Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

RAFAEL SEGADAS DOS SANTOS

INTERPRETANDO EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES ATRAVÉS DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Orientadora: Dirce Uesu Pesco

NITERÓI
MAIO/2014

RAFAEL SEGADAS DOS SANTOS

INTERPRETANDO EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES ATRAVÉS DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada por **Rafael Segadas dos Santos** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Dirce Uesu Pesco

Niterói
2014

S237 **Santos, Rafael Segadas dos.**
Interpretando Equações e Inequações Através de Gráficos de Funções / Rafael Segadas Santos. – Niterói, RJ : [s.n.], 2014.

116 f.

Orientador: Profa. Dra. Dirce Uesu Pesco.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2014.

1. Equações e Funções. 2. Inequação. 3. Função (Matemática). 4. Gráfico. I. Título.

CDD 515.25

RAFAEL SEGADAS DOS SANTOS

INTERPRETANDO EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES ATRAVÉS DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada por **RAFAEL SEGADAS DOS SANTOS** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em: 30/05/2014

Banca Examinadora

Profª. Dirce Uesu Pesco - Orientadora

Doutora - Universidade Federal Fluminense

Profª. Maria de Fátima Lins Barbosa de Paiva Almeida

Doutora - Universidade Estadual do Rio de Janeiro

Prof. Mario Olivero Marques da Silva

Doutor - Universidade Federal Fluminense

NITERÓI

2014

DEDICATÓRIA

A todos os apaixonados por matemática e gráficos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus por seu amor incondicional e sua inspiração para realizar esse trabalho.

A minha esposa Priscila Carrati por seu carinho, suporte, ajuda e compreensão.

A meus pais, irmã, sogros, cunhada, concunhado e familiares pelo incentivo.

A orientadora pelo apoio, sugestões e liberdade para ideias.

Aos demais Professores do Programa de Mestrado em Matemática.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes, pela concessão da bolsa.

A Universidade Federal Fluminense por oferecer sua infraestrutura e abraçar com dedicação o Profmat.

RESUMO

Podemos dar significado aos vários tópicos da matemática quando os relacionamos com outros conteúdos. Vamos explorar a interpretação de gráficos de funções como instrumento para a visualização de soluções de equações e inequações. Sugerimos uma tabela que relaciona as diferentes funções elementares a serem estudadas no conjunto de inequações. Parte desse material foi usado para elaborar plano de aulas e aplicado em uma turma do primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática.

Palavras-chave: Equação, inequação, função, gráfico.

ABSTRACT

We can give meaning to many topics of mathematics when we relate them with other contents. We will explore the interpretation of graphs of functions as a tool for visualizing solutions of equations and inequations. In this study, we suggest a table that lists the different elementary functions to be studied in the set of inequations. Part of this material was used to prepare a lesson plan and applied for a class of first-year of undergraduate students of Mathematics.

Keywords: Equation, inequation, function, graph.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

É bem provável que quase todo professor já tenha passado alguma situação onde após apresentar uma equação ou inequação um aluno diga: “Professor não entendi!” ou pergunte: “Para que serve isso?” ou “O que isso significa?”. Acreditamos que podemos utilizar soluções gráficas como uma resposta a esses questionamentos. Através dos gráficos de funções podemos dar mais sentido as igualdades e desigualdades fortalecendo a formação do aluno e dando um suporte ao professor.

Ao relacionar um assunto com outro na matemática podemos ter uma visão panorâmica de toda conjuntura. Por exemplo; sistema linear 2X2 e interseção entre retas; Integral e área; derivada e coeficiente angular; progressão aritmética e função afim, etc. Assim, vamos relacionar equações e inequações com gráficos de funções.

Com o objetivo de auxiliar e também como recurso para professores e alunos, os quais podem aprofundar seus conhecimentos em equações e inequações, o presente trabalho apresenta uma abordagem prática e direta voltada para exemplos, onde apresentamos uma solução algébrica, sempre que possível e uma solução gráfica. A proposta da solução gráfica é mostrar uma opção para se entender o sentido das equações e inequações evitando assim a “mecanização” na solução algébrica. Estimular o uso dos gráficos de funções ao invés de somente álgebra mostra aos alunos que a matemática tem outras interpretações, ou seja, um mesmo assunto pode ser visto e entendido de outras maneiras. A intenção é que o aluno saiba resolver de modo tradicional e consiga fazer a leitura gráfica identificando os intervalos reais de solução. Dependendo da desigualdade observe a solução apenas utilizando os gráficos. É importante lembrar que a leitura gráfica é uma interpretação dos resultados, não é a solução das equações e inequações.

Como professor de matemática já leciono há algum tempo no ensino médio, trabalhando com equações e inequações, porém os livros utilizados não apresentam uma conexão satisfatória entre inequações e gráficos, assim surgiu o interesse em se aprofundar o estudo nesse assunto. Outro fator que nos motivou foram desigualdades como $\left|\left|x\right|-1\right|-1\right| \leq 1/2$ onde sua solução algébrica tem desenvolvimento não tão simples, porém podemos resolver a igualdade

$\left|\left|x\right|-1\right|-1\right| = \frac{1}{2}$ e observar os intervalos de solução através do gráfico das funções $f(x) = \left|\left|x\right|-1\right|-1\right|$ e $g(x) = \frac{1}{2}$. Dentre outras desigualdades como $\cos x \geq senx$, $e^x \geq \ln x$, $arctgx \geq x^3$, etc.

A interpretação gráfica como uma ferramenta de aprendizado e como outra maneira de se entender uma situação matemática são descritas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio parte III para matemática (BRASIL, 2000)[1].

> "[...] devemos agora estabelecer os objetivos para que o ensino dessa disciplina possa resultar em aprendizagem real e significativa para os alunos:
> - expressar-se oral, escrita e **graficamente** em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> - reconhecer **representações equivalentes** de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações; " (p.42,**grifo do nosso**)

Nem todos os conceitos utilizados nesse trabalho serão demostrados como, por exemplo, propriedades de limite e derivada, porém os que forem serão feitos momentos antes de serem mencionados.

A partir das funções elementares: afim, quadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica e especiais[1] construímos a tabela abaixo que ilustra algumas combinações possíveis para equações e inequações.

TABELA DE DESIGUALDADES ENTRE FUNÇÕES

Afim	Afim ≤ Afim					
Quadrática (Quad)	Afim ≤ Quad	Quad ≤ Quad				
Exponencial (Exp)	Afim ≤ Exp	Quad ≤ Exp	Exp ≤ Exp			
Logarítmica (Log)	Afim ≤ Log	Quad ≤ Log	Exp ≤ Log	Log ≤ Log		
Trigonométrica (Trig)	Afim ≤ Trig	Quad ≤ Trig	Exp ≤ Trig	Log ≤ Trig	Trig ≤ Trig	
Especiais (Esp)	Afim ≤ Esp	Quad ≤ Esp	Exp ≤ Esp	Log ≤ Esp	Trig ≤ Esp	Esp ≤ Esp
Funções	Afim	Quadrática (Quad)	Exponencial (Exp)	Logarítmica (Log)	Trigonométrica (Trig)	Especiais (Esp)

---

[1] Funções não muito comuns ao ensino médio. Exemplo: x^x, $\frac{2x}{x+1}$.

Dentre as possibilidades anteriores detivemo-nos em quatro:

- *Desigualdades entre funções afins.* $(cx + d \leq ex + f)$
- *Desigualdades entre funções afins e quadráticas.* $(dx^2 + ex + f \leq gx + h)$
- *Desigualdades entre funções quadráticas*. $(dx^2 + ex + f \leq gx^2 + hx + i)$
- *Desigualdades entre funções como racionais e transcendentais.*

Todas as desigualdades possuem a opção da composição com a função modular e o uso da função constante.

As equações e inequações que não podem ser simplificadas por meio de solução algébrica, como $\log x = \frac{x}{9}$, necessitam de cálculo numérico[2]. Porém podemos fazer algumas alterações de modo que a solução seja inteira $\log x = \frac{x-1}{9} \Rightarrow x \in \{1,10\}$. Nesse material iremos abordar esse tipo de equação somente com solução inteira. Em trabalhos futuros pode-se explorar a visualização de soluções não inteiras, observando a translação dos gráficos de funções. Alguns exemplos podem ser encontrados em [4] e [8].

Também gostaríamos de indicar os relevantes vídeos da CERRI, C. que podem ser encontrados [2].

Composto por seis capítulos tratamos no capítulo 1 de conceitos preliminares que serão utilizados no decorrer do texto. No capitulo 2 iniciamos com o estudo de equações e inequações entre funções afins e algumas demonstrações de propriedades. Seguindo o mesmo raciocínio nos demais capítulos abordamos desigualdades entre funções afins e quadráticas, entre funções quadráticas e entre outras funções como, por exemplo, logarítmicas, exponenciais e funções racionais. No capítulo 6 apresentamos os planos das aulas e alguns comentários referentes às respostas dos alunos a um questionário aplicado ao final das aulas. Nas considerações finais fizemos uma autoavaliação e apresentamos nossas perspectivas para trabalhos futuros.

[2] Ramo da matemática que estuda algoritmos que convergem para resultados de problemas matemáticos. http://pt.wikipedia.org/wiki/Análise_numérica. Acesso em: 07 julho de 2014.

CAPÍTULO 1 - CONCEITOS PRELIMINARES

Nesse capítulo apresentaremos algumas definições e conceitos que serão utilizados no texto desse trabalho. Vale ressaltar que não definiremos conteúdos como limites e derivadas utilizados no texto, porém podem ser encontrados em [3].

Função

Entendemos por função uma correspondência entre dois conjuntos que associa cada elemento do conjunto de partida a um único elemento no conjunto de chegada.

Elementos de uma Função

Uma função é composta por três partes.

- Domínio (conjunto de partida)
- Contradomínio (conjunto de chegada)
- Lei ou regra de associação (dizer quem está correspondendo com quem)

É muito comum chamarmos as funções por letras exemplo $f, g, h, I, \alpha ...$ Considere uma função f de domínio A e contradomínio B. Seja x um elemento de A, designamos por $f(x)$ o elemento em B que foi associado por x (vide figura abaixo).

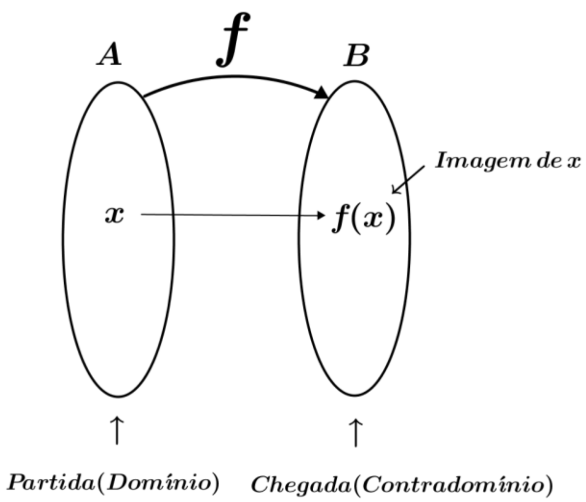


Figura 1.1 – Uma função f representada através de um diagrama

A notação clássica para função é

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

É usual apresentarmos uma função real somente por f, ao invés da notação acima. Nesse caso estamos considerando o domínio $A \subset \mathbb{R}$. Por exemplo, ao invés de apresentarmos uma função g como $g: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ onde $g(x) = \sqrt{x}$ iremos apresentar somente por $g(x) = \sqrt{x}$. Fica subentendido que o domínio de g é $[0, +\infty[$.

Gráfico de uma Função

É definido por $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in dom(f),\ y = f(x)\}$ onde $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$. Vale ressaltar que $\mathbb{R}^2$ representa o plano cartesiano. Abaixo mostramos uma representação do gráfico de f.

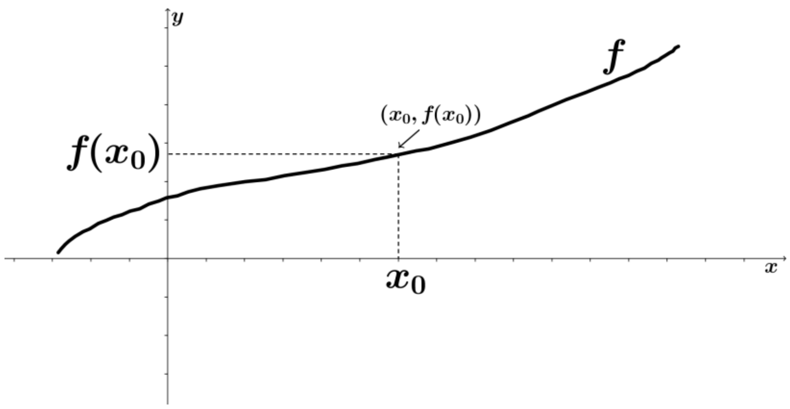


Figura 1.2 – Gráfico de uma função.

Módulo ou Valor Absoluto

O módulo de um número real x, indicado pela notação $|x|$, é definido como $|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$. Geometricamente, o módulo de x é igual à distância do ponto que representa na reta real à origem. Ver figura 1.3.

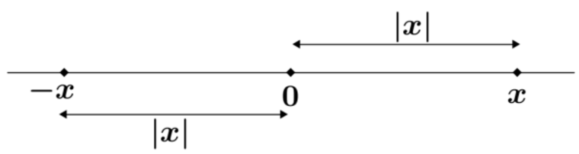


Figura 1.3 Definição geométrica de módulo de x. Nesse caso $x > 0$.

Definição: Seja $b \geq 0$, a raiz quadrada de b, denotada por $\sqrt{b}$, é a solução não negativa da equação $x^2 = b$. Como consequência dessa definição temos a seguinte propriedade $\sqrt{x^2} = |x|,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Função Afim

Função real onde $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$, cujo gráfico é uma reta não vertical. Caso a seja nulo teremos $f(x) = b$ nesse caso f será chamada de função constante. Essa definição foi retirada de [5].

Função Quadrática

Função real onde $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, cujo gráfico é uma parábola.

Equação

Seja f uma função cujo domínio está contido nos reais. Definimos como equação a expressão $f(x) = 0$ onde x pertence ao domínio de f. Observando o gráfico da função, as soluções de $f(x) = 0$ significam as abscissas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo x. Definimos equação modular como sendo uma equação que possui as barras verticais $|\ |$.

Inequação

Sejam f e g funções. Definimos inequação como a desigualdade entre f e g, ou seja, $f(x) \leq g(x)$ (ou $f(x) \geq g(x)$). O conjunto solução são os valores de x, quando existirem, que satisfazem a desigualdade e pertencem simultaneamente ao domínio de f e g.

CAPÍTULO 2 - DESIGUALDADES ENTRE FUNÇÕES AFINS

Toda desigualdade do tipo $cx+d \le ex+f$, $\{c,d,e,f\} \subset \mathbb{R}$ se reduz a forma $ax+b \le 0$ onde $a=c-e$ e $b=d-f$.

Vamos estudar a desigualdade $ax+b \le 0$, a e b números reais. Porém iniciaremos com a igualdade $ax+b=0$. Um dos motivos de passarmos primeiro pela igualdade $ax+b=0$ é que sua solução representa a interseção entre os gráficos das funções afins $h(x)=cx+d$ e $g(x)=ex+f$.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 1, vamos associar duas equações do primeiro grau ao estudo de posições relativas entre retas, bem como sua solução algébrica. Exploramos também solução da equação através de parâmetros, como por exemplo, $ax-1=x+a$. Segue a descrição de propriedades de desigualdades, exemplos de inequações e a análise da representação da desigualdade $f(x) \le g(x)$ através de gráficos de funções. Na última seção exploramos as inequações com o uso da função modular.

Considere a equação $ax+b=0$. Temos três possíveis casos, estudados nos tópicos abaixo.

2.1- Equação $ax+b=0$, a e b Números Reais

2.1.1- Com Infinitas Soluções (Retas Coincidentes)

Se $a=0$ e $b=0$, então qualquer valor de *x* satisfaz a igualdade. Neste caso temos infinitas soluções ou solução indeterminada.

Exemplo: Resolva a equação $2x-(3x+2)+1=-x-1$.

$2x-(3x+2)+1=-x-1$

$2x-3x-2+1=-x-1$

$-x+x-1+1=0$

$0x+0=0$ Infinitas soluções.

Assumindo $f(x)=2x-(3x+2)+1=-x-1$ e $g(x)=-x-1$ vemos que seus gráficos são retas coincidentes.

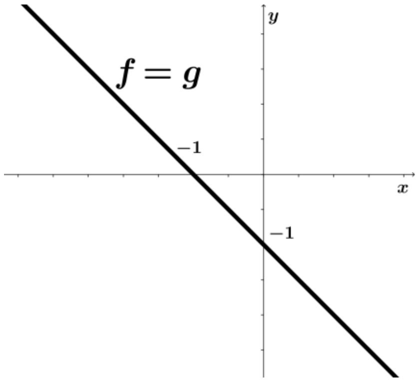


Figura 2.1– Gráficos de *f(x)=x-1 e g(x)*=x-1.

2.1.2- Com Solução Vazia (Retas Paralelas)

Se $a = 0$ e $b \neq 0$, nenhum valor de x satisfaz a igualdade e a solução é vazia.

Exemplo: Resolva a equação $2x-(3x+2)+1=-x-2$.

$2x-(3x+2)+1=-x-2$
$2x-3x-2+1=-x-2$
$-x+x-1+2=0$
$0x+1=0$ Solução vazia.

Assumindo $f(x)=2x-(3x+2)+1=-x-1$ e $g(x)=-x-2$ vemos que seus gráficos são retas paralelas.

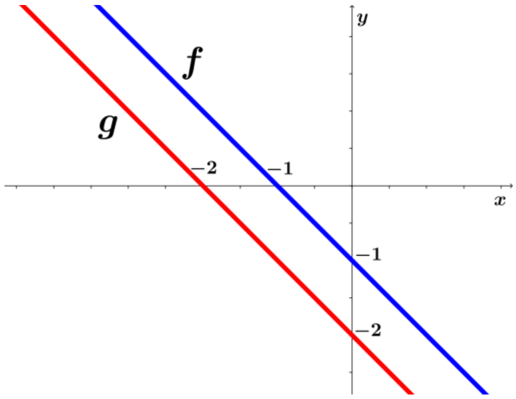


Figura 2.2 – gráficos de *f(x)*=-x-1 e *g(x)*=-x-2.

2.1.3- Com Solução Única (Retas Concorrentes)

Se $a \neq 0$ então $ax=-b \Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$, portanto a solução é única.

Exemplo: Resolva a equação $2x-(3x+2)+1=x-2$.

$$2x-(3x+2)+1=x-2$$
$$2x-3x-2+1=x-2$$
$$-x-x=-2+1$$
$$-2x=-1$$
$$x=\frac{1}{2}$$ Solução única.

Assumindo $f(x)=2x-(3x+2)+1=-x-1$ e $g(x)=x-2$ vemos que seus gráficos são retas concorrentes.

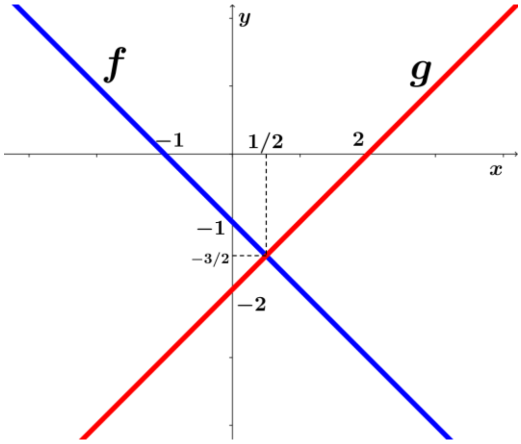


Figura 2.3 – Gráficos de *f(x)*=-x-1 e *g(x)*=x-2.

Observações

Como visto anteriormente, quando a resolução de uma equação do tipo $ax+b=0$ resulta em expressões como $0=0$, $\sqrt{2}=\sqrt{2}$ e $-1/10=-1/10$ a solução será indeterminada, pois para todo x real a igualdade será verdadeira. Caso aconteça uma inverdade como $0=1$, $-4=9$ e $1/3=7$ a solução será vazia, pois não importa o valor de x a igualdade nunca será satisfeita.

Nos três últimos exemplos apresentamos as possibilidades para a equação $ax+b=0$. Cada caso apresentado é equivalente a uma posição relativa entre duas retas não verticais conforme tabela abaixo:

Tipo de solução	**Posição entre duas retas**
Infinitas soluções	Retas coincidentes
Solução vazia	Retas paralelas
Solução única	Retas concorrentes

2.2- Equação $ax+b=0$ com Parâmetro

Exemplos:

1- Resolva a equação $ax-a=7-a$ em função do parâmetro.

$ax-a=7-a \Rightarrow ax-7=0$

Se $a=0$ a solução é vazia e se $a\neq 0$ a solução é única, a saber, $7/a$.

2- Resolva a equação $ax=bx$ em função do parâmetro.

$ax=bx \Rightarrow (a-b)x=0$

Se $a=b$ a equação possui infinitas soluções e se $a\neq b$ a solução é única, a saber, $x=0$.

3- Resolva a equação $ax-1=x+a$ em função do parâmetro.

$ax-1=x+a \Rightarrow x(a-1)=a+1$

Se $a=1$a solução é vazia e se $a\neq 1$a solução é única, a saber, $a+1/a-1$.

4- Determinar os valores de a e b para que a equação $ax+3=x+b$:

- seja satisfeita para quaisquer valores de x.

$ax+3=x+b \Rightarrow (a-1)x=b-3$. Nesse caso $a=1$ e $b=3$, pois teremos $0=0$.

- não possua solução.

$a=1$ e $b\neq 3$ então $0=b-3$ absurdo!

- possua solução única.

$a\neq 1$ nesse caso $x=\dfrac{b-3}{a-1}$.

- possua solução única igual a zero.

$a\neq 1$ e $b=3$.

2.3- Propriedade 1: Sejam a,b e c números reais.

Definição: $a>b \Leftrightarrow a-b>0$
1. $a>b \Rightarrow a+c>b+c$
2. $a>b$ e $c>0$ $\Rightarrow ac>bc$
3. $a>b$ e $c<0$ $\Rightarrow ac<bc$

Demonstração:

1. $a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow a - b + c - c > 0 \Rightarrow a + c > b + c$

2. $a > b \Rightarrow a - b > 0 \xrightarrow{c>0} c(a-b) > 0 \Rightarrow ca - cb > 0 \Rightarrow ac > bc$.

3. $a > b \Rightarrow a - b > 0 \xrightarrow{c<0} c(a-b) < 0 \Rightarrow ca - ab < 0 \Rightarrow ac < bc$ ■

2.4- Inequação $ax + b \leq 0$, a e b Números Reais e $a \neq 0$

A solução de $ax + b \leq 0$ é dividida em dois casos:

- $a > 0$: $\quad ax + b \leq 0 \Rightarrow ax \leq -b \Rightarrow x \leq \dfrac{-b}{a}$
- $a < 0$: $\quad ax + b \leq 0 \Rightarrow ax \leq -b \Rightarrow x \geq \dfrac{-b}{a}$

Exemplo 1: Resolver $2x - 1 \leq -x + 2$ e interpretar o resultado através dos gráficos das funções $g(x) = 2x - 1$ e $f(x) = -x + 2$.

Solução:

$2x - 1 \leq -x + 2 \Rightarrow 3x \leq 3 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow S = (-\infty, 1]$.

Deve-se observar no gráfico o intervalo em x onde a função f é maior ou igual a função g.

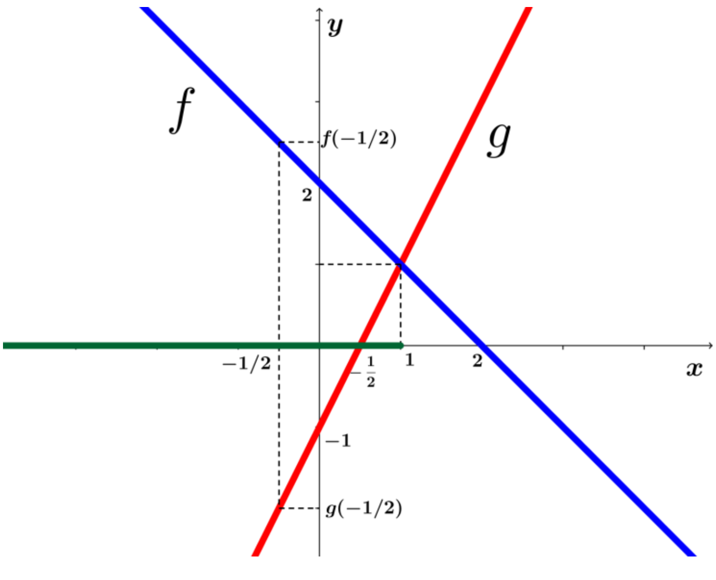


Figura 2.4 – Gráficos de *f(x)*=-x+2 e *g(x)*=2x-1.

Observe que no intervalo $(-\infty,+1]$ f é maior ou igual a g. Tomemos $x=-1/2$ dai $f(-1/2)=5/2$ e $g(-1/2)=-2$ assim vemos que $f(-1/2)>g(-1/2)$ (vide figura 2.4).

Exemplo 2: Dados os gráficos das funções f e g resolver as desigualdades: $f(x)\geq 0$, $g(x)<0$, $f(x).g(x)\geq 0$, $g(x)\geq f(x)$ e $f(x)-g(x)\geq 0$.

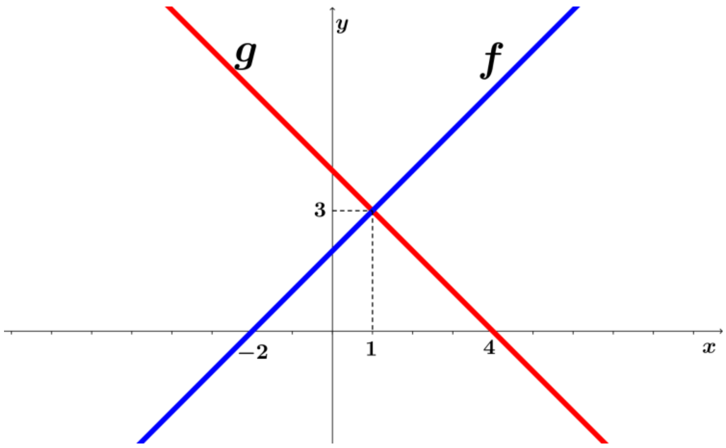


Figura 2.5 – Gráficos das funções *f* e *g*.

Importante destacar que podemos determinar a solução através das equações das retas, porém iremos resolver apenas com a utilização dos gráficos.

- $f(x)\geq 0 \Rightarrow$Observar o intervalo em x onde a função f é maior ou igual a zero. $S=[-2,+\infty)$
- $g(x)<0 \Rightarrow$ Observar o intervalo em x onde a função g é menor que zero. $S=(4,+\infty)$
- $f(x).g(x)\geq 0 \Rightarrow$Intervalo em x onde as funções f e g são ambas positivas ou ambas negativas ou nulas. $S=[-2,4]$
- $g(x)\geq f(x) \Rightarrow$ Intervalo em x onde a função g é maior ou igual a f. $S=(-\infty,1]$
- $f(x)-g(x)\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq g(x) \Rightarrow$ Intervalo em x onde a função f é maior ou igual a g. $S=[1,+\infty)$

2.5- Propriedade 2: Sejam x e y números reais.

- $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$
- $|x| = y \Rightarrow x = \pm y$ e $y \geq 0$
- $|x| \leq y \Rightarrow -y \leq x \leq y \Rightarrow -y \leq x$ e $x \leq y$
- $|x| \geq y \Rightarrow x \geq y$ ou $x \leq -y$

Exemplo 1: Resolver $\left||x|-1\right| \leq \frac{1}{2}$ e interpretar o resultado através dos gráficos das funções $f(x) = \left||x|-1\right|$ e $g(x) = \frac{1}{2}$.

Solução:

$$\left||x|-1\right| \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq |x|-1 \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\frac{1}{2} \leq |x|}^{I} \text{ e } \overbrace{|x| \leq \frac{3}{2}}^{II}.$$

Caso I. $\frac{1}{2} \leq |x| \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x$ ou $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow S_I = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Caso II. $|x| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow S_{II} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$

A solução será $S_F = S_I \cap S_{II}$, pois precisa satisfazer I e II. Ver figura 2.6.

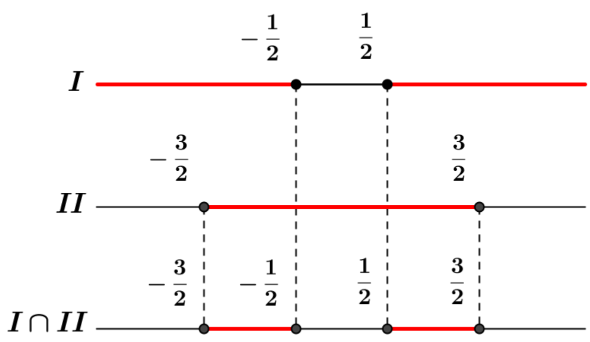


Figura 2.6 – Interseção entre S_I e S_{II}.

$$S_F = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

Considere $f(x)=||x|-1|$ e $g(x)=\frac{1}{2}$. Vamos separar a interpretação gráfica em três passos.

***Passo 1*:** Resolver $f(x)=g(x)$

$$||x|-1|=\frac{1}{2}\Rightarrow |x|-1=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} |x|=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{3}{2} \\ |x|=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2} \end{cases}, \ S=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\}.$$

Esses valores são exatamente as abscissas dos pontos de interseção do gráfico da função $f(x)=||x|-1|$ com a reta $y=1/2$. Vide figura 2.8.

***Passo 2*:** Construir gráficos das funções f e g.

Primeiro vamos lembrar que dada uma função real h, o gráfico de $|h|$ é simétrico a h em relação ao eixo x nos intervalos onde h é negativa.
Assim:

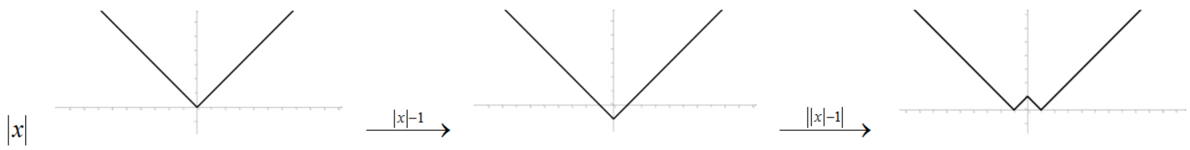


Figura 2.7 – Etapas de construção do gráfico da função *f*.

***Passo 3*:** A partir dos gráficos das funções f e g (o gráfico de g é uma reta) identificar intervalos, quando existir, no eixo x onde a função g é maior ou igual a função f.

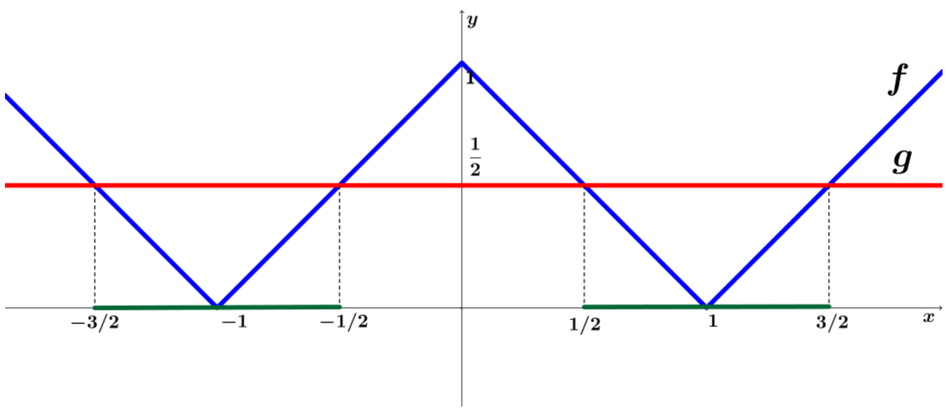


Figura 2.8 – Gráficos das funções *f* e *g*.

Intervalos onde g é maior ou igual a f : $S_F = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Como consequência desse exemplo surge a seguinte pergunta: para quais valores de α a equação $\left||x|-1\right| = \alpha$ tem 2, 3 e 4 soluções? A resposta está no próximo exemplo.

Exemplo 2: Determine os valores de α para que a equação $\left||x|-1\right| = \alpha$ tenha:

a) 2 soluções,

b) 3 soluções,

c) 4 soluções,

d) solução vazia.

Solução:

Vamos separar em casos:

• $\alpha < 0$ a solução será **vazia**, pois não podemos ter módulo negativo.

• $\alpha = 0 \Rightarrow \left||x|-1\right| = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$, ou seja, **duas** soluções.

• $\alpha > 0 \Rightarrow \left||x|-1\right| = \alpha \Rightarrow \begin{cases} |x|-1 = \alpha \\ |x|-1 = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overbrace{|x| = \alpha + 1}^{I} \\ \overbrace{|x| = -\alpha + 1}^{II} \end{cases}$.

Como $|x| \geq 0$ teremos:

I . $\alpha + 1 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq -1$

II . $-\alpha + 1 \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq 1$.

Temos o seguinte:

Se $0 < \alpha < 1$ então as condições I e II são satisfeitas assim teremos **quatro** soluções $-\alpha - 1, \alpha + 1, -\alpha + 1, \alpha - 1$.

Se $\alpha > 1$ então somente a condição I é satisfeita e, portanto as soluções são $-\alpha - 1, \alpha + 1$, desse modo **duas** soluções.

Se $\alpha = 1 \Rightarrow \left||x|-1\right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} |x|-1 = 1 \\ |x|-1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = 2 \\ |x| = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, -2, +2$, ou seja, **três** soluções.

Resumindo: a) $\alpha \in \{0\} \cup (1, +\infty) \Rightarrow$ duas soluções.

b) $\alpha = 1 \Rightarrow$ três soluções.

c) $\alpha \in (0,1) \Rightarrow$ quatro soluções.

d) $\alpha \in (-\infty, 0) \Rightarrow$ solução vazia.

Através do gráfico das funções $f(x) = \left||x| - 1\right|$ e $g(x) = \alpha$ (o gráfico de g é uma reta) podemos facilmente determinar o(s) intervalo(s) em que está situado α. Em cada item abaixo vamos exibir o gráfico e concluir que a resposta coincide com os valores calculados.

a)

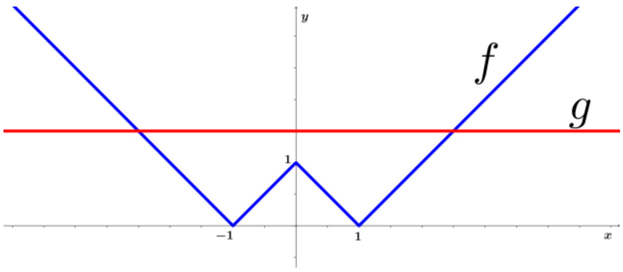


Figura 2.9 – Gráficos das funções *f* e g com duas interseções.

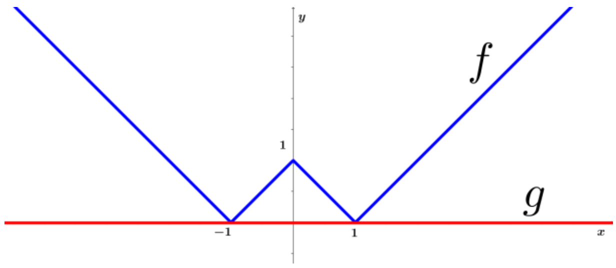


Figura 2.10– Gráficos das funções *f* e *g* com duas interseções.

Concluímos que as funções f e g se intersectam duas vezes quando $\alpha \in \{0\} \cup (1, +\infty)$. (OBS: Se $\alpha = 0$ a função g passa a ser o próprio eixo das abscissas figura 2.10) b)

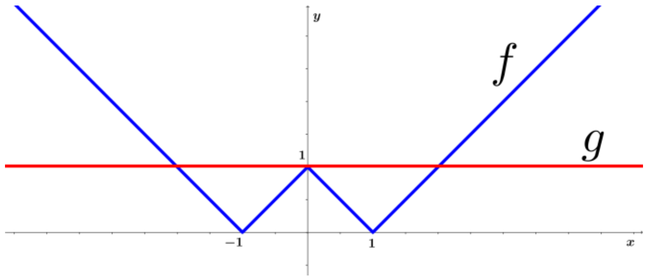


Figura 2.11 – Gráficos das funções *f* e *g* com três interseções.

As funções f e g se intersectam três vezes quando $\alpha = 1$.

c)

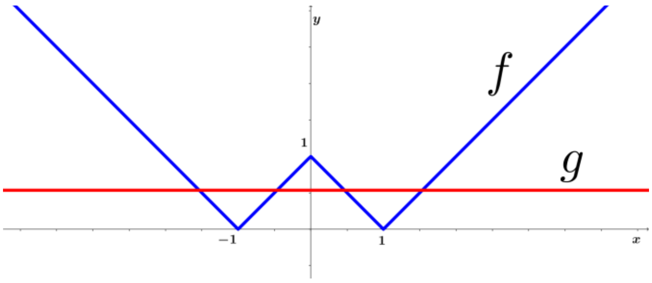


Figura 2.12– Gráficos das funções *f* e *g* com quatro interseções.

As funções f e g se intersectam quatro vezes quando $\alpha \in (0,1)$.

d)

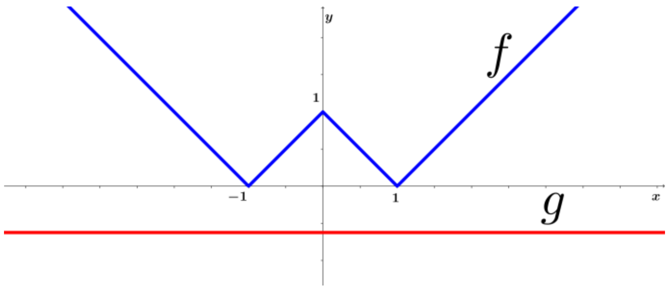


Figura 2.13 – Gráficos das funções *f* e *g* com interseção vazia.

As funções f e g não se intersectam quando $\alpha \in (-\infty,0)$.

CAPÍTULO 3 – DESIGUALDADES ENTRE FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS

As desigualdades do tipo $dx^2+ex+f\leq gx+h$ podem ser escritas como $ax^2+bx+c\leq 0$ onde $a=d\neq 0$, $b=e-g$, $c=f-h$ e $\{d,e,f,g,h\}\subset\mathbb{R}$. O estudo da desigualdade $ax^2+bx+c\leq 0$ será feito no próximo capítulo.

Através dos exemplos do capítulo anterior determinamos três passos para interpretar graficamente as inequações (desigualdade entre funções). Segue abaixo etapas da interpretação gráfica da desigualdade entre as funções f e g, tal que $f\geq g$:

Passo 1: Determinar a solução da equação $f=g$, ou seja, as interseções entre os gráficos das funções f e g.
Passo 2: Traçar esboço dos gráficos das funções f e g sobre o mesmo par de eixos destacando as interseções.
Passo 3: Observar o(s) intervalos(s) no eixo das abscissas onde a função f é maior ou igual a função g, ou vice-versa caso seja $g\geq f$

Vale destacar nessa interpretação que o objetivo ao se observar o gráfico é determinar os valores de x que pertencem ao eixo das abscissas tais que $f(x)\geq g(x)$, onde $f(x)$ e $g(x)$ pertencem ao eixo das ordenadas. Ou seja, analisamos a ordenada, porém respondemos pela abscissa.

Iniciamos o capítulo com uma importante propriedade para as desigualdades que envolvem funções quadráticas e com exemplos. Em seguida estudamos as soluções das inequações observando as posições relativas entre retas e parábolas. E finalmente o uso do módulo em exemplos entre funções afins e quadráticas.

3.1- Propriedade 3

Sejam x e y números reais positivos: $x\geq y\Rightarrow\sqrt{x}\geq\sqrt{y}$

Demonstração:

Por hipótese $x - y \geq 0$, assim $x - y = \underbrace{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}_{\geq 0}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \geq 0$ como esse produto é não negativo concluímos que $\sqrt{x} - \sqrt{y} \geq 0$ desse modo $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$ ■

Exemplo 1: Resolva $x^2 \leq 4$ e interprete graficamente.

Solução Algébrica

$x^2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4} \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow S = [-2,2]$

Interpretação Gráfica

Fazendo $f(x) = x^2$ (parábola) e $g(x) = 4$ (reta) temos

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

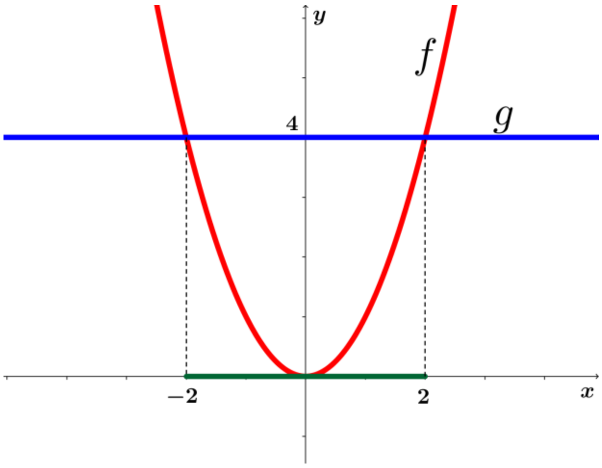


Figura 3.1 – Gráficos de *f(x)*=x² e *g(x)*=4.

Intervalo onde g é maior ou igual a f é $[-2,2]$.

Exemplo 2: Resolva $x^2 \geq x + 2$ e interprete graficamente.

Solução Algébrica

$x^2 \geq x + 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 \geq 0$. É comum utilizarmos a fatoração para resolver essa desigualdade, mas nesse momento será incluída outra forma cuja demonstração será feita no capítulo seguinte.

Completando quadrados em $x^2 - x - 2$ temos:

$$x^2 - x - 2 = x^2 - 2x\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \underbrace{x^2 - 2x\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\substack{Quadrado \\ Perfeito}} - \frac{1}{4} - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Portanto

$x^2 - x - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \left|x - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{3}{2}$ Logo $x - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}$ ou $x - \frac{1}{2} \leq -\frac{3}{2}$. Sendo assim $x \geq 2$ ou $x \leq -1$, ou seja, $S = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.

Uma observação é que essa inequação também poderia ser resolvida por meio da fatoração $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, ou podemos encontrar as raízes da equação do segundo grau usando a fórmula de Bháskara, usual nos livros didáticos. Para conhecer mais sobre a história da equação do segundo grau recomendamos [7].

Interpretação Gráfica

Fazendo $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 2$ teremos $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -1$.

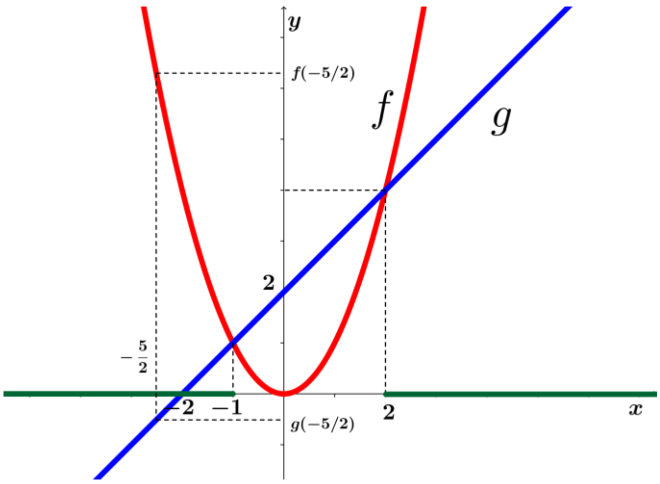


Figura 3. 2 – Gráfico de *f(x)*=x^2 e *g(x)*=x+2.

O intervalo onde a função f é maior ou igual a função g é $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$. Podemos verificar, por exemplo, que se $x = -\frac{5}{2}$ então $f(-5/2) = 25/4$ e $g(-5/2) = -1/2$. Assim $f(-5/2) \geq g(-5/2)$.

Também podemos a partir de uma mesma desigualdade fazer outras interpretações. No mesmo exemplo $x^2 \geq x+2 \Rightarrow x^2 - x \geq 2$ tomemos $f_1(x) = x^2 - x$ e $g_1(x) = 2$.(Vide figura 3.3)

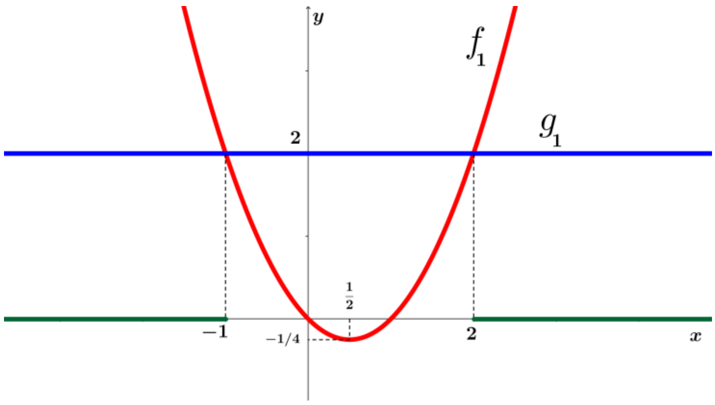


Figura 3.3 – Gráfico de *f_1(x)*=x^2-x e *g_1(x)*=2.

O intervalo onde f_1 é maior ou igual a g_1 é $(-\infty,-1] \cup [2,+\infty)$.

Outra interpretação desse mesmo exemplo $x^2 \geq x+2 \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$ é fazer $f_2(x) = x^2 - x - 2$ e $g_2(x) = 0$ (eixo x). Essa forma é a mais utilizada nos livros do ensino médio para resolver desigualdades quadráticas. Observe o gráfico abaixo.

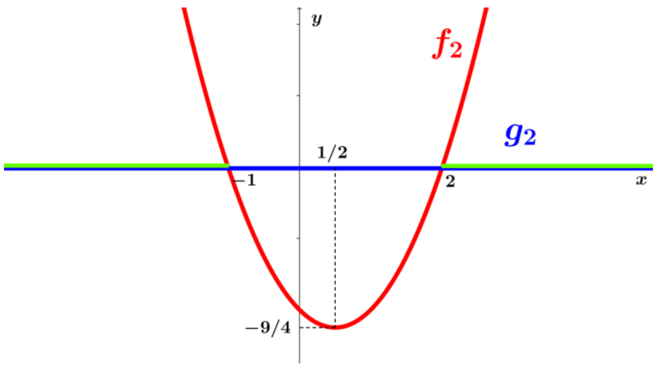


Figura 3.4 – Gráficos de *f_2(x)*=x^2-x-2 e *g_2(x)*=0 (eixo x).

O intervalo onde f_2 é maior ou igual a g_2 é $(-\infty,-1] \cup [2,+\infty)$.

Em relação à inequação $x^2 - x - 2 \geq 0$ onde $f_2(x) = x^2 - x - 2$ e $g_2(x) = 0$ as seguintes afirmações são equivalentes e representam a solução $(-\infty,-1] \cup [2,+\infty)$.

- Intervalos onde f_2 é positiva.
- Intervalos onde f_2 é maior que zero.

• Intervalos onde f_2 é maior ou igual a função g_2.

3.2- Parábolas e Retas

Quando avaliamos as desigualdades entre funções quadráticas e funções afins estamos analisando posições entre parábolas e retas. Vale ressaltar que essas retas não são paralelas ao eixo das ordenadas, pois são funções. Temos assim três possibilidades:

- Parábola e reta tangente (se intersectam em um ponto)
- Parábola e reta com interseção vazia (não se intersectam)
- Parábola e reta secante (se intersectam em dois pontos)

Para cada uma das situações acima, segue um exemplo.

3.2.1- Parábola e Reta Tangente

Exemplo: Resolva $x^2 - x - 2 \geq x - 3$ e interprete graficamente.

Solução Algébrica

$x^2 - x - 2 \geq x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 \geq 0$. Todo número real elevado ao quadrado é maior ou igual a zero. Assim a solução será o conjunto dos números reais.

Interpretação Gráfica

Adotemos $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = x - 3$. Logo $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - x - 2 = x - 3$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$(Ponto de Tangência).

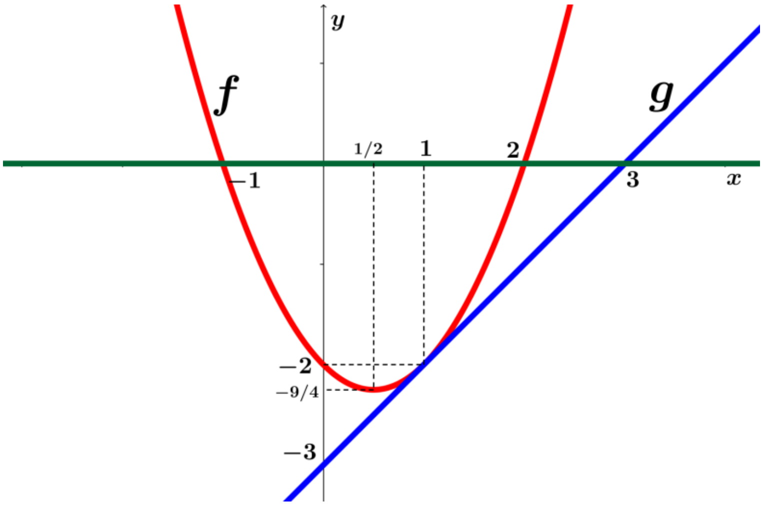


Figura 3.5 – Gráfico de *f(x)*=x²-x-2 e *g(x)*=x-3.

Observe que a função f é sempre maior ou igual a função g. Assim a solução será o conjunto dos números reais. Caso tivéssemos $f \leq g$ a solução seria $S = \{1\}$.

3.2.2- Parábola e Reta com Interseção Vazia

Exemplo: Resolva $x^2 - 5x + 4 < -x - 2$ e interprete graficamente.

Solução Algébrica

$x^2 - 5x + 4 < -x - 2 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{\substack{Quadrado \\ Perfeito}} + 2 < 0 \Rightarrow (x-2)^2 + 2 < 0$. Que é um absurdo!

A soma de dois números positivos não pode ser negativa. Logo a solução será vazia.

Interpretação Gráfica

Façamos $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = -x - 2$.

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = -x - 2 \Rightarrow S = \varnothing$

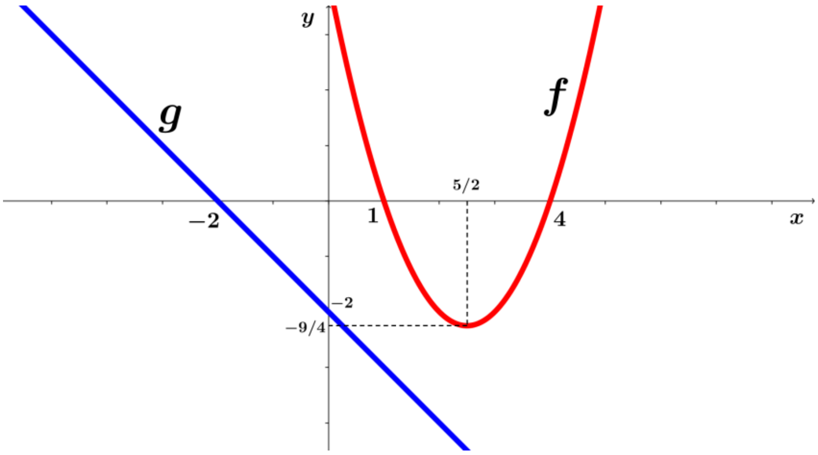


Figura 3.6 – Gráfico de *f(x)*=x^2-5x+4 e *g(x)*=-x-2.

Esses gráficos mostram que a função g é sempre menor do que a função f. Assim g jamais será maior do que f, ou seja, a solução será vazia. Caso tivéssemos $f > g$ a solução seria o conjunto dos números reais, pois f seria sempre maior do que g.

3.2.3- Parábola e Reta Secantes

Exemplo: Resolva $x+1 \leq -x^2+6x-5$ e interprete graficamente.

Solução Algébrica

$x+1 \leq -x^2+6x-5 \Rightarrow x^2-5x+6 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) \leq 0$. Vamos fazer um estudo do sinal dos termos $(x-3)$, $(x-2)$ e do produto $(x-3)(x-2)$.

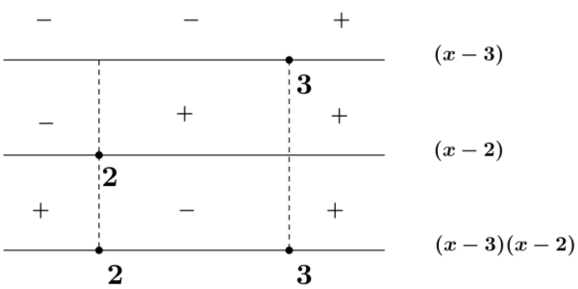


Figura 3.7 – Estudo do sinal de h(x)=x^2-5x+6.

Portanto a solução da desigualdade será $S = [2,3]$.

Interpretação Gráfica

Considere $f(x) = x+1$ e $g(x) = -x^2 + 6x - 5$. Assim $f(x) = g(x) \Rightarrow x+1 = -x^2 + 6x - 5 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$.

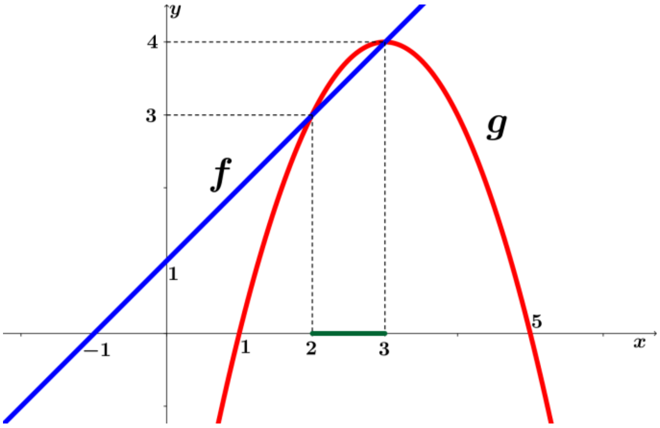


Figura 3.8 – Gráfico de *f(x)*=-x^2+6x-5 e *g(x)*=-x-2.

Como temos que resolver $f \le g$ a seguinte pergunta deve ser feita: Quando f é menor do que g? Observe que a solução é o intervalo $[2,3]$.

3.3- Exemplos de Desigualdades Modulares

Exemplo 1: Resolva $x+1 \le \left| -x^2 + 6x - 5 \right|$ e interprete graficamente.

Solução Algébrica

Relembrando a definição de módulo $|x| = \begin{cases} x, x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$.

$$\left| -x^2 + 6x - 5 \right| = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5, -x^2 + 6x - 5 \ge 0 \Rightarrow (x-3)^2 \le 4 \Rightarrow x \in [1,5] \\ -(-x^2 + 6x - 5), -x^2 + 6x - 5 < 0 \Rightarrow (x-3)^2 > 4 \Rightarrow x \in (-\infty,1) \cup (5,+\infty) \end{cases}$$

1ºCaso. Condição 1, $x \in [1,5]$

$x+1 \le -x^2 + 6x - 5 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 \le 0 \longrightarrow x \in [2,3]$, como $[2,3] \subset [1,5]$ teremos portanto que $S_1 = [2,3]$ é a solução do caso 1, pois satisfaz a condição 1.

2ºCaso. Condição 2, $x \in (-\infty,1) \cup (5,+\infty)$

$$x+1 \le -(-x^2+6x-5) \;\Rightarrow\; x^2-7x+4 \ge 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{x^2-2.\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{2}\right)^2}_{\substack{Quadrado\\ Perfeito}} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 4 \ge 0$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{33}{4} \ge 0 \;\Rightarrow\; \left|x-\frac{7}{2}\right| \ge \frac{\sqrt{33}}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-\frac{7}{2} \le -\frac{\sqrt{33}}{2} \Rightarrow x \le \frac{7-\sqrt{33}}{2} \\ x-\frac{7}{2} \ge +\frac{\sqrt{33}}{2} \Rightarrow x \ge \frac{7+\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

Como $\frac{7-\sqrt{33}}{2} < 1$ e $\frac{7+\sqrt{33}}{2} > 5$ temos que $\left[\left(-\infty, \frac{7-\sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{33}}{2}\right)\right]$ está contida em $[(-\infty,1) \cup (5,+\infty)]$, ou seja, a solução do caso 2 é $S_2 = \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{33}}{2}, +\infty\right)$, pois satisfaz a condição 2.

A solução final será a união dos dois casos $S_F = S_1 \cup S_2 = \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{33}}{2}\right] \cup [2,3] \cup \left[\frac{7+\sqrt{33}}{2}, +\infty\right)$.

Interpretação Gráfica

Vamos assumir $g(x) = \left|-x^2+6x-5\right|$ e $f(x) = x+1$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \left|-x^2+6x-5\right| = x+1 \Rightarrow -x^2+6x-5 = \pm(x+1)$$

Assim teremos

$-x^2+6x-5 = +(x+1) \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x \in \{2,3\}$ ou

$$-x^2+6x-5 = -(x+1) \Rightarrow x^2-7x+4=0 \Rightarrow x \in \left\{\frac{7-\sqrt{33}}{2}, \frac{7+\sqrt{33}}{2}\right\}$$

Para determinar o gráfico da função $g(x) = \left|-x^2+6x-5\right|$ basta rebater a função $-x^2+6x-5$ simetricamente em relação ao eixo x nos intervalos onde ela é negativa.

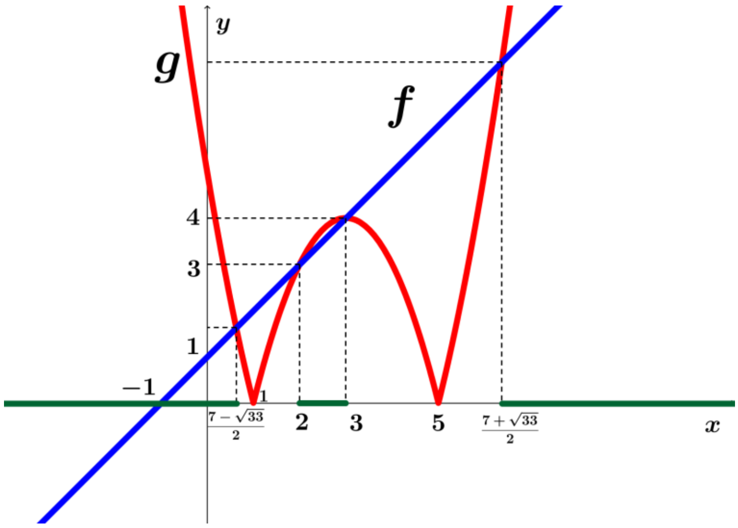


Figura 3.9 – Gráficos das funções *f* e *g*.

Portanto os intervalos onde a função f é menor ou igual do que a função g são $\left(-\infty,\frac{7-\sqrt{33}}{2}\right]\cup[2,3]\cup\left[\frac{7+\sqrt{33}}{2},+\infty\right)$.

Exemplo 2: Determine para quais valores de α a equação $\left|-x^2+6x-5\right|=\alpha$ possui:

a) duas soluções,

b) três soluções,

c) quatro soluções,

d) solução vazia.

Solução Algébrica

Observe que $\left|-x^2+6x-5\right|=\left|x^2-6x+5\right|$.

Vamos separar em casos:

- $\alpha<0$ a solução será **vazia**, pois não podemos ter módulo negativo.
- $\alpha=0\Rightarrow\left|x^2-6x+5\right|=0\Rightarrow x^2-6x+5=0\Rightarrow x\in\{1,5\}$. **Duas** soluções.
- $0<\alpha<4$. Observe que nesse caso $\alpha+4>0$ e $4-\alpha>0$.

$$\left|x^2-6x+5\right|=\alpha \Rightarrow \left|x^2-6x+9-9+5\right|=\alpha \Rightarrow \left|(x-3)^2-4\right|=\alpha \Rightarrow \begin{cases}(x-3)^2-4=\alpha \\ (x-3)^2-4=-\alpha\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}|x-3|=\sqrt{\alpha+4} \\ |x-3|=\sqrt{4-\alpha}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-3=\pm\sqrt{\alpha+4} \\ x-3=\pm\sqrt{4-\alpha}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\pm\sqrt{\alpha+4} \\ x=3\pm\sqrt{4-\alpha}\end{cases}$$. **Quatro** soluções.

• $\alpha=4 \Rightarrow \left|x^2-6x+5\right|=4 \Rightarrow \left|(x-3)^2-4\right|=4 \Rightarrow \begin{cases}(x-3)^2-4=4 \\ (x-3)^2-4=-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-3)^2=8 \\ (x-3)^2=0\end{cases}$.

$$\begin{cases}(x-3)^2=8 \\ (x-3)^2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\pm\sqrt{8} \\ x=3\end{cases}$$. **Três** soluções.

• $\alpha>4$. Nesse caso $\alpha+4>0$ e $4-\alpha<0$.
Utilizando a resolução anterior temos.

$$\left|x^2-6x+5\right|=\alpha \Rightarrow \left|(x-3)^2-4\right|=\alpha \Rightarrow \begin{cases}|x-3|=\sqrt{\alpha+4} \\ |x-3|=\sqrt{4-\alpha}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\pm\sqrt{\alpha+4} \\ \emptyset, 4-\alpha<0\end{cases}$$. **Duas** soluções.

Resumindo: a) $\alpha \in \{0\} \cup (4,+\infty) \Rightarrow$ duas soluções.

b) $\alpha=4 \Rightarrow$ três soluções.

c) $\alpha \in (0,4) \Rightarrow$ quatro soluções.

d) $\alpha \in (-\infty,0) \Rightarrow$ solução vazia.

Solução utilizando gráficos

Assumindo $f(x)=\left|-x^2+6x-5\right|$ e $g(x)=\alpha$ (a função g é uma reta paralela ao eixo das abscissas).

a)

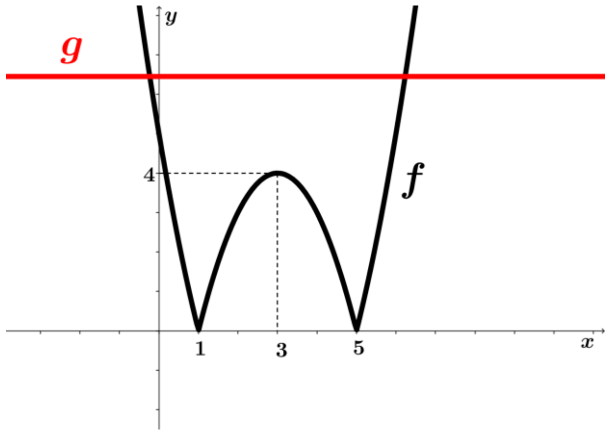


Figura 3.10 – Gráficos das funções *f* e *g* com duas interseções.

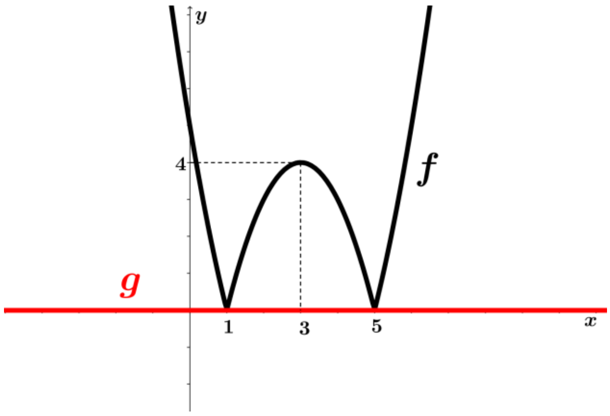


Figura 3.11 – Gráficos das funções *f* e *g* com duas interseções.

As funções f e g se intersectam duas vezes quando $\alpha \in \{0\} \cup (4,+\infty)$ (OBS: Se $\alpha = 0$ a função g coincide com o eixo das abscissas. Ver figura 3.11).

b)

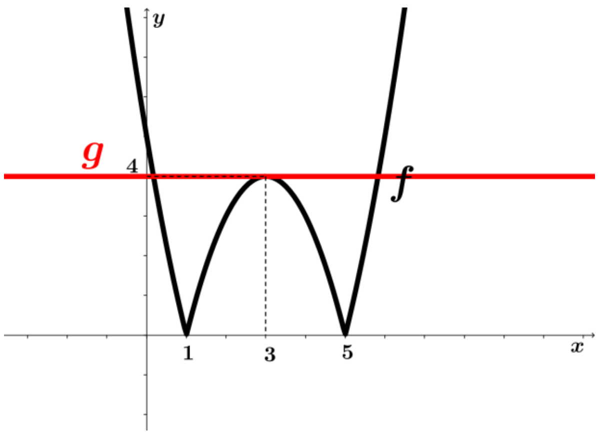


Figura 3.12 – Gráficos das funções *f* e *g* com três interseções.

As funções f e g se intersectam três vezes quando $\alpha = 4$.

c)

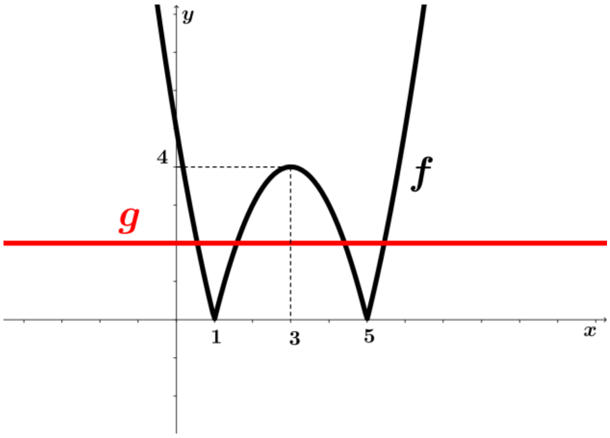


Figura 3.13 – Gráficos das funções *f* e *g* com quatro interseções.

As funções f e g se intersectam quatro vezes quando $\alpha \in (0,4)$.

d)

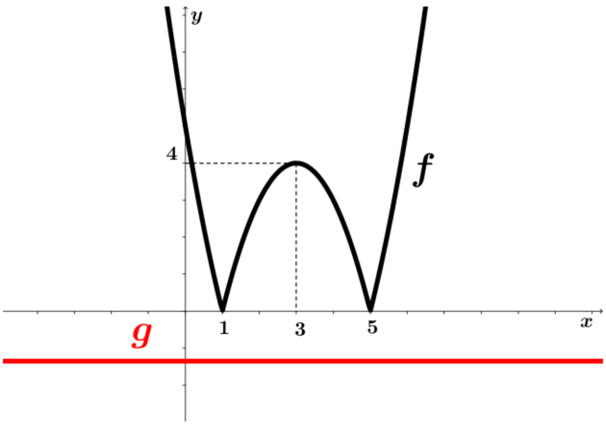


Figura 3.14 – Gráficos das funções *f* e *g* com quatro interseções.

As funções f e g não se intersectam quando $\alpha \in (-\infty,0)$.

CAPÍTULO 4 - DESIGUALDADES ENTRE FUNÇÕES QUADRÁTICAS.

As desigualdades do tipo $dx^2+ex+f \le gx^2+hx+i$, $d \neq 0$, $g \neq 0$ podem ser escritas como $ax^2+bx+c \le 0$ onde $a=d-g$, $b=e-h$, $c=f-i$ e $\{d,e,f,g,h,i\} \subset \mathbb{R}$. Caso $d=g=0$ teremos $ex+f \le hx+i$ que foi estudado anteriormente.

Iniciamos o capítulo usando o método de completar quadrados para a dedução da forma canônica do trinômio ax^2+bx+c. A seguir utilizamos discriminante (Δ) para análise da equação $ax^2+bx+c=0$. Apresentamos um estudo detalhado das desigualdades $ax^2+bx+c \le 0$ e $ax^2+bx+c<0$ em função do discriminante (Δ) e do sinal de a. Nesse estudo expomos a solução algébrica e a interpretação através do gráfico da sua respectiva função quadrática. Finalizamos com alguns exemplos.

4.1- A Forma Canônica do Trinômio ax^2+bx+c.

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\underbrace{x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\frac{b^2}{4a^2}}_{\substack{Quadrado\\Perfeito}}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) =$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4a}{4a}.\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right] =$$

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{(b^2-4ac)}{4a^2}\right]$. Considere o discriminante $b^2-4ac=\Delta$ temos que:

$$\boxed{ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]} \quad (*)$$

4.2- Equação $ax^2+bx+c=0$, a, b e c Números Reais e $a \neq 0$.

Será dividida em três etapas $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$, descritas abaixo.

- $\Delta > 0$

$ax^2+bx+c\overset{(*)}{=}a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]=0$. Como $a\neq 0$ então $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}=0\Rightarrow$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\ \Rightarrow\ \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\ \Rightarrow\ \left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|2a|}\ \Rightarrow\ x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\ \Rightarrow\ \begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

- $\Delta = 0$

$ax^2+bx+c\overset{(*)}{=}a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]=0$. Como $a\neq 0$ então $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0\ \Rightarrow\ x=\dfrac{-b}{2a}$

- $\Delta < 0$. Observe que nesse caso $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$.

$ax^2+bx+c\overset{(*)}{=}a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]=\underbrace{a}_{\neq 0}\underbrace{\left[\underbrace{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0}+\underbrace{\left(-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)}_{>0}\right]}_{\neq 0}\neq 0$, para todo x real.

Logo, nesse caso, $ax^2+bx+c=0$ não possui solução.

4.3- Observações

- Quando o discriminante for positivo vamos assumir $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\alpha_1$ e $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\alpha_2$
- Assumindo $f(x)=ax^2+bx+c$ ressaltamos que se $\Delta\geq 0$ então a solução de $ax^2+bx+c=0$ significa o(s) ponto(s) que a parábola f intersecta o eixo das abscissas e se $\Delta<0$ então a parábola não intersecta o eixo das abscissas.
- Para interpretar $ax^2+bx+c\leq 0$ graficamente devemos observar em quais intervalos o gráfico da função $f(x)=ax^2+bx+c$ é menor ou igual a zero, ou seja, está “abaixo” do eixo das abscissas ou o intersecta. Para interpretar $ax^2+bx+c<0$ devemos observar em quais intervalos o gráfico da função

$f(x)=ax^2+bx+c$ é menor que zero, ou seja, está “abaixo” do eixo das abscissas.

• Em relação ao gráfico de $f(x)=ax^2+bx+c$ iremos construí-lo considerando apenas os valores de a e Δ.

• A desigualdade $ax^2+bx+c\le 0$ também pode ser interpretada ou resolvida como $a_1x^2+b_1x+c_1\ge 0$ onde $a_1=-a$, $b_1=-b$ e $c_1=-c$.

4.4- Inequação $ax^2+bx+c\le 0$, a, b e c Números Reais e $a\ne 0$.

Será dividida em seis casos, considerando o discriminante Δ e o valor de a.

Caso 1: $\Delta>0$ **e** $a>0$

$ax^2+bx+c\le 0 \;\Rightarrow\; ax^2+bx+c \overset{(*)}{=} a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]\le 0$. Como $a>0$ temos

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\le 0 \;\Rightarrow\; \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\le\frac{\Delta}{4a^2} \;\Rightarrow\; \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\le\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \;\Rightarrow\; \left|x+\frac{b}{2a}\right|\le\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$$

($|a|=a$, pois $a>0$) $\Rightarrow\; \left|x+\dfrac{b}{2a}\right|\le\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \;\Rightarrow\; -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\le x+\dfrac{b}{2a}\le\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \;\Rightarrow$

$\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\le x\le\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Portanto $S=\left[\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=[\alpha_1,\alpha_2]$

Interpretação Gráfica

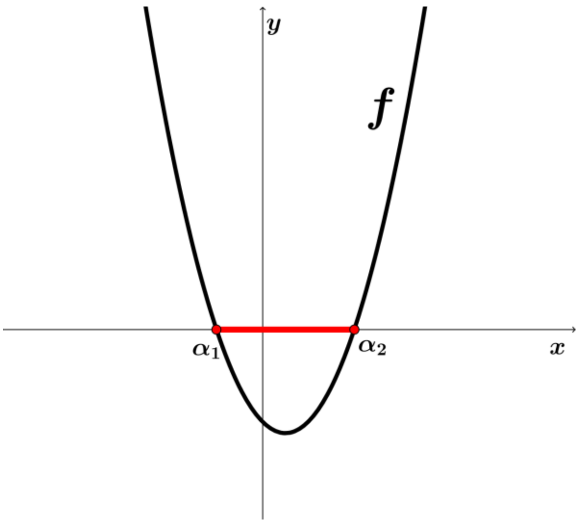


Figura 4.1 – Gráfico de f com Δ e a positivos.

$\Delta > 0$, $a > 0$ e $f(x) = ax^2 + bx + c \le 0 \Rightarrow x \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Deve-se observar o gráfico da função f nos intervalos onde a função é não positiva.

Caso 2: $\Delta > 0$ **e** $a < 0$

$ax^2 + bx + c \le 0 \;\Rightarrow\; ax^2 + bx + c \overset{(*)}{=} a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \le 0 \;\Rightarrow$ Como $a < 0$ temos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \ge 0 \;\Rightarrow\; \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \ge \frac{\Delta}{4a^2} \;\Rightarrow\; \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} \ge \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \;\Rightarrow\; \left|x + \frac{b}{2a}\right| \ge \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$$

($|a| = -a$, pois $a < 0$) $\Rightarrow \left|x + \frac{b}{2a}\right| \ge \frac{\sqrt{\Delta}}{-2a} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{b}{2a} \le \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x \le \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x + \frac{b}{2a} \ge -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x \ge \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$. Assim

$$S = \left(-\infty, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right] \cup \left[\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, +\infty\right) = (-\infty, \alpha_2] \cup [\alpha_1, +\infty).$$

Ressaltamos que nesse caso $\alpha_2 < \alpha_1$, pois $a < 0$.

Interpretação Gráfica

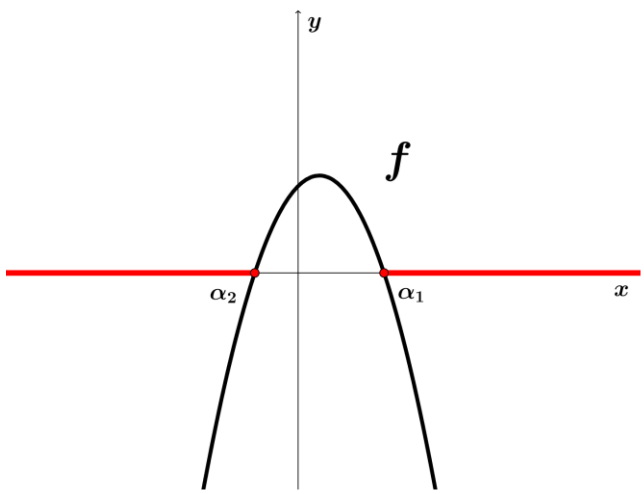


Figura 4.2 – Gráfico de f com Δ positivo e a negativo.

$\Delta > 0$, $a < 0$ e $f(x) = ax^2 + bx + c \le 0 \Rightarrow x \in (-\infty, \alpha_2] \cup [\alpha_1, +\infty)$. Deve-se observar o gráfico da função f nos intervalos onde a função é não positiva.

Caso 3: $\Delta = 0$ **e** $a > 0$

$$ax^2+bx+c \le 0 \;\Rightarrow\; ax^2+bx+c \overset{(*)}{=} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \le 0 \;\Rightarrow\; a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - 0\right] \le 0 \Rightarrow$$

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \le 0$. Como $a > 0$ e $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \ge 0$ concluímos que $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ nunca será negativo, porém pode ser nulo. Assim

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \xrightarrow{a\neq 0} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$. Logo $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

Interpretação Gráfica

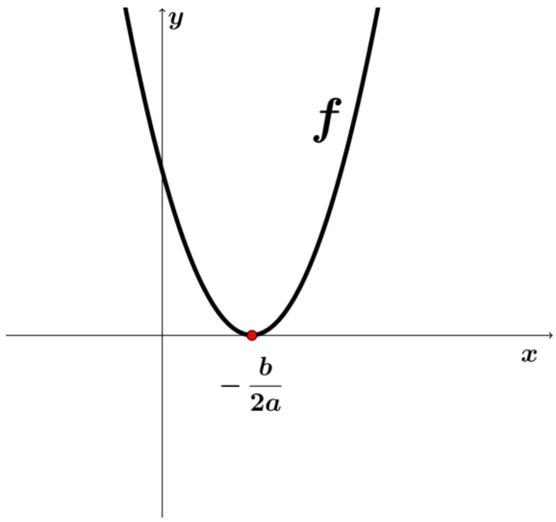


Figura 4.3 – Gráfico de f com Δ nulo e a positivo.

$\Delta = 0$, $a > 0$ e $f(x) = ax^2 + bx + c \le 0 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$. Deve-se observar o gráfico da função f nos intervalos onde a função é não positiva.

Caso 4: $\Delta = 0$ **e** $a < 0$

$$ax^2+bx+c \le 0 \;\Rightarrow\; ax^2+bx+c \overset{(*)}{=} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \le 0 \;\Rightarrow\; a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \le 0 \;\Rightarrow$$

Como $a < 0$ então $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \ge 0$. Essa última desigualdade é verdadeira para todo número real assim $S = (-\infty, +\infty)$.

Interpretação Gráfica

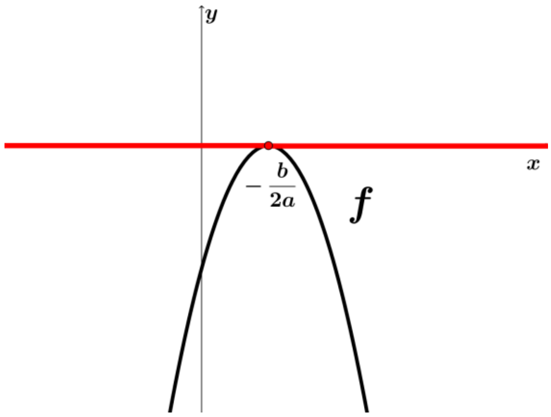


Figura 4.4 – Gráfico de f com Δ nulo e a negativo.

$\Delta = 0$, $a < 0$ e $f(x) = ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$. Deve-se observar o gráfico da função f nos intervalos onde a função é não positiva.

Caso 5: $\Delta < 0$ e $a > 0$.

Neste caso $-\Delta > 0$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c \overset{(*)}{=} a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \leq 0 \xrightarrow{a>0} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)}_{>0} \leq 0$$

A soma de um valor não negativo com um positivo resulta em valor positivo. Portanto $S = \varnothing$.

Interpretação Gráfica

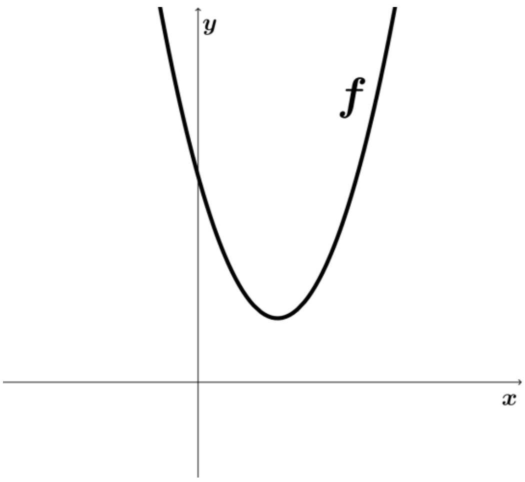


Figura 4.5 – Gráfico de f com Δ negativo e a positivo.

$\Delta < 0$, $a > 0$ e $f(x) = ax^2 + bx + c \le 0 \Rightarrow x \in \varnothing$. A função f nunca será negativa ou igual a zero, ou seja, o gráfico da função nunca estará "abaixo" do eixo x.

Caso 6: $\Delta < 0$ **e** $a < 0$**.**

Neste caso $-\Delta > 0$

$$ax^2+bx+c \le 0 \Rightarrow ax^2+bx+c \overset{(*)}{=} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \le 0 \xrightarrow{a<0} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} \ge 0 \Rightarrow$$

$\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\ge 0} + \underbrace{\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)}_{>0} \ge 0$. Essa última desigualdade é verdadeira para todo número real assim $S = (-\infty, +\infty)$.

Interpretação Gráfica

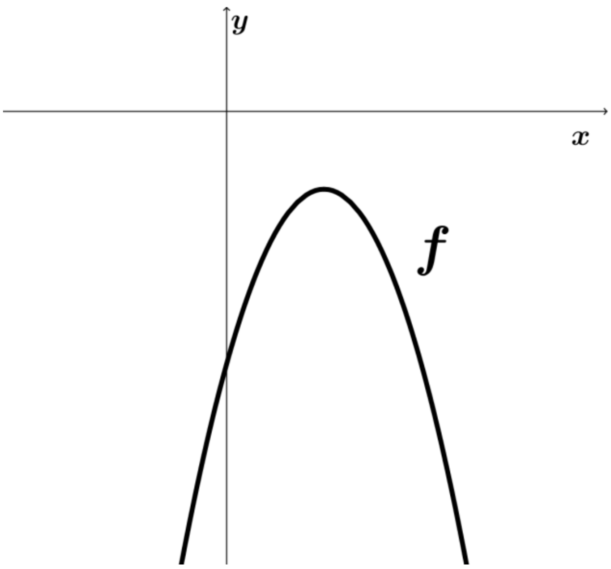


Figura 4.6 – Gráfico de f com Δ e a negativos.

$\Delta < 0$, $a < 0$ e $f(x) = ax^2 + bx + c \le 0 \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$. A função f nunca será positiva ou nula, ou seja, o gráfico da função f sempre estará "abaixo" do eixo x.

4.5- Inequação $ax^2+bx+c < 0$, a, b e c Números Reais e $a \neq 0$.

Também será dividido em 6 casos

Caso1: $\Delta > 0$ **e** $a > 0$

$ax^2+bx+c<0 \Rightarrow ax^2+bx+c \overset{(*)}{=} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]<0$. Como $a>0$ temos

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}<0 \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<\frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}<\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Rightarrow \left|x+\frac{b}{2a}\right|<\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$

($|a|=a$, pois $a>0$) $\Rightarrow \left|x+\frac{b}{2a}\right|<\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}<x+\frac{b}{2a}<\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$

$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}<x<\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Portanto $S=\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=(\alpha_1,\alpha_2)$

Interpretação Gráfica

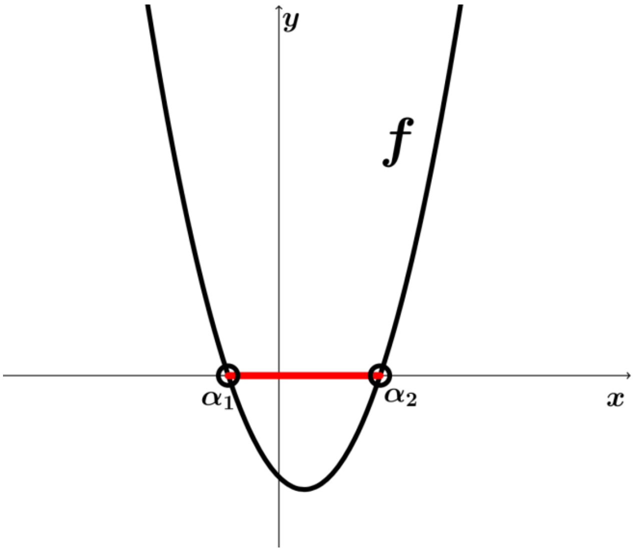


Figura 4.7 – Gráfico de f com Δ e a positivos.

$\Delta>0$, $a>0$ e $f(x)=ax^2+bx+c<0 \Rightarrow x\in(\alpha_1,\alpha_2)$. Deve-se observar o gráfico da função f nos intervalos onde a função é negativa.

Caso 2: $\Delta > 0$ e $a < 0$

$ax^2+bx+c<0 \Rightarrow ax^2+bx+c \overset{(*)}{=} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]<0$. Como $a<0$ temos

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0 \;\Rightarrow\; \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>\frac{\Delta}{4a^2} \;\Rightarrow\; \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}>\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \;\Rightarrow\; \left|x+\frac{b}{2a}\right|>\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$$

$(|a|=-a$, pois $a<0)$ $\Rightarrow \left|x+\frac{b}{2a}\right|>\frac{\sqrt{\Delta}}{-2a} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{b}{2a}<\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x<\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x+\frac{b}{2a}>-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x>\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}.$

Portanto $S=\left(-\infty,\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cup\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},+\infty\right)=(-\infty,\alpha_2)\cup(\alpha_1,+\infty)$

Ressaltamos que nesse caso $\alpha_2<\alpha_1$, pois $a<0$.

Interpretação Gráfica

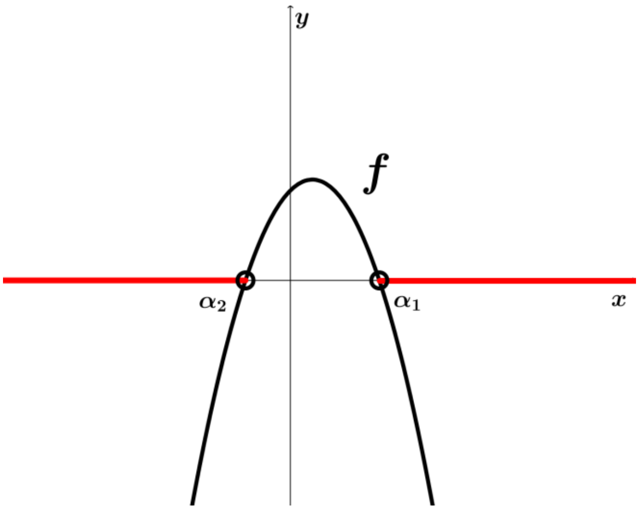


Figura 4.8 – Gráfico de f com Δ positivo e a negativo.

$\Delta>0$, $a<0$ e $f(x)=ax^2+bx+c<0 \Rightarrow x\in(-\infty,\alpha_2)\cup(\alpha_1,+\infty)$. Deve-se observar o gráfico da função f nos intervalos onde a função é negativa.

Caso 3: $\Delta=0$ e $a>0$

$$ax^2+bx+c<0 \;\Rightarrow\; ax^2+bx+c\overset{(*)}{=}a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]<0 \;\Rightarrow\; a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-0\right]<0 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$. Como $a>0$ e $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ concluímos que $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ nunca será negativo. Assim $S=\varnothing$.

Interpretação Gráfica

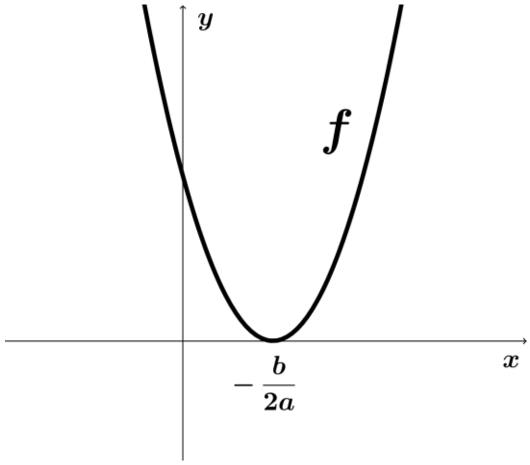


Figura 4.9 – Gráfico de f com Δ nulo e a positivo.

$\Delta = 0$, $a > 0$ e $f(x) = ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$. Deve-se observar o gráfico da função f nos intervalos onde a função é negativa.

Caso 4: $\Delta = 0$ **e** $a < 0$

$ax^2 + bx + c < 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c \overset{(*)}{=} a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] < 0 \quad \Rightarrow \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$. Como $a < 0$ temos $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$. Essa última desigualdade é verdadeira para todo número real exceto $-\frac{b}{2a}$. Logo $S = \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Interpretação Gráfica

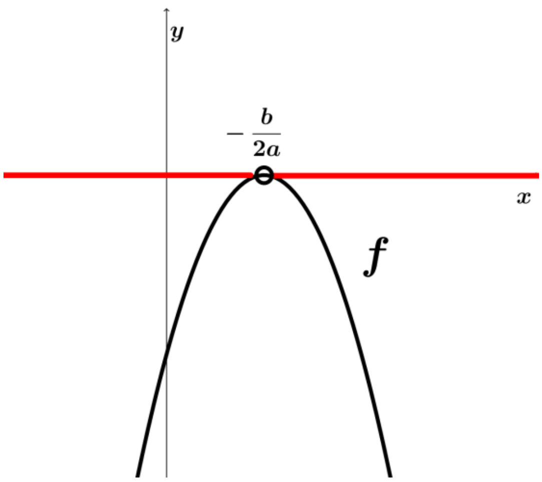


Figura 4.10 – Gráfico de f com Δ nulo e a negativo.

$\Delta = 0$, $a < 0$ e $f(x) = ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right) \cup \left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$. Deve-se observar o gráfico da função f nos intervalos onde a função é negativa.

Caso 5: $\Delta < 0$ e $a > 0$.

Nesse caso $-\Delta > 0$. Sendo assim $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow$ $ax^2 + bx + c \overset{(*)}{=} a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] < 0$. Como $a > 0$ teremos $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} < 0 \Rightarrow$ $\underbrace{\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)}_{>0} < 0$. A soma de um valor não negativo com um positivo jamais terá como resultado um número negativo. Portanto $S = \varnothing$.

Interpretação Gráfica

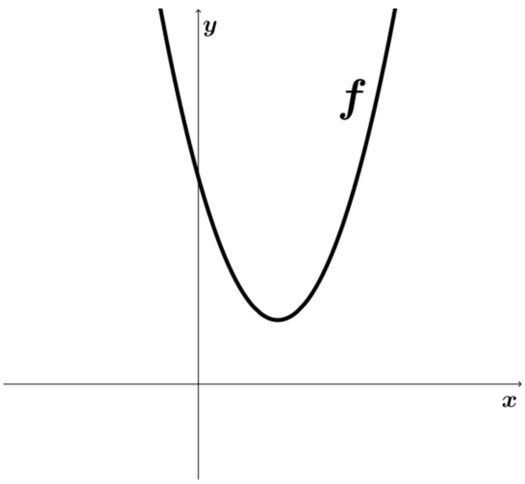


Figura 4.11 – Gráfico de f com Δ negativo e a positivo.

$\Delta < 0$, $a > 0$ e $f(x) = ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$. A função f nunca será negativa ou nula, ou seja, o seu gráfico nunca estará “abaixo” do eixo x.

Caso 6: $\Delta < 0$ e $a < 0$.

Nesse caso $-\Delta > 0$. Sendo assim $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow$ $ax^2 + bx + c \overset{(*)}{=} a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] < 0$. Como $a < 0$ temos $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0 \Rightarrow$

$\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0}+\underbrace{\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)}_{>0}>0$. Essa última desigualdade é sempre verdadeira. Portanto $S=(-\infty,+\infty)$.

Interpretação Gráfica

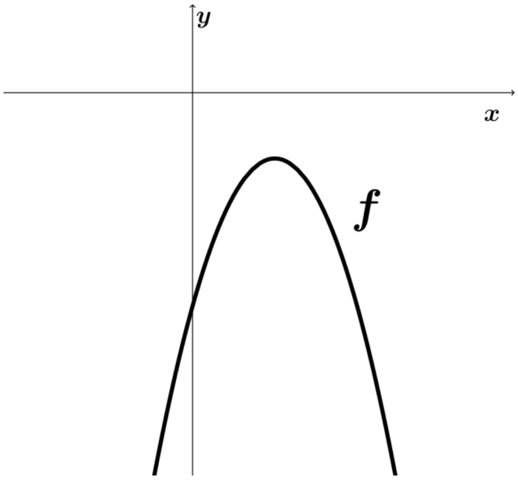


Figura 4.12 – Gráfico de f com Δ e a negativos.

$\Delta<0$, $a<0$ e $f(x)=ax^2+bx+c<0 \Rightarrow x\in(-\infty,+\infty)$. A função f nunca será positiva, ou seja, seu gráfico sempre estará "abaixo" do eixo x.

Resumo:

	$ax^2+bx+c\leq 0$	$ax^2+bx+c<0$
$\Delta>0$ e $a>0$	$[\alpha_1,\alpha_2]$	(α_1,α_2)
$\Delta>0$ e $a<0$	$(-\infty,\alpha_1]\cup[\alpha_2,+\infty)$	$(-\infty,\alpha_1)\cup(\alpha_2,+\infty)$
$\Delta=0$ e $a>0$	$\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$\varnothing$
$\Delta=0$ e $a<0$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\infty.-\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$
$\Delta<0$ e $a>0$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\Delta<0$ e $a<0$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$

Comparando as duas desigualdades da tabela vemos que as soluções permanecem iguais quando $\Delta<0$.

4.6 - Exemplos:

1- A partir dos gráficos das funções quadráticas f e g resolva as desigualdades pedidas.

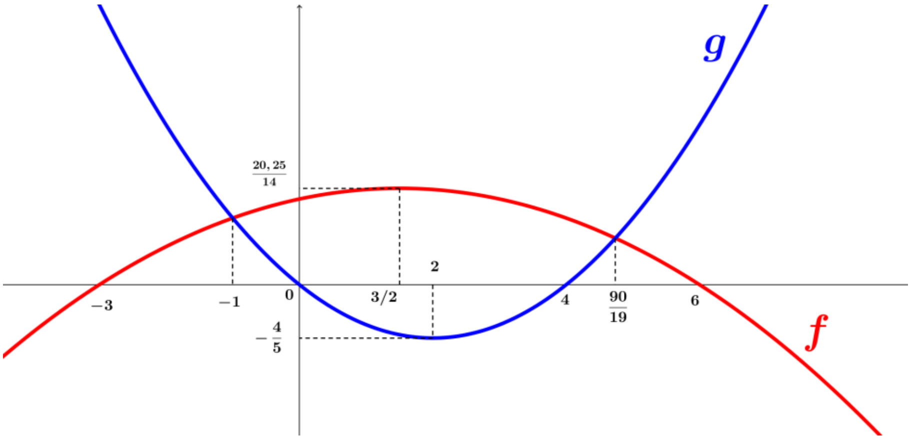


Figura 4.13 – Gráfico de f e g referente ao exemplo 4.6.1.

a) $f(x) \geq 0$

b) $g(x) \geq 0$

c) $f(x) \geq g(x)$

d) $f(x).g(x) \leq 0$

e) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$

f) $|f(x)| \geq g(x)$

g) Determine os valores de α para que ambas as equações $f(x) = \alpha$ e $g(x) = \alpha$ possuam duas soluções.

Solução:

a) $f(x) \geq 0$. Observar o intervalo, na abscissa, onde f é maior ou igual a zero. $S = [-3,6]$

b) $g(x) \geq 0$. Observar o intervalo, na abscissa, onde g é maior ou igual a zero. $S = (-\infty,0] \cup [4,+\infty)$

c) $f(x) \geq g(x)$. Observar o intervalo onde f é maior ou igual a g. $S = \left[-1,\dfrac{90}{19}\right]$.

d) $f(x).g(x) \leq 0$. Observar os intervalos onde $f(x) \geq 0$ e $g(x) \leq 0$ ou $f(x) \leq 0$ e $g(x) \geq 0$ ou são nulas. Ou seja, um mesmo intervalo onde f seja maior ou igual a zero e g seja menor ou igual a zero ou f seja menor ou igual a zero e g seja maior ou igual a zero. $(-\infty,-3]\cup[0,4]\cup[6,+\infty)$.

$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0$. Observar os intervalos onde f e g são ambas positivas ou ambas negativas ou f seja nula e $g\neq 0$. Ou seja, $f(x)\geq 0$ e $g(x)>0$ ou $f(x)\leq 0$ e $g(x)<0$. $[-3,0)\cup(4,6]$.

e) $|f(x)|\geq g(x)$. Para obter o gráfico de $|f|$ basta rebater o gráfico de f simetricamente em relação ao eixo x nos intervalos $(-\infty,-3]$ e $[6,+\infty)$. Observando o intervalo $[6,+\infty)$ vemos que g cresce mais rápido do que $|f|$, logo não se intersectam nesse intervalo. Utilizando argumento análogo concluímos que $|f|$ e g não se encontram no intervalo $(-\infty,-3]$. Portanto a solução será $\left[-1,\dfrac{90}{19}\right]$.

f) Considere $y=\alpha$ reta paralela ao eixo x. Se $\alpha\in\left(-\dfrac{4}{5},+\infty\right)$ então $y=\alpha$ intersecta a função g em dois pontos. Se $\alpha\in\left(-\infty,\dfrac{20{,}25}{4}\right)$ então $y=\alpha$ intersecta a função f em dois pontos. Logo a solução será a interseção de ambos os intervalos $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{20{,}25}{4}\right)$.

As leis de formação das funções f e g podem ser determinadas e utilizadas para resolução algébrica. Elas são $f(x)=-\dfrac{1}{14}\left(x^2-3x-18\right)$ e $g(x)=\dfrac{1}{5}\left(x^2-4x\right)$

2- Resolva as desigualdades $x^2-4\leq 5x+10\leq -x^2+16$ e interprete graficamente.

Solução Algébrica

Vamos dividir em dois casos $I: x^2-4\leq 5x+10$ e $II: 5x+10\leq -x^2+16$.

$I: x^2-4\leq 5x+10 \Rightarrow x^2-5x-14\leq 0 \Rightarrow (x-7)(x+2)\leq 0 \Rightarrow S_I=[-2,7]$

$II: 5x+10\leq -x^2+16 \Rightarrow x^2+5x-6\leq 0 \Rightarrow (x-1)(x+6)\leq 0 \Rightarrow S_{II}=[-6,1]$

A solução será os valores de x que satisfazem as duas desigualdades.

$S_F=S_I\cap S_{II}=[-2,7]\cap[-6,1]=[-2,1]$

Interpretação Gráfica

Seja $f(x) = x^2 - 4$, $H(x) = 5x + 10$ e $g(x) = -x^2 + 16$. Calculando os pontos de interseção:

$$f(x) = H(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 7\},$$

$$g(x) = H(x) \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-6, 1\}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4 = -x^2 + 16 \Leftrightarrow 2x^2 = 20 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$$

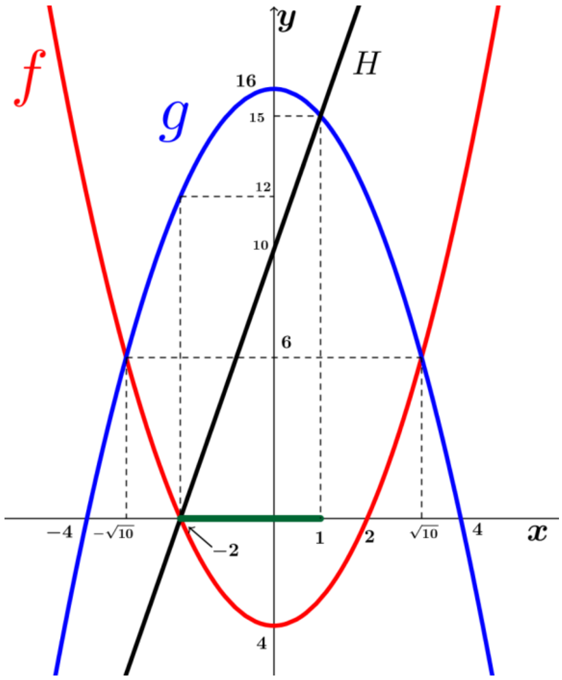


Figura 4.14 – Gráfico de f e g referente ao exemplo 4.6.2.

Precisamos observar qual intervalo no eixo x onde a função H está entre as funções f e g, ou seja, $f(x) \leq H(x) \leq g(x)$. Pelo gráfico vemos que a solução será $[-2, 1]$.

3- Dados dois números positivos S e P positivos. Determinar α e β tais que $\alpha + \beta = S$ e $\alpha.\beta = P$.

Para resolução utilizaremos o método dos Babilônios apresentado por Lima (et al, 2006, p.37 -39)[6]. Outra demonstração semelhante pode ser encontrada em [7]. O material encontrado tem aproximadamente quatro mil anos e foi descoberto em escavações arqueológicas. Os tabletes exibiam informações similares as que apresentaremos.

Solução:

Como $\alpha+\beta=S \Rightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{S}{2}$ a média aritmética entre α e β é $\dfrac{S}{2}$. Suponhamos $\alpha \le \beta$.

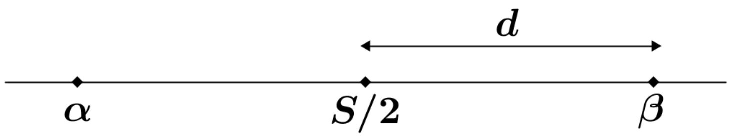


Figura 4.15 – Referente ao exemplo 4.6.3.

Vamos definir d tal que $d=\beta-\dfrac{S}{2}=\dfrac{S}{2}-\alpha$. Dai $\alpha=\dfrac{S}{2}-d$ e $\beta=\dfrac{S}{2}+d$.

Temos que $P=\alpha.\beta=\left(\dfrac{S}{2}-d\right)\left(\dfrac{S}{2}+d\right)=\dfrac{S^2}{4}-d^2$, ou seja, $P=\dfrac{S^2}{4}-d^2 \Rightarrow$ $d^2=\dfrac{S^2}{4}-P$. Como $d>0$ temos $d=\sqrt{\dfrac{S^2}{4}-P}=\sqrt{\dfrac{S^2-4P}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{S^2-4P}$ $\Rightarrow d=\dfrac{1}{2}\sqrt{S^2-4P}$.

Logo substituindo d : $\alpha=\dfrac{S}{2}-d=\dfrac{S}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{S^2-4P}=\dfrac{S-\sqrt{S^2-4P}}{2}$ e $\beta=\dfrac{S}{2}+d=\dfrac{S}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{S^2-4P}=\dfrac{S+\sqrt{S^2-4P}}{2}$. Essas fórmulas só tem sentido se $S^2 \ge 4P$. Concluímos que a solução é: $\alpha=\dfrac{S-\sqrt{S^2-4P}}{2}$ e $\beta=\dfrac{S+\sqrt{S^2-4P}}{2}$.

Vale ressaltar que os valores α e β são raízes da equação $x^2-Sx+P=0$, ou seja, $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{S\pm\sqrt{S^2-4P}}{2}$. A equação $x^2-Sx+P=0$ é equivalente a $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, basta tomarmos $S=-\dfrac{b}{a}$ e $P=\dfrac{c}{a}$.

Suponhamos $a > 0$. Substituindo nas expressões acima teremos:

$$\alpha = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} = \frac{-\frac{b}{a} - \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)}}{2} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\beta = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} = \frac{-\frac{b}{a} + \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)}}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

CAPÍTULO 5 – DESIGUALDADES ENTRE OUTRAS FUNÇÕES ELEMENTARES

Com um pouco mais de liberdade vamos tratar de algumas equações e inequações diferentes dos capítulos anteriores. Iremos utilizar também funções logarítmicas, exponenciais, racionais, polinomiais e potencia de funções como $\left(e^{x}\right)^{\ln x} = x^{x}$. Vamos ainda usar algumas desigualdades das médias: aritmética, harmônica e geométrica.

Nesse capítulo assumiremos o conhecimento de gráfico das funções transcendentais que podem ser pesquisadas nos livros de cálculo [3], bem como os conceitos de limite, derivadas e assíntotas.

Como nos capítulos anteriores vamos destacar sempre a solução através de gráficos de funções.

Iniciamos com dois exemplos envolvendo funções quadrática e racional. Apresentamos uma propriedade importante para desigualdades bem como sua demonstração. A seguir utilizamos o gráfico da função $f(x) = x^{x}$ para resolver um problema bem interessante, apresentamos duas desigualdades envolvendo médias e finalizamos com uma desigualdade entre função exponencial e logaritmo.

5.1- Exemplos

1- Resolva e interprete graficamente $x^2 + x \le \dfrac{2}{x},\ x \ne 0$.

Solução Algébrica

$$x^2 + x \le \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 + x - \frac{2}{x} \le 0 \Rightarrow \frac{x^3 + x^2 - 2}{x} \le 0 \xrightarrow{Fatorando} \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{x} \le 0, x \ne 0.$$

Observe que $x = 1$ é raiz de $x^3 + x^2 - 2$. Assim $x^3 + x^2 - 2$ é divisível por $x - 1$.

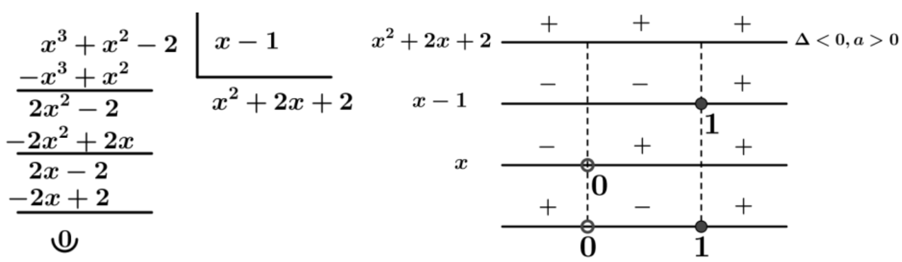


Figura 5.1 - Divisão polinomial e estudo do sinal.

A partir do estudo do sinal de $\dfrac{x^3+x^2-2}{x}$ vemos que a solução será o intervalo $(0,1]$.

Interpretação Gráfica

Considere as funções $f(x)=x^2+x$ e $g(x)=\dfrac{2}{x}, x\neq 0$. $f(x)=g(x)\Rightarrow x^2+x=\dfrac{2}{x}\Rightarrow$ $x^3+x^2-2=0\Rightarrow (x-1)(x^2+2x+2)=0$ $\Rightarrow$ $x-1=0$ ou $x^2+2x+2=0$. Como $x^2+2x+2\neq 0$, pois $\Delta<0$, então a única solução será $x=1$. Ou seja, o ponto $(1,2)$ é a interseção entre o gráfico das funções f e g. Observamos no gráfico que o intervalo no eixo x onde a função g é maior ou igual a função f é o intervalo $(0,1]$.

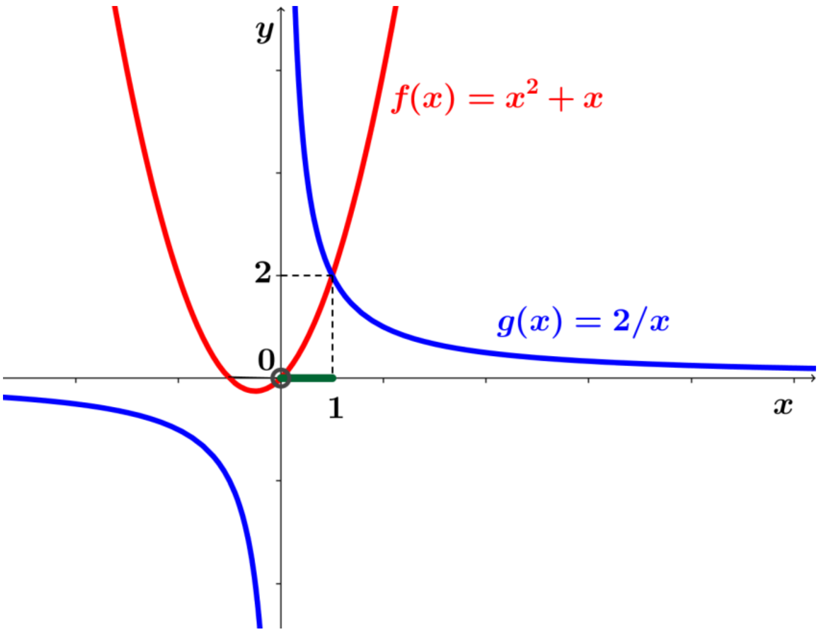


Figura 5.2 - Gráficos de $f(x)=x^2+x$ **e** $g(x)=2/x$.

2- Resolva e interprete graficamente $x^2-2x-5\leq -\dfrac{6}{x}$, $x\neq 0$.

Solução Algébrica

$x^2-2x-5\leq -\dfrac{6}{x}\Rightarrow x^2-2x-5+\dfrac{6}{x}\leq 0\Rightarrow \dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x}\leq 0$. Fatorando obtemos $\dfrac{(x+2)(x^2-4x+3)}{x}\leq 0$ e $x\neq 0$. Como $x=-2$ é raiz de x^3-2x^2-5x+6, x^3-2x^2-5x+6 é divisível por $x+2$.

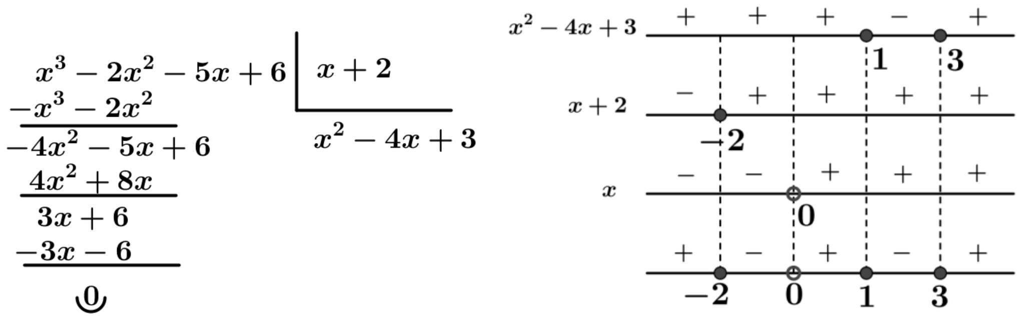


Figura 5.3 - Divisão polinomial e estudo do sinal.

A partir do estudo do sinal vemos que a solução será $[-2,0)\cup[1,3]$. É importante destacar que $x^2-2x-5\leq -\dfrac{6}{x} \Rightarrow x^3-2x^2-5x\leq -6$ é falsa, ou seja, não podemos "multiplicar cruzado", pois caso x seja negativo o sinal da desigualdade muda. Nessa situação temos que proceder em dois casos: $x>0$ ou $x<0$.

• Se $x>0$ então $x^2-2x-5\leq -\dfrac{6}{x} \Rightarrow x^3-2x^2-5x\leq -6 \Rightarrow (x-1)(x+2)(x-3)\leq 0$.

Como $x>0$ (restrição) teremos $S_1=[1,3]$.

• Se $x<0$ então $x^2-2x-5\leq -\dfrac{6}{x} \Rightarrow x^3-2x^2-5x\geq -6 \Rightarrow (x-1)(x+2)(x-3)\geq 0$.

Assim se $x<0$ (restrição) então $S_2=[-2,0)$. Portanto $S=S_1\cup S_2=[-2,0)\cup[1,3]$.

Interpretação Gráfica

Considere as funções $f(x)=x^2-2x-5$ e $g(x)=-\dfrac{6}{x}$, com $x\neq 0$. Então $f(x)=g(x) \Rightarrow x^2-2x-5=-\dfrac{6}{x} \Rightarrow x^3-2x^2-5x+6=0$. Fatorando teremos $(x-1)(x+2)(x-3)=0$. Logo $x\in\{-2,1,3\}$. Isto significa que $(1,-6)$, $(-2,3)$ e $(3,-2)$ são os pontos de interseção entre os gráficos das funções f e g. Podemos observar pelo gráfico que o intervalo onde a função g é maior ou igual a função f é $[-2,0)\cup[1,3]$.

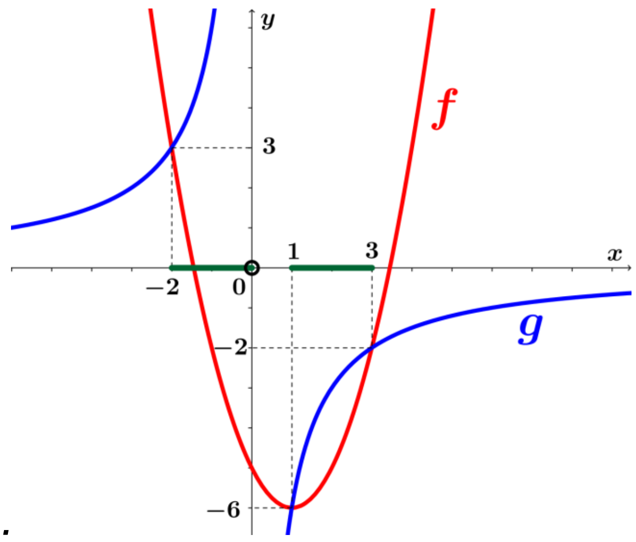


Figura 5.4 - Gráficos de $f(x) = x^2 - 2x - 5$ e $g(x) = -6/x$.

5.2- Propriedade 4: $a > c > 0$ e $b > d > 0 \Rightarrow ab > cd$

Demonstração:

Por hipótese $a - c > 0$ e $b - d > 0$, portanto $(a-c)(b-d) > 0 \Rightarrow ab - ad - cb + cd > 0 \Rightarrow ab > ad + cb - cd$. Subtraindo cd em ambos os lados da desigualdade tem-se $ab - cd > ad + cb - cd - cd \Rightarrow ab - cd > ad - cd + cb - cd \Rightarrow ab - cd > d\underbrace{(a-c)}_{>0} + c\underbrace{(b-d)}_{>0} > 0$. Desse modo $ab - cd > 0 \Rightarrow ab > cd$ ■

5.3- Exemplo: Quantas soluções têm $x^x = \dfrac{1}{2}$? E $x^x = \dfrac{3}{4}$?

Primeiro vamos definir a função $f(x) = x^x$ cujo domínio é $(0, +\infty)$. A partir de agora precisamos construir o gráfico da função f e para isso iremos utilizar ferramentas de cálculo [3].

Vamos determinar:

- Possíveis assíntotas verticais e horizontais.
- Intervalos de crescimento e decrescimento da função.
- Pontos de máximo ou mínimo da função.
- Intervalos onde a função possui concavidade para cima ou para baixo e pontos de inflexão.

Assíntotas Verticais

Como a função não está definida em 0 (zero), a reta $x=0$ passa a ser um candidato à assíntota vertical. Vamos estudar o comportamento de f na vizinhança de $x=0$.

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0} x\ln x}$. Vamos calcular $\lim_{x\to 0} x\ln x$.

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Portanto $e^{\lim_{x\to 0}(x\ln x)} = e^0 = 1$. Dai $\lim_{x\to 0} x^x = 1$. Com isso vemos que $x=0$ não é assíntota vertical.

Assíntotas Horizontais

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^x = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to +\infty} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to +\infty} x\ln x} = e^{+\infty} = +\infty$$

Como $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ concluímos que a função não possui assíntotas horizontas.

Intervalos de Crescimento e Decrescimento da função

Como $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$ temos que sua derivada é a função

$$f'(x) = e^{x\ln x}.(x\ln x)' = e^{x\ln x}\left(1.\ln x + x.\frac{1}{x}\right) = e^{x\ln x}(\ln x + 1)$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow e^{x\ln x}(\ln x + 1) > 0$. Como $e^{x\ln x} > 0$ temos que

$$\ln(x) + 1 > 0 \Rightarrow \ln x > -1 \Rightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Rightarrow x > \frac{1}{e}$$

Analogamente vemos que $f'(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{e}$.

$f'(x) > 0$ (f é crescente)	$f'(x) < 0$ (f é decrescente)
$\left(1/e, +\infty\right)$	$\left(0, 1/e\right)$

Pontos de Máximo ou Mínimo da função

$$f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = 0 \Rightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

Como f decresce em $\left(0, 1/e\right)$ e cresce em $\left(1/e, +\infty\right)$, concluímos que $x = \frac{1}{e}$ é ponto de mínimo.

Concavidade e pontos Críticos.

Como $f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln(x) + 1)$ teremos

$$f''(x) = (x^x)'.(\ln(x) + 1) + x^x.(\ln(x) + 1)' =$$

$$= x^x(\ln(x) + 1)(\ln(x) + 1) + x^x.\frac{1}{x} = x^x\left[(\ln(x) + 1)^2 + \frac{1}{x}\right].$$

A função $f''(x)$ é sempre positiva, pois $x^x > 0, (\ln(x) + 1)^2 \geq 0$ e $\frac{1}{x} > 0$.

Logo f possui concavidade para cima em todo seu domínio e, portanto não possui ponto de inflexão.

Com a reunião das informações anteriores podemos construir o gráfico de $f(x) = x^x$.

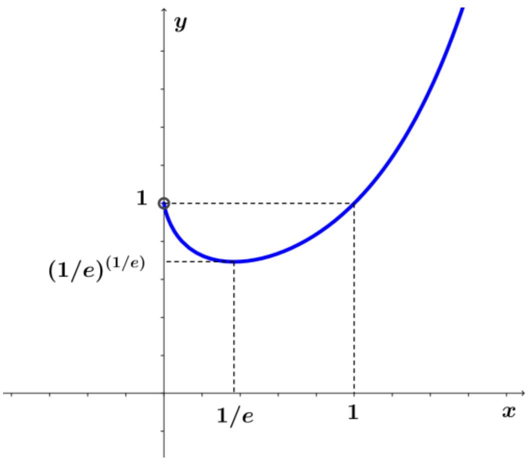


Figura 5.5 – Gráfico de $f(x) = x^x$.

Com o uso do cálculo e do gráfico da função concluímos que o menor valor que a função x^x pode assumir é $x = (1/e)^{1/e}$, ou seja, $x^x \geq (1/e)^{1/e}, \forall x \in (0, +\infty)$. Assim usando o gráfico da função podemos observar que:

- Se $\alpha \in [1,+\infty) \cup \{(1/e)^{1/e}\}$ então $x^x = \alpha$ tem uma solução. (vide figura 5.6 e 5.7)

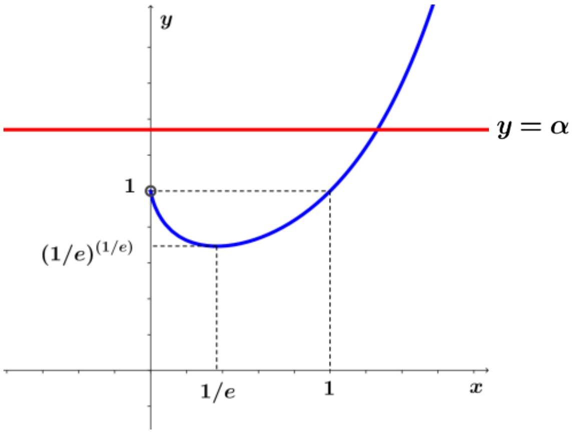


Figura 5.6 – Gráficos de $f(x) = x^x$ **e** $y = \alpha$ **com uma interseção.**

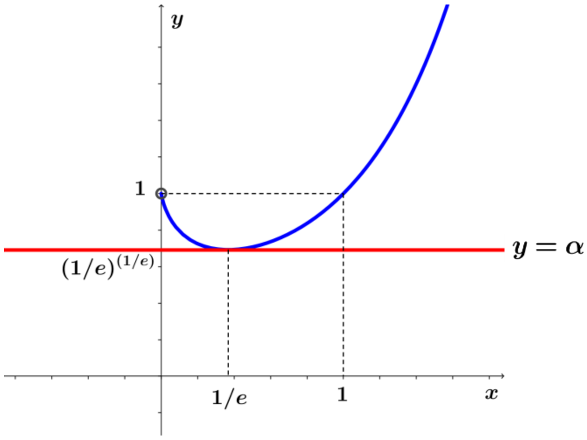


Figura 5.7 – Gráficos de $f(x) = x^x$ **e** $y = \alpha$ **com uma interseção.**

- Se $\alpha \in ((1/e)^{1/e}, 1)$ então $x^x = \alpha$ tem duas soluções. (vide figura 5.8)

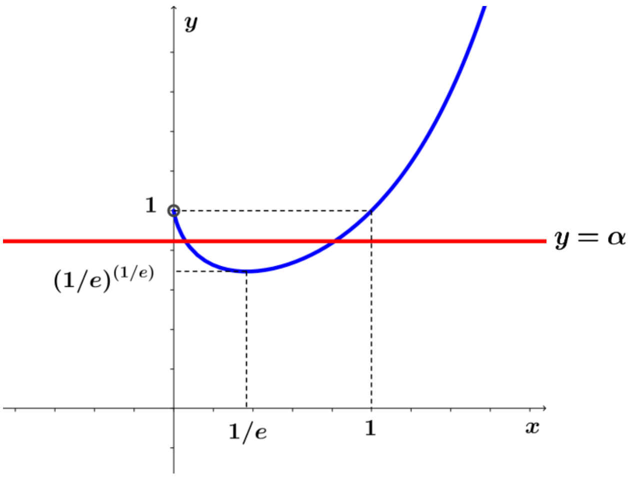


Figura 5.8 – Gráficos de $f(x) = x^x$ **e** $y = \alpha$ **com duas interseções.**

- Se $\alpha \in \left(-\infty,(1/e)^{1/e}\right)$ então $x^x = \alpha$ não tem solução. (vide figura 5.9)

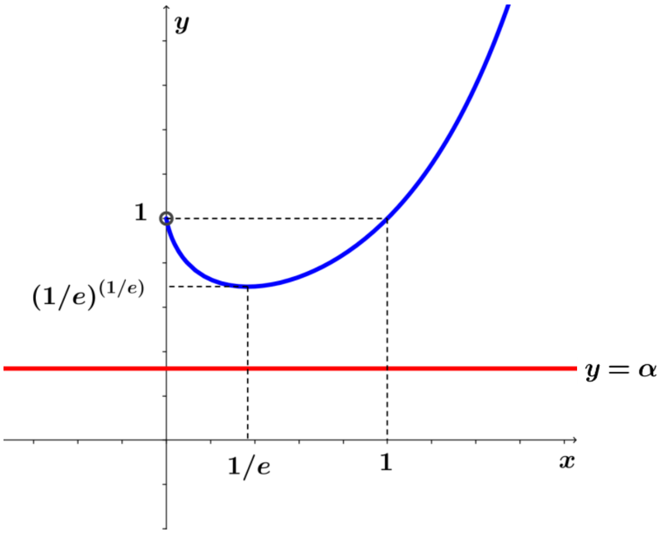


Figura 5.9 – Gráfico de $f(x) = x^x$ **e** $y = \alpha$ **quando não há interseção.**

Voltando para pergunta inicial. Quantas soluções têm $x^x = \dfrac{1}{2}$? E $x^x = \dfrac{3}{4}$?

Precisamos avaliar a partir das conclusões anteriores se $(1/e)^{1/e} > \dfrac{1}{2}$ ou $(1/e)^{1/e} < \dfrac{1}{2}$. O mesmo raciocínio vale para $x^x = \dfrac{3}{4}$.

Podemos usar a aproximação $e \cong 2{,}7$ e, portanto $4 > e \Rightarrow \sqrt{4} > \sqrt{e} \Rightarrow 2 > e^{\frac{1}{2}}$.

Como $h(x) = \ln x$ é uma função crescente temos $2 > e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \ln 2 > \ln e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \ln 2 > \dfrac{1}{2}$.

Assim $\ln 2 > \dfrac{1}{2}$ (*) e $e > 2$ (**). De (*), (**) e propriedade 4 demonstrada anteriormente temos:

$$(\ln 2).e > \frac{1}{2}.2 \quad \Rightarrow \quad e \ln 2 > 1 \quad \Rightarrow \quad \ln 2 > \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad \ln 2 > \frac{1}{e}.\underbrace{\ln e}_{1} \quad \Rightarrow \quad -\ln 2 < -\frac{1}{e}\ln e \quad \Rightarrow$$

$$\ln(2^{-1}) < \ln(e)^{-1/e} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{2} < \ln(e^{-1})^{1/e} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} < \ln\left(1/e\right)^{1/e} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < \left(1/e\right)^{1/e}.$$

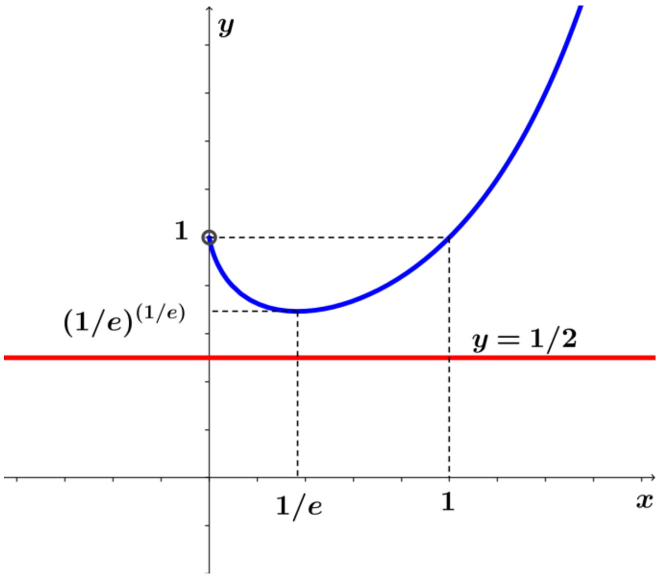


Figura 5.10 – Gráfico de $f(x) = x^x$ **e** $y = 1/2$ **onde não há interseção.**

Portanto $x^x = \dfrac{1}{2}$ não tem solução já que $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} > \frac{1}{2}$, veja a representação gráfica na figura 5.10. Agora vejamos quantas soluções possui a equação $x^x = \dfrac{3}{4}$.

$$64 < 67{,}5 = 27.2{,}5 \Rightarrow 64 < 27.2{,}5 \Rightarrow \frac{64}{27} < \frac{27.2{,}5}{27} \Rightarrow \frac{64}{27} < 2{,}5 < e \Rightarrow \frac{64}{27} < e \Rightarrow$$

$$\frac{4^3}{3^3} < e \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^3 < e \Rightarrow \frac{4}{3} < e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \ln\frac{4}{3} < \ln e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \ln\frac{4}{3} < \frac{1}{3}.$$

Assim $\ln\dfrac{4}{3} < \dfrac{1}{3}$ (I) e $e < 3$ (II). De (I), (II) e propriedade 4 temos:

$$e\ln\frac{4}{3} < 3.\frac{1}{3} \Rightarrow e\ln\frac{4}{3} < 1 \Rightarrow \ln\frac{4}{3} < \frac{1}{e} \Rightarrow -\ln\frac{4}{3} > -\frac{1}{e} \Rightarrow \ln\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} > -\frac{1}{e}.1 \Rightarrow$$

$$\ln\frac{3}{4} > -\frac{1}{e}.(\ln e) \Rightarrow \ln\frac{3}{4} > \frac{1}{e}.(-1).(\ln e) \Rightarrow \ln\frac{3}{4} > \frac{1}{e}.\ln\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow \ln\frac{3}{4} > \ln\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} \Rightarrow$$

$\dfrac{3}{4} > \left(\dfrac{1}{e}\right)^{1/e}$. Logo $x^x = \dfrac{3}{4}$ tem duas soluções (figura 5.11).

Se fizermos uso do GeoGebra[3] as soluções serão dadas aproximadamente por $0{,}64$ e $0{,}15$.

---

[3] Um programa capaz de realizar cálculos de álgebra / geometria e que possibilita a construção de gráficos. Mais informações em <http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/>. Acesso em: 07 julho de 2014.

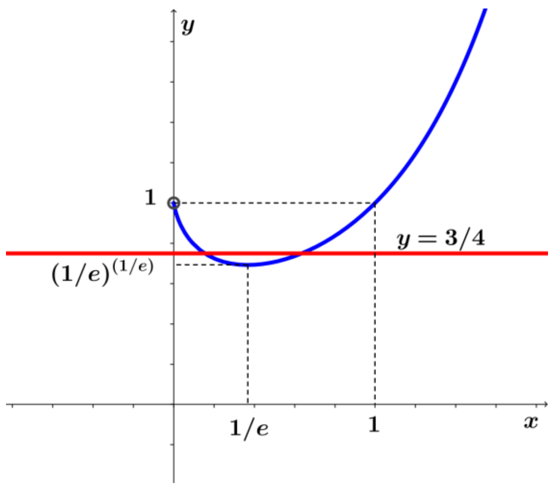


Figura 5.11 – Gráficos de $f(x)=x^x$ **e** $y=3/4$ **com duas interseções.**

5.4- Um Pouco Sobre Médias

É conhecido que: Média Aritmética$\geq$Média Geométrica$\geq$Média Harmônica, ou seja, para dois números reais x e y positivos valem as desigualdades $\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\geq\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$. Fazendo $y=1$ teremos $\dfrac{x+1}{2}\geq\sqrt{x}\geq\dfrac{2}{\frac{1}{x}+1}$. Como $\dfrac{2}{\frac{1}{x}+1}=\dfrac{2}{\frac{1+x}{x}}=\dfrac{2x}{x+1}$, vamos considerar $\dfrac{2x}{x+1}$ no lugar de $\dfrac{2}{\frac{1}{x}+1}$ e vamos incluir o zero. Assim as desigualdades são $\dfrac{x+1}{2}\geq\sqrt{x}\geq\dfrac{2x}{x+1},\forall x\in[0,+\infty)$. Podemos utilizar essas desigualdades para resolver inequações e interpretá-las graficamente. Vejamos os próximos exemplos.

Exemplo 1: Resolva $\dfrac{x+1}{2}\geq\sqrt{x}$ e interprete graficamente.

Solução Algébrica

Observe que $x\geq 0$.

$$\frac{x+1}{2}\geq\sqrt{x}\Rightarrow x+1\geq 2\sqrt{x}\Rightarrow (x+1)^2\geq\left(2\sqrt{x}\right)^2\Rightarrow x^2+2x+1\geq 4x\Rightarrow x^2-2x+1\geq 0$$

$\Rightarrow (x-1)^2 \geq 0$. Essa última desigualdade é verdadeira para todo x. Portanto a solução é $[0,+\infty)$.

Interpretação Gráfica

Considere as funções $f(x)=\dfrac{x+1}{2}$ e $g(x)=\sqrt{x}$.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \frac{x+1}{2}=\sqrt{x}\Rightarrow x+1=2\sqrt{x}\Rightarrow (x+1)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2\Rightarrow x^2+2x+1=4x\Rightarrow x^2-2x+1=0$$

$\Rightarrow (x-1)^2=0\Rightarrow x=1$. Desse modo o ponto $(1,1)$ é a interseção entre o gráfico das funções f e g.

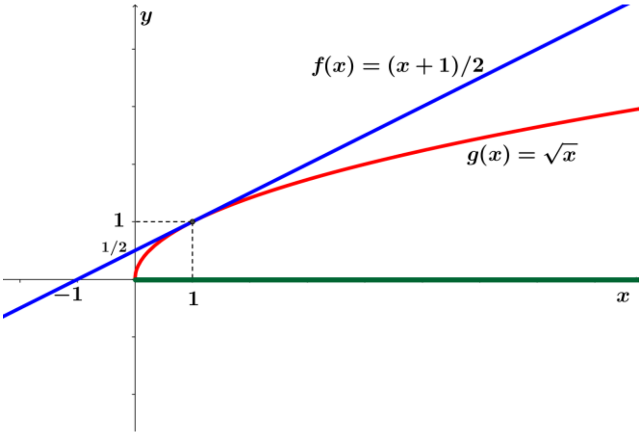


Figura 5.12 – Gráficos de $f(x)=(x+1)/2$ **e** $g(x)=\sqrt{x}$.

A função f (reta) é sempre maior ou igual a função $g(x)=\sqrt{x}$, assim a solução será $[0,+\infty)$.

Exemplo 2- Resolva $\sqrt{x}\geq \dfrac{2x}{x+1}$ e interprete graficamente.

Solução Algébrica

Observe que $x\geq 0$.

$\sqrt{x}\geq \dfrac{2x}{x+1} \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{x}\right)^2\geq \dfrac{(2x)^2}{(x+1)^2} \;\Rightarrow\; x\geq \dfrac{4x^2}{x^2+2x+1}$. Usando o fato que $x \geq 0$ temos

$$x\left(x^2+2x+1\right)\geq 4x^2 \;\Rightarrow\; x^3+2x^2+x\geq 4x^2 \;\Rightarrow\; x^3-2x^2+x\geq 0 \;\Rightarrow\; x\left(x^2-2x+1\right)\geq 0$$

$\Rightarrow x(x-1)^2\geq 0$. Como $x\geq 0$ e $(x-1)^2\geq 0$ a desigualdade é válida em $[0,+\infty)$.

Interpretação Gráfica

Considere as funções $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ e $g(x)=\sqrt{x}$.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{2x}{x+1}\Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=\frac{(2x)^2}{(x+1)^2}\Rightarrow x=\frac{4x^2}{x^2+2x+1}\xrightarrow{x\geq 0} x\left(x^2+2x+1\right)=4x^2$$

$$\Rightarrow x^3+2x^2+x=4x^2\Rightarrow x^3-2x^2+x=0\Rightarrow x\left(x^2-2x+1\right)=0\Rightarrow x(x-1)^2=0\Rightarrow x\in\{0,1\}$$

Desse modo os pontos $(1,1)$ e $(0,0)$ são as interseções entre o gráfico de f e g.

Vamos construir o gráfico de $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ por translação e reflexão da função $\dfrac{2}{x}$.

Observe que $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2x+2-2}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-2}{x+1}=\dfrac{2(x+1)}{x+1}-\dfrac{2}{x+1}=2-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{-2}{x+1}+2$.

Assim vamos construir o gráfico de $f(x)=\dfrac{-2}{x+1}+2$.

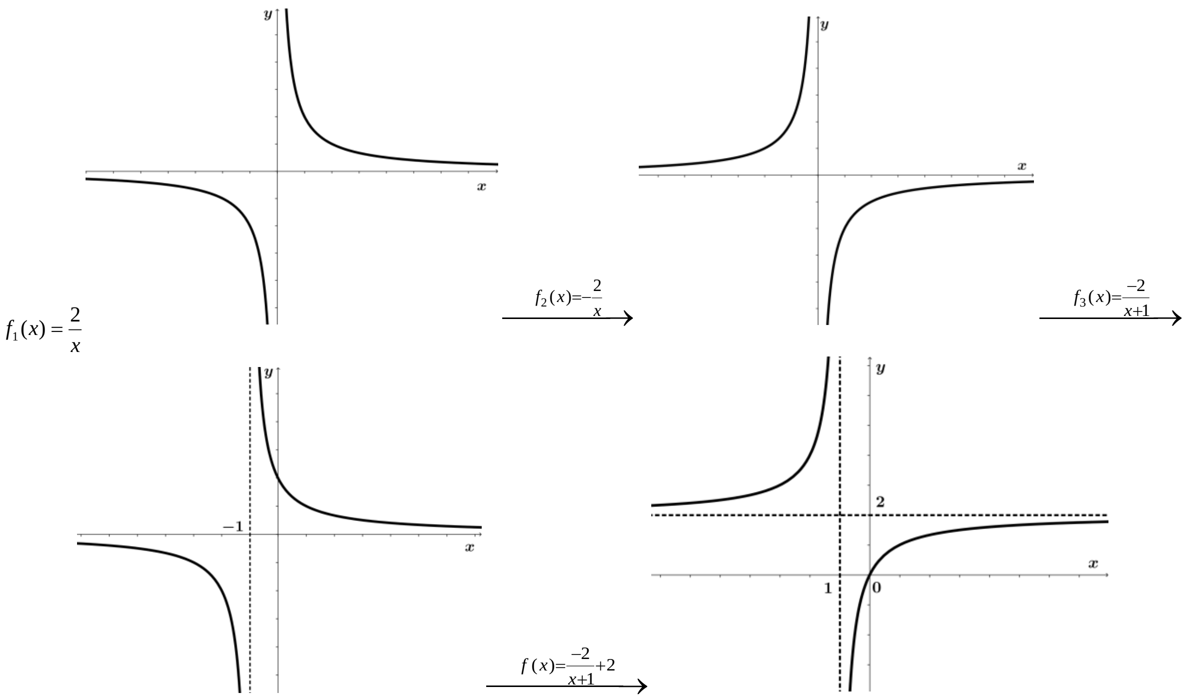


Figura 5.13 - Construção do gráfico de $f(x)=[-2/(x+1)]+2$ a partir do gráfico das funções f_1, f_2 e f_3.

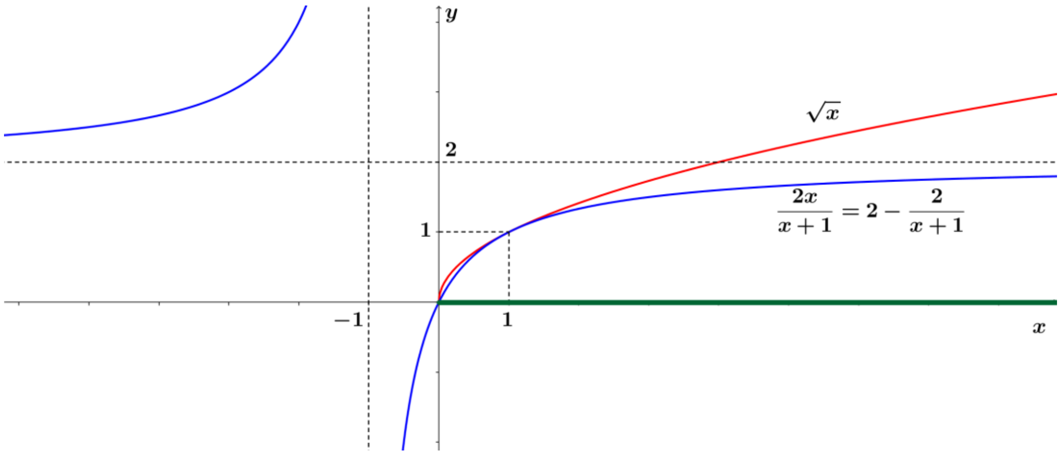


Figura 5.14 - Gráficos de $f(x)=[-2/(x+1)]+2$ **e** $g(x)=x^{1/2}$**.**

O intervalo onde $g(x)=\sqrt{x}$ é maior ou igual a $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ é $[0,+\infty)$.

5.5- Exemplo de Inequação entre Funções Exponencial e Logarítmica.

Considere as funções $f(x)=e^x$ e $g(x)=\ln\left(\left(e-e^{1/e}\right)x+e\right)$. Sabendo que a equação $g(x)=f(x)$ possui solução inteira resolva a desigualdade $f(x)\le g(x)$ e interprete graficamente.

Solução:

$g(x)=f(x)\Rightarrow \ln\left(\left(e-e^{1/e}\right)x+e\right)=e^x \Rightarrow x=0$ ou $x=-1$. De fato, conferindo os valores teremos:

$$x=0\Rightarrow \ln\left(\left(e-e^{1/e}\right)0+e\right)=\ln e=1=e^0$$

$$x=-1\Rightarrow \ln\left(\left(e-e^{1/e}\right)(-1)+e\right)=\ln\left(-e+e^{1/e}+e\right)=\ln e^{1/e}=\frac{1}{e}\ln e=\frac{1}{e}=e^{-1}$$

Para concluir e verificar a solução, vamos construir os gráficos das funções f e g. O gráfico de g é crescente, pois $e>1$. Já sabemos que a função g intersecta o eixo y em $(0,1)$ e para determinar onde intersecta o eixo x iremos resolver $g(x)=0$:

$$g(x)=0\Rightarrow \ln\left(\left(e-e^{1/e}\right)x+e\right)=0\Rightarrow \left(e-e^{1/e}\right)x+e=1\Rightarrow \left(e-e^{1/e}\right)x=1-e\Rightarrow x=\frac{1-e}{e-e^{1/e}}.$$

Utilizando uma calculadora vemos que $\frac{1-e}{e-e^{1/e}} \cong -1{,}3491$. Logo vemos na figura 5.15 que o intervalo onde a função g é maior ou igual a função f é $[-1{,}0]$.

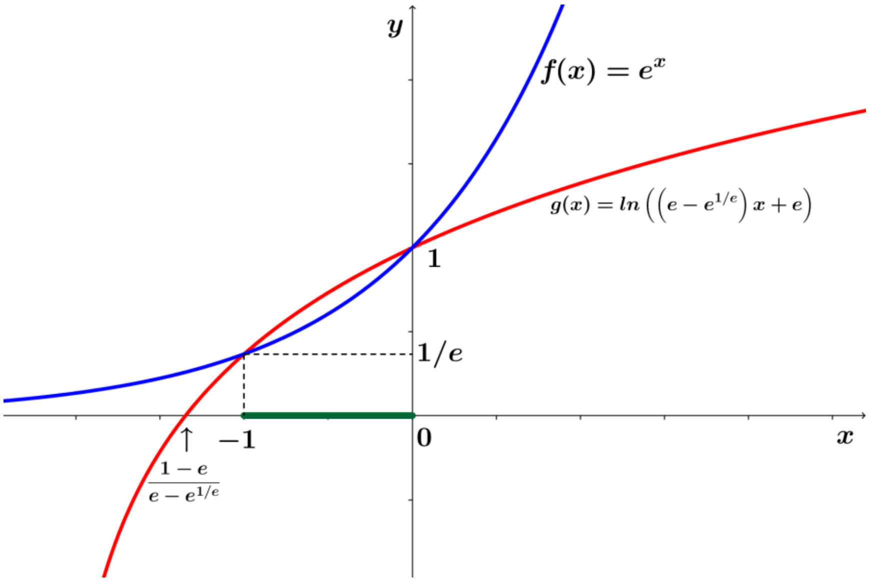


Figura 5.15 - Gráficos das funções f e g.

CAPÍTULO 6 – ATIVIDADES E AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

Com material produzido planejamos atividades separadas em quatro aulas com exercícios, gabaritos e questionários a serem aplicados ao final de cada aula. As perguntas do questionário foram elaboradas de modo que os alunos nos fornecessem informações sobre seu aprendizado e sobre a relevância do que foi aprendido. As aulas foram ministradas para os alunos do curso de licenciatura à distância em matemática da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro-UNIRIO do polo Cederj/Magé e ocorreram no Polo Cederj/Magé. Exigimos como pré-requisito para inscrição ter concluído a disciplina pré-cálculo. Após as inscrições tivemos um quantitativo de 10 alunos. Esses alunos foram identificados pelos códigos A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10.

As aulas foram apresentadas e muitos dos alunos não preencheram os formulários devido à pressa para ir embora ou não comparecimento. As respostas dos alunos foram digitalizadas e se encontram em anexo. Os exercícios e gabaritos estão nos apêndices. Decidimos que as respostas dos alunos que não nos proporcionavam informações relevantes como “não”, “sim”, “talvez” não seriam anexadas. Abaixo apresentamos o objetivo e plano de cada aula:

Aula 1	**Objetivo**: Fornecer ao aluno fundamentos necessários para resolução de equações do 1º e 2º graus, modular e construção de gráficos das funções associadas. Essa base é necessária para compreensão das próximas aulas onde teremos desigualdades (inequações) e interpretação gráfica. **Plano de Aula 1** - Equação do primeiro grau com infinitas soluções, solução vazia e solução única. - Equação do primeiro grau com parâmetros. - Gráfico da função afim**.** (**Destacar a importância da função constante, pois a utilizaremos para resolver equações do tipo** $f(x)=\alpha$ **, onde** α **é uma constante).**

	- Diferença entre equação e função. Destacar que a solução da equação significa a interseção do gráfico com o eixo x. - Método de completar quadrados para resolver equação de 2º grau. - Gráfico da função quadrática destacando interseções com os eixos e vértice. O vértice é dado da seguinte maneira $\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\right)$, onde α_1 e α_2 são raízes. Os alunos que quiserem podem utilizar a fórmula $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$. - Equação modular e propriedades. - Gráfico da função $\lvert f \rvert$ a partir do gráfico de f. - Exercícios.
Aula 2	**Objetivo**: Resolver equações e inequações do primeiro grau. Dar significado aos gráficos de funções para a solução de equações e inequações. **Plano de Aula 2** - Propriedades: $a>b$ e $c>0 \Rightarrow ac>bc$ $a>b$ e $c<0 \Rightarrow ac<bc$ - Solução da desigualdade $ax+b\leq 0$; com $a>0$ ou $a<0$. - Propriedades de desigualdade modular e resolução de desigualdade modular. - Significado gráfico para equações $f=g$ (interseções entre as funções) - Significado gráfico para inequações $f\leq g$ (intervalo(s) no eixo x onde g é maior ou igual a f). - Número de soluções de equações do tipo $f(x)=1$, $f(x)=2$, $f(x)=\alpha$.

	(Destacar que $y=1$, $y=2$ e $y=\alpha$ são retas paralelas ao eixo x e o número de vezes que a reta $y=\alpha$ intersecta o gráfico da função é igual ao número de soluções da equação $f(x)=\alpha$) -Exercícios
Aula 3	**Objetivo**: Resolver equações e inequações do segundo grau. Dar significado aos gráficos de funções para a solução de equações e inequações. **Plano de Aula 3** - Demonstrar: $x>y>0 \Rightarrow \sqrt{x}>\sqrt{y}$ - Resolver $ax^2+bx+c \geq 0$ algebricamente - Resolver $ax^2+bx+c \geq 0$ graficamente - Apresentar a interpretação gráfica da desigualdade $f \geq g$ a partir dos passos abaixo: **1º Determinar a solução da equação $f=g$, ou seja, as interseções entre o gráfico das funções f e g.** **2º Traçar um esboço do gráfico das funções f e g sobre o mesmo par de eixos destacando as interseções.** **3º Observar o(s) intervalos(s) no eixo das abscissas onde a função f é maior ou igual a função g, ou vice-versa caso seja $g \geq f$.** - Número de soluções de equações do tipo $f(x)=\alpha$. - Exercícios

Aula 4	**Objetivo**: Mostrar a utilidade pratica da interpretação gráfica para resolver desigualdades consideradas mais "desafiadoras" e para resolver desigualdades onde a solução algébrica não é eficiente na simplificação. **Plano de Aula 4** - Destacar que as funções que não podem ser simplificadas por meio de solução algébrica, em grande parte necessitam de métodos numéricos para resolução. Porém utilizaremos equações com solução inteira. E para determinar a solução usaremos o método da tentativa. - Revisar os passos para interpretação gráfica vistos na aula passada. - Exercícios

Após as aulas observamos o impacto positivo do uso da interpretação gráfica pelas inúmeras respostas dos alunos.

6.1- Comentário Sobre as Respostas da Aula 1

Os alunos não tinham visto equação com infinitas soluções ou solução vazia e alguns não sabiam completar quadrado ou não foram apresentados a essa forma de resolução. Sentiram dificuldades em resolver equações com parâmetro, completar quadrado e questões que envolviam módulo. Destacaram que é mais fácil resolver algumas questões utilizando a solução feita em questões anteriores, por exemplo, determinar o gráfico da função $|f|$ a partir de f.

6.2- Comentário Sobre as Respostas da Aula 2

Os alunos tiveram dificuldades para definir o conceito de função, porém conseguiram dar exemplos de curvas que não são funções. Mencionaram nunca terem visto interpretação gráfica de equações ou inequações do 1ºgrau.

Salientaram a importância da interpretação gráfica como meio mais rápido de resolver uma desigualdade como, por exemplo, modular, uma vez que já conheciam o gráfico. Abaixo alguns relatos:

> *"Fornece uma visão mais ampla do que representa uma função graficamente".*

> *"Deve ser ensinado no ensino médio, prepararia melhor os alunos para a faculdade, estando mais seguros do que estão fazendo"*

> *"De modo geral auxilia a compreensão e visualização".*

Os alunos destacaram a importância de responder perguntas a partir de questões anteriores. Apresentaram dificuldades nas atividades que exigiam construção gráfica, porém em alguns casos o aluno que não conseguiu resolver algebricamente percebeu que a interpretação gráfica facilitou a resolução do problema. Um dos alunos comentou que jamais conseguiria resolver uma das questões sem o auxílio do gráfico. Por fim ressaltaram que gostariam de trabalhar com mais questões utilizando gráficos.

Após entender o significado gráfico da função $f(x) = ax + b$ e da equação $ax + b = 0$(retas paralelas solução vazia, retas coincidentes infinitas soluções e concorrentes solução única) um aluno disse:

> *"Eu deveria ter aprendido isso na 7ª ou 8ª série"*

6.3- Comentário Sobre as Respostas da Aula *3*

Todos os alunos que responderam as perguntas concordaram que a interpretação gráfica deve ser utilizada no ensino médio.

> *"Fica mais fácil à interpretação quando ensinado as duas soluções"(algébrica e gráfica)*

Todos apontaram a interpretação gráfica como a parte mais interessante da aula. Destacaram que uma mesma desigualdade interpretada com diferentes abordagens completa a análise da solução do problema.

A maioria salientou a necessidade de trabalhar mais com construções de gráficos de funções e seu uso como ferramenta de interpretação para o estudo das desigualdades. Também acreditam que o curso poderia ser mais longo para contemplar mais exemplos desse conteúdo gráficos.

6.4- Comentário Sobre as Respostas da Aula *4*

Os alunos mencionaram a importância da interpretação gráfica como:

> *”Ferramenta que esclarece e facilita a compreensão do desenvolvimento algébrico e soluciona o que não se pode calcular”*

> *“Em alguns casos, seria impossível sua resolução algebricamente [...]”*

Mencionaram que pretendem utilizar a interpretação gráfica com frequência em seus estudos e futuramente com seus alunos.

Ressaltaram a utilidade do minicurso e a necessidade de outros cursos como esse.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nossa aplicação observamos que embora o conteúdo de equações e inequações esteja bem presente no cotidiano dos alunos, a sua interpretação através de gráficos de funções não se encontra atualmente bem desenvolvida em suas formações. A partir das respostas dos alunos notamos a necessidade de intensificarmos o trabalho dando ênfase à parte gráfica nos exercícios, materiais, cursos, oficinas, etc.

Sendo assim temos como possibilidades para trabalhos futuros: preparar e adequar as atividades por meio de aulas direcionadas, aos conteúdos de cada série, por exemplo, 7º, 8º e 9º ano ou no ensino médio; preparar atividades que envolvam o uso de tecnologias, como por exemplo, o GeoGebra, que pode auxiliar na representação de gráficos de funções; explorar as desigualdades contidas na tabela apresentada na introdução, pois a partir dela podemos estudar várias combinações entre funções; estudar as múltiplas interpretações de uma mesma desigualdade, relacionar as desigualdades a problemas concretos, como feito no caso da comparação entre as médias: aritmética, geométrica e harmônica. E nos casos onde não é possível usar a solução algébrica, explorar as possíveis soluções através de gráficos de funções.

REFERÊNCIAS

[1] **BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília, MEC/SEB, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/14_24.pdf> Acesso em: 15 jan.2014.

[2] **CERRI**, C. **Equações e Inequações**. USP, São Paulo. Acesso em: 1 out. 2013. Disponível em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=123>.

[3] **GUIDORIZZI,** H.L. **Um curso de Cálculo Volume 1.** 5 edição. LCT, 2001.

[4] **LIMA,** E. "Quais são as raízes da equação $2^x = x^2$?". **Revista do professor de Matemática**, n.3, pp.18-20, 2ºsemestre de 1983.

[5] **LIMA**, E. L.; CARVALHO, P. C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio** Volume 1. 9ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[6] **LIMA**, E. L.; CARVALHO, P. C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **Temas e. Problemas Elementares**. 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[7] **PITOMBEIRA,** J. B. **Revisitando uma velha conhecida.** Rio de Janeiro: PUC, 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf>. Acesso em: 8 fev.2014.

[8] **PONTES**, R. **Equações polinomiais: Soluções algébricas, geométricas e com o auxilio de derivadas**. Dissertação de mestrado. UFP, João Pessoa, 2013.

APÊNDICE 1 – AULA 1

Exercícios

1) Resolva as equações e determine a solução.

a) $3x-2=\frac{x}{2}$ b) $2x-(x-3)=x+3$ c) $x-(2x+1)=-x$

2) Resolva as equações em função do parâmetro.

a) $ax+a=5+a$ b) $ax=6x$

3) Construa o gráfico das funções, destacando as interseções com os eixos.

a) $f(x)=-x+4$ b) $f(x)=\frac{x}{2}-3$ c) $f(x)=-2$

4) Resolva as equações quadráticas pelo método de completar quadrados.

a) $x^2-6x+9=0$ b) $-x^2+5x-6=0$ c) $x^2-x-1=0$

5) Construa o gráfico das funções, destacando as interseções com os eixos e o vértice.

a) $f(x)=-x^2+5x-6$ b) $f(x)=x^2-x-1$

6) Resolva as equações modulares.

a) $|x|=5$ b) $||x|-6|=5$ c) $|-x^2+5x-5|=1$

7) Construa o gráfico das funções, destacando as interseções com os eixos e o vértice, caso exista.

a) $f(x)=|-x+4|$ b) $f(x)=|-x^2+5x-6|$

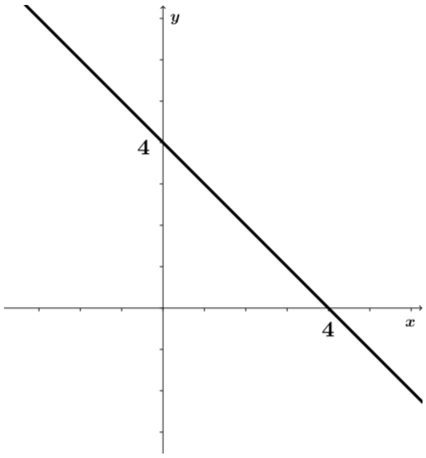
c) $f(x)=|-x^2+x|$ d) $f(x)=||x|-6|$

Gabarito - AULA1

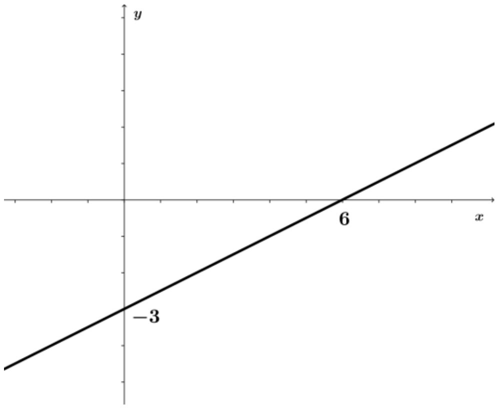
1) a) solução única $x = 4/5$ b) infinitas soluções c) solução vazia

2) a) $\begin{cases} a \neq 0 \Rightarrow x = 5/a, única \\ a = 0 \Rightarrow solução vazia \end{cases}$ b) se $a \neq 6 \Rightarrow x = 0, única$, se $a = 6 \Rightarrow$ infinitas soluções

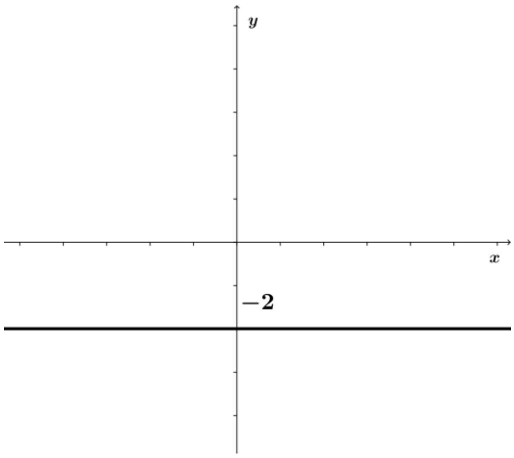
3) a)



b)

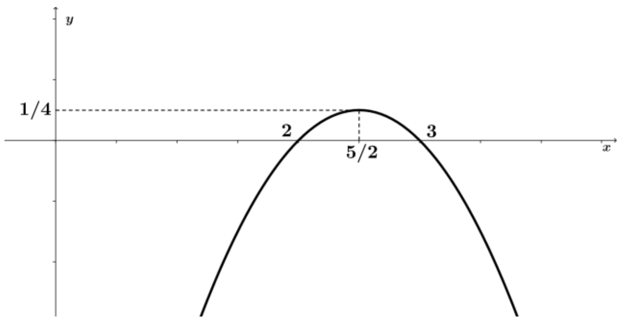


c)

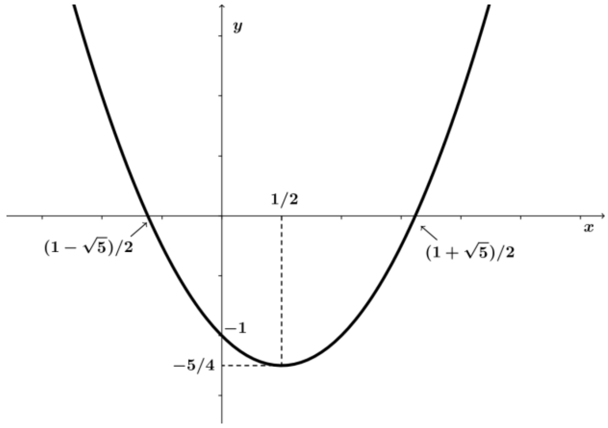


4) a) $x = 3$ b) $x = 2$ ou $x = 3$ c) $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

5) a)

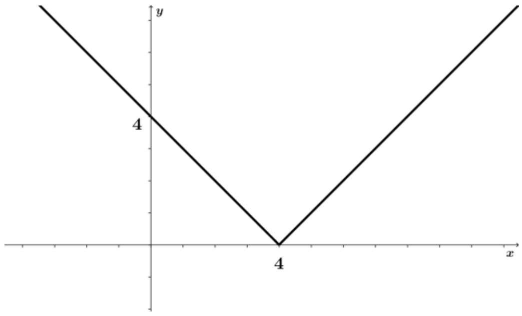


b)

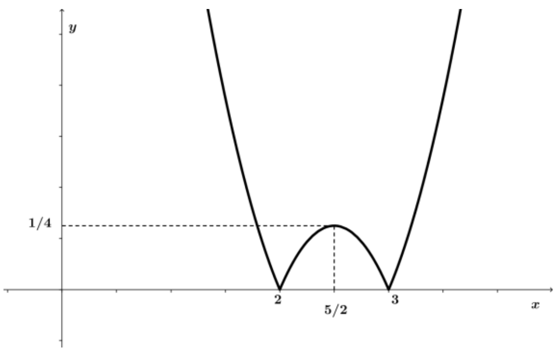


6) a) $\{\pm 5\}$ b) $\{\pm 1, \pm 11\}$ c) $\{1, 2, 3, 4\}$

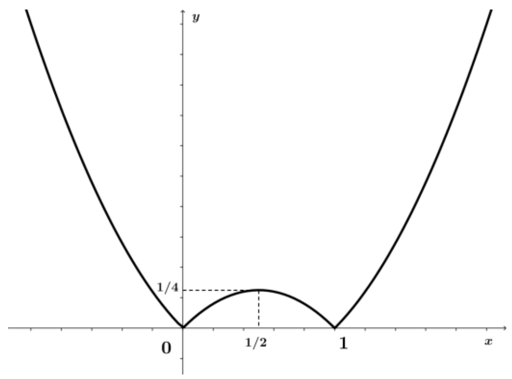
7) a)



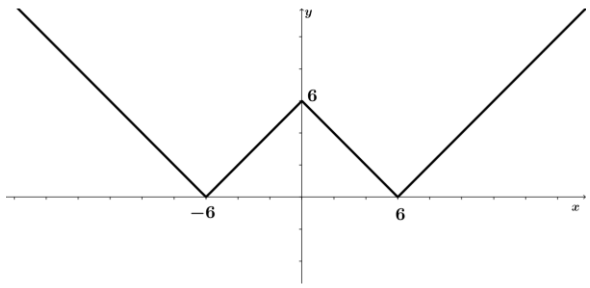
b)



c)



d)



Questionário – Aula 1

1) Você já tinha estudado equações de 1º grau e resolveu equações de 1º grau com infinitas soluções ou sem solução? Dê exemplos e explique.

2) Você já tinha estudado equações de 2º grau e resolveu equações de 2º grau pelo método de completar quadrados? Dê exemplos e explique.

3) Dê um exemplo da construção do gráfico $|f(x)|$ a partir de $f(x)$. Explique.

4) Em qual (ou quais) questões desta aula teve facilidade? Explique.

5) Que conteúdo(s) você acredita que teve dúvidas e acha que precisa de mais exercícios? Explique

6) Como descreveria a diferença entre os conteúdos representados por (i) $3x+3=x-2$ e por (ii) $f(x)=2x+5$? Explique.

APÊNDICE 2 – AULA 2

Exercícios

1) Resolva as desigualdades.

a) $3x+4\geq 0$ b) $\frac{x}{2}-3\leq 0$ c) $-x+2\geq 0$

2) Para cada par de funções resolva $f(x)=g(x)$ e interprete graficamente.

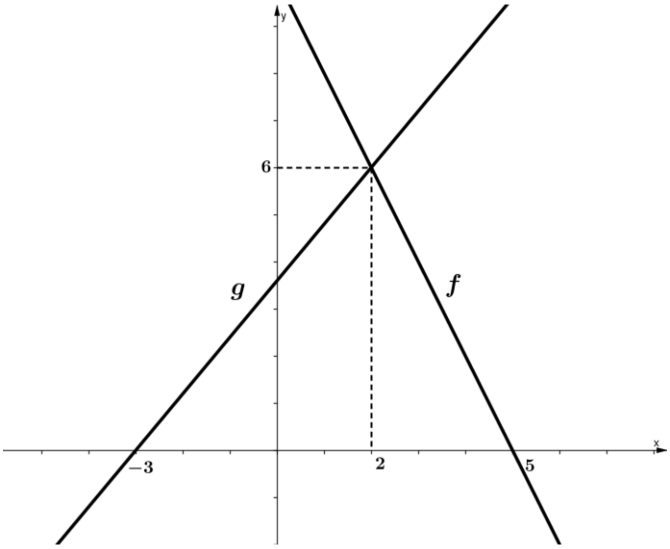
a) $f(x)=-x+1$, $g(x)=-x+2$

b) $f(x)=x/2-3$, $g(x)=x/2-3$

c) $f(x)=-2x+7$, $g(x)=x/2-8$

d) $f(x)=|x|$, $g(x)=2$

3) A partir do gráfico das funções afins f e g resolva as desigualdades. Para cada item refaça o gráfico e destaque a solução no eixo x.



a) $f(x)\geq 0$

b) $g(x)<0$

c) $f(x)\geq g(x)$

d) $f(x).g(x)\geq 0$

e) $f(x)\leq 6$

4) Em cada item resolva a desigualdade $f(x) \le g(x)$ e interprete resultado graficamente.

a) $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = -\frac{x}{2} + 6$.

b) $f(x) = |x|$ e $g(x) = 2$.

c) $f(x) = ||x| - 2|$ e $g(x) = 1$.

5) Quantas soluções tem a equação $||x| - 2| = 5$?

6) Determine os valores de α para que $||x| - 2| = \alpha$ tenha:

a) 2 soluções

b) 3 soluções

c) 4 soluções

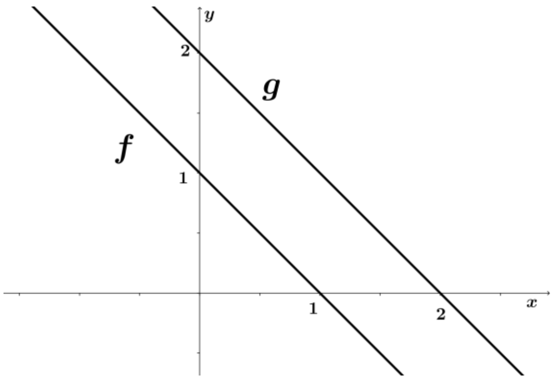
d) Solução vazia

7) Determine α para que a equação $f(x) = \alpha$ tenha 2 soluções. $f(x) = \begin{cases} 4x; x \le 3 \\ 3{,}6x; x > 3 \end{cases}$

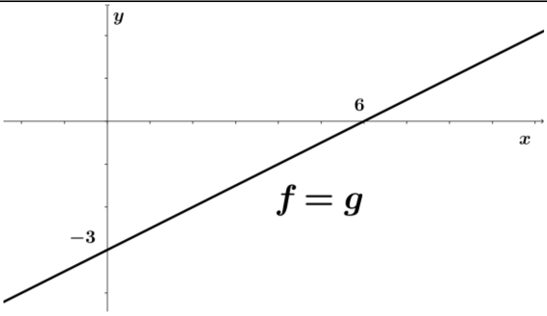
Gabarito – Aula 2

1) a) $[-4/3, +\infty)$ b) $(-\infty, 6]$ c) $(-\infty, 2]$

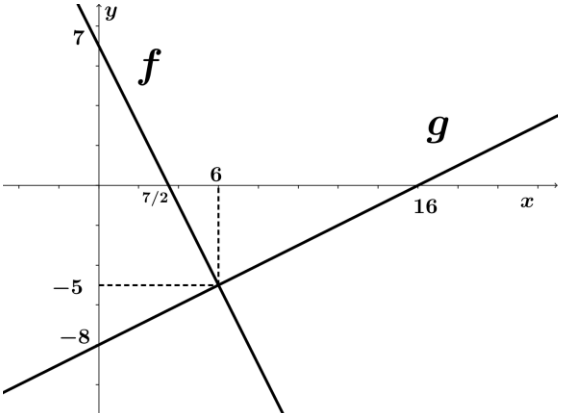
2) a) Solução vazia. Retas paralelas



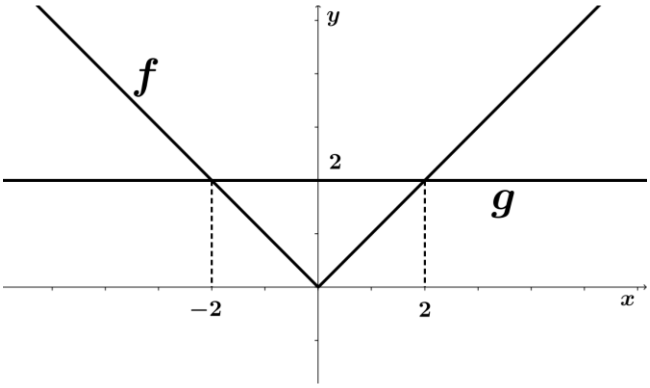
b) Infinitas soluções. Retas coincidentes



c) solução única $x = 6$. Retas concorrentes

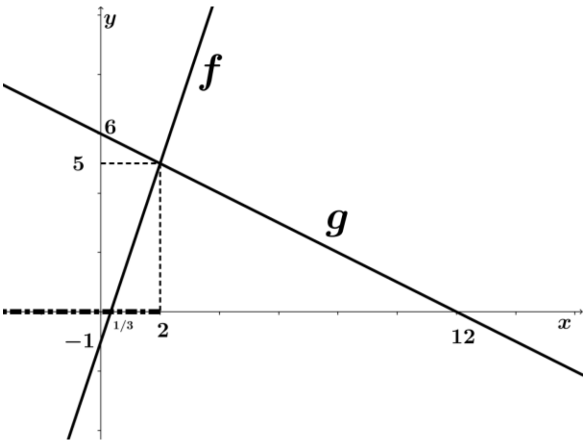


d) $x = \pm 2$

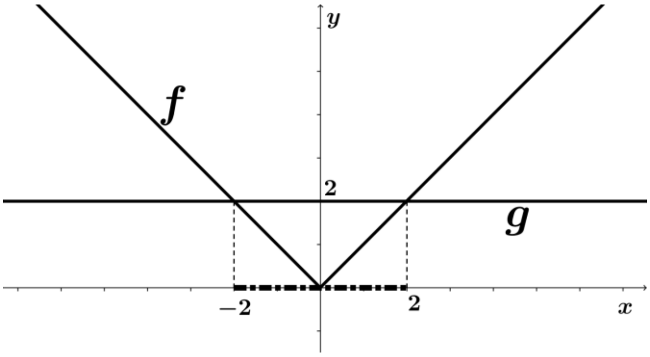


3) a) $(-\infty, 5]$ b) $(-\infty, -3]$ c) $(-\infty, 2]$ d) $[-3, 5]$ e) $[2, +\infty)$

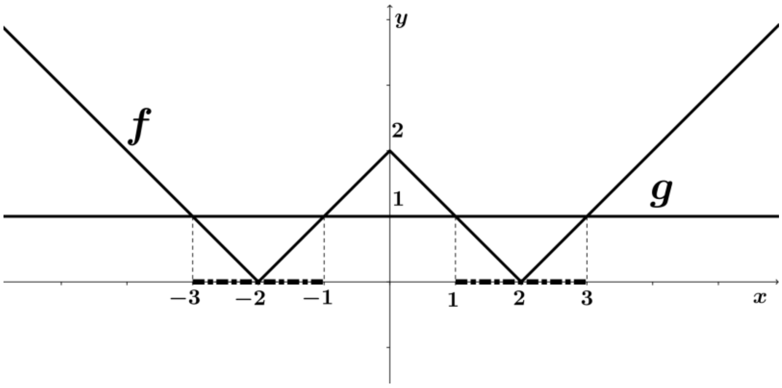
4) a) $(-\infty, 2]$



b) $[-2,2]$



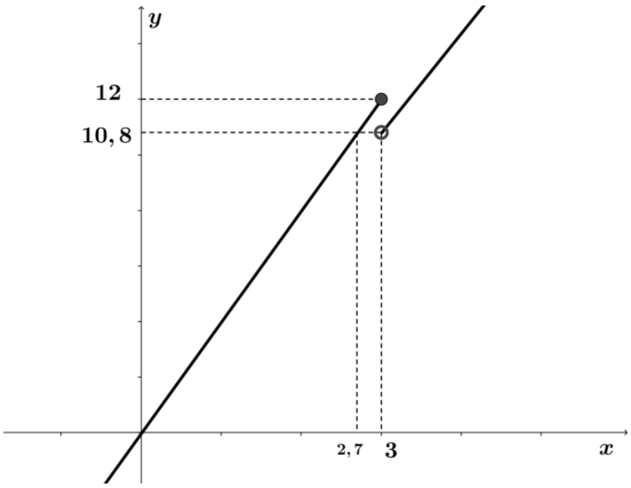
c) $[-3,-1]\cup[1,3]$



5) duas

6) a) $(2,+\infty)\cup\{0\}$, b) $x=2$, c) $(0,2)$, d) $(-\infty,0)$

7) $\alpha \in \left(\frac{108}{10},12\right]$



Questionário - Aula 2

1) Você já viu o conceito de gráfico de uma função? Quando? Defina e dê exemplos?

2) Dê um exemplo de curva que não é gráfico de uma função.

3) Você já tinha visto representação gráfica de funções para auxiliar na resolução de equações e inequações do 1º grau? Acha relevante que esse tipo de solução seja utilizado no ensino fundamental ou médio? Explique.

4) Em qual (ou quais) questões desta aula teve facilidade? Explique

5) Em qual (ou quais) questões desta aula teve dificuldade? Explique.

6) Qual conteúdo achou mais interessante? Explique.

7) Na questão 3 você tentou resolver as desigualdades a partir do gráfico ou tentou determinar a função na forma $y = ax + b$?

8) Que conteúdo(s) você acredita que teve dúvidas e acha que precisa de mais exercícios? Explique

9) Faça uma avaliação da aula. Algo deveria ser acrescentado ou retirado? Alguma crítica construtiva?

APÊNDICE 3 – AULA 3

Exercícios Aula 3

1) Para cada par de funções resolva $f(x) \leq g(x)$ e interprete graficamente.

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 9$

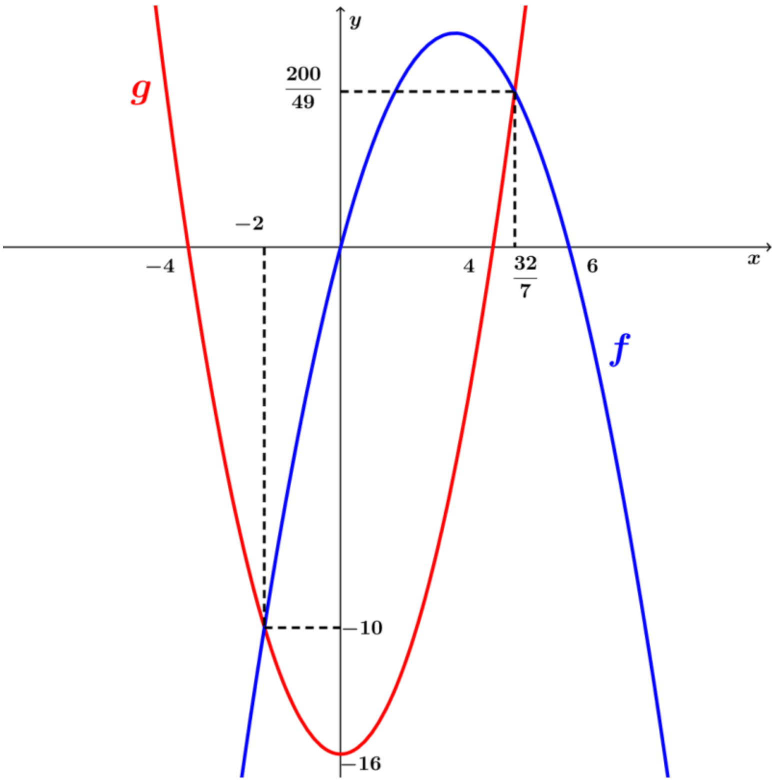
b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$

c) $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 2$

d) $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = 0$

e) $f(x) = -x^2 + 6x - 11$, $g(x) = 2x + 3$

2) A partir do gráfico das funções f e g resolva as desigualdades.



a) $f(x) \geq 0$

b) $g(x) < 0$

c) $f(x) - g(x) \geq 0$

d) $f(x) - g(x) \leq 0$

e) $f(x).g(x) \geq 0$

f) $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$

3) Considere as funções $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = -2x^2 - 2x + 4$. Resolva a inequação $g(x) \geq f(x)$ e interprete o resultado graficamente.

4) Para quais valores de α a equação $-x^2 + 6x - 5 = \alpha$ possui:

a) uma solução

b) duas soluções

c) solução vazia

5) Para quais valores de α a equação $\left|-x^2 + 6x - 5\right| = \alpha$ possui:

a) duas solução

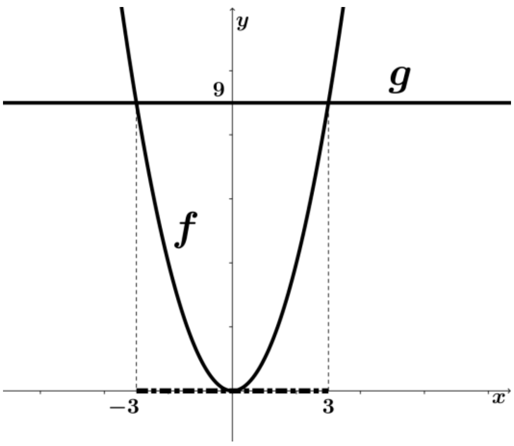
b) três soluções

c) quatro soluções

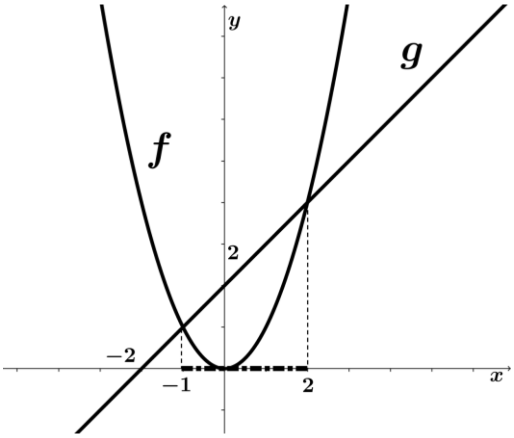
d) solução vazia

Gabarito – Aula 3

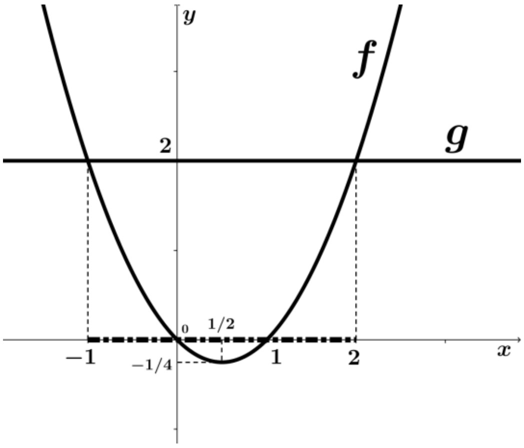
1) a) $[-3,3]$



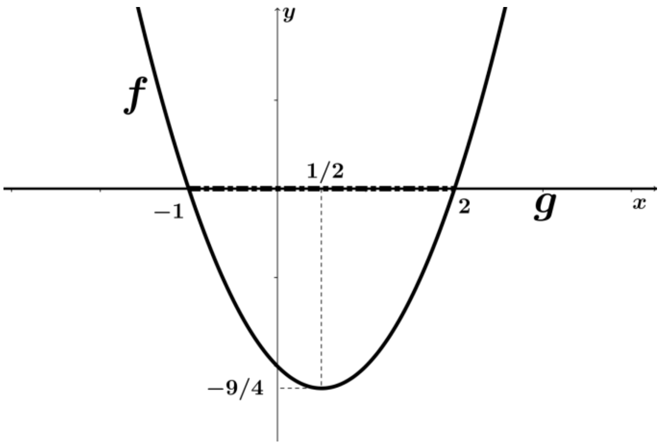
b) $[-1,2]$



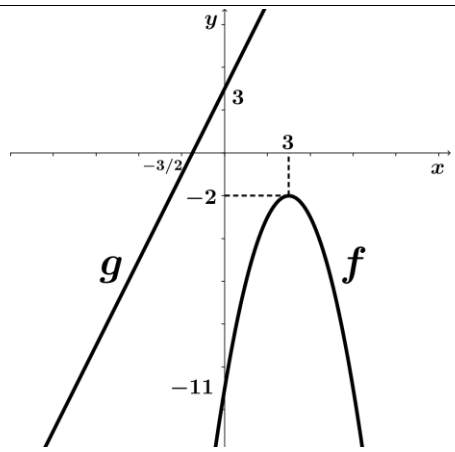
c) $[-1,2]$



d) $[-1,2]$. Nesse item a função g é o próprio eixo x.



e)Todos os números reais.

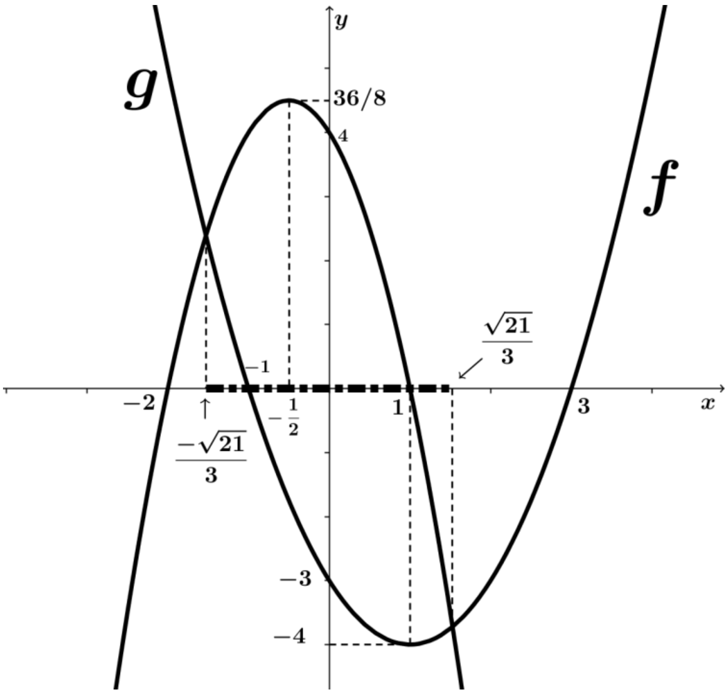


2)

a) $[0,6]$ b) $(-4,4)$ c) $\left[-2,\dfrac{32}{7}\right]$ d) $(-\infty,-2]\cup\left[\dfrac{32}{7},+\infty\right)$ e) $[-4,0]\cup[4,6]$

f) $(-\infty,-4)\cup(0,4)\cup(6,+\infty)$

3) $\left[-\dfrac{\sqrt{21}}{3},\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right]$



4) a) $\alpha = 4$, b) $(-\infty,4)$, c) $(4,+\infty)$

5) a) $(4,+\infty)\cup\{0\}$ b) $\alpha = 4$ c) $(0,4)$ d) $(-\infty,0)$

Questionário - Aula 3

1) Você já tinha visto representação gráfica de funções para auxiliar na resolução de equações e inequações do 2º grau? Acha relevante que esse tipo de solução seja utilizado no ensino fundamental ou médio? Explique.

2) Em qual (ou quais) questões desta aula teve facilidade? Explique.

3) Em qual (ou quais) questões desta aula teve dificuldade? Explique.

4) Qual conteúdo achou mais interessante? Explique.

5) Na questão 2 você tentou resolver as desigualdades a partir do gráfico ou tentou determinar a função na forma $y = ax^2 + bx + c$? Explique?

6) Que conteúdo(s) você acredita que teve dúvidas e acha que precisa de mais exercícios? Explique

7) Faça uma avaliação da aula. Algo deveria ser acrescentado ou retirado? Alguma crítica construtiva?

APÊNDICE 4 – AULA 4

Exercícios Aula 4

1) Para cada par de funções resolva $f(x) \le g(x)$ e interprete graficamente.

a) $f(x) = x^2 + x$ $\quad g(x) = \dfrac{2}{x}$

b) $f(x) = x^2 - 2x - 5$ $\quad g(x) = \dfrac{-6}{x}$

2) Quantas soluções tem a equação $x^2 = 2^x$? E $arctg(x) = x^3$?

3) Use os gráficos para resolver as inequações.

a) $e^x \ge \ln x$

b) $e^x . \ln x < 0$

c) $e^x \ge -x + 1$

d) $\log x \ge \dfrac{x-1}{9}$

e) $2^{-x} \le -\dfrac{x}{2} + 1$

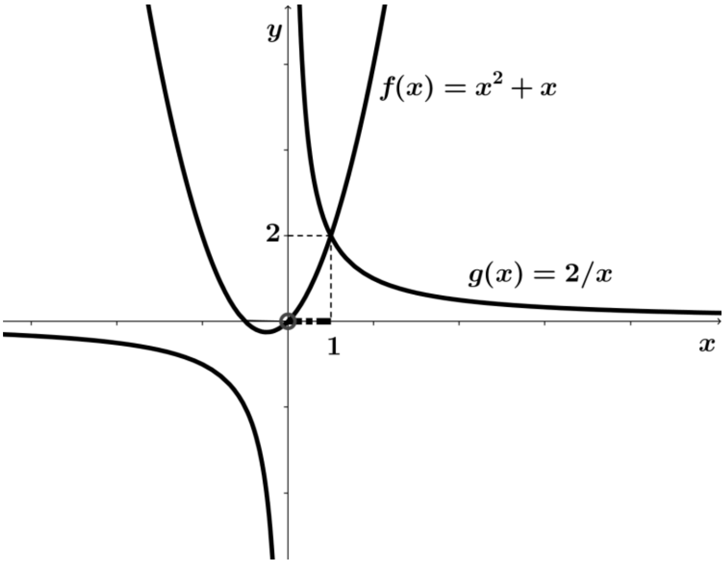
4) Para cada par de funções resolva $f(x) \le g(x)$ e interprete graficamente.

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{2}$

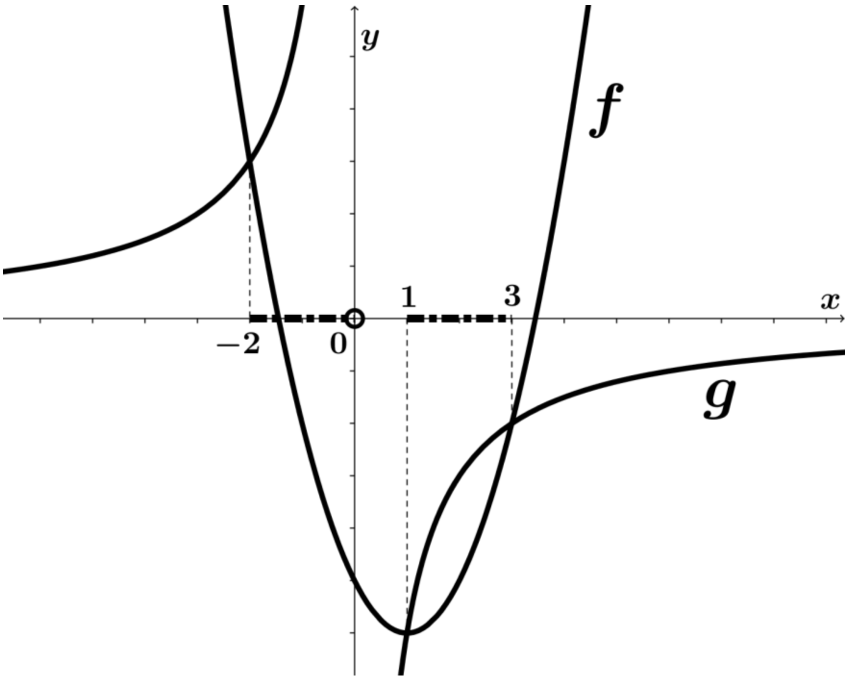
b) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x}$

Gabarito – Aula 4

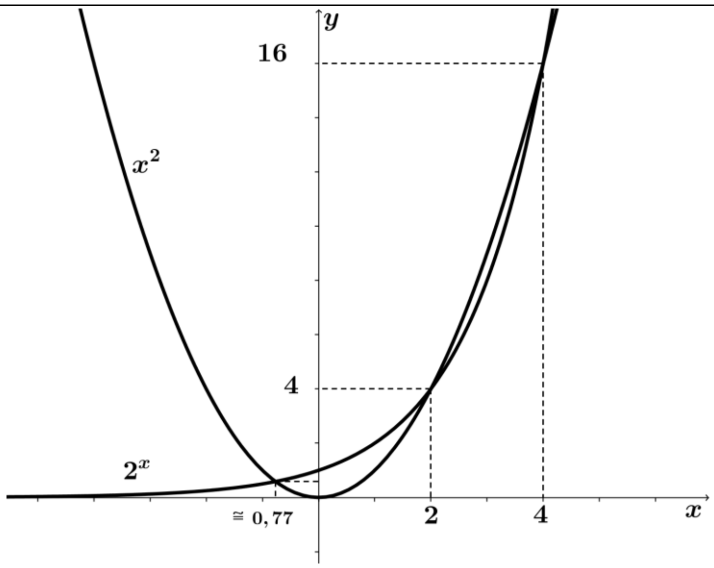
1) a) $(0,1]$



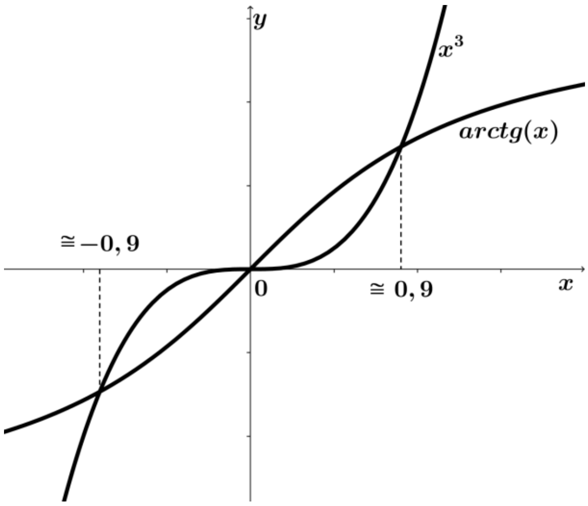
b) $[-2,0) \cup [1,3]$



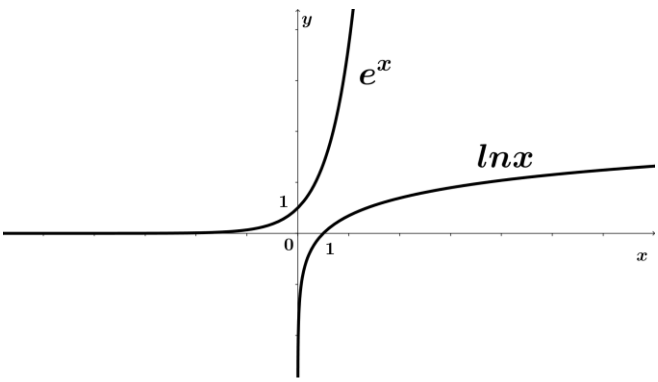
2)Três soluções para ambas as equações.



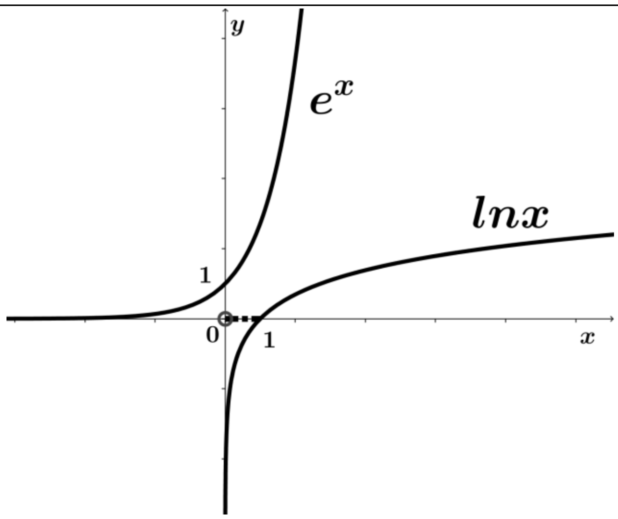
Esse gráfico sofreu mudança de escala



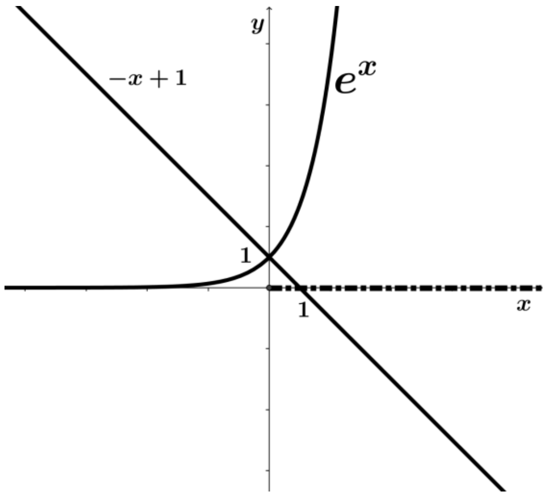
3) a) $(0,+\infty)$



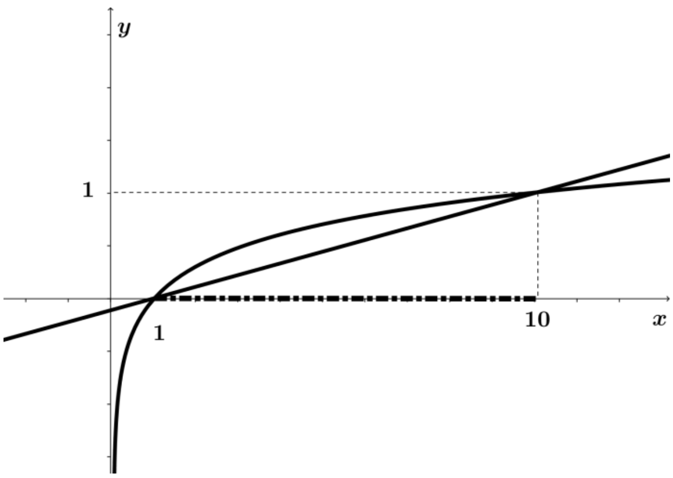
b) $(0,1]$



c) $[0,+\infty)$

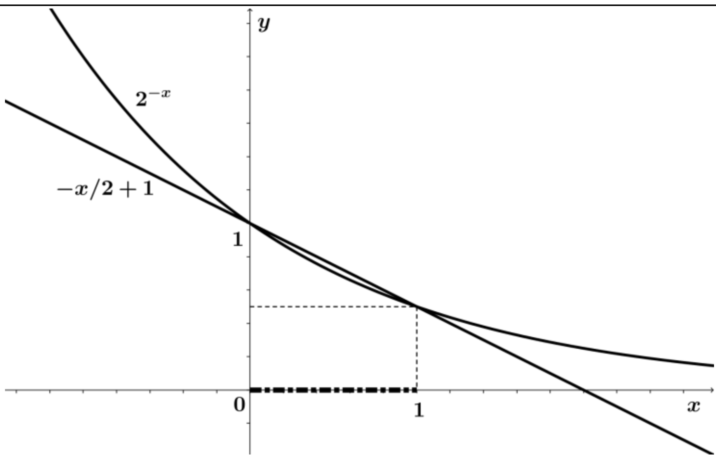


d) $[1,10]$

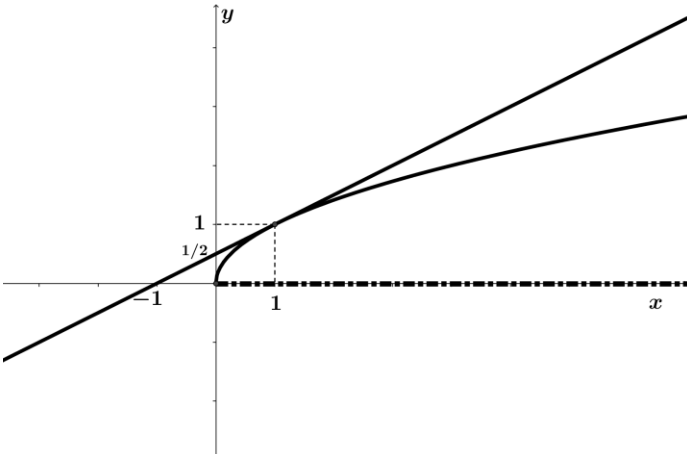


Esse gráfico sofreu mudança de escala

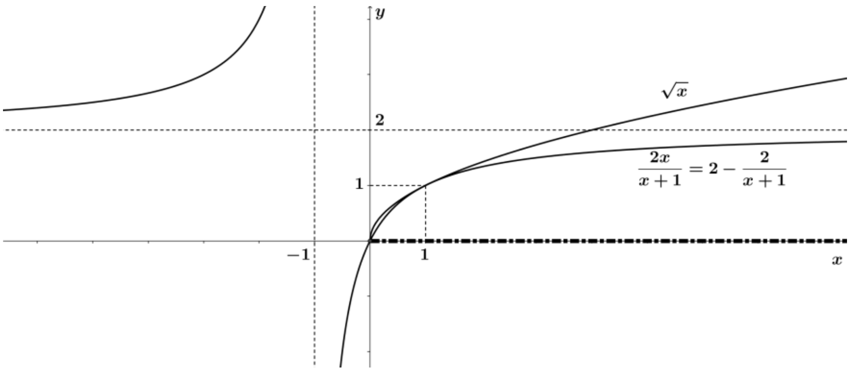
e) $[0,1]$



4)a) $[0,+\infty)$



b) $[0,+\infty)$



Questionário - Aula 4

1- O que você acha da utilização de gráficos na resolução de equações e inequações? Ajudou na sua compreensão?
2- A partir de agora você usaria gráficos para resolver algum tipo de equação ou inequação? Usaria com seus alunos?
3- Faça uma avaliação do curso. Algo deveria ser acrescentado ou retirado? Alguma crítica construtiva?

APÊNDICE 5 – CERTIFICADO

Certificamos que XXXXXXXXXXXXX completou de forma satisfatória o curso ***EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E INTERPRETAÇÃO GRÁFICA***, realizado de 08 de fevereiro à 13 de março de 2014, pelo CEDERJ/UAB-MAGÉ, totalizando carga horária de 10 horas.

Magé, 27 de março de 2014

____

- Rosangela Belo dos Santos Maia -
Diretora do Polo CEDERJ/UAB-MAGÉ

____

-Rafael Segadas dos Santos-
Tutor CEDERJ/UAB-MAGÉ

ANEXO 1 – RESPOSTA DOS ALUNOS

Aula 1

Pergunta 1
Você já tinha estudado equações de 1º grau e resolveu equações de 1º grau com infinitas soluções ou sem solução? Dê exemplos e explique.

Respostas

A1:

Sim. Mas apenas que a solução era $-b/2a$

A2:

Sim; mas com infinitas soluções não.

$2(3x-2)=x$

$6x-4=x$

$6x-x=4$

$5x=4$

$x=\frac{4}{5}$, infintias soluçoes

A5:

Não. Estou estudando atualmente em Álgebra Linear I.

A10:

Sem solução $x+4=0$ $x=-4$

Pergunta 2
Você já tinha estudado equações de 2º grau e resolveu equações de 2º grau pelo método de completar quadrados? Dê exemplos e explique.

Respostas

A1:

Nunca. Apenas do modo $\frac{-(b)\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

A2:

Sim. $x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2-9+9=0$

$(x-3)^2=0$

A5:

Não, resolvia apenas usando a fórmula de Bháskara.

A10:

Sim em Pré cálculo

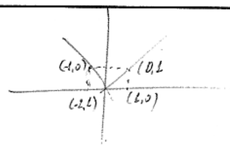
Pergunta 3

Dê um exemplo da construção do gráfico $|f(x)|$ a partir de $f(x)$. Explique.

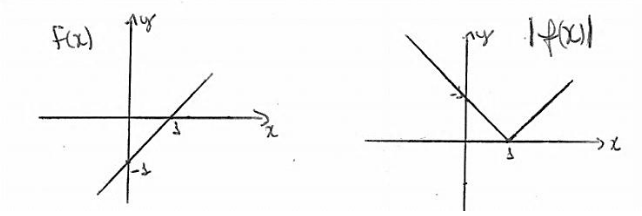
Respostas

A1:

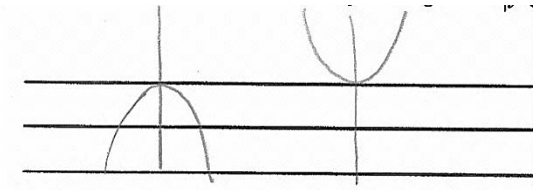
$|f(x)| = x$ houve uma reflexão em torno do eixo OX



A5:



A10:



Pergunta 4

Em qual (ou quais) questões desta aula teve facilidade? Explique.

Respostas

A1:

Nas equações de primeiro grau. No entanto quando a variável x se anulou aí fiquei com dúvida.

A2:

1, 3, 4, 5. temos mais contatos com expressões algébricas.

A5:

Questões 1, 3, 4, por estar mais habituada a resolver questões deste tipo.

A10:

nas questões 1 e 7
na 1 tudo é igualado a 0 e
na 7 foi mais fácil fazer
o gráfico com a questão resolvida
nas anteriores

Pergunta 5
Que conteúdo(s) você acredita que teve dúvidas e acha que precisa de mais exercícios? Explique.
Respostas
A1:

Quando coloco funções em módulos.

A2:

Nas questões 6 e 7, por não termos muito
contato com funções modulares.

A5:

Questões 2, 5b, 6. Na 2 porque ñ estava acostuma-
da a resolver questões assim, estou vendo agora em
álgebra linear I, na 5b tive dificuldade em locali-
zar os pontos $\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e não sempre tenho pe-
quenas dúvidas a respeito de módulos, mas no fim
consigo resolver.

A10:

nos de módulos dentro de
módulos e completar quadrado

Pergunta 6
Como descreveria a diferença entre os conteúdos representados por?
$(i)\ 3x+3=x-2$
$(ii)\ f(x)=2x+5$
Respostas
A1:

Explique.

(i) estou tentando descobrir ~~quando~~ quando a função ~~~~ toca o eixo ox
(ii) estou querendo o conjunto de soluções. Ou seja
para cada valor de x eu tenho um certo
valor y

A2:

(I) representa como reta $x = -\frac{5}{3}$

(II) representa uma função, para cada valor de x
obtemos um valor de y.

A5:

(i) é uma equação onde de forma preliminar
determinamos o valor ~~~~ que a função inter-
cepta o eixo x.
(ii) é uma função.

A10:

Na i é uma eq. pa para descobrir o valor de x
ii função: achar o valor de x de y e montar o gráfico.

Respostas dos alunos Aula 2

Pergunta 1

Você já viu o conceito de gráfico de uma função? Quando? Defina e dê exemplos?

Respostas

A1:

Sim, um função para cada valor de x tem que estar associado a somente um valor em y. Exemplo x = 1 não é uma função, mas y = 1 é uma função.

A2:

Sim, Pré-cálculo.

A4:

Sim. Em pré-calculo

A5:

Não. Todos os conceitos e definições à respeito da matemática estou vendo agora no curso de graduação pois ñ tive matemática no Ens. Médio. e no Ens Fundamental ñ vi também.

A10:

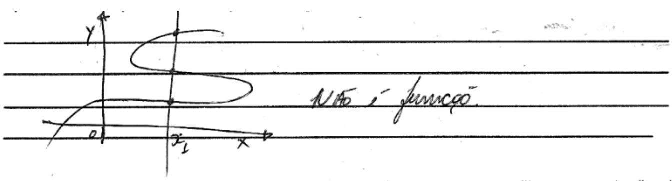
Sim, em pré-cálculo

Pergunta 2

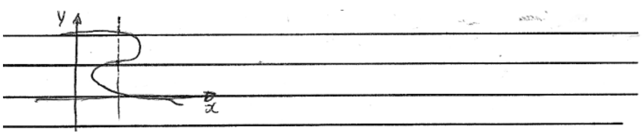
Dê um exemplo de curva que não é gráfico de uma função.

Respostas

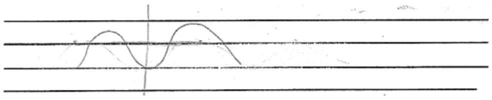
A1:



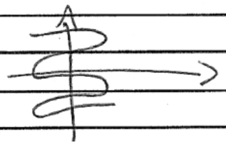
A2:



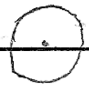
A4:



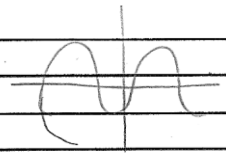
A5:



A6:

Tendi que uma circunferência não é função 

A10:



Pergunta 3

Você já tinha visto representação gráfica de funções para auxiliar na resolução de equações e inequações do 1º grau? Acha relevante que esse tipo de solução seja utilizado no ensino fundamental ou médio? Explique.

Respostas

A1:

Nunca. É muito relevante uma vez que eu demoraria muito tempo para resolver algumas questões, tipo a desigualdade modular. Já graficamente foi surpreendente. É de suma importância tal aplicação.

A2:

Sim. Pois os alunos teriam uma visão mais ampla do que representa uma função graficamente.

A4:

Sim, Sim por deixa o aluno mais familiarizado com gráficos, e quando eles chegarem em uma faculdade vão estar mais seguro do que está fazendo

A5:

~~Não.~~ Sim, para que haja uma melhora em nosso ensino. Eu sou um exemplo de que a muitas das vezes a matemática ñ faz parte da minha realidade na escola!

A6:

No curso fundamental não, é relevante, pois auxilia na visualização e compreensão.

Pergunta 4
Em qual (ou quais) questões desta aula teve facilidade? Explique.
Respostas

A1:

Questão 01 e questão dois por usar conceitos já visto no ensino fundamental e médio.

A2:

1ª, 3ª, 5ª.

A4:

4(B) e (C) pós tive uma boa aula de modelo em pré cálculo.

A5:

Resolver as desigualdades, questão 1.
E resolver $f(x) = g(x)$, na questão 2.

A6:

Na questão 1, por se tratar de resolução de inequação.

A10:

1 e 3

Pergunta 5
Em qual (ou quais) questões desta aula teve dificuldade? Explique.
Respostas

A1:

Da questão dois em diante. Principalmente nas questões 4 a 7. Pois tentei resolvê-la algebricamente, mas após aplicar o gráfico e a interpretação foi muito, mas muito mais fácil a resolução.

A2:

2ª, 4ª.

A4:

3. Se nós prestar atenção deixamos de observar o que a questão está pedindo, como essa questão foi solicitado destacar a solução no eixo x.

A5:

Questão 3. não consegui e/ou entender $f(x) \geq g(x)$.

A6:

Em todas diferentes da número 1, devido a representação dos gráficos

A10:

4 Sou péssima em cálculos

Pergunta 6

Qual conteúdo achou mais interessante? Explique.

Respostas

A1:

A desigualdade modular e determinar α para que a equação tivesse "n" soluções. Pois tenho a certeza de que não conseguiria jamais resolver.

A2:

Os questões sobre módulo. Pois não temos muito contato com esses tipos de questões.

A4:

função

A5:

Interpretação gráfica, pois tenho um pouco de dificuldade e estou gostando do que estou aprendendo.

A10:

Questão 4 Por que tive mais dificuldade.

Pergunta 7

Na questão 3 você tentou resolver as desigualdades a partir do gráfico ou tentou determinar a função na forma $y = ax + b$?

Respostas
A1:

Tentei a partir do gráfico

A2:

A partir do gráfico

A5:

a partir do gráfico

A6:

das 2 formas

A10:

Tentei determinar a função
porém tenho dificuldade
e resolvi a partir do gráfico

Pergunta 8

Que conteúdo(s) você acredita que teve dúvidas e acha que precisa de mais exercícios? Explique
Respostas

A1:

Questão 6. Pois achei que já tinha acabado o exercício
quando percebi a solução para dois valores em
$f(x)=0$.

A2:

Na questão 2. Para determinar os pontos de
intersecção dos gráficos.

A4:

Questão 2 e 3

A5:

Interpretações gráficas, como na questão 3

A6:

construção de gráficos. Por pouca prática.

A10:

Os de módulos e determinar
a função.

Pergunta 9

Faça uma avaliação da aula. Algo deveria ser acrescentado ou retirado? Alguma crítica construtiva?
Respostas

A1:

Nota 10. Achei perfeito.
Deveria haver mais cursos deste nível de informação. Sairei satisfeito pelo que fiz através da Técnica apresentada pelo professor.

A2:

Excelente, gostaria que tivessemos mais atividades desse tipo.

A4:

Aula interessante fazendo que nós possamos aplicarmos os conteúdo aprendidos anteriormente.

A5:

Estou adorando e aprendendo muito. Muito construtiva.

A6:

É bem legal trabalhar os conceitos de forma lúdica.

A10:

A aula foi ótima.
Precisa acrescentar é mais tempo.

Respostas dos alunos Aula 3

Pergunta 1
Você já tinha visto representação gráfica de funções para auxiliar na resolução de equações e inequações do 2º grau? Acha relevante que esse tipo de solução seja utilizado no ensino fundamental ou médio? Explique.
Respostas
A2:

Sim. Em pré-cálculo. Tornaria as aulas mais interessante. O problema é se os alunos de hoje estão preparados para compreender esse conteúdo.

A3:

Não. É portanto relevante que no Ensino Médio, principalmente na 1ª série, complementando intervalo de funções

A4:

Sim, sim facilita o entendimento do aluno na resolução final

A5:

Não. Sim, pois proporciona ao aluno uma visão mais ampla das questões.

A6:

Não, é interessante a apresentação do conteúdo, pois permite enxergar outras possíveis soluções das questões.

A7:

Sim. Sim. A interpretação gráfica é muito importante para os alunos entenderem melhor as questões que existem funções do 2º grau.

A8:

Sim. Sim. Pois facilita o entendimento do aluno.

A9:

Sim esse tipo de solução é de total importância para a aprendizagem do aluno

A10:

Não

Sim

Fica mais fácil a interpretação quando ensinado as duas soluções.

Pergunta 2

Em qual (ou quais) questões desta aula teve facilidade? Explique.

Respostas

A2:

Na 2ª questão. A leitura gráfica das funções, estavam bem definidas. exceto a letra e, f.

A3:

Somente na questão 1, item "d", porque o intervalo corresponde a parte interna da parábola no eixo das abscissas.

A4:

Questão 2

A5:

Questão 2, pois resolvo questões deste tipo com mais frequência

A6:

Somente na 1.

A7:

Na questão de número 2. Pois já tinha alguma noção de pré-cálculo.

A8:

Questão número 2. Pois tenho dificuldade em desenhar gráficos.

A9:

Questão 2, pois tive uma visão melhor através do gráfico.

A10:

Na questão 2. Porque não tem cálculo é só visualização.

Pergunta 3

Em qual (ou quais) questões desta aula teve dificuldade? Explique.

Respostas

A2:

Na 2ª questão letra e, f. Pois não temos muito exercícios com esse tipo de funções.

A3:

Em praticamente todas, porém a mais crítica foi nas opções da questão 2.

A4:

Questão 1, pelo fato de ter chegado após o início da aula

A5:

Questão 2. Porque não estou habituada a interpretar graficamente

A6:

nas envolvendo representações gráficas

A7:

Na questão de número 1. Pois não me re-
cordava da matéria.

A8:

Questão número 1. Pois tenho dificuldade
em desenhar gráficos.

A9:

Questão 1, Pelo fato de não ter
entendido de início a questão

A10:

na 1. Tenho dificuldade
na resolução dos cálculos das
das funções.

Pergunta 4

Qual conteúdo achou mais interessante? Explique.

Respostas

A2:

Todos. Pois temos uma visão mais ampla
das funções algébricas, e como representá-las
graficamente.

A3:

Todos, As questões ainda não
vistas servem de aprendizado e
as demais tem caráter de
revisão.

A4:

Interpretação gráfica.

A5:

interpretação grafica, pois ainda não
tinha visto questões como as da Questão
1 letras b, c e d que são 3 formas
diferentes de interpretar graficamente uma
mesma desigualdade.

A6:

Estudar os sinais diretamente no gráfico. Questão 2.

A7:

De fazer os gráficos, pois engloba muitos
assuntos: interpretação gráfica e
geometria

A8:

Interpretação de gráficos.

A9:

a Interpretação de gráficos

A10:

O conteúdo da questão 1
Pois me ajudou a entender
melhor a solução das funções

Pergunta 5

Na questão 2 você tentou resolver as desigualdades a partir do gráfico ou tentou determinar a função na forma $y = ax^2 + bx + c$? Explique?

Respostas

A3:

De ambas as formas, observando
o grau de dificuldades.

A4:

não, foi através do gráfico, pq teremos
mais facilidade de visualizar

A5:

A partir do gráfico.

A6:

Primeiramente pela função.

A7:

A partir do gráfico, pois era mais
fácil interpretar.

A8:

A partir do gráfico, pois é mais rápido
e eficaz.

A9:

a partir do gráfico, pois através dele
temos uma visão melhor.

A10:

a partir do gráfico Porque
sou péssima para achar a
lei das funções.

Pergunta 6

Que conteúdo(s) você acredita que teve dúvidas e acha que precisa de mais exercícios? Explique.

Respostas

A2:

1ª questão. Determinar o x do vértice e o y do vértice.

A3:

No intervalo das desigualdades. Uma oficina com o conteúdo seria proveitoso.

A4:

Construção do gráfico, falta de treino.

A5:

interpretar gráficos.

A6:

resolução das funções diretamente pelo gráfico.

A7:

Interpretar graficamente, pois devemos saber encontrar os vértices, as raízes, etc.

A8:

Conteúdos relacionado a desenhar gráficos.

A9:

montar gráficos é um assunto que ainda não domino direito.

A10:

Modular e resolver desigualdades.

Pergunta 7

Faça uma avaliação da aula. Algo deveria ser acrescentado ou retirado? Alguma crítica construtiva?

Respostas

A2:

Excelente.

A3:

A aula é extremamente proveitosa e o tempo é algo que deveria ser acrescentado.

A4:

Seria bom que estivesse mais tempo para desenvolver todo o conteúdo, entretanto a aula foi muito boa, seria bom se na tutoria tivéssemos aulas desse tipo, em vez de só tirar dúvidas

A5:

Muito boa, Show!!!

A6:

A carga de 2 horas é pouca para assimilar o conteúdo.

A7:

A aula foi muito interessante para o meu aprendizado, pois lembrei de algumas coisas e aprendi questões que não sabia.

A8:

Aula foi ótima. Clareia bastante a mente, facilitando o entendimento do conteúdo.

A9:

A aula foi muito boa. Seria ótimo se tivéssemos aulas tutoriais nesse mesmo nível de ensino.

A10:

A aula foi ótima, não precisa acrescentar ou retirar nada. Nenhuma crítica.

Respostas dos alunos Aula 4

Pergunta 1

O que você acha da utilização de gráficos na resolução de equações e inequações? Ajudou na sua compreensão?

Respostas

A1:

Imprescindível, uma vez que seria, em alguns casos, impossível sua resolução algebricamente. Exemplos inequações transcendentais.

A2:

Sim. Com o gráfico fica mais fácil ~~a~~ visualizar a resposta.

A3:

Uma ferramenta que esclarece e facilita a compreensão do desenvolvimento algébrico e soluciona o que não se pode calcular.

A4:

Ótimo, ajuda melhor na solução de cada exercício

A5:

Muito importante. sim.

A6:

É de extrema relevância, principalmente quando não é possível a manipulação algébrica.

Pergunta 2

A partir de agora você usaria gráficos para resolver algum tipo de equação ou inequação? Usaria com seus alunos?

Respostas

A1:

Sim. Não só com meus alunos mas na minha carreira como matemático (aluno e professor) concurso etc. Pois é uma poderosa ferramenta

A2:

Sim. Só assim as equações e inequações, daria uma noção para eles do que estava sendo ministrado na aula.

A3:

Utilizaria os gráficos para melhor esclarecimento na resolução dos problemas de equação e inequação.

A4:

Sim, sempre

Pergunta 3

Faça uma avaliação do curso. Algo deveria ser acrescentado ou retirado? Alguma crítica construtiva?

Respostas

A1:

100%. Aumentando o tempo para realizar as atividades.
Ter mais cursos como este, ou seja, de altíssima qualidade.

A2:

Excelente. Deveria ter mais cursos sobre esse tema ou outros temas, escolhidos pelos alunos.

A3:

É um curso dinâmico realizado em pouco tempo, mas traz novidades e faz uma revisão do que antes havíamos aprendido.

A4:

Curso foi bem informativo e de muita qualidade, só gostaria que nossos tutores tivesse o mesmo nível.

A5:

O curso foi ótimo. Me ajudou muito a visualização gráfica.

A6:

Foi esclarecedor e produtivo principalmente por nos permitir uma nova visão para resolução de equação e inequação.
Todavia poderia ter mais vezes.