UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

O Uso do Planímetro Polar em Sala de Aula

Francisco de Assis Parentes da Silva do Amaral Ferreira

Teresina - 2014

Francisco de Assis Parentes da Silva do Amaral Ferreira

Dissertação de Mestrado:

O Uso do Planímetro Polar em Sala de Aula

Dissertação submetida à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

Teresina - 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

Serviço de Processamento Técnico

F383u Ferreira, Francisco de Assis Parentes da Silva do Amaral

O Uso do Planímetro Polar em sala de aula / Francisco de Assis Parentes da Silva do Amaral Ferreira – Teresina: 2014.

39 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, 2014.

Orientação: Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite.

1. Geometria. 2. Planímetro. 3. Ensino-Apredizagem. I. Título.

CDD 516

Francisco de Assis Parentes da Silva do Amaral Ferreira

Uso do planímetro polar em sala de aula

Dissertação apresentada ao Curso de Matemática da UFPI, como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 04/06/2014

BANCA EXAMINADORA

Jefferson Cruz dos Santos Leite

Jefferson Cruz dos Santos Leite

Doutor em Matemática - UFPI

Liane Mendes Feitosa Soares

Liane Mendes Feitosa Soares

Doutora em Matemática - UFPI

Anderson Fabian de Sousa Meneses

Anderson Fabian de Sousa Meneses

Mestre em Matemática - UESPI

Dedico este trabalho aos meus pais (Rubem e Carmen), pelo apoio incondicional nas horas que precisei e, principalmente, por terem me proporcionado condições de chegar aonde cheguei. Aos meus avós (In memoriam). Aos meus irmãos, parentes e amigos pelo apoio, confiança e por sempre estarem ao meu lado me dando força.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos...

...à Deus, pois, sem sua ajuda, nada teria sido possível;

Aos professores da UFPI, familiares e amigos pela ajuda durante o curso;

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro;

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

“Educai as crianças, para que não seja necessário punir os adultos”.

Pitágoras.

Resumo

Neste trabalho, abordamos o funcionamento do Planímetro Polar de Compensação e sua utilização como meio facilitador da aprendizagem de Geometria na Matemática do Ensino Médio. Visamos analisar o tema, elaborar estratégias para tornar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática mais dinâmico propondo o uso do Planímetro Polar em sala de aula, o que pode ajudar o docente a ensinar Matemática para os estudantes. Apresentamos, também, uma revisão bibliográfica sobre pesquisas a respeito da história, do funcionamento e utilização do instrumento. Dessa forma, o tema é bastante desafiador e importante para o ensino da Matemática. É uma necessidade que deve ser trabalhada o quanto antes para que o processo ensino-aprendizagem da disciplina seja melhorado cada vez mais.

Palavras-chave: Geometria, Planímetro e Ensino-aprendizagem.

Abstract

In this paper we report the Polar Compensating Planimeter operation and its use as a facilitator of learning Geometry in Middle School Math. Aim to examine the issue, develop strategies to make the process of teaching and learning of mathematics more dynamic proposing the use of the Polar Planimeter in the classroom, which can help teachers to teach mathematics to students. We also present a literature review of the research on the history, operation and use of the instrument. Thus, the issue is quite challenging and important for the teaching of mathematics. It is a need that must be worked as soon as possible so that the teaching-learning process of discipline is increasingly improved.

Keywords: Geometry, Planimeter and Teaching-learning.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Este trabalho visa mostrar que o Planímetro Polar pode ser utilizado como instrumento para diferentes níveis de ensino da Matemática, aprofundando ainda mais o conhecimento prático-teórico de Geometria. O Planímetro, hodiernamente, é usado em vários cursos do Ensino Superior. Pretendemos, com este trabalho, estender sua utilização para o Ensino Médio.

Geralmente, as aulas de Matemática do Ensino Médio são ministradas utilizando-se como instrumentos apenas o livro didático, quadro e pincel (ou giz), porém, discute-se muito a necessidade de se mudar a forma de ensinar. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, por exemplo, indicam que "cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo". Dessa forma, cabe a nós professores, a proposição de novos métodos de aprendizagem ativa, em que os alunos deixem de ser pacientes do processo educacional e se tornem protagonistas do mesmo, de maneira que se tenha a certeza de que o conhecimento foi de fato absorvido e, até mesmo, composto pelos alunos. Além disso, quer-se educar para a iniciativa, pois a cidadania que pretende-se construir implica participação e não se realiza na passividade.

Neste trabalho propomos alguns problemas que visam facilitar e/ou melhorar o ensino de Geometria, em concordância com os fatos supracitados, através do uso do Planímetro. Essas recomendações são reforçadas pelos mesmos PCN:

> *Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para bus-*

> *car novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicacão e de argumentação.*

Portanto, o uso adequado do Planímetro Polar poderá facilitar a solução de alguns problemas de Matemática, fazendo com que o leitor tenha uma interessante alfabetização científico-tecnológica.

Esse trabalho está dividido em três Capítulos, da seguinte forma:

No Capítulo 1 mostraremos parte da história do instrumento, apresentaremos o modelo de Planímetro Polar com o qual trabalharemos, identificaremos cada uma de suas partes e, em seguida, veremos como manuseá-lo corretamente.

No Capítulo 2 mostraremos o teorema de Green e sua aplicação como princípio do funcionamento do Planímetro.

No terceiro Capítulo falaremos sobre as escolhas feitas nas aulas e sobre a introdução do uso instrumento na sala de aula.

Esperamos que a leitura seja agradável e que o leitor possa desfrutar de um conjunto enorme de conhecimentos, utilizando uma ferramenta muito simples de manusear.

Capítulo 1

O Planímetro

O Planímetro Polar de Compensação, ou simplesmente Planímetro, é um instrumento óptico, criado por volta de 1854 pelo suíço Jakob Amsler[1], usado para a determinação de áreas de superfícies planas limitadas quaisquer, tomando como base o contorno que a delimita. O aparelho é bastante utilizado em vários cursos do Ensino Superior, tais como as Engenharias, Cartografia, Arquitetura, Desenho Técnico, Geografia, Geologia, Medicina, entre outros.

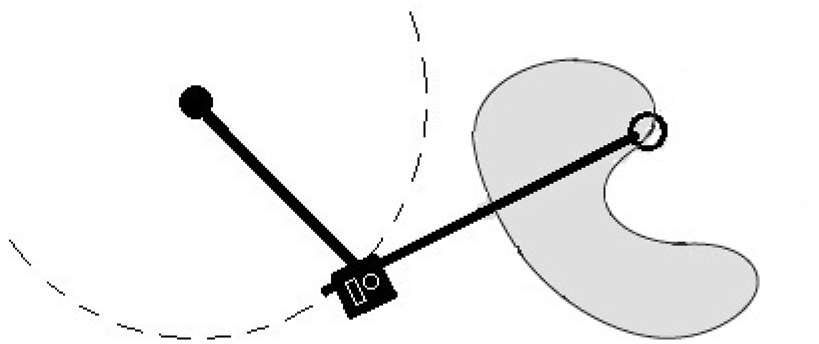


Figura 1.1: Esquema de uso de um Planímetro.

Fonte: Autor

Ao imaginarmos a imensa dificuldade que temos em calcular áreas de regiões irregulares notamos o quão interessante é o instrumento. De acordo com essa importância notória,

[1]Jakob Amsler (1823-1912) foi um teólogo, matemático, físico e engenheiro suiço.

veremos, ao longo de nosso trabalho, como é possível o instrumento calcular a área de uma superfície apenas percorrendo seu contorno delimitador. Apesar da simplicidade aparente do Planímetro, o mesmo faz cálculos de algumas integrais de superfícies, nem tão simples, para a determinação de áreas.

1.1 História

Historicamente, a invenção do Planímetro deu-se à necessidade, no início do século XIX, de se obter a área de figuras planas fechadas de traçado irregular. Com isso, surgiram vários projetos de instrumentos com a tentativa de se ter um resultado com uma certa precisão. Citaremos, aqui, alguns dos principais e mais relevantes trabalhos para a história.

O primeiro projeto que se tem notícia foi criado por Johann Martin Hermann[2] em 1814 e construído em 1917. Chamado de Planímetro de Cone, o projeto tinha um cone girando através de um rolamento e consistia em uma integral definida onde a velocidade de rotação do cone era diretamente proporcional à medida de y, conforme a **Figura 1.2** abaixo.

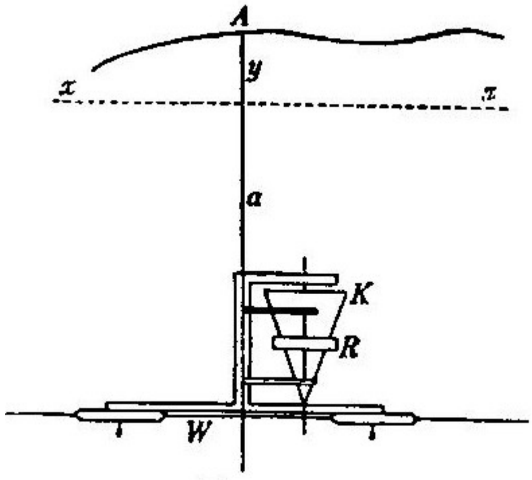


Figura 1.2: Esquema do projeto de Hermann.

Fonte: A. Galle, Druck e Verlag, Leipzig e Berlim, 1912. [11]

Outro projeto, o Planímetro Rotacional, foi elaborado em 1855 por James Clerk Maxwell[3].

[2] Johann Martin Hermann foi um inventor Sul-africano nascido em 1752.

[3] James Clerk Maxwell (1831-1879) foi um físico e matemático britânico conhecido por ter dado forma

O Planímetro de Maxwell **(Figura 1.3)**, consiste em uma esfera móvel que rola de forma tangente a um hemisfério fixo de mesmo raio à medida que o traçador percorre o contorno da figura. Os procedimentos para uso e outros detalhes podem ser encontrados no trabalho do inventor, entitulado "*Description of a New Form of Platometer, an Instrument for measuring the Areas of Plane Figures drawn on Paper*" (Maxwell's Collected Papers, v. I, p. 230), apud [11].

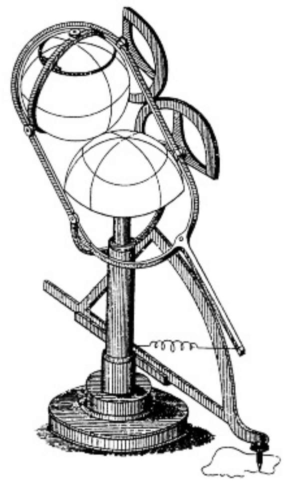


Figura 1.3: Planímetro de Maxwell.

Fonte: [11]

Por volta de 1875, foi inventado o Planímetro de Prytz[4], como uma alternativa ao Planímetro de J. Amsler. Também de uso simples, o "Planímetro de Haste", como fora batizado por Prytz, consistia em uma haste com duas curvas que formavam ângulos retos, onde uma das pontas era a traçadora T **(Figura 1.4)**.

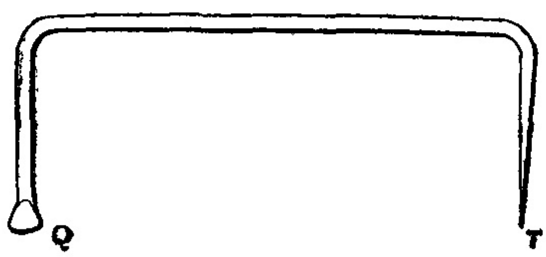


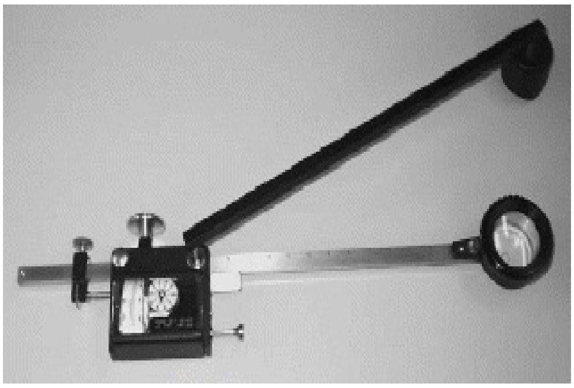
Figura 1.4: Planímetro de Prytz.

Fonte: [13]

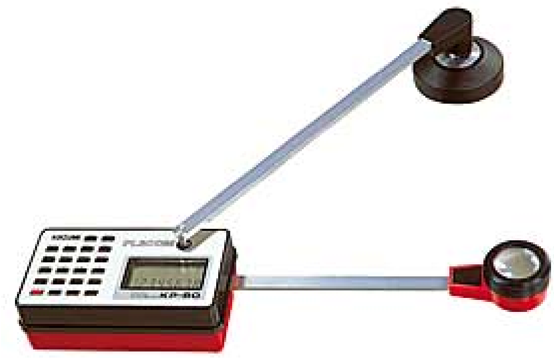
final à teoria moderna do eletromagnetismo.

[4]Holger Prytz foi um oficial da cavalaria e matemático, nascido na Dinamarca em 1848.

Já em 1854, Jakob Amsler inventou o Planímetro Polar Mecânico (pré-computador analógico), o que o faria ser conhecido mundialmente **(Figura 1.5(a))**. Anteriormente à criação de J. Amsler, os equipamentos não eram muito eficazes, pois tinham uma utilização pouco prática e, alguns, eram até imprecisos. Futuramente, surgiram os Planímetros Digitais **(Figura 1.5(b))**, que são um aperfeiçoamento do Planímetro de Amsler, com o mesmo princípio de funcionamento e que são os mais utilizados nos dias de hoje devido à facilidade de leitura do resultado.



(a) Planímetro com leitura mecânica



(b) Planímetro com leitura digital

Figura 1.5: Planímetros de Amsler.

Fonte: [18], [15]

Além desses modelos, existem também os Planímetros de Uma Só Unidade, de Unidades Diferentes, de Becker, Pantográfico, Ortogonal, de Carrinho, Linear, entre outros.

1.2 Composição do Planímetro

Para começarmos a utilizar o Planímetro, precisamos identificar suas partes e entender como é feita a leitura do contador e, assim, manuseá-lo corretamente.

O Planímetro que trabalharemos é o Planímetro Polar de Compensação com leitura mecânica da fabricante Zero Setting **(Figura 1.5(a))**, formado por duas hastes metálicas, denominadas haste polar e haste traçadora ou principal, unidas a um receptáculo por uma de suas pontas formando, assim, um ângulo entre elas que pode variar de 0 a 180 graus.

Na haste polar há o pólo, em uma ponta, que consiste em uma agulha sob um peso, para ser fixada em uma superfície plana e, na outra ponta, um pino para uni-la ao receptáculo. O pólo é o eixo em torno do qual o aparelho será girado.

A haste traçadora exibe traços numerados, distantes $1mm$ um do outro, para colocação no receptáculo de acordo com a escala trabalhada e contém, em sua ponta móvel, o traçador que possui uma lente circular com um ponto marcado no seu centro para uma melhor visualização do trajeto a ser percorrido pelo mesmo.

O receptáculo **(Figura 1.6)** é uma caixa metálica no formato de um prisma retangular que contém uma fenda pela qual passa a haste traçadora; uma pequena cavidade onde é encaixado o pino da haste polar; um vernier[5] para o ajuste do coeficiente de calibragem; um pino de zeragem do contador e uma peça para o travamento da haste traçadora.

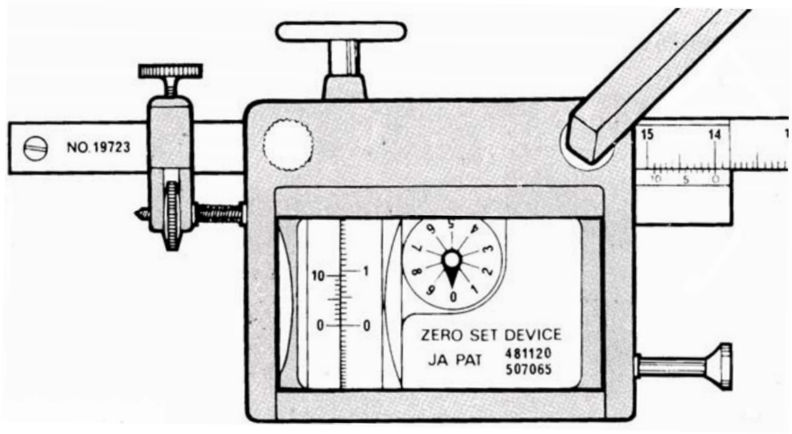


Figura 1.6: Receptáculo.

Fonte: [5]

Além disso, no receptáculo há, também, os elementos de registro que são: um tambor cilíndrico, chamado de integrante, que gira perpendicularmente à haste traçadora e um disco contador ligado ao eixo de rotação do integrante, que indica a quantidade de voltas que ele dá quando a ponta móvel do instrumento se desloca sobre a superfície. O disco contador, que é dividido em 10 unidades, avança uma unidade a cada volta completa do integrante. Quando o traçador é deslocado sobre uma curva plana fechada, o contador calculará a área delimitada por ela.

Para calcular a área delimitada por uma curva plana através de um Planímetro tem-se uma melhor precisão do resultado obtido se a folha contendo a curva a ser medida estiver fixada a uma mesa plana horizontal, preferencialmente, com uma fita adesiva para que a mesma não escorregue sobre a mesa. Além disso, para um melhor rigor, recomenda-se que seja feita mais de uma leitura e faça-se a média dos resultados obtidos.

[5]Vernier é um instrumento usado na medida de comprimentos e ângulos. Seu nome é homenagem a Pierre Vernier, matemático francês que o inventou no século XVII.

1.3 Como Utilizar o Planímetro

Após o Planímetro montado e a folha fixada, inicia-se a medição de acordo com as etapas a seguir:

1. Escolha e marque um ponto sobre a curva limitadora da figura para iniciar a medição;

2. Coloque o ponto central da lupa da haste traçadora sobre o ponto escolhido no ítem anterior;

3. Fixe a agulha do pólo da haste polar em um ponto qualquer da mesa que seja, preferencialmente, fora da superfície a ser percorrida de forma que o traçador consiga percorrer todo seu perímetro;

4. Zere o contador apertando o pino de zeragem do mesmo ou anote o valor da leitura inicial do contador, nesse caso, o resultado final será a subtração da leitura final pela leitura inicial;

5. Percorra o traçador ao longo do perímetro da figura, no sentido horário, até retornar à sua posição inicial.

Quando a figura for muito grande e o traçador do Planímetro não conseguir percorrer todo seu perímetro, a mesma poderá ser subdividida em duas ou mais figuras e, assim, a área total será a soma das áreas de todas as subdivisões.

A precisão dos resultados dos cálculos de áreas obtidos através do Planímetro é enorme, porém, para uma maior eficácia é necessário que se tenha uma operação regular e rigorosa, evitando-se ao máximo erros na movimentação do traçador sobre a curva delimitadora da região. Além disso, tem-se um aumento considerável na precisão do Planímetro quando se faz o cálculo para áreas maiores, chegando em torno de $0,15\%$ de erro relativo, como indica [5], uma vez que a área da região a ser medida pelo Planímetro e o erro relativo são inversamente proporcionais. Porém, é recomendável que o uso do Planímetro em trabalhos nos quais se requeira uma maior precisão seja feito apenas para comparação de resultados com outros obtidos por meios superiores, analiticamente.

Finalizada a contagem, parte-se para o procedimento de leitura, que é dividido em etapas, análogo ao de um paquímetro[2]. A leitura do resultado obtido no contador é feita observando quatro leituras (dígitos).

O primeiro dígito é a leitura direta do algarismo indicado no disco contador do número de voltas do integrante; o segundo dígito é o número indicado no tambor que coincide com o zero da escala fixa; o terceiro dígito é a fração decimal indicada no tambor que coincide com o zero da escala fixa e o quarto dígito é a fração que é observada analisando-se qual marcação do integrante coincide com uma marcação da escala fixa. Caso em alguma das leituras a indicação do algarismo fique entre dois algarismos, o escolhido será sempre o menor entre eles.

Cada Planímetro tem um número de cadastro com sua devida constante de calibragem, fornecida pelo fabricante e geralmente mostrados em uma tabela fixada no estojo do mesmo **(Figura 1.7)**.

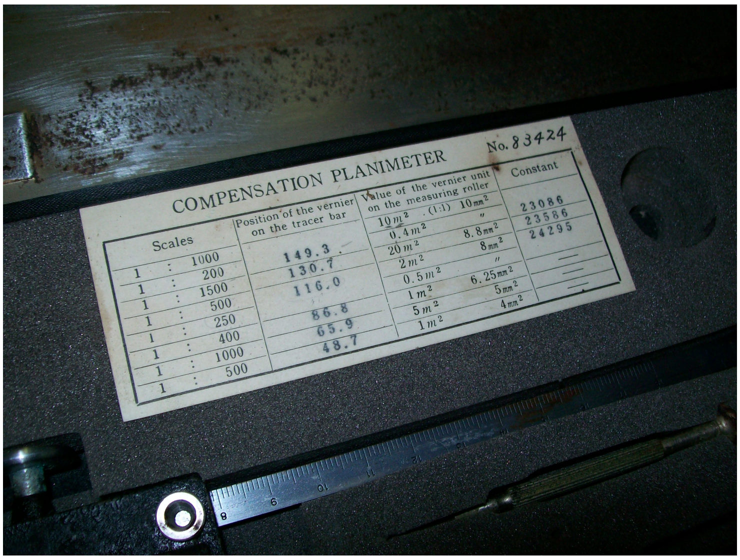


Figura 1.7: Tabela com as constantes de calibragem.

Fonte: Autor

A constante de calibragem serve para determinarmos a posição da haste tracejadada no receptáculo de acordo com a escala a ser utilizada. Para isso, basta observar o valor desejado da constante de calibragem, indicado na tabela, na haste tracejada e iguala-lo à ponta da barra de ajuste do coeficiente de calibragem fixada na caixa. A calibragem

[2]Paquímetro é um instrumento utilizado para medir a distância entre dois lados simetricamente opostos em um objeto.

também pode ser feita sem a utilização da tabela contida no estojo fazendo-se, apenas, alguns testes de comparação dos resultados obtidos com o Planímetro em áreas de figuras planas conhecidas.

O resultado obtido na leitura deve ser multiplicado pelo valor, chamado de fator de multiplicação, indicado na tabela de acordo com a devida constante de calibragem utilizada.

Exemplo 1.1 : A **Figura 1.8** abaixo mostra o registro de uma leitura feita por um Planímetro a partir de um desenho na escala 1:1000 com haste traçadora ajustada em $149,3\mathtt{mm}$. Vejamos qual é a área da figura de acordo com a leitura:

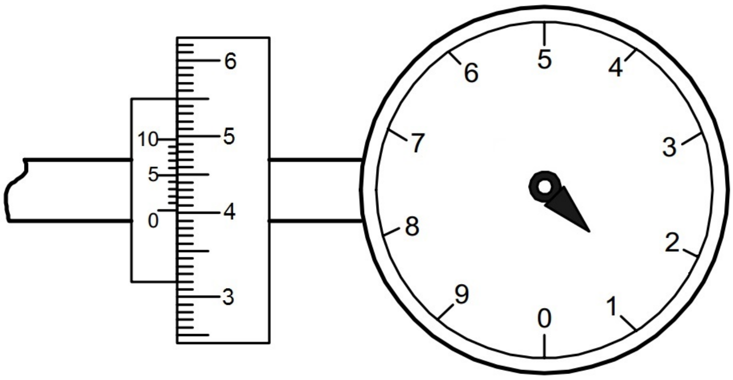


Figura 1.8: Registro de leitura.

De acordo com o ponteiro do disco contador, que está entre os números 1 e 2, o primeiro dígito da leitura é igual a 1. O segundo dígito da leitura é igual a 4, pois o zero da escala fixa se encontra entre os algarismos 4 e 5. Como o zero da escala fixa encontra-se entre o 0 e o 1 da parte decimal, tem-se que o terceiro algarismo é o 0. Os traços coincidentes entre as escalas fixa e móvel indicam que o quarto, e último, algarismo é o 5. Logo, a leitura final é 1405.

Analisando a posição de ajuste da haste traçadora ($149,3\mathtt{mm}$) na tabela com as constantes de calibragem, vê-se que o fator de multiplicação para a medida é igual a $0,4\mathtt{m}^2$, daí temos:

$$A = 1405 \cdot 0,4 \Rightarrow$$
$$\boxed{A = 562\mathtt{cm}^2}$$

Para facilitar os cálculos na hora de obter a área de uma figura, pode-se regular a haste traçadora no receptáculo em uma posição de forma que $1\mathtt{cm}^2$ (ou outras potências de 10) determinado pelo traçador seja igual a uma unidade de área da figura. Assim, não será necessário o uso da tabela a todo instante.

Exemplo 1.2 : Considerando que a leitura na **Figura 1.8** foi obtida com haste traçadora ajustada na escala 1:1, a área da figura será igual ao da leitura, ou seja, $1405\mathtt{cm}^2$. Com isso, calculamos apenas a área da figura. Para obter a área real da superfície representada pela figura, tomando a escala 1:2000 como exemplo, faz-se o seguinte:

Tem-se que:

$$1\mathtt{cm} \Leftrightarrow 20\mathtt{m} \Rightarrow$$
$$1\mathtt{cm}^2 \Leftrightarrow 400\mathtt{m}^2$$
$$\text{Daí, } A = 562 \cdot 400\mathtt{m}^2 \Rightarrow$$
$$\boxed{A = 224800\mathtt{m}^2}$$

Capítulo 2

Funcionamento

O princípio básico para o funcionamento do Planímetro é uma aplicação do resultado do Teorema de Green[1].

Ao utilizarmos o Planímetro podemos notar que ele tem a capacidade de relacionar integrais de linha com integrais de superfície, o que nos remete ao Teorema de Green, que geralmente é estudado em cursos de Cálculo.

2.1 Teorema de Green

O Teorema de Green relaciona uma integral dupla de uma região R com parcelas de uma integral de linha da curva C que a limita.

Segundo o Teorema de Green:

Sejam $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ um campo de vetores no plano, C uma curva fechada simples e R uma região cercada por essa curva, sem que haja singularidades do campo em R. Temos que:

$$\int_c f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int\int_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy,$$

ou seja, a integral de linha de uma curva C em um campo $F(x, y)$ é igual à integral dupla da diferença entre as derivadas parciais das componentes $f(x, y)$ e $g(x, y)$ do campo em relação a y e x, respectivamente, na região cercada pela curva.

Diante da igualdade acima, é fácil notar que quando a diferença entre as derivadas parciais $\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ for igual a uma constante k, ela pode ser tirada da integral. Assim

[1]George Green (1793-1841) foi um matemático e físico inglês conhecido por teoremas em teoria potencial.

teremos a igualdade:

$$\int_c f(x,y)dx+g(x,y)dy = k\cdot\int\int_R dxdy, \text{ onde, } \int\int_R dxdy \text{ é a área da região cercada por } C.$$

Por fim, temos, que a área da região será dada por:

$$\int\int_R dxdy = \frac{1}{k}\cdot\int_c f(x,y)dx + g(x,y)dy,$$

o que nos mostra que o Teorema de Green pode ser usado para a determinação de áreas de regiões cercadas por curvas fechadas.

2.2 Aplicação do Teorema de Green no Planímetro

Considerando que as hastes do Planímetro tenham medidas iguais a r, uma com centro na origem $(0,0)$ e outra em um ponto (a,b), conforme a **Figura 2.1**. Seja $\vec{v}$ o vetor que representa a haste traçadora do Planímetro e $\vec{w}$ um perpendicular a ele.

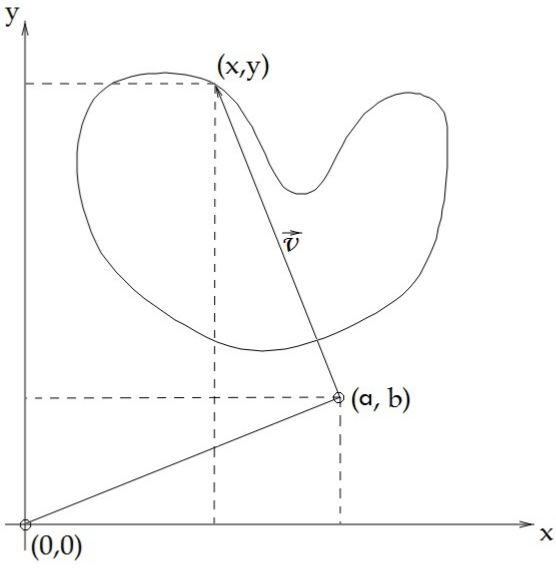


Figura 2.1: Hastes centradas em $(0,0)$ e (a,b).

Fonte: Autor

Temos que: $\vec{v} = (x-a, y-b)$ e $\vec{w} = (-(y-b), x-a)$. Daí, $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = \sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2} = r$.

Assim, o campo será dado por $F = \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \left(\dfrac{-(y-b)}{r}, \dfrac{(x-a)}{r}\right)$.

Determinaremos, agora, a e b. Considere a equação das circunferências descritas pelas hastes do planímetro:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = r^2 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \end{cases}$$

Do desenvolvimento da segunda equação do sistema acima, segue:

$$\frac{x^2+y^2}{2y} = \frac{ax}{y} + b, \text{ daí } b = \frac{x^2+y^2}{2y} - \frac{ax}{y} = \frac{x^2+y^2-2ax}{2y}.$$

Substituindo os valores na equação da circunferência centrada na origem, temos que:

$$4y^2a^2 + (x^2+y^2)^2 + 4a^2x^2 - 4ax(x^2+y^2) = 4y^2r^2 \Rightarrow$$

$$4(x^2+y^2)a^2 - 4x(x^2+y^2)a + (x^2+y^2)^2 - 4y^2r^2 = 0.$$

Tomando $(x^2+y^2) = R^2$:

$$a^2 - ax + \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2} = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{R^2x^2 - R^4 + 4y^2r^2}}{2R} \Rightarrow$$

$$a = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{\frac{4r^2}{x^2+y^2} - 1}. \tag{2.1}$$

Escolhemos o valor positivo de a pois o mesmo implica no sentido anti-horário percorrido pela haste traçadora como o positivo. Assim, a escolha do valor negativo de a não altera o resultado.

Com a positivo, temos que:

$$b = \frac{y}{2} + \frac{x\sqrt{R^2x^2 - R^4 + 4y^2r^2}}{2Ry} \Rightarrow$$

$$b = \frac{y}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{4r^2}{x^2+y^2} - 1}. \tag{2.2}$$

Usando os valores de (2.1) e (2.2), temos que o campo do Planímetro será dado por:

$$f(x,y) = -\frac{1}{r}(y-b) = \frac{1}{r}\left(-\frac{y}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{4r^2}{x^2+y^2} - 1}\right), \tag{2.3}$$

$$g(x,y) = \frac{1}{r}(x-a) = \frac{1}{r}\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\sqrt{\frac{4r^2}{x^2+y^2} - 1}\right). \tag{2.4}$$

Derivando as equações (2.3) e (2.4), temos:

$$r\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2} + \frac{8xyr^2}{\dfrac{2}{x^2+y^2}\sqrt{\dfrac{4r^2}{x^2+y^2} - 1}}. \tag{2.5}$$

$$r\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2} + \frac{8xyr^2}{\dfrac{2}{x^2+y^2}\sqrt{\dfrac{4r^2}{x^2+y^2} - 1}}, \tag{2.6}$$

Fazendo a subtração (2.6) − (2.5):

$$r\frac{\partial g}{\partial x} - r\frac{\partial f}{\partial y} = r\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 1, \text{ daí } \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{r},$$

Portanto,

$$k = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{r}.$$

Notamos, então, que ao aplicarmos o Teorema de Green no Planímetro, a constante de multiplicação da área dependerá somente do comprimento das hastes, isto é,

$$\int_c f(x,y)dx + g(x,y)dy = \frac{1}{r} \cdot \text{ área da região cercada por } C,$$

o que implica que o funcionamento do Planímetro depende do comprimento das hastes r, do diâmetro do tambor d e da quantidade de voltas k do tambor que é indicada pelo disco contador.

Logo, o campo determinado pelo Planímetro é $F(x,y) = (f,g)$. Portanto, como indicam [2] e [10]:

$$k\pi d = \int_c f dx + g dy = \frac{1}{r} \cdot \text{ área da região cercada por } C,$$

isto é, a área cercada por C é igual a $\dfrac{k\pi d}{r}$.

Capítulo 3

O Uso em Sala de Aula

Um dos objetivos do nosso trabalho foi a incorporação do uso do Planímetro nas aulas de Geometria e não somente apresentar o instrumento como atividade extra-curricular à disciplina, aliando a forma tradicional de ensino ao uso do instrumento. Neste capítulo iremos descrever algumas escolhas que foram feitas para introduzirmos o uso do equipamento e, também, expor e comentar alguns fatos ocorridos durante a elaboração e realização das atividades propostas.

3.1 As Aulas

A aplicação do presente trabalho foi feita no Centro de Ensino Luiz Montenegro Tavares, escola da rede Estadual do Maranhão situada na cidade de Coroatá com o apoio devido de todo o corpo escolar.

Visando introduzir o uso do Planímetro nas aulas de Matemática, as mesmas tiveram que ser levemente modificadas, tanto em relação à forma de introduzir o conteúdo quanto na quantidade de aulas separadas para o conteúdo de Geometria.

Em relação à metodologia de ensino, muitos autores destacam a importância de se utilizar materiais que sejam manipuláveis em sala de aula, tais como Poincaré, Locke, Rousseau, Pestalozzi, Herbart, Froebel, Dewey, Montessori, Comenius, entre outros. Assim, o aluno deve ser ativo no processo ensino-aprendizagem, manipulando instrumentos didáticos físicos que possibilitem instigar e aguçar sua capacidade de raciocinar. Dessa maneira, as aulas foram devidamente planejadas levando-se em consideração a introdução da utilização do Planímetro como método de ensino para que o aluno possa desenvolver tais habilidades.

Na parte quantitativa, houve um acréscimo de aulas "separadas" para o conteúdo de Geometria, uma vez que fora necessário uma explanação histórico-científica a respeito do instrumento, bem como o tempo necessário para a utilização do mesmo pelos discentes nas atividades propostas. Contudo, as aulas foram bastante proveitosas.

3.2 Usando o Planímetro nas Aulas

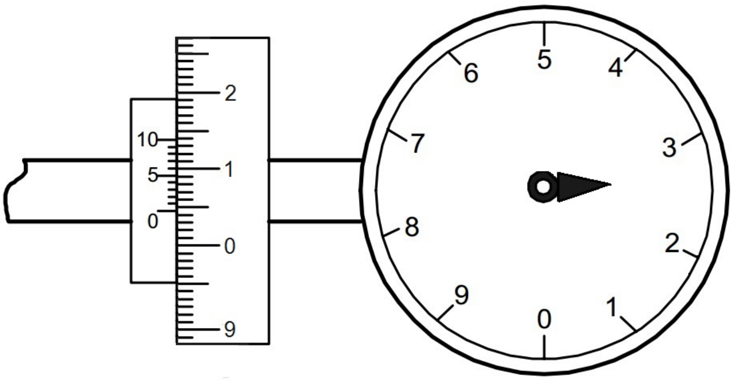
Para termos um melhor proveito, dividimos o uso do Planímetro em sala de aula em três momentos, tomando como referência o plano didático anual do ensino médio elaborado de forma coletiva na rede.

No primeiro momento objetivamos que o aluno seja capaz de reconhecer a importância histórica do Planímetro para a Matemática, identificar as partes componentes do instrumento, fazer a leitura dos resultados e que, através do processo de calibragem do mesmo, construa noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano sendo capaz de desenvolver as seguintes habilidades:

- Identificar as relações existentes entre grandezas e unidades de medida.
- Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
- Resolver situações-problemas que envolvam medidas de grandezas.
- Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
- Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Para isso, após a explanação do conteúdo propomos algumas atividades inerentes ao mesmo. A seguir, temos algumas delas, não necessariamente na ordem em que foram propostas:

Exercício 3.1 : Determine a área obtida por um Planímetro Polar com haste traçadora ajustada para a escala 1:100 cuja leitura é a indicada na figura abaixo, onde a escala da figura é 1:500.



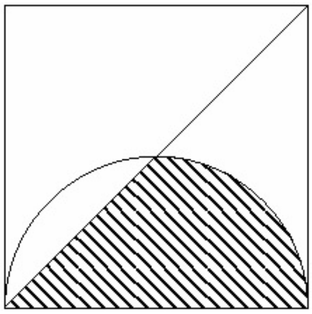
Exercício 3.2 : Construa um polígono de área conhecida (um quadrado de lado igual a 10cm, por exemplo), em seguida determine a medida da haste traçadora para qual o fator de multiplicação seja igual a $0,1$.

Já no segundo momento, objetivamos que o aluno seja capaz de verificar a veracidade de resultados conhecidos com o auxílio do Planímetro usando-o como método de comparação de resultados. Além disso, que ele consiga utilizar o conhecimento geométrico adquirido nas aulas para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela. E assim possa:

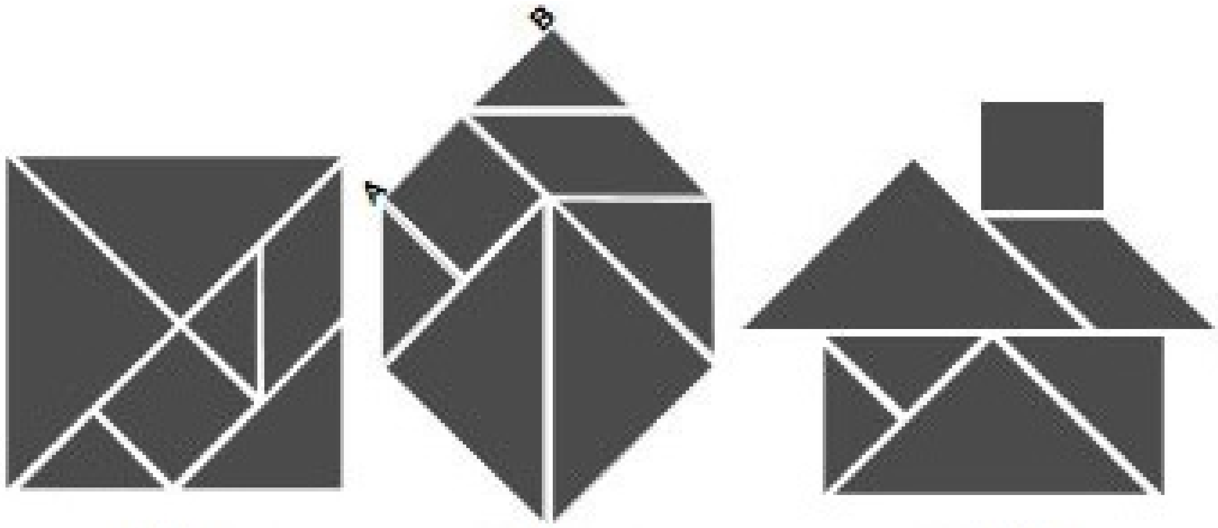
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas e/ou objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Propomos atividades onde o aluno seja capaz de calcular áreas de polígonos conhecidos e alguns mapas para comparar o resultado analítico com o resultado dado pelo Planímetro. Tais como:

Exercício 3.3 : (Fuvest) Na figura seguinte, estão representados um quadrado de lado 4, uma de suas diagonais e uma semicircunferência de raio 2. Então a área da região hachurada é:



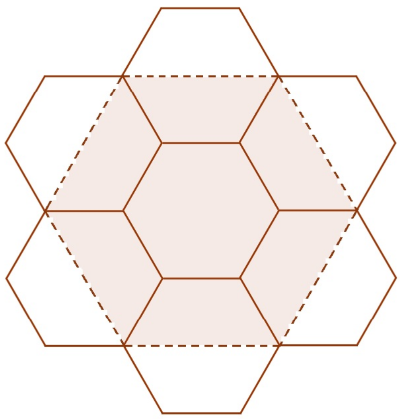
Exercício 3.4 : (ENEM) O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura (a). Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras (b) e (c).



(a) (b) (c)

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura (b) mede $3\mathtt{cm}$, então quanto mede a área da figura (c), que representa uma "casinha"?

Exercício 3.5 : A figura abaixo representa sete hexágonos regulares de lado $1\mathtt{cm}$ e um hexágono maior, cujos vértices coincidem com vértices de seis dos hexágonos menores. Então, qual a medida da área do hexágono hachurado?



Por fim, no terceiro momento, espera-se que o aluno consiga, efetuando o cálculo de áreas de regiões desconhecidas através do Planímetro aliado a outras técnicas, construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. E, com isso, desenvolva as habilidades descritas abaixo:

- Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
- Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
- Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
- Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
- Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Para esse momento, abre-se um leque de atividades a serem propostas, pois somam-se a ele as habilidades desenvolvidas nos momentos anteriores.

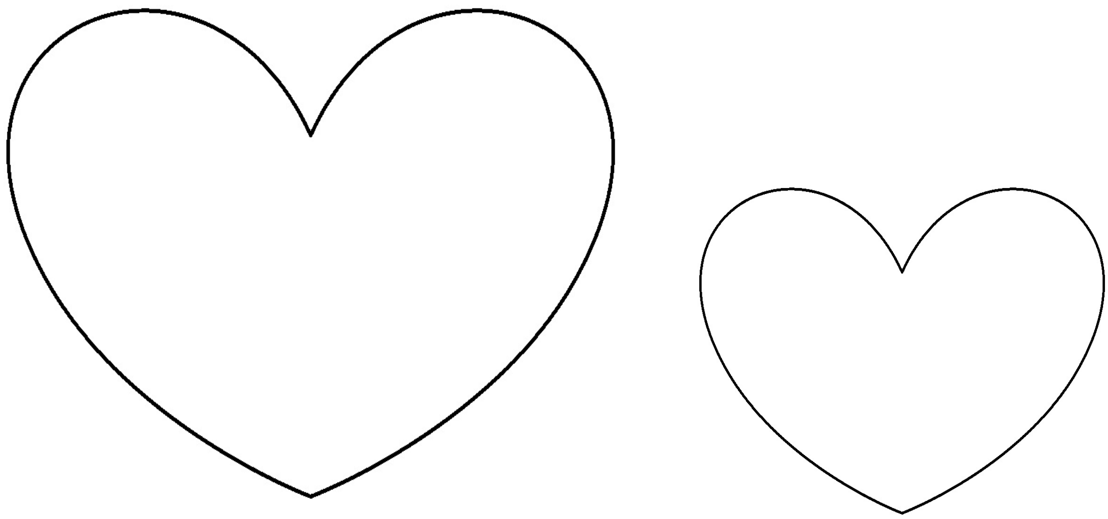
Segue algumas das atividades propostas:

Exercício 3.6 : Desenhe uma região R, qualquer, e determine sua área com a utilização de um Planímetro. Em seguida desenhe dois polígonos diferentes que tenham áreas iguais a de R.

Exercício 3.7 : Qual a área do pentágono cujos vértices são determinados pelas coordenadas abaixo:

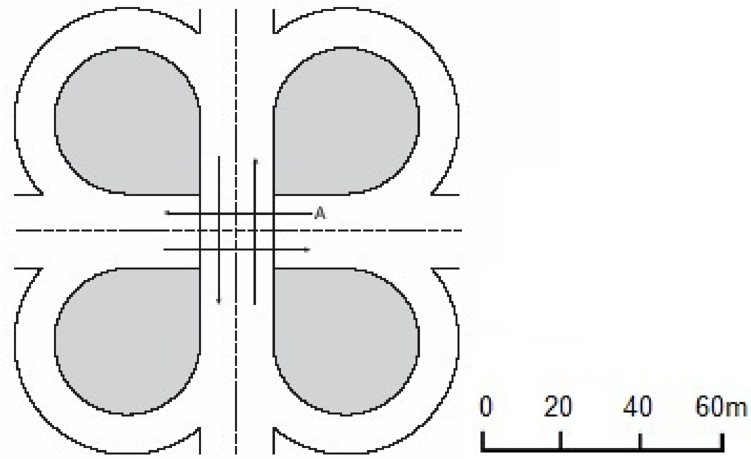
Vértice	**X**	**Y**
A	4,9	0
B	5	7,6
C	5,8	9,9
D	-2.3	7,5
E	-2,2	-2,3

Exercício 3.8 : A borda B e o fundo F de um tanque têm formatos semelhantes, conforme as figuras abaixo. Sabendo que a altura do tanque é $5\mathfrak{m}$ e que todas as áreas do tanque paralelas à B e F são semelhantes a elas. Determine o volume do tanque com o auxílio de um Planímetro. (Escala das figuras: 1:100).

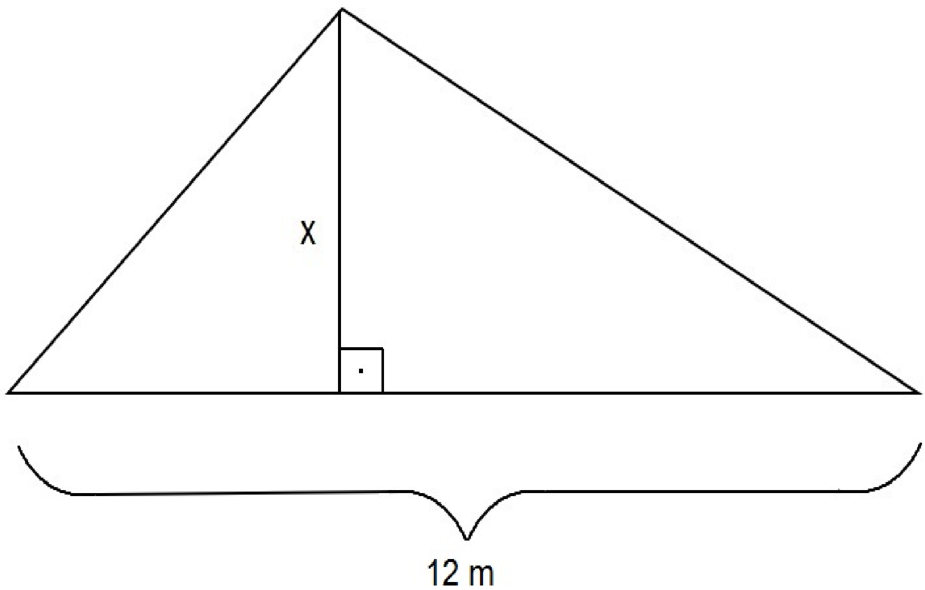


(a) Borda (b) Fundo

Exercício 3.9 : (IBMEC) A figura abaixo representa o cruzamento perpendicular de duas rodovias, com sentidos de tráfego devidamente indicados. Suponha que todas as pistas têm largura de dez metros e que as curvas que delimitam as interligações são arcos de circunferências, perfeitamente ajustadas de modo a tangenciarem as linhas tracejadas que dividem as duas pistas de cada rodovia (neste caso com raio de 30 metros), ou duas retas que dão delimitações externas das rodovias (neste caso com raio de 20 metros). Determine a área da região sombreada, onde deve ser plantado um gramado.



Exercício 3.10 : Determine o valor da altura x do triângulo abaixo com o auxílio do Planímetro, sabendo que a escala utilizada é 1:100.



Considerações Finais

A Matemática em si desperta o raciocínio dos alunos, porém, em sua grande maioria, os mesmos tendem a apresentar dificuldades em absorver conteúdos da disciplina. Isso leva muitos pesquisadores e professores a incluir o uso de novos instrumentos às aulas na procura de caminhos alternativos pra ensina-la. Contudo, essa inclusão deve ser somatória, isto é, deve-se aliar os novos métodos aos tradicionais com o intuito de aumentar a quantidade de formas de percepção e compreensão do aluno, sempre deixando claro para ele o elo de ligação entre os mesmos.

Vale ressaltar que o uso de tais instrumentos não deve ser feito de forma aleatória mas, sim, como uma estratégia cuja utilização deve ser muito bem analisada antes de ser posta em prática, o que torna o exercício do ensino de Matemática de maneira diferente uma tarefa árdua que exige dos profissionais um enorme tempo de estudo e preparação. O que faz valer à pena o suor derramado é o resultado de sua aplicação pois, em sua grande maioria, é positivo e benéfico ao aprendizado.

As atividades feitas em sala de aula com o Planímetro tiveram um resultado proveitoso, visto que foi notório o envolvimento dos alunos, principalmente daqueles que, outrora, tinham dificuldade de concentração, percepção e de aprendizagem. Viu-se que a utilização dessa ferramenta possibilitou uma enorme interação entre os alunos e o conteúdo de Geometria além de conseguir relacionar os conteúdos citados a outros da mesma disciplina e desenvolver nos alunos habilidades úteis ao estudo da Matemática e, também, ao estudo de outras disciplinas.

De forma geral, o uso do Planímetro em sala de aula foi uma estratégia que tornou o processo de ensino-aprendizagem nas aulas de Matemática bastante rico, dinâmico, interessante e lúdico. A metodologia foi bem aceita pelos alunos e, estimulou e despertou a atenção de muitos deles, que antes tinham desinteresse às atividades propostas da disciplina.

A necessidade de que sejam utilizados tais instrumentos mistura-se com a criatividade, prática e desejo do educador em melhorar a situação da Educação em nosso país. Ratificamos que é extremamente importante e necessário que o professor tenha vontade de instigar e aguçar o conhecimento do aluno para que ele seja capaz de usá-lo ao longo de sua jornada.

Referências Bibliográficas

[1] PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (ENSINO MÉDIO). Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 27 de março de 2014.

[2] Rabelo, Adriano Borges; Manso, Fernando Ferreira: O Planímetro e o Teorema de Green. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/comed/2004/e2004/planimetro.pdf>. Acesso em: 27 de março de 2014.

[3] Colli, Eduardo: O planímetro linear. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/ matemateca/textos/planimetro.pdf>. Acesso em: 27 de março de 2014.

[4] LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica; v.2. 3.ed. SÃO PAULO: Harbra, 1994. 685p.

[5] Almeida, Ariclo Pulinho Pires de; Freitas, José Carlos de Paula; Machado, Maria Márcia Magela: TOPOGRAFIA: Fundamentos, Teoria e Prática. Disponível em: <http://www.passeidireto.com/arquivo/999624/apostila–top–i/33>. Acesso em: 27 de março de 2014.

[6] Yoshizane, Hiroshi Paulo: MANUAL DE USO DE PLANÍMETRO: DETERMINAÇÃO DOS DADOS FISIOGRÁFICOS DE UMA BACIA HIDROGRÁFICA PARA UM ESTUDO HIDROLÓGICO. Disponível em: <http://www.ceset.unicamp.br/ hiroshiy/ST - 306/(Microsoft PowerPoint - BACIA HIDROGRAFICA-3-COMO USAR UM PLAN.pdf>. Acesso em: 27 de março de 2014.

[7] JACOB AMSLER. Disponível em: <http://apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Amsler>. Acesso em: 27 de março de 2014.

[8] Melo, Weyller Diogo de Albuquerque; Seixas, Andréa de: DETERMINAÇÃO DA CONFIABILIDADE DE PLANÍMETROS DIGITAIS: EXPERIMENTOS PRÁTICOS DE TOPOGRAFIA PARA CÁLCULOS DE ÁREA E DE VOLUME. Disponível em: <http://www.ufpe.br/cgtg/SIMGEOIV/CD/artigos/SIG/119_5.pdf>. Acesso em: 27 de março de 2014.

[9] Braga, Alcimar de Souza: Teorema de Green e Aplicação. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/AlcimardeSouzaBraga.pdf>. Acesso em: 27 de março de 2014.

[10] Pereira, Agnaldo Souza; Vitor, Cláudio Barros; Oliveirav, Jefferson Pereira de: Cálculo II. Disponível em: <http://www.passeidireto.com/arquivo/2344408/apostila—calculo-ii/17>. Acesso em: 27 de março de 2014.

[11] Foote, Robert L.: Pre-Amsler Planimeters. Disponível em: <http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/Planimeter/PreAmsler.htm>. Acesso em: 2 de abril de 2014.

[12] Breviário, Álaze Gabriel do: RESUMO DA ORIGEM E DA EVOLUÇÃO DAS CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO, DA INFORMAÇÃO E DA COMUNICAÇÃO - TÓPICO 3 - PARTE 2. Disponível em: <http://cienciasexatascontemporaneas.blogspot.com.br/2013/01/resumo-da-origem-e-da-evolucao-das_19.html>. Acesso em: 2 de abril de 2014.

[13] Planimetro. Disponível em: <https://it.wikipedia.org/wiki/Planimetro>. Acesso em: 2 de abril de 2014.

[14] Brandalize, Maria Cecília Bonato: Apostila (12)- Topografia. Disponível em: <http://www2.uefs.br/geotec/topografia/apostilas/topografia(12).htm#Topo>. Acesso em: 2 de abril de 2014.

[15] Laboratório de Biomecânica do Movimento e Postura Humana - Equipamentos. Disponível em: <http://www.usp.br/labimph/Equipamentos.php>. Acesso em: 2 de abril de 2014.

[16] Planímetro. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Planímetro>. Acesso em: 2 de abril de 2014.

[17] Tavares, João Nuno: Teoria Geral dos Planímetros. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/cmec2/Planimetro/Planimetro.html>. Acesso em: 19 de abril de 2014.

[18] Metodos de integración mecánica. Disponível em: <http://dc400.4shared.com/doc/a4wD_ xz7/preview.html>. Acesso em: 19 de abril de 2014.

Anexos

Anexo I - Resoluções dos Exercícios

Abaixo segue uma resposta esperada para cada um dos exercícios propostos no trabalho.

Exercícios do primeiro momento:

Exercício 1: Primeiramente, faremos a leitura do resultado indicado no mostrador. De acordo com o ponteiro do disco contador, que está entre os números 2 e 3, o primeiro dígito da leitura é igual a 2. O segundo dígito da leitura é igual a 0, pois o zero da escala fixa se encontra entre os algarismos 0 e 1 do tambor. Como o zero da escala fixa encontra-se entre o 4 e o 5 da parte decimal, tem-se que o terceiro algarismo é o 4. E, os traços coincidentes entre a escala fixa e a escala do tambor indicam que o quarto algarismo é o 7. Logo, a leitura final é 2047.

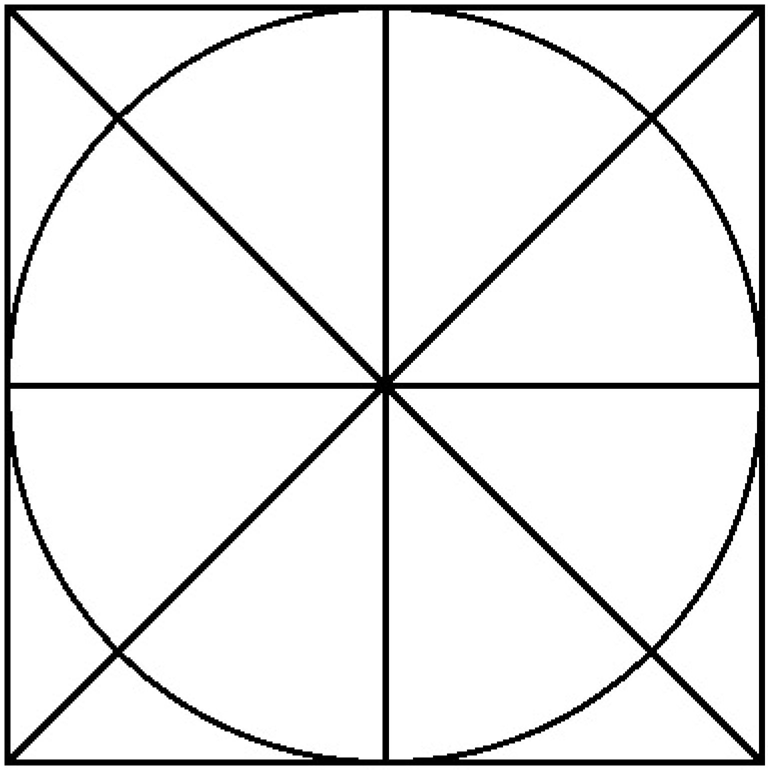
Observando a posição de ajuste da haste traçadora vê-se, facilmente, que o fator de multiplicação para a medida é igual a $0,1\mathfrak{m}^2$, daí temos:

$$A = 2047 \cdot 0,1 \Rightarrow$$
$$\boxed{A = 204,7\mathfrak{cm}^2}$$

Por fim, faz-se a conversão de escalas:

$$100\mathfrak{cm} \Leftrightarrow 500\mathfrak{m} \Rightarrow$$
$$1\mathfrak{m} \Leftrightarrow 5\mathfrak{m} \Rightarrow$$
$$1\mathfrak{m}^2 \Leftrightarrow 25\mathfrak{m}^2$$
$$\text{Daí, } A = 204,7 \cdot 25\mathfrak{m}^2 \Rightarrow$$
$$\boxed{\boxed{A = 5117,5\mathfrak{m}^2}}$$

Exercício 2: Inicialmente construímos uma figura onde a área é conhecida:



Tomamos o quadrado maior (de área igual a $100cm^2$) como exemplo. Em seguida colocamos a haste tracejada em uma posição qualquer e faremos a leitura para compararmos com o resultado esperado, que é 1000. Caso a leitura observada seja menor que 1000, alteramos o comprimento da haste de forma que o resultado aumente. Repetimos o processo até chegarmos na leitura esperada. Caso, em algum momento, a leitura ultrapasse o 1000, altera-se o comprimento da haste no sentido contrário em uma medida menor que a anterior.

Após sucessivas medições seguindo as instruções anteriores chega-se ao resultado final $1463mm$.

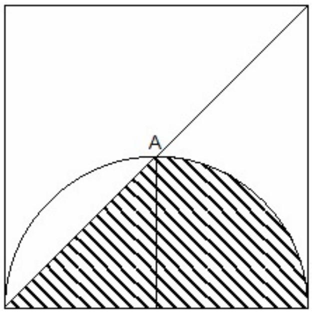
Caso a primeira leitura seja maior que 1000 o processo será análogo.

Para os próximos exercícios, do segundo momento, pretende-se que o aluno utilize o Planímetro como método de obtenção e comparação de resultados. Assim, a resposta é obtida através do Planímetro e, também, analiticamente. Daqui em diante, sempre utilizaremos o Planímetro regulado para o fator de multiplicação igual a $0,1$.

Exercício 3: Percorrendo o contorno da região hachurada com o Planímetro obtemos a leitura 0076. Daí, a área R da região é igual a

$$R = 0051 \cdot 0,1 \Rightarrow$$
$$\boxed{R = 5,1 cm^2}$$

Por outro lado, note que o ponto A de intersecção da semicircunferência com a diagonal do quadrado é o centro do mesmo. Assim, ao traçarmos uma reta a partir de A ao centro da circunferência, conforme abaixo, dividimos a área hachurada em duas áreas, onde uma é um triângulo de base e altura iguais ao raio r da semicircunferência e a outra é a quarta parte de uma circunferência de raio r.



Temos, então, que a área da região R procurada é dada por:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{4} \Rightarrow$$

$$R = \frac{2^2}{2} + \frac{\pi 2^2}{4} = 2 + \pi \Rightarrow$$
$$\boxed{R \approx 5,14 cm^2}$$

Observe que o resultado do Planímetro é aproximado, uma vez que sua leitura abrange apenas quatro algarismos.

Exercício 4: Percorrendo o contorno da "casinha" (c) com o Planímetro obtemos a leitura 0180. Daí, a área A da figura é igual a

$$A = 0180 \cdot 0,1 \Rightarrow$$
$$\boxed{A = 18 cm^2}$$

De outra maneira, observamos que as áreas (a), (b) e (c) são iguais e que, a medida de AB é igual à metade da medida da diagonal d do quadrado (a). Daí, seja l o lado do quadrado (a), temos:

$$l^2 + l^2 = (2 \cdot d)^2 \Rightarrow$$
$$2l^2 = (2 \cdot 3)^2 \Rightarrow$$
$$l^2 = \frac{36}{2} \Rightarrow$$
$$\boxed{A = l^2 = 18cm^2}$$

O que confirma o resultado anterior.

Exercício 5: Percorrendo o contorno da região hachurada com o Planímetro obtemos a leitura 0104. Daí, a área A da figura é igual a

$$A = 0104 \cdot 0,1 \Rightarrow$$
$$\boxed{A = 10,4cm^2}$$

Analiticamente, notamos que a área do hexágono maior é igual a soma da área de um hexágono menor mais seis metades do mesmo, ou seja, tem área igual a quatro hexágonos menores. Assim:

$$A = 4 \cdot \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

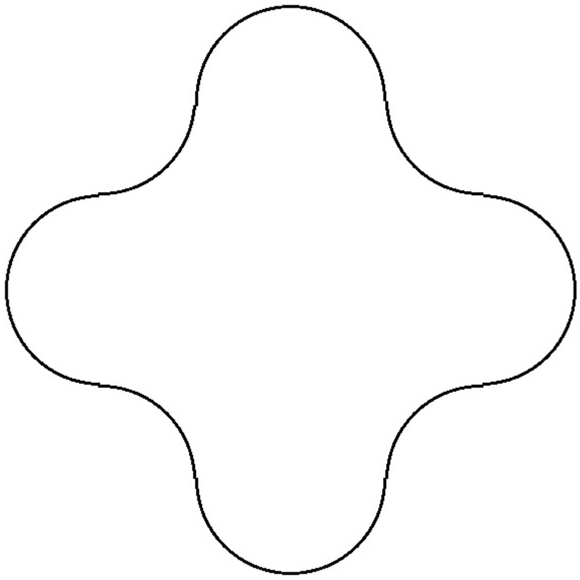
$$A = 6l^2\sqrt{3} \Rightarrow A = 6\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{A \approx 10,39cm^2}$$

Observe que o resultado é aproximado, servindo para efeito de comparação com o outro método.

Exercícios do terceiro momento:

Exercício 6: Começamos fazendo uma figura qualquer:
Percorrendo o traçador sobre a região limitadora da figura obtemos a leitura 0275. Daí, a área A da figura é igual a



$$A = 0275 \cdot 0,1 \Rightarrow$$
$$\boxed{A = 27,5cm^2}$$

Faremos duas figuras com área igual a A, um quadrado e um triângulo.

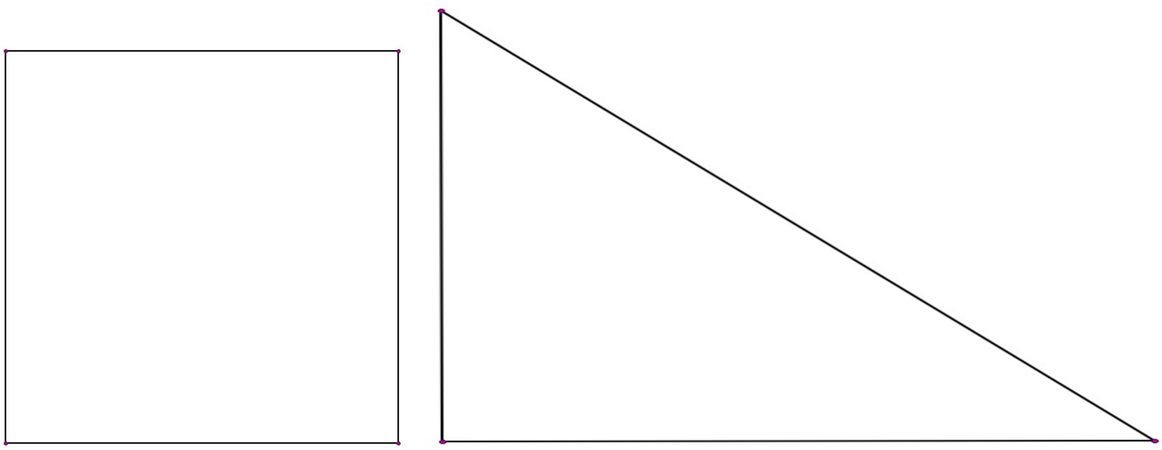
Para o quadrado temos:

$$A = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{27,5} \Rightarrow$$
$$\boxed{l \approx 5,24cm}$$

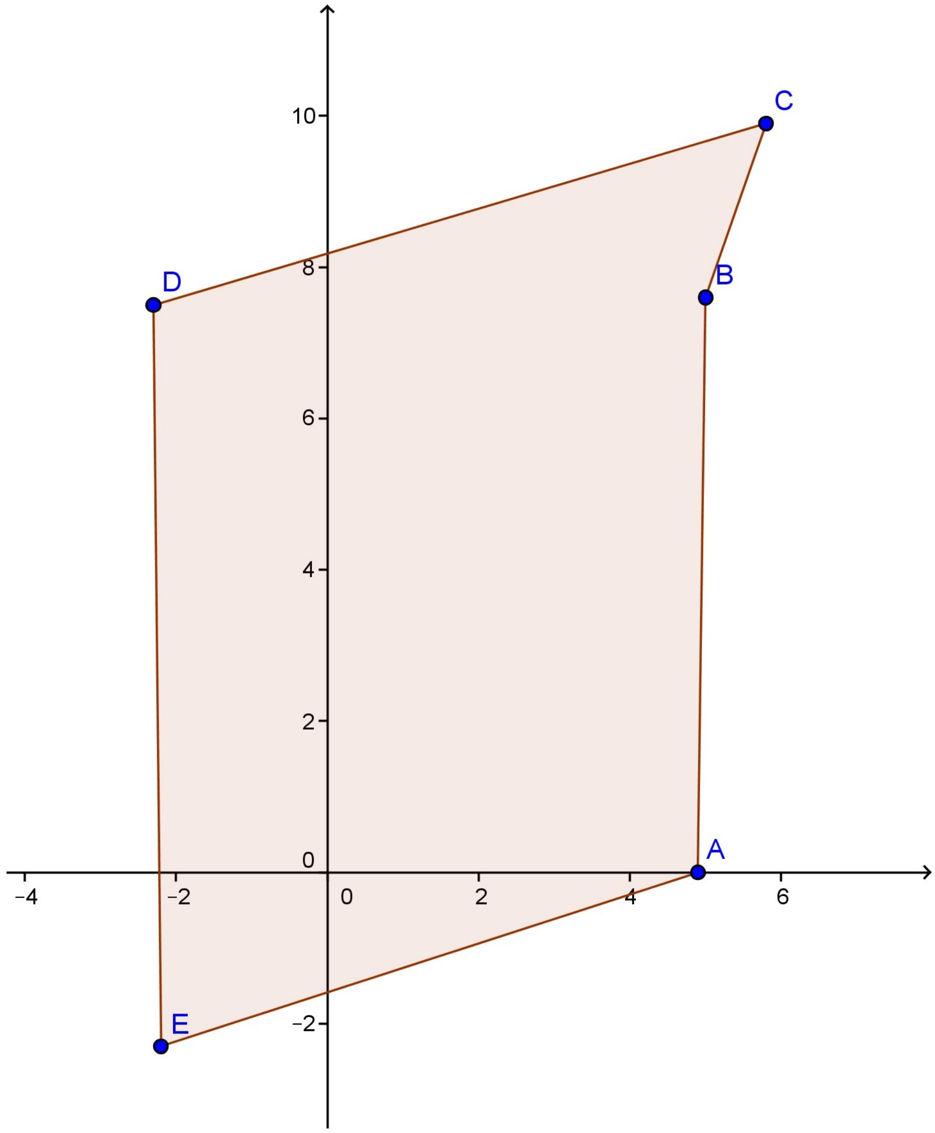
Para o triângulo, fixaremos a base b e acharemos a altura h. Tome $b = 9,4cm$, daí temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 27,5 = \frac{9,4 \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{27,5}{4,7} \Rightarrow \boxed{h = 5,85cm}$$

Então as duas figuras são:



Exercício 7: Primeiramente obtemos a forma do polígono em um plano cartesiano através de suas coordenadas:



Agora, percorrendo o contorno do pentágono com o Planímetro obtemos a leitura 0710. Daí, a área A da figura é igual a:

$$A = 0710 \cdot 0,1 \Rightarrow$$

$$\boxed{A = 71cm^2}$$

Exercício 8: Note, pelo Princípio de Cavalieri[1], que podemos utilizar a fórmula de volume: $V = \frac{h}{3}.(A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2)$, onde:

h é a altura do tanque;

A_1 é a área da borda;

A_2 é a área do fundo.

Para A_1 obtemos a seguinte leitura do planímetro: 0340. Para A_2 obtemos 0150. Logo A_1 e A_2 medem, respectivamente, $34m^2$ e $15m^2$

Portanto, o volume do tanque será:

$$V = \frac{h}{3}.(A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2) \Rightarrow$$
$$V = \frac{5}{3}.(34 + \sqrt{34 \cdot 15} + 15) \Rightarrow$$
$$V \approx \frac{5 \cdot 71,58}{3} \Rightarrow$$
$$\boxed{V \approx 119,3m^3}$$

Exercício 9: Primeiramente, notamos que a área procurada é igual a:

$$A = 4\left[A_{\bigcirc} + \left(A_{\square} - \frac{A_{\bigcirc}}{4}\right)\right] = 4A_{\bigcirc} + 4\left(A_{\square} - \frac{A_{\bigcirc}}{4}\right) \Rightarrow$$
$$A = 4A_{\bigcirc} + 4A_{\square} - A_{\bigcirc} \Rightarrow \boxed{A = 3A_{\bigcirc} + 4A_{\square}}\text{, onde,}$$

$A_{\square}$ é a área do quadrado de lado $20m$;

$A_{\bigcirc}$ é a área do círculo de raio $20m$.

Temos, então, que:

$A_{\square} = l^2 = 20^2 \Rightarrow A_{\square} = 400m^2$.

$A_{\bigcirc} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 20^2 \Rightarrow A_{\bigcirc} = 400\pi m^2$.

Daí, $A = 3 \cdot 400\pi + 4 \cdot 400 = 1200\pi + 1600 \approx 3770 + 1600$.

Logo, $\boxed{\boxed{A \approx 5370m^2}}$

Agora, percorrendo o contorno de uma das quatro figuras com o Planímetro obtemos, através da média aritmética das leituras, a área igual a:

$$A = 3,36 \cdot 4 \Rightarrow$$
$$\boxed{A = 13,44cm^2}$$

[1]Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) foi um sacerdote jesuíta e matemático italiano, discípulo de Galileu.

Daí, faz-se a conversão de escalas:

$$1cm \Leftrightarrow 20m \Rightarrow$$
$$1cm^2 \Leftrightarrow 400m^2$$
$$\text{Daí, } A = 13,44 \cdot 400m^2 \Rightarrow$$
$$\boxed{\boxed{A = 5376m^2}}$$

Note que o resultado é aproximado.

Exercício 10: Através do Planímetro obtemos a leitura 0300. Daí, a área A do triângulo é igual a

$$A = 0300 \cdot 0,1 \Rightarrow$$
$$\boxed{A = 30m^2}$$

Por outro lado, sabemos que $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$.

$$\text{Logo, } 30 = \frac{12 \cdot x}{2} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 2}{12} \Rightarrow \boxed{\boxed{x = 5m}}$$

Anexo II - Fotos das Aulas

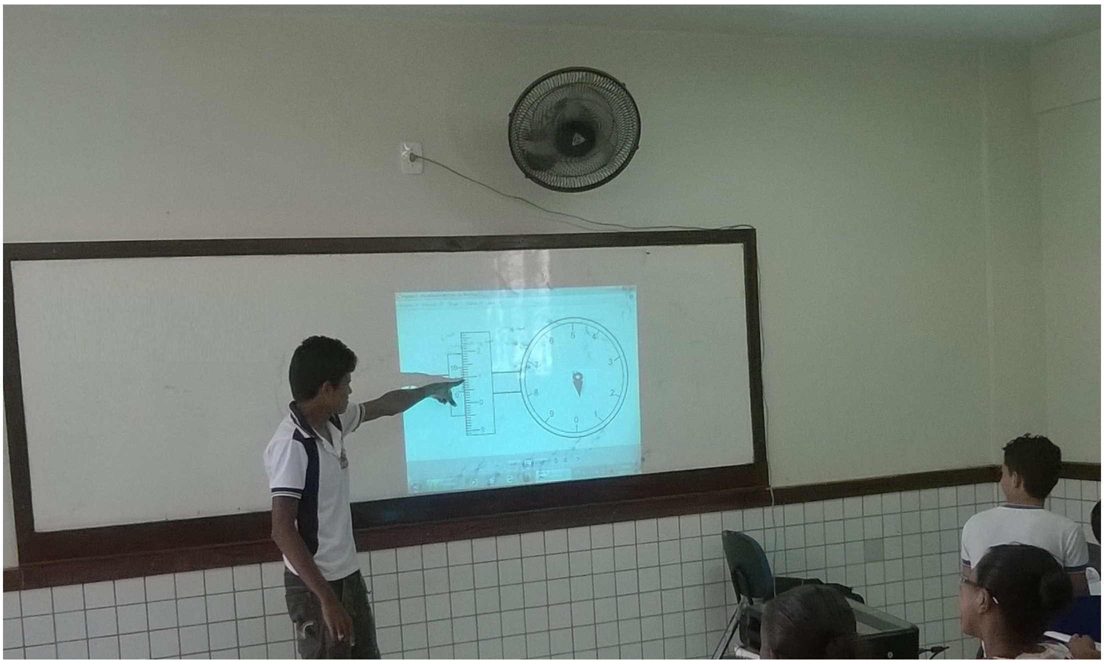


Figura 3.1: Aluno fazendo a leitura registrada por um Planímetro

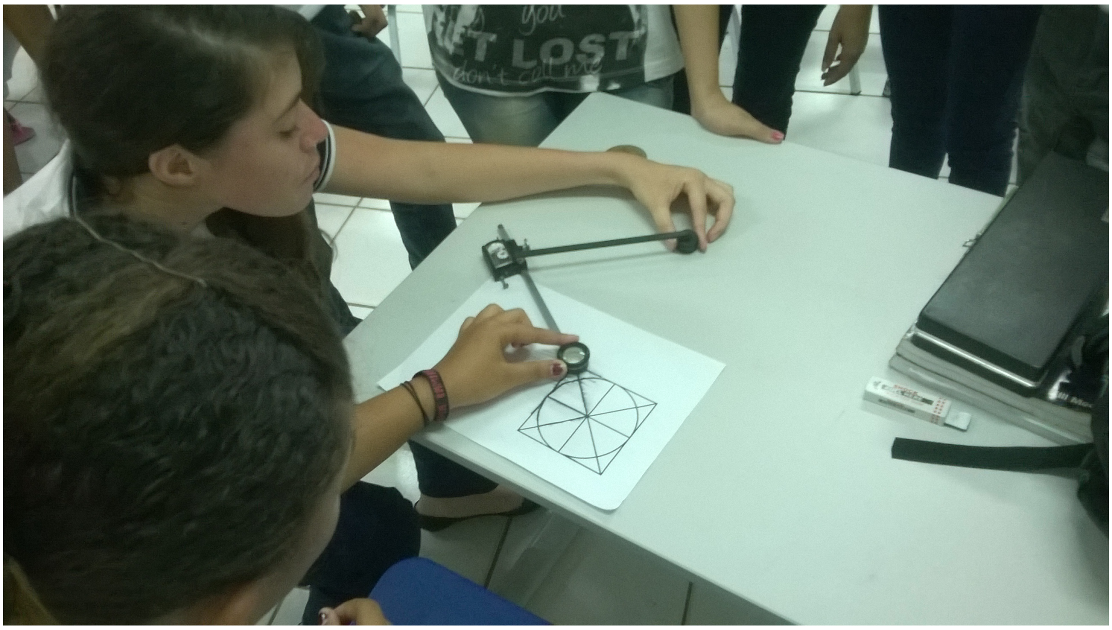


Figura 3.2: Alunos respondendo os exercícios propostos

Figura 3.3: Aluna explicando a resolução do Exercício 1

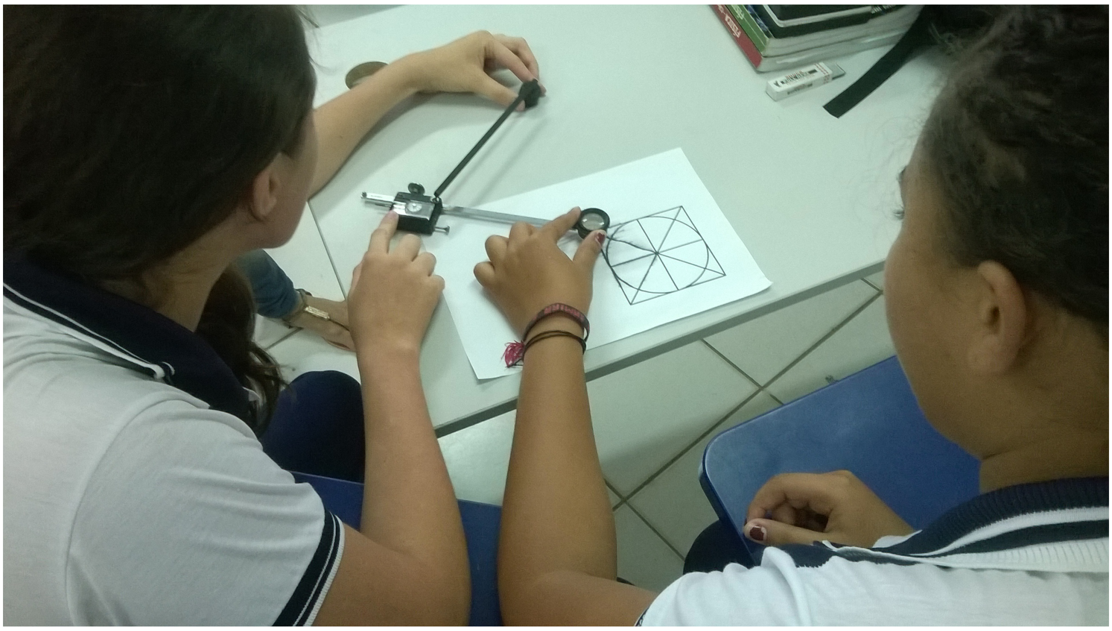


Figura 3.4: Alunos resolvendo o Exercício 2

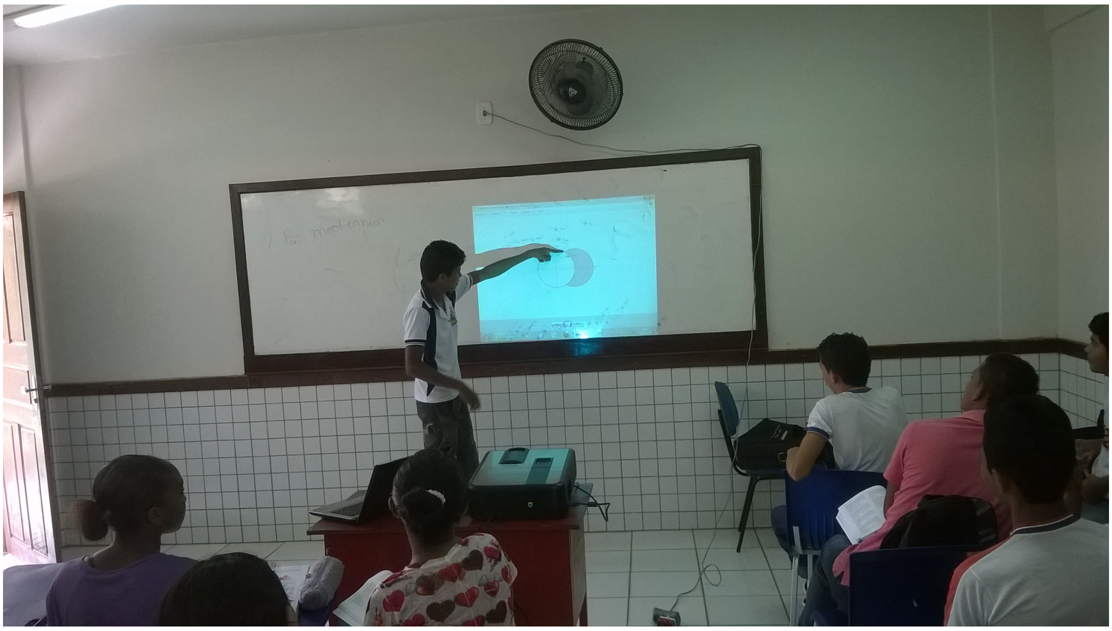


Figura 3.5: Aluno explicando a resolução do Exercício 3

Figura 3.6: Alunos resolvendo o Exercício 6