x+a)+i(b+y)} = e^{x+a} \cdot e^{i(b+y)} = e^x \cdot e^a \cdot [\cos(b+y) + i \operatorname{sen}(b+y)] = \\ &= e^x \cdot e^a \cdot [\cos b \cdot \cos y - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} y + i \operatorname{sen} b \cdot \cos y + i \operatorname{sen} y \cdot \cos b] = \\ &= e^x \cdot e^a \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y) \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b) = \\ &= e^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y) \cdot e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b) = e^z \cdot e^w = \\ &= \exp z \cdot \exp w. \end{aligned}$$

II) O período da função exponencial complexa é $2\pi i$, veja:

$$\begin{aligned} \exp(z + 2\pi i) &= \exp z \cdot \exp 2\pi i = \exp z \cdot e^{2\pi i} = \\ &= \exp z \cdot (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = \exp z \cdot 1 = \\ &= \exp z. \end{aligned}$$

note que diferente do que acontece no caso real, é possível ter $e^z = e^w$ com $z \neq w$.

Por exemplo, $e^0 = e^{2\pi i} = 1$

A função e a exponencial complexa

Agora que já conhecemos a função complexa e portanto sabemos que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Fazendo o expoente igual a $-ix$ obtemos

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x.$$

E ainda

$$\begin{aligned} e^{ix} - e^{-ix} &= \cos x + i \operatorname{sen} x - (\cos x - i \operatorname{sen} x) \\ &= 2i \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

o que implica que

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Agora com essa nova definição ampliamos o domínio da função seno para o conjunto dos números complexos.

Observe que de maneira semelhante podemos encontrar a cosseno. Veja:

$$\begin{aligned} e^{ix} + e^{-ix} &= \cos x + i \operatorname{sen} x + (\cos x - i \operatorname{sen} x) \\ &= 2 \cos x \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{aligned}$$

Essas definições do seno e cosseno são conhecidas como identidades de Euler. Se voltarmos para $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ e substituirmos x por π , teremos:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$$

portanto

$$e^{\pi i} = -1$$

ou ainda

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Esse fantástico resultado que relaciona os mais notáveis números da matemática: e e π irracionais, o i , imaginário, 1 e o zero é conhecido como relação de Euler.

Chamamos atenção para o fato de que, além desta definição, com domínio complexo preservar quase todas as propriedades da função seno, algumas delas são demonstradas de maneira mais simples, apenas com manipulação algébrica. Para ilustrar, vamos demonstrar algumas. Para x, y e $z \in \mathbb{C}$, temos:

a) $\text{sen}^2 z + \text{cos}^2 z = 1$.

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 z + \text{cos}^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} = \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

b) $\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \text{cos } y + \text{cos } x \text{sen } y$.

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} \text{sen } x \text{cos } y + \text{cos } x \text{sen } y &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right) + \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \right) \\ &= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}}{4i} + \frac{e^{ix}e^{iy} - e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}}{4i} \\ &= \frac{2e^{i(x+y)} - 2e^{-i(x+y)}}{4i} \\ &= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} \\ &= \text{sen}(x + y) \end{aligned}$$

■

c) $\text{sen}(-z) = \text{senz}$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}\text{sen}(-x) &= \frac{e^{i(-x)} - e^{-i(-x)}}{i2} = \\ &= \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i} = \\ &= -\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) = \\ &= \text{senz.} \blacksquare\end{aligned}$$

Capítulo 6

A função seno definida através de uma equação diferencial

Seja a função $f(x) = \text{sen}x$ cujas derivadas primeira e segunda são $-\cos x$ e $-\text{sen}x$ respectivamente. Note que:

$$f''(x) + f(x) = 0 \text{ pois } f''(x) = -\text{sen}x.$$

Pela definição de equação vista no 7º ano do ensino fundamental não resta dúvida que $f''(x) + f(x) = 0$ é uma equação. Porém suas incógnitas (são duas) são uma função e sua derivada segunda, ambas as funções de uma única variável independente (no caso, x). Claro que uma de suas soluções é a função $s(x) = \text{sen}x$ por construção. Mas ela é única? Como encontrá-la? Antes de responder estas questões é necessário falar sobre os tipos de equações diferenciais, pois a resolução destas depende de sua classificação.

Equação diferencial

Definição 6.0.3 *Equação diferencial é toda equação cujas incógnitas são funções e que contem ao menos uma derivada ou diferencial destas funções.*

Exemplos:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

$$y''(x) + 2y'(x) - 5y(x) + 6 = 0.$$

Tipos de equações diferenciais

- Equações diferenciais ordinárias (EDO)

Definição 6.0.4 *Equações diferenciais ordinárias são aquelas que contêm apenas funções de uma variável e suas derivadas.*

Exemplo:

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

- Equações diferenciais parciais

Definição 6.0.5 *Equações diferenciais parciais são aquelas que contêm funções com mais de uma variável e suas derivadas.*

Exemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0.$$

Ordem de uma equação diferencial ordinária

A ordem de uma equação diferencial ordinária é determinada pela ordem da derivada de mais alta ordem que existe na equação.

Exemplos:

$$y'''(x) + 2y''(x) - y(x) = 3 \text{ EDO de } 3^{\text{a}} \text{ ordem.}$$

$$y''(x) + y(x) = 0 \text{ EDO de } 2^{\text{a}} \text{ ordem.}$$

Equações lineares de ordem n

Definição 6.0.6 *Uma equação linear de ordem n é da forma:*

$$f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = k(x)$$

Onde $k(x)$ e os coeficientes $f_i(x)$ são funções de x .

Se $k(x) = 0$ a equação linear é dita homogênea, caso contrário ($k(x) \neq 0$) ela é dita não homogênea.

Agora já temos condições de classificar a equação objeto do nosso estudo. De acordo com as definições vistas a equação $f''(x)+f(x) = 0$ é ordinária, linear, homogênea e de 2ª ordem.

Essa classificação é importante, pois, como já foi dito, cada EDO tem uma maneira diferente de se resolver que depende de sua classificação.

Solução de uma EDO

Definição 6.0.7 *A solução de uma equação diferencial é uma função que não contém derivadas nem diferenciais e que satisfaz a equação dada, ou seja, a função que, substituída na equação dada, a transforma em uma identidade.*

A solução mais geral possível que admite uma equação diferencial ordinária é denominada solução geral, enquanto qualquer outra solução é chamada de solução particular.

Exemplo:

$$y = e^{-x} \text{ é uma solução particular de } y' + y = 0.$$

Já sabemos, por construção, que $y = \text{sen}x$ é uma solução particular da equação $y'' + y = 0$. Mas veremos como encontrá-la, ou seja, como resolver a equação $y'' + y = 0$.

Problema de valor inicial(PVI)

Definição 6.0.8 *Uma equação diferencial satisfazendo algumas condições adicionais é denominado problema de valor inicial(PVI).*

Exemplo:

$$y'' + y = 0 \text{ com } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1$$

Solução de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

Nesta seção veremos como encontrar a solução de uma equação diferencial

linear homogênea e de segunda ordem , ou seja, uma equação do tipo:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x) = 0, \text{ com } P(x) \neq 0 \quad (6.1)$$

Teorema 6.0.9 Se y_1 e y_2 forem ambas soluções da equação (6.1), então a função

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer, também será uma solução da Equação (6.1).

Demonstração: Por hipótese y_1 e y_2 são soluções da equação (6.1), então

$$P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1 = 0$$

$$P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2 = 0$$

Usando as regras de derivação, vem que

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2)$$

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2)$$

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = c_1[P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1] + c_2[P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2]$$

$$c_1(0) + c_2(0) = 0 \text{ Logo, } y = c_1y_1 + c_2y_2 \text{ é uma solução de equação (6.1)}$$

■

Outro teorema do qual fazemos uso diz que a solução geral é uma combinação linear de duas soluções linearmente independentes y_1 e y_2 , isto é, nem y_1 nem y_2 são múltiplos por constantes um do outro.

Teorema 6.0.10 Se y_1 e y_2 forem soluções linearmente independentes da equação (6.1) com $P(x)$ diferente de zero, então a solução geral será dada por

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer.

Quando os coeficientes da equação (6.1) são constantes, isto é, se for da forma

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (6.2)$$

onde a, b e c são constantes e a diferente de zero. Fica mais fácil encontrar soluções particulares.

Se olharmos bem veremos que $y = e^{rx}$ cujas derivadas primeira e segunda são, respectivamente, $y' = re^{rx}$ e $y'' = r^2e^{rx}$ é uma solução de Equação (6.2) pois substituindo essas expressões nela temos

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Como e^{rx} é diferente de zero, temos que, $y = e^{rx}$ é uma solução da Equação (6.2) se r for raiz da equação

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{6.3}$$

Observe que a Equação(6.3) pode ser obtida da equação diferencial substituindo-se y'' por r^2 , y' por r e y por 1 .Ela é chamada de equação característica ou equação auxiliar. Note que a equação auxiliar (6.3) é uma equação do segundo grau cujas raízes r_1 e r_2 podem ser obtidas através da fórmula:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{6.4}$$

Consideramos três casos

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$.

Neste caso $y_1 = e^{r_1x}$ e $y_2 = e^{r_2x}$ são duas soluções linearmente independentes da Equação (6.2) e portanto pelo teorema (6.0.11), temos

Se as raízes r_1 e r_2 da equação característica $ar^2 + br + c = 0$ forem reais e distintas, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ é

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$.

Neste caso as raízes da equação auxiliar são reais e iguais. Denotando-as por r temos, que $y_1 = e^{rx}$ e $y_2 = xe^{rx}$ são soluções particulares da Equação (6.2)(isso pode ser facilmente verificado) e temos o seguinte fato:

Se a equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ tem apenas uma raiz real r , então a solução geral da Equação (6.2) é

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}.$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$.

Neste caso as raízes da equação auxiliar r_1 e r_2 são números complexos que podemos escrever $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ e, em resumo, temos o seguinte fato:

Se as raízes da equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ forem os números complexos $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, então

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

é a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$.

Definição da função seno usando um problema de valor inicial

Agora que vimos alguns conceitos sobre a teoria das equações diferenciais que são fundamentais para entender a definição da função seno por meio de uma EDO podemos, enfim defini-la:

Definição 6.0.11 *A solução do problema de valor inicial expresso por*

$$y''(x) + y(x) = 0, \tag{6.5}$$

com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ é a função

$$y = \operatorname{sen} x.$$

Vejam os

A solução auxiliar da Equação (6.5) é $r^2 + r = 0$, cujas raízes são $r_1 = i$ e $r_2 = -i$ com $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ logo, pelo que vimos no caso 3 da seção anterior a

solução geral da Equação (6.5) é

$$y(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}$$

cuja derivada é dada por

$$y'(x) = ic_1 e^{ix} - ic_2 e^{-ix}.$$

Usando as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} ic_1 - ic_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$c_1 = \frac{1}{2i} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{-1}{2i},$$

e portanto a solução geral é

$$y(x) = \frac{1}{2i} e^{ix} - \frac{1}{2i} e^{-ix},$$

ou ainda

$$y(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Como

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \operatorname{sen}x,$$

temos que

$y(x) = \operatorname{sen}x$ é a solução do problema de valor inicial em questão.

Capítulo 7

Discursão acerca das várias definições da função seno e a possibilidades de utilizá-las

Muitas são as questões a serem observadas quando se decide acrescentar um novo conteúdo ao currículo ou mesmo quando se pretende abordar um conteúdo já existente de outra forma, o que é o caso, quer seja pela substituição quer seja pela incorporação de novos elementos aos já existentes.

A primeira questão pertinente é se há mesmo a necessidade de mudança. No nosso caso específico a função seno, como está definida, apresenta limitações. Apesar de ser definida com domínio real, poucos são os elementos do seu domínio pra quem podemos encontrar a respectiva imagem.

A primeira abordagem do seno é no ensino fundamental e ela acontece sem nenhuma associação com função, embora fosse possível defini-la como tal, bastando para isso reduzir seu domínio. Concordamos com essa dissociação, pois o seno de um ângulo agudo definido como uma razão trigonométrica cumpre muito bem o seu papel, que basicamente é o de encontrar distâncias inacessíveis (no caso dos problemas resolvidos pelos alunos, distâncias desconhecidas) que afinal foi como e com o objetivo que o seno surgiu.

No ensino médio, o seno é pela primeira vez definido como função usando para isso o ciclo trigonométrico seguindo o mesmo caminho do seu desenvolvimento histórico como orienta os PCNs.

“ O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo.(Brasil, 1997, p.19)

Para esta definição são poucos os livros que utilizam a função de Euler deixando confusa a idéia de um domínio real e de pouca percepção o fato da composição que origina a função onde através da função de Euler associamos a cada número real um único ponto da circunferência e depois a este associamos a sua ordenada.

Os livros também não comentam o porquê de usar o radiano ao invés do grau o que sugere que essa mudança é por mero capricho quando na verdade há razões operacionais que a motiva. É importante que o professor saiba disso, pois assim ele dará o devido tratamento ao tema.

Diante do exposto fica claro que é preciso melhorar a abordagem da função seno na educação básica, embora ela atenda boa parte da demanda dos alunos e seja compatível com os conhecimentos prévios deles há limitações que dificultam seu entendimento de forma plena. A função seno poderia, se incorporadas as definições alternativas, ser vista em várias séries e não só no 9º ano do ensino fundamental e no 1º ano do ensino médio. O seu estudo poderia ser retomado, com outro enfoque no 3º ano do ensino médio, por exemplo, com qualquer uma das novas definições apresentadas aqui, pois os alunos já teriam visto números complexos, função exponencial, fatorial entre outros assuntos necessários para uma melhor compreensão destas definições. Essa forma de apresentar o conteúdo em espiral, onde o conteúdo é retomado em várias séries ou até mesmo em vários momentos da mesma série permite um aprendizado mais efetivo, pois permite estabelecer conexões com vários outros conteúdos permitindo que o aluno aplique o seu conhecimento num leque bem maior de situações tornando o ensino dinâmico e prazeroso.

Além disso, ao trazer a produção matemática "contemporânea", com as descobertas de Euler, pra sala de aula o aluno desfaz aquela idéia errônea de que a matemática já está pronta e acabada.

“Nunca é demais insistir que não se trata de se incorporar elementos da ciência contemporânea simplesmente por conta de sua importância instrumental utilitária. Trata-se, isso sim, de se prover os alunos de condições para desenvolver uma visão de mundo atualizada, o que inclui uma compreensão mínima das técnicas e dos princípios científicos em que se baseiam. (Brasil, 1997, p.8)

Abrir mão de utilizar essa matemática contemporânea com a desculpa de que a mesma demanda conhecimentos mais avançados devendo ficar a cargo do ensino superior abordá-los é subestimar a capacidade dos alunos e vai de encontro às orientações dos PCNs

“Por fim cabe à matemática do ensino médio apresentar ao aluno conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. (Brasil, 1997, p.41)

Mesmo porque é possível, usando uma linguagem mais simples e abrindo mão da forma axiomática como a matemática é comumente abordada, trazer para a educação básica estas definições até então vistas apenas no ensino superior uma vez que as mesmas trariam uma visão ampliada sobre o tema, permitindo ao aluno fazer associações, novas aplicações encontrar respostas para indagações comuns ao tema mas nunca respondidas contribuindo assim para o desenvolvimento do aluno.

“A seleção e organização de conteúdos não deve ter como critério único a lógica interna da matemática. Deve-se levar em conta sua relevância social e a contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno. Trata-se de um processo permanente de construção. (Brasil, 1997, p.19)

Quando abordamos a função seno usando séries o aluno que antes recorria a uma tabela pronta para saber o valor do seno para a maioria dos pontos do seu domínio agora pode construir esta tabela se apropriando do conhecimento e participando ativamente do processo de aprendizagem o que segundo os PCNs é importante para quem está estudando matemática.

“ A atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. (Brasil, 1997, p.19)

Ainda com relação a definição da função seno pela expansão da serie de Maclaurin vimos que ela demanda conhecimentos sobre séries, convergência,

raio de convergência entre outros e que por isso dedicamos algumas páginas deste trabalho para falar sobre estes assuntos. Claro que o professor tem que conhecer e entender estes conteúdos e ao aluno tem que ser mostrado esses “conhecimentos subsidiários” mas a forma como o aluno da educação básica tem que vê-lo é diferente daquela que foi mostrada aqui sobre pena de tornar tal abordagem inviável. Defendemos a idéia de que o professor ao trabalhar com esses conteúdos na educação básica o faça de forma intuitiva e ilustrativa deixando de lado demonstrações e em certos momentos a forma axiomática de abordar a matemática. Um ótimo recurso para falar sobre convergência, por exemplo, é o software Geogebra. Com ele pode-se facilmente fazer o aluno perceber, de forma ilustrativa, que a série de Maclaurin para $\sin x$ converge para a função $y = \sin x$.

Não seria a primeira vez que estaríamos abrindo mão de certas informações, de demonstrar ou ser matematicamente rigoroso. No 8º ano do ensino fundamental, por exemplo, dizemos que a dízima $0,555\dots$ é igual a $\frac{5}{9}$ sem nem falar sobre série e convergência. Da mesma forma no 2º ano do ensino médio também pouco falamos sobre convergência de séries quando dizemos que a soma dos termos da progressão geométrica

$$\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$$

é igual a 4 e a encontramos através da fórmula

$$S = \frac{a_1}{1 - q}, (\text{que só vale quando } |q| < 1)$$

onde S é a soma dos termos da progressão, a_1 é o primeiro termo da progressão e q é a razão da progressão.

A definição da função seno através da exponencial pode ser abordada usando apenas conceitos vistos na educação básica desde que o ponto de partida seja a própria definição, o que torna esta, das novas definições, a de mais fácil aplicabilidade. Outro ponto importante nesta abordagem é que ela amplia o domínio da função seno ao corpo dos complexos e também torna muitas de suas propriedades de fácil demonstração bastando apenas fazer manipulações algébricas.

A definição para função seno que hoje está mais distante da educação básica

é a que usa equações diferenciais, pois é necessário desenvolvê-la de forma fragmentada e seu uso estaria restrito ao último ano do ensino médio, ano em que os alunos vêem derivadas. Para resolver essas equações temos que primeiro classificá-las, pois para cada tipo de equação diferencial temos uma maneira de resolvê-la. Até mesmo a solução de uma equação deste tipo tem particularidades que precisam ser trabalhadas, o que demandaria mais tempo e um espaço maior no currículo para poder trabalhar estes conceitos que são de fácil entendimento, mas que representam uma parte da teoria extensa das equações diferenciais.

Conclusão

Diante do que foi apresentado neste trabalho não resta dúvida de que é preciso rever a maneira de abordar a função seno na educação básica. É claro que o seno como razão trigonométrica resolve, e muito bem, situações que recaem num triângulo retângulo e que a abordagem do seno como uma função de domínio real definida no ciclo trigonométrico torna essa ferramenta muito mais poderosa, capaz de resolver uma gama bem maior de problemas. Mas estas definições apresentam limitações básicas que dificultam a aprendizagem pois acabam tornando-a mais mecânica onde o aluno para obter o seno de um ângulo de 32° , por exemplo tem que recorrer a uma tabela pronta sem nem ao menos saber como ela foi feita. E caso ele queira saber a imagem da função seno para o um ponto do domínio igual a $\sqrt{2}$ nem essa tabela ele tem.

Claro, que como foi visto, essas novas definições traria o “desconforto” de inserir alguns novos conteúdos (pré-requisitos) necessários ao seu entendimento e sabemos que sempre há resistência quando se fala em adicionar conteúdos, pois o currículo já é extenso e carregado de conteúdos que muitas vezes não tem utilidade para o aluno que pretende ingressar no mercado de trabalho após o ensino médio ou para aquele que vai fazer o curso superior fora da área de exatas. Justamente para que esse não seja o empecilho alegado para não inovar o currículo no que tange a função seno é que usamos uma linguagem simples e acessível, abrindo mão de algumas demonstrações, inclusive. Afinal é preciso ter consciência de que a educação básica atende a duas demandas: A de acesso ao mercado de trabalho e a de viabilizar a continuidade dos estudos com o ingresso na universidade e em ambas não há necessidade direta destas novas abordagens não obstante elas serem úteis uma vez que favorecem o aprendizado do conteúdo que abordam. Além do que se é verdade que não temos no ensino médio turmas inteiras de futuros matemáticos é igualmente verdade que eles estão presentes em quase todas elas. É preciso

mostrar o caminho e deixar que eles o explorem.

Diante deste contexto defendemos uma abordagem da função seno usando estas novas definições sem, no entanto, abandonar as já trabalhadas. Para que as limitações existentes sejam sanadas e novas conexões entre conteúdos sejam exploradas, tornando o aluno mais participativo e questionador favorecendo assim sua aprendizagem. Mas isso como uma forma de complementar o estudo que já é trabalhado, portanto sem a pressão de avaliações sobre o tema, podendo o mesmo ser trabalhado em forma de trabalhos, leituras complementares, seminários etc.

Como qualquer outro conteúdo é necessário que o professor esteja preparado para abordá-lo por isso sugerimos que as licenciaturas já trabalhem estas definições e a maneira de transmiti-las nos cursos de matemática para o ensino na educação básica e que os professores já formados recebam um curso de capacitação afim de que sejam obtidos os melhores resultados.

Apêndice A

Demonstração da lei dos senos

Observe a Figura A.1:

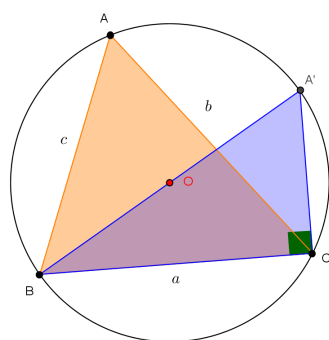


Figura A.1:

Queremos provar que:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R.$$

Temos que o ângulo \widehat{C} é reto pois $\widehat{\text{med}C} = \frac{AB}{2}$ e $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ pois definem o mesmo arco na circunferência.

Portanto $\widehat{\text{sen}A'} = \widehat{\text{sen}A} = \frac{a}{2R}$, logo podemos concluir que:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = 2R$$

Analogamente,

$$\frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = 2R \text{ e } \frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R$$

Apêndice B

Demonstração das propriedades do resto da série Taylor

Queremos mostrar que

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

Demonstração:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Reescrevendo temos:

$$R_n(x) = f(x) - \left[\frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} (x - x_0)^0 + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right]$$

Calculando $R_n(x)$ no ponto x_0 , vem que:

$$R_n(x_0) = f(x_0) - [f(x_0) + 0]$$

$$R_n(x_0) = f(x_0) - f(x_0)$$

$$R_n(x_0) = 0$$

De maneira análoga encontraremos que

$$R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

Queremos mostrar que:

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x), \quad \forall x \text{ em } I$$

Demonstração:

$$R_n(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{K!} (x - x_0)^K$$

Derivando temos,

$$R'_n(x_0) = f'(x) - \sum_{k=0}^n K \frac{f^{(k)}(x_0)}{K!} (x - x_0)^{(K-1)}$$

Derivando novamente,

$$R''_n(x_0) = f''(x) - \sum_{k=0}^n k \cdot (k-1) \frac{f^{(k)}(x_0)}{K!} (x - x_0)^{(K-2)}$$

Derivando $n + 1$ vezes temos:

$$R_n^{(n+1)}(x_0) = f^{(n+1)}(x) - \sum_{k=0}^n k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-n) \frac{f^{(k)}(x_0)}{K!} (x - x_0)^{(K-(n+1))}$$

Como $\sum_{k=0}^n k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-n) \frac{f^{(k)}(x_0)}{K!} (x - x_0)^{(K-(n+1))} = 0$, pois um dos fatores $k, k-1, \dots, k-n$ sempre será zero em cada uma das parcelas, temos que:

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

Apêndice C

Enunciado do Teorema do Confronto

Sejam g, h e f funções então, $g \leq f \leq h$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Referências Bibliográficas

- [1] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2008.
- [2] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. *Matemática: Ciência e Aplicações*. 6. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.
- [3] BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy. *MATEMÁTICA 2*. 2. ed. São Paulo: Editora FTD, 1992.
- [4] GENTIL, Nelson; SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GRECO, Antonio Carlos; FILHO, Antônio Bellotto; GRECO, Sérgio Emílio. *Matemática para o 2º grau - Volume 2*. 7. ed. São Paulo: Editora Ática, 1998.
- [5] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Matemática - volume único*. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2005.
- [6] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.. *História da Matemática 2*. ed. : Editora Edgard Blucher, 1974.
- [7] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César . *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [8] CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria - Números Complexos* . 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992.
- [9] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. *Cálculo - volume 1*. 8. ed. Bookman, 2005.
- [10] LIMA, Elon Lages. *Análise Real - Volume 1 - Funções de uma variável*. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

- [11] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise - Volume 1*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [12] LANG, Serge. *Analysis I*. 5. ed. New York: Addison-Wesley Publishing, 1976.
- [13] STEWART, James. *Cálculo*. (tradução Antonio Carlos Gilli Martins e Antonio Carlos Moretti). volume 2. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- [14] COIMBRA, Maria do Carmo. *Equações Diferenciais, uma primeira abordagem*. Porto - Portugal, Faculdade de Engenharia da cidade do Porto, 2008.
- [15] LEITHOLD, Louis. *Cálculo com Geometria Analítica* 3. ed., Editora: Harbra.
- [16] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. *Equações diferenciais aplicadas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [17] LINS NETO, Alcides. *Funções de uma Variável Complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [18] FERNANDEZ, Cecília S.; BERNARDES JR., Nilson C. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008.
- [19] COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. *Funções Seno e Cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador*. São Paulo: PUC, 1997. 174 pag. Dissertação (Mestrado) - Programa de pós-graduação da Pontifícia Universidade Católica, 1997.
- [20] MENDES, Iran Abreu. *A Trigonometria e o seu Ensino: Alguns Fragmentos Dessa História*. Belém: Prog. de Pós-Grad. em Ed. em Ciências e Matemáticas – PPGECEM/UFPA.
- [21] QUINTANEIRO, Wellerson. *Representações e Definições Formais em Trigonometria no Ensino Médio*. Rio de Janeiro: UFRJ, Dissertação de Mestrado. 143 pag. , Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2010.
- [22] BRASIL.MEC.SEMT. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio*. Brasília, 2000.