UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA — PROFMAT

KALAMA GUIMARÃES LEITE

EQUAÇÃO DIOFANTINA LINEAR:
APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

MACAPÁ- AP
2014

KALAMA GUIMARÃES LEITE

EQUAÇÃO DIOFANTINA LINEAR:
APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como quesito para obtenção do Título de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Amapá.

Orientador: Dr. José Walter Cárdenas Sotil

MACAPÁ-AP
2014

KALAMA GUIMARÃES LEITE

EQUAÇÃO DIOFANTINA LINEAR:
APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como quesito para obtenção do Título de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Amapá.

Orientador: Dr. José Walter Cárdenas Sotil

Data da aprovação:_____/____/_______

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
Universiadade Federal do Amapá — UNIFAP
Presidente

Prof. Msc. João Carlos Alves dos Santos
Universidade Federal do Pará — UFPA
Membro Externo

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Universiadade Federal do Amapá — UNIFAP
Membro Interno

Prof. Dr. Erasmo Senger
Universiadade Federal do Amapá — UNIFAP
Membro Interno

MACAPÁ-AP
2014

Dedico este trabalho à minha mãe e meus filhos Laura Stefany e Ian Kayf que mesmo longe de mim, são a razão para que eu continue estudando.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

A minha mãe, que sempre me orientou e incentivou a estudar mesmo quando eu não queria mais.

A minha eterna namorada Tatiane de Souza Batista que sempre compreendeu minhas ausências para dedicar-me aos estudos.

Aos meus amigos de curso do Profmat-Ap.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil pelo incentivo, paciência e esclarecimentos nos momentos que me faltaram.

“Jamais acolher alguma coisa como verdadeira que eu não conhecesse evidentemente como tal; isto é, de evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção, e de nada incluir em meus juízos que não se apresentasse tão clara e tão distintamente a meu espírito, que eu não tivesse nenhuma ocasião de pô-lo em dúvida.”

Renè Decartes

RESUMO

Neste trabalho apresentamos a Equação Diofantina Linear, como proposta de aplicação nas escolas públicas (**para alunos do Ensino Médio**) uma vez que em diversas provas da OBMEP (Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas) e processos seletivos aparecem situações solucionáveis com esta ferramenta e seu entendimento é de fácil compreensão, pois os alunos precisam ter apenas conhecimentos básicos de matemática como: conceitos de números inteiros, números primos, mdc, algoritmo de Euclides, inequação simultânea, intervalos e interseção. Abordamos algumas aplicações de **equação diofantina** em nível de ensino médio que podem ser apresentadas aos alunos dentre elas destacamos equações diofantinas lineares com duas e três variáveis, sistemas de equações diofantinas lineares, aproximação das raízes quadradas de 2 e 5.utilizando ternos pitagóricos.

Palavras-chave: Algoritmo de Euclides. Equações Diofantinas. Números Primos, Máximo Comum Divisor.

ABSTRACT

We present a Linear Diophantine Equation , as proposed application in public schools (for high school students) since in various tests of OBMEP (Brazilian Olympiad mathematics in public schools) and selective processes appear fixable situations with this tool and its understanding is easily understood because students need to have only basic knowledge of mathematics as : concepts of integers , prime numbers , mdc , Euclid's algorithm , simultaneous inequality , intervals and intersection. We discuss some applications of diophantine equation in the high school level that can be presented to the students among them include linear diophantine equations with two three variables , linear Diophantine equations , approximation of the square roots of 2 and 5.utilizando Pythagoreans suits .

Keywords : Euclidean Algorithm . Diophantine equations . Prime Numbers , greatest common divisor

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS

MDC – Máximo divisor comum

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No segundo semestre de 2013 ao ministrar um curso preparatório para Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aos alunos do 1º ano da escola Estadual Raimunda Virgolino, observamos que os alunos tinham dificuldades na resolução de problemas extraídos do banco de dados da OBMEP em especial questões envolvendo equação diofantina.

Ao identificar tais dificuldades nos deparamos com outra realidade: os alunos não tinham domínio de aritmética (números inteiros, números primos e máximo divisor comum) que representam uma boa parte de problemas nas provas da OBMEP.

A proposta deste trabalho é auxiliar estudantes da Rede Pública (Nível Médio) na resolução e compreensão de problemas envolvendo Equações Diofantinas Lineares com duas e três incógnitas através de definições da teoria dos números. Pretende-se no desenvolvimento desse estudo promover uma integração entre Aritmética e a Álgebra.

O fato de não explorar o estudo sobre Equação Diofantina Linear nas escolas públicas (nível médio) nos mostra que vários problemas deixam de ser resolvidos por falta de conhecimento e do uso dessa poderosa ferramenta permitindo ao discente maior rendimento nas provas da OBMEP e em outros processos seletivos.

No capítulo 2 nos preocupamos em mostrar que muitos problemas de aritmética e geometria já faziam parte de nossas vidas cerca de 1650 anos a.C com os chamados Papiro de Ahmes (ou Rhind) e Papiro de Moscou. Esses problemas não tinham a formalidade de uma equação, pois desconhecia-se tal ideia.

Em seguida mostramos que as equações estão presentes em muitas situações de nosso cotidiano citando o caso do motorista de ônibus que sempre está avaliando distâncias, velocidades e tempos, durante seu trabalho, citamos também caso de Isaac Newton quando descreveu a órbita dos planetas através de uma equação. No item 2.2 fizemos uma abordagem sobre números inteiros e suas propriedades para melhor compreensão do tema em questão.

Adiante, consideramos importante apresentar um comentário aprofundado sobre números primos (baseado no livro INTRODUÇÃO À HISTORIA DA MATEMÁTICA escrito por Howard Eves) e o sonho dos especialistas em teoria dos números em encontrar uma função f(n) que, para inteiros positivos n fornecesse apenas números primos, falamos um pouco sobre a vida de Eratóstenes e seu dispositivo conhecido como CRIVO para determinar os primos inferiores a um inteiro dado n.

No item 3.2 ressaltamos o quão importante é conhecer as propriedades de mdc e suas aplicações e que raramente são trabalhadas no ensino médio nas escolas públicas. Não poderíamos falar de mdc sem mencionar um dos maiores matemáticos de todos os tempos, Euclides. Seu dispositivo conhecido como Algoritmo de Euclides é muito eficiente para determinar o mdc entre dois números inteiros e é admirável que seja o algoritmo mais antigo da história da Matemática.

Já no item 3.4 nós nos baseamos no que diz Gelson Iezzi e Carlos Murakami no livro. Conjuntos e Funções Volume I ano 1995, sobre intervalos. A abordagem desse assunto é importante para o estudo de equações diofantinas, pois se faz necessário escrever as soluções minimais em função de um número inteiro qualquer dentro de um intervalo.

Consideramos que o estudo de interseção apresentado no item 3.5 também é importante para resolução de equações diofantinas onde delimitamos a quantidade de números inteiros que satisfazem problemas de equações diofantinas.

O estudo sobre inequação simples e inequação simultânea aparece no item 4.1 e 4.2 respectivamente e constam no livro de Gelson Iezzi e Carlos Murakami no livro fundamentos de matemática elementar vol. 1 conjuntos e funções e estão presentes na matriz curricular do ensino médio e pode ser exercitado durante a resolução de problemas envolvendo equações diofantinas.

No item 5 nos preocupamos em mostrar que as equações indeterminadas foram intensamente estudas por Diophanto de Alexandria (em torno de 250 d.C.); porém, ele procurava soluções racionais. De qualquer forma, esse tipo de equações associa-se tradicionalmente ao seu nome e, por extensão, até hoje o adjetivo “diofantino” é usado para indicar problemas relativos a números inteiros.

Em seguida comentamos sobre o pouco que se sabe da vida de Diophanto e de suas obras Aritmética, Números Poligonais e Porismas.

No item 5.2 apresentamos a definição de equação diofantina e as soluções minimais seguidos de um exemplo para melhor compreensão.

Aqui no item 6 tratamos das equações diofantinas que podem ser abordadas a nível de ensino médio. A partir de um problema motivador, no qual o objetivo é descobrir o dia e mês do nascimento do aluno, esperamos despertar seu interesse pelo tema. Daí, apresentaremos na sequência problemas propostos em processos seletivos e OBMEP, problemas de equações lineares de ordem maior ou igual a três, problemas envolvendo sistemas lineares de equações diofantinas, equações diofantinas no cálculo da raiz quadrada de 2 e finalmente equações diofantinas e veremos etapa por etapa e faremos de maneira a não deixar de entender nenhuma fase.

2. CONCEITOS PRELIMINARES

2.1. EQUAÇÕES E SEUS CONCEITOS:

Dentre todos os antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, talvez os mais famosos sejam os chamados Papiro de Ahmes (ou Rhind) e Papiro de Moscou. O de Ahmes (ou Amose) é um longo papiro egípcio, de cerca de 1650 a.C., onde um escriba com aquele nome ensina as soluções de 85 problemas de Aritmética e Geometria. Este papiro foi encontrado pelo egiptólogo inglês Rhind no final do século 19 e hoje está exposto no Museu Britânico, em Londres. O de Moscou, com 25 problemas de Aritmética e Geometria, é de cerca de 1850 a.C. e contém uma descrição verbal (desconhecia-se o conceito "fórmulas" gerais) de como fazer-se o cálculo correto do volume de um tronco de pirâmide, o que demonstra um conhecimento notável para a época.

Os problemas acima mencionados não tinham a formalidade de uma equação pois desconhecia-se tal ideia Uma equação é uma afirmação que estabelece uma igualdade entre duas expressões matemáticas.

Algumas **equações** como as trigonométricas, exponenciais, diferenciais, algébricas ou de qualquer outra natureza[1] – constituem, pelo menos do ponto de vista prático, a parte mais importante da matemática.

Um problema que pode ser solucionado através dos números certamente será tratado, direta ou indiretamente, por meio de equações.

Este fato tornou-se tão popular que a própria linguagem cotidiana já incorporou o verbo "equacionar" e expressões como "o xis do problema". Exemplo disto é que até os políticos, cuja intimidade com a Matemática costuma ser tão pequena quanto com os outros ramos do saber, não raramente aparecem na televisão para dizer que "enquanto a saúde e a educação não receberem a devida prioridade o problema da miséria não estará equacionado."

"Equacionar um problema", para muitas pessoas, mesmo entre os leigos, é generalizadamente compreendido como colocá-lo dentro de um mecanismo do qual ele sairá resolvido.

Não é difícil entender os motivos que teriam levado as equações a assumir um papel assim tão importante. Primeiramente, é preciso não esquecer que a palavra equação vem da mesma raiz latina que produziu as palavras igual e igualdade. Ora, a Ciência, cuja essência é o estabelecimento de correlações entre fatos, conceitos e ideias, está sempre descobrindo equivalências entre associações de entes e utiliza as equações como linguagem, forma ou veículo para expressar tais correlações.

É de conhecimento de todos que Oxigênio mais Hidrogênio (sob certas condições) produzem agua ou, em linguagem simplista, que Hidrogênio mais Oxigênio são iguais a agua.

Esta correlação, esta igualdade, costuma ser expressa pela equação química:

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

Quando se decide fazer uma viagem de 400 km em uma estrada cuja velocidade máxima é 80 km/h, sabe-se de antemão que serão gastas, no mínimo, 5 horas. Isto porque velocidade, tempo e distância estão relacionados entre si e sua correlação, no caso do movimento uniforme, pode ser expressa pela igualdade:

$$d = v.t, \qquad \text{onde} \begin{cases} d = distância \\ v = velocidade \\ t = tempo \end{cases}$$

Um motorista de ônibus, de maneira inconsciente, conhece implicitamente tal **equação,** pois está sempre avaliando distâncias, velocidades e tempos, durante seu trabalho.

O vendedor de açaí sabe que o preço que ele deve cobrar por certa quantidade de litros é igual ao preço por litro multiplicado pela quantidade de litros que uma pessoa vai comprar. Esta, aliás, poderia receber o título de Equação Fundamental dos Vendedores de Açaí, mas eles provavelmente ficariam assustados se soubessem que sua profissão requer tal conhecimento.

Enfim, as equações estão por toda a parte e, alguns mais, alguns menos, quase todos gastamos certo tempo de nossas vidas a resolvê-las.

Resolver uma equação é, através da correlação que ela expressa, encontrar algo desconhecido e que costumamos chamar de incógnita.

Qualquer letra pode ser utilizada para representar uma incógnita, embora seja mais habitual usar a leta x para tal finalidade.

A solução de uma equação pode ser um ou mais números, mas pode, também, ser a medida de uma grandeza física, como uma um peso, distância, um intervalo de tempo, etc. Resolver uma equação pode significar o encontro não de um número, e sim de uma forma.

Por exemplo, foi através da solução de certo tipo de equação que Newton provou que as órbitas dos planetas são elípticas, das quais o Sol ocupa um dos focos.

A Equação Algébrica é um rico e belíssimo campo, em que se envolveram os maiores cérebros que a Matemática conseguiu arregimentar ao longo dos séculos dentre eles Euclides (300 a.C), autor dos Elementos, considerado por muitos o mais influente livro-texto de Matemática de todos os tempos, Eratóstenes (274 a.C- 194 a.C) e Diofanto (250 d.C), o maior teórico dos números da Antiguidade

Sobre as Equações Algébricas, GARBI[1] afirma ser esta:

> [...] um rico e belíssimo campo, em que se envolveram os maiores cérebros que a Matemática conseguiu arregimentar ao longo dos séculos.[...] Euclides, autor dos Elementos, considerado por muitos o mais influente livro-texto de Matemática de todos os tempos."

2.2. CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS $(\mathbb{Z})$:

Os números inteiros são representados por..., -3,-2,-1,0,1,2,3, ... cujo conjunto representa-se pela letra $\mathbb{Z}$, isto é:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Neste conjunto $\mathbb{Z}$ destacam-se os seguintes subconjuntos:

Conjunto $\mathbb{Z}^*$ dos inteiros não nulos ($\neq 0$)

$$\mathbb{Z}^* = \{x \in \mathbb{Z} / \ \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots\}$$

---

[1] GARBI, Gilberto G. livro: o romance das equações 3ª ed. pg.01. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

Conjunto $\mathbb{Z}_+$ dos inteiros não negativos (≥ 0):

$$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z}/x \geq 0\} = \{0,1,2,3,..\}$$

Conjunto $\mathbb{Z}_-$ dos inteiros não positivos (≤ 0):

$$\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z}/x \leq 0\} = \{0,-1,-2,-3,..\}$$

Conjunto $\mathbb{Z}_+^*$ dos inteiros positivos (> 0):

$$\mathbb{Z}_+^* = \{x \in \mathbb{Z}/\ x > 0\} = \{1,2,3,...\}$$

Conjunto $\mathbb{Z}_-^*$ dos inteiros negativos (< 0):

$$\mathbb{Z}_-^* = \{x \in \mathbb{Z}/\ x < 0\} = \{-1,-2,-3,...\}$$

Os inteiros positivos são também denominados inteiros naturais e por isso o conjunto dos inteiros positivos é habitualmente designado pela letra $\mathbb{N}(\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+^*)$.

2.2.1. Propriedades dos Inteiros

O conjunto Z dos inteiros munido das operações de adição (+) e multiplicação (.) possui as propriedades fundamentais que a seguir enumeramos, onde a, b e c são inteiros quaisquer, isto é, elementos de Z:

a + b = b + a e a . b = b . a

(a + b) + c = a + (b + c) e (a . b) . c = a . (b . c)

0 + a = a e 1 . a = a

– a = (- 1). a a - a = a + (- a) = 0

a . (b + c) = a . b + a . c

0 . a = 0, e se a .b = 0, então a = 0 ou b = 0.

Também existe uma “relação de ordem” entre os inteiros, representada pelo sinal “< (menor que)”, que possui as seguintes propriedades:

Se a ≠ 0, então a < 0 ou a > 0

Se a < b e b < c então a < c

Se a < b, então a + c < b + c

(10) Se a < b e 0 < c, então a . c < b . c

(11)Se a < b e c < 0, então b . c < a . c

3. OS NÚMEROS PRIMOS

No livro INTRODUÇÃO À HISTORIA DA MATEMÁTICA, editora UNICAMP,ano 2008, escrito por Howard Eves encontramos um belo comentário sobre números primos nas páginas 622, 623,624 e 625. “Os números primos ostentam uma longa história, desde os dias dos gregos antigos até o presente. Como algumas das mais importantes descobertas sobre primos foram feitas no século XIX, parece apropriado discutir-se aqui esses interessantes números. O teorema fundamental da aritmética diz que os números primos são tijolos de construção a partir dos quais os outros inteiros são formados multiplicativamente. Por conseguinte, os números primos foram muito estudados e se fizeram esforços consideráveis no sentido de determinar a natureza de sua distribuição na sequencia dos inteiros positivos. Os principais resultados obtidos na Antiguidade foram a prova da infinitude dos primos e o crivo de Eratóstenes para determinar os primos inferiores a um inteiro dado n.

A partir do crivo de Eratóstenes pode-se obter uma fórmula maljeitosa para determinar o número de primos inferiores a n, quando se conhecem os primos inferiores a $\sqrt{\mathrm{n}}$. Essa fórmula foi consideravelmente aprimorada em 1870 por Ernst Meissel que conseguiu mostrar que o numero de primos inferiores a 10^8 é 5761455. O matemático dinamarquês Bertelsen prosseguiu esses cálculos e anunciou em 1893 que o número de primos abaixo de 10^9 é 50847478. Em 1959 o matemático americano D.H. Lehmer mostrou que esse último resultado não e correto (o número encontrado por ele foi 50847534); Lehmer mostrou também que o número de primos abaixo de 10^{10} é 455052511.

Não há, porém nenhum procedimento prático para testar se um número grande é primo e o esforço feito na verificação de alguns números particulares foi enorme. Por mais de setenta e cinco anos o maior número primo efetivamente testado foi 2^{127}= 170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727, com trinta e nove algarismos, num trabalho de matemático francês Anatole Lucas (1842-1891) em 1876. Em 1952 o computador EDSAC, em Cambridge, Inglaterra, mostrou que é primo o número muito maior (setenta e nove algarismos) $180(2^{127}-1)^2+1$.

Desde então outros computadores mostraram que são primos os números

$2^n - 1$ para n=521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 86243, 132049 e 216091, todos enormes.

Um sonho dos especialistas em teoria dos números é encontrar uma função f(n) que, para inteiros positivos n, forneça apenas números primos, uma infinidade desses números.

Assim

$$f(n) = n^2 - n + 41$$

Fornece primos para todo n<41, mas f(41)=41² é um número composto. O polinômio quadrático $f(n) = n^2 - 79n + 1601$ fornece primos para n <80. Podem-se encontrar funções polinomiais que forneçam sucessivamente tantos primos quanto se deseje, mas nenhuma delas fornecerá sempre números primos. Em 1640 Pierre de Fermat conjecturou que $f(n) = 2^{(2^n)} + 1$ é primo para todos os inteiros não-negativos n mas isso, como já salientamos não é verdadeiro. Um resultado recente e interessante, nessa linha, é a demonstração, feita em 1947 por W. H Mills, da existência de um número real A tal que o maior inteiro que não excede $A^{(3^n)}$ é primo, para todo inteiro positivo n. Nada se mostrou sobre o valor real nem mesmo sobre a ordem de grandeza por alto do número A.

Uma generalização notável do teorema de Euclides da infinitude dos primos foi estabelecida por Lejeune-Dirichlet (1805-1859) ao conseguir mostrar que toda progressão aritmética a, a+d, a+2d, a+3d, ...

onde a e d são primos entre si, contem infinitos números primos. A prova desse resultado está muito longe de ser fácil.

Talvez o mais surpreendente dos resultados já encontrados referentes à distribuição dos primos seja o chamado teorema dos números primos. Indiquemos por A_n o número de primos abaixo de n. O teorema dos números primos assegura que $(A_n \log_e^n)/n$ se aproxima de 1 conforme n cresce indefinidamente. Em outras palavras, A_n/n, chamada densidade dos primos entre os primeiros n inteiros, aproxima-se de $1/\log_e^n$, tanto mais quanto maior for n. Esse teorema, que fora conjecturado por Gauss após o exame de uma grande tábua de números primos foi provado independentemente em 1896 pelo francês J.Hadamard e pelo belga C.J. de la Vallée Poussim.

3.1. CRIVO DE ERATÓSTENES

Segundo o autor Howard Eves no livro Introdução à História da Matemática, editora unicamp ano 2004, paginas 196,197 e 198 Eratóstenes era natural de Cirene, na costa sul do mar Mediterrâneo, Eratóstenes era apenas uns poucos anos mais novo que Arquimedes. Passou grande parte de sua vida em Atenas e, quando tinha cerca de quarenta anos de idade, foi convidado por Ptolomeu III do Egito a mudar-se para Alexandria e ser tutor de seu filho e bibliotecário-chefe da Universidade local. Há relatos de que, por volta de 194 a.C., já com idade avançada, uma oftalmia o deixou quase cego. Desgostoso resolveu suicidar-se, deixando voluntariamente de alimentar.

Eratóstenes foi singularmente talentoso em todos os ramos do conhecimento de seu tempo. Distinguiu-se como matemático, astrônomo, geógrafo, historiador, filósofo, poeta e atleta. Consta que os alunos da Universidade de Alexandria costumavam chamá-lo de *pentablus*, o que significa campeão em cinco esportes atléticos. Era também conhecido como beta e a respeito dessa alcunha aventaram-se algumas hipóteses. Alguns acreditam que, devido ao seu saber amplo e brilhante, era alçado à condição de um segundo Platão. Uma explicação menos abonadora propõe que, não obstante fosse ele talentoso em muitos campos, nunca conseguiu ser o primeiro de seu tempo em campo nenhum; em outras palavras, era sempre o segundo. Cada uma dessas explicações se enfraquece um pouco quando se toma conhecimento de que um certo astrônomo de nome Apolônio (muito provavelmente Apolônio de Perga) era chamado de épsilon. Devido a isso o historiador James Gow sugeriu que talvez Beta e Epsilon simplesmente indicassem os números gregos (2 e 5) de certos gabinetes ou salas de leitura da Universidade, associados de alguma maneira particular aos dois homens. Ptolomeu Hefesto, por outro lado, defende que a alcunha de Apolônio decorria do fato de que ele estudava a Lua cujo símbolo era a letra ε.

Eratóstenes se tornou célebre em aritmética devido a um dispositivo conhecido como CRIVO, usado para se acharem todos os números primos menores que um número n dado. Anotam-se, em ordem e começando por 2, todos os números ímpares menores que n. Eliminam-se os números compostos da sequencia, riscando-se, a partir do 3 (exclusive) todos os terceiros números que se seguem, depois, a partir do 5 (exclusive) todos os quintos números que se seguem e assim por diante. Nesse procedimento riscam-se alguns números mais do que uma vez. Todos os números não-riscados, formam a lista dos números primos menores que n.

Por exemplo;

Figura 1: Crivo de Eratóstenes

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41

Fonte: Criado pelo Autor

3.2. MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC).

O máximo divisor comum, *mdc*, de dois números inteiros está presente em muitos problemas tanto em nível básico quanto em assuntos mais avançados, e por essa razão merece uma atenção especial.

Algumas abordagens do mdc no ensino fundamental, infelizmente, omitem um fato notável a respeito do máximo divisor comum de dois inteiros: o de que é possível expressá-lo como uma combinação linear[2] desses dois números.

Definição 3.2.1: Sendo m o mdc de a e b, chama-se combinação linear de a e b, a expressão $m=s.a+t.b$*, onde s,t são números inteiros.*

Essa propriedade do mdc é tão importante em Aritmética, que alguns autores

[2] A definição mais ampla de combinação linear pode ser encontrada em ANTON (2006:31).

a chamam de Teorema Fundamental da Teoria dos Números, mais usualmente conhecido como Teorema de Bézout[3].

Esse teorema tem tanta força que podemos mencionar, por exemplo, que dele decorre imediatamente que dois inteiros a e b serão primos entre si se, e somente se, existirem inteiros s e t tais que $s.\mathrm{a} + \mathrm{t.b} = 1$. Um bom exercício para o leitor é provar, a partir daí, o fato básico da Aritmética: se um inteiro for divisor de um produto de dois inteiros e for primo com um dos fatores, então será divisor do outro fator.

Problemas envolvendo números inteiros, números primos, mdc só são abordados no 5º ano e depois esquecidos nas séries subsequentes, pois não constam dos programas usuais do ensino médio, ainda que sejam muito mais simples do que outros tópicos de utilidade mais duvidosa que lá figuram. Bem, esperamos que essa situação mude, e isso só pode ser feito por nós, professores de Matemática. Ouçamos o que diz o prof. Miguel de Guzmán [3], atual presidente do Comitê Internacional de Ensino da Matemática:

> “A Matemática dos séculos XIX e XX tem sido predominantemente a Matemática do contínuo... [mas] ... o advento dos computadores, com suas ... possibilidades para a modelização sem passar pela formulação matemática de feitio clássico, abriu uma multidão de campos diversos, com origem já não mais na Física, como os desenvolvimentos dos séculos anteriores, mas em muitas outras ciências, como a Economia, as ciências da organização.”

Com isso, observamos uma inversão na tendência matemática que outrora vigorava, passando ter importância fundamental como segue o pensamento do prof. Miguel de Guzmán:

> ... A predominância dos algoritmos discretos, usados nas ciências da computação e na informática, ... deu lugar a um deslocamento da ênfase da Matemática atual na direção da Matemática discreta, que apresenta alguns conteúdos suficientemente elementares para poderem figurar com sucesso em um programa inicial de Matemática. ... A teoria elementar dos números, que nunca chegou a desaparecer dos programas de alguns países, poderia ser uma delas.”

Devemos estudar o mdc de maneira mais aprofundada nas séries subsequentes, pois não seria algo de difícil compreensão por parte dos discentes por exemplo, Abramo Hefez[4] define máximo divisor comum como sendo dois números naturais a e b, não simultaneamente nulos, onde o número natural d $\in \mathbb{N}^*$ é um divisor comum de a e b se d|a e d|b.

Por exemplo, os números 1, 2, 3 e 6 são os divisores comuns de 12 e 18.

---

[3] Brucheimer, M. & Arcavi, A. A visual approach to some elementary Number Theory. Mathematical Gazette, 79, pág. 471, Nov. 1995

[4] HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**, 2ª ed., cap. 5, pg. 53. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

A definição que se segue é exatamente a definição dada por Euclides nos Elementos e se constitui em um dos pilares da sua aritmética.

Diremos que d é um máximo divisor comum (mdc) de a e b se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um divisor comum de a e de b, e

ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

A condição (ii) acima pode ser reenunciada como se segue:

Ii') Se c é um divisor comum de a e b, então c|d.

Portanto, se d é um mdc de a e b e c é um divisor comum desses números, então c $\leq$ d. Isto nos mostra que o máximo divisor comum de dois números é efetivamente o maior dentre todos os divisores comuns desses números.

Em particular isso nos mostra que, se d e d' são dois mdc de um mesmo par de números, então d $\leq$ d' e d' $\leq$ d, e, consequentemente, d = d'. Ou seja, o mdc de dois números, quando existe, é único.

O mdc de a e b, quando existe será denotado por (a,b). Como o mdc de a e b não depende da ordem em que a e b são tomados, temos que (a,b)=(b,a).

Em alguns casos particulares, é fácil verificar a existência do mdc. Por exemplo, se a e b são números naturais, tem-se claramente que (0,a)=a, (1,a)=1 e que (a,a)=a. E ainda temos que $\mathrm{a}|\mathrm{b} \Leftrightarrow (\mathrm{b},\mathrm{a}) = \mathrm{a}$

A demonstração da existência do mdc de qualquer par de números naturais, não ambos nulos, é bem mais sutil. Poder-se-ia, como se faz usualmente no Ensino Fundamental, definir o máximo divisor comum de dois números a e b como sendo o maior elemento do conjunto de todos os divisores comuns desses números, o que de imediato garantiria a sua existência. De qualquer modo seria necessário provar a propriedade (ii) da definição de mdc, pois é ela que possibilita provar os resultados subsequentes, e não o fato do mdc ser o maior dos divisores comuns.

3.3. ALGORITMO De EUCLIDES

Os métodos mais comuns para a determinação do mdc são: o *algoritmo de Euclides* e a *decomposição dos números em fatores primos*. (O método mais adequado depende dos números em questão, se usarmos números cheios de divisores e com fatores primos baixos: 360, 840, etc.).a decomposição funciona legal mas quando usamos números um pouco maiores, com poucos fatores primos percebemos que a decomposição é cansativa e que o algoritmo de Euclides é muito mais eficiente. Além disso, o algoritmo de Euclides depende apenas de divisões sucessivas com resto. Já o outro processo, precisa de uma lista dada de números primos, que para números grandes, pode representar um problema insolúvel.

O algoritmo de Euclides é realmente o método mais rápido e conceitualmente mais rico dentre os conhecidos até hoje para calcular o mdc de dois números inteiros. E é admirável que seja o algoritmo mais antigo da história da Matemática.

Pois bem, aqui está mais uma vantagem do algoritmo de Euclides: o melhor método para escrever o mdc de dois inteiros como combinação linear deles consiste em eliminar os restos nas equações lineares que surgem durante o algoritmo de Euclides.

Ou seja, na combinação linear $m = s.a + t.b$, trataremos de como calcular os coeficientes s e t.

Em linguagem matemática, escrevemos:

Seja m o mdc de a e b, então é possível determinar inteiros s e t tais que $m = s.a + t.b$, de acordo com a definição 3.2.1.

Exemplo: Tomemos $\mathrm{a} = 7248 \text{ e } \mathrm{b} = 1143$. Primeiramente, aplicamos o clássico algoritmo de Euclides.

Figura 2: Dispositivo prático 1.

	6	2	1	13	2	4
7248	1143	390	363	27	12	3
390	363	27	12	3	0	

Fonte: Criado pelo Autor

As divisões efetuadas acarretam :

$$7248 = 6.(1143) + 390$$

$$1143 = 2.(390) + 363$$

$$390 = 1.(363) + 27$$

$$363 = 13.(27) + 12$$

$$27 = 2.(12) + 3$$

$$12 = 4.(3) + 0$$

Para expressar agora o mdc em função de a e b, despreza-se a última igualdade e eliminam-se os restos nas outras equações, começando de baixo para cima. Assim:

$$3 = 27 - 2.[363 - 13.(27)]$$

$$3 = 27 - 2.(363) + 26.(27)$$

$$3 = 27.(27) - 2.(363)$$

$$3 = 27.[390 - 1.(363)] - 2..(363)$$

$$3 = 27.(390) - 27.(363) - 2.(363)$$

$$3 = 27.(390) - 29.(363)$$

$$3 = 27.(390) - 29.[1143 - 2.(390)]$$

$$3 = 27.(390) - 29.(1143) + 58.(390)$$

$$3 = 85.(390) - 29.(1143)$$

$$3 = 85.[7248 - 6.(1143)] - 29.(1143)$$

$$3 = 85.(7248) - 510.(1143) - 29.(1143)$$

$$3 = 7248.(85) + 1143.(-539)$$

Logo, $s = 85 \ \ e \, t = -539$

Algumas consequências importantes sobre mdc são lembradas pelo autor Edgard de Alencar Filho em seu livro TEORIA ELEMENTAR DOS NÚMEROS, Editora Nobel S.A, ano 1981 está assim definido.

Sejam a e b dois inteiros não conjuntamente nulos $(\mathrm{a} \neq 0 \text{ ou } \mathrm{b} \neq 0)$ cujo máximo divisor comum se deseja determinar.

É imediato:

1. Se $(a \neq 0, então\ o\ mdc(a, 0) = |a|$
2. Se $\mathrm{a} \neq 0, \text{então o } \mathrm{mdc}(\mathrm{a}, \mathrm{a}) = |\mathrm{a}|$
3. Se $\mathrm{b}|\mathrm{a}, \text{então o } \mathrm{mdc}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = |\mathrm{b}|$

Além disso, por ser mdc(a,b) = mdc(|a|,|b|), a determinação do mdc(a,b) reduz-se ao caso em que a e b são inteiros positivos distintos, por exemplo, com a >

b, tais que b não divide a, isto é: a > b > 0 e $b \nmid a$. Nestas condições, a aplicação repetida do algoritmo da divisão dá-nos as igualdades:

$$a = b.q + r_1, \qquad 0 < r_1 < b$$

$$b = r_1.q_2 + r_2, \qquad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2.q_3 + r_3, \qquad 0 < r_3 < r_2$$

$$r_2 = r_3.q_4 + r_4 \qquad 0 < r_4 < r_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Como os restos r1,r2,r3,r4,...são todos inteiros positivos tais que b > r1 > r2 > r3 > r4,...e existem apenas b-1 inteiros positivos menores que b, necessariamente se chega a uma divisão cujo resto $r_{n+1} = 0$, isto é, finalmente, teremos:

$$r_{n-2} = r_{n-1}.q_n + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n.q_{n+1} + r_{n+1}, \quad 0 < r_{n+1} < r_n$$

O último resto $r_n \neq 0$ que aparece nesta sequência de divisões é o máximo divisor comum procurado de a e b, isto é o mdc(a,b)= r_n.

3.4. INTERVALOS

A abordagem desse assunto é importante para equações diofantinas pois se faz necessário escrever as soluções minimais em função de um número inteiro qualquer dentro de um intervalo, portanto, veremos a seguir o que diz Gelson Iezzi e Carlos Murakami no livro. Conjuntos e Funções Volume I ano 1995

Dados dois números reais a e b, com $a < b$, definimos:

a) intervalo aberto de extremos a e b é o conjunto

$$]a\ e\ b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

b) intervalo fechado de extremos a e b é o conjunto

$$[a \; e \; b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

c) intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita) de extremos a e b é o conjunto

$$[a \; e \; b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

d) intervalo fechado à direita (ou aberto à esquerda) de extremos a e b é o conjunto

$$]a \; e \; b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

Exemplos;

a) $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} | 2 < x < 5\}$ é intervalo aberto

b) $[-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 4\}$ é intervalo fechado

c) $[\frac{2}{5}, 7[= \{x \in \mathbb{R} | \frac{2}{5} \leq x < 7\}$ é intervalo fechado à esquerda

d) $]-\frac{1}{3}, \sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{3} < x \leq \sqrt{2}\}$ é intervalo fechado à direita

3.5. INTERSEÇÃO

O mesmo motivo nos faz tratar de interseção que também é importante para resolução de equações diofantinas onde delimitamos a quantidade de números inteiros que satisfazem o problema. Novamente, veremos a seguir o que diz Gelson Iezzi e Carlos Murakami no livro. Conjuntos e Funções Volume I, pg 29, 30 ano 1995

Dados dois conjuntos A e B, chama-se interseção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \quad e \quad x \in B\}$$

O conjunto $A \cap B$(lê-se “A inter B”) é formado pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos (A e B) simultaneamente.

Se $x \in A \cap B$, isso significa que x pertence a A e também x pertence a B. O conectivo “e” colocado entre as duas condições significa que elas devem ser obedecidas ao mesmo tempo.

Propriedades da interseção

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1ª) $A \cap A = A$ (idempotente)

2º) $A \cap U = A$ (elemento neutro)

3º) $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)

4ª) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

3.6 INEQUAÇÃO

3.6.1 Inequações simples

O estudo sobre inequação simples aparece nos livros de 1º ano do ensino médio e pode ser exercitado durante a resolução de problemas envolvendo equações diofantinas. Gelson Iezzi e Carlos Murakami no livro fundamentos de matemática elementar vol. 1 conjuntos e funções, apresentam duas funções f(x) e g(x) cujos domínios são respectivamente Df $\subset \mathrm{IR}$ e Dg $\subset \mathrm{IR}$. Chamamos inequação na incógnita x a qualquer uma das seguintes sentenças abertas, abaixo:

$$f(x) > g(x)$$
$$f(x) < g(x)$$
$$f(x) \geq g(x)$$
$$f(x) \leq g(x)$$

A solução de uma inequação como as acima mostradas é o conjunto $D = D_f \cap D_g$ chamado domínio de validade. É evidente que, para todo $x_0 \in D$, estão definidos $f(x_0)$ e $g(x_0)$, isto é:

$$x_0 \in D \Leftrightarrow \left(x_0 \in D_f \text{ e } x_0 \in D_g\right) \Leftrightarrow (f(x_0) \in \mathrm{IR} \text{ e } g(x_0) \in \mathrm{IR}).$$

3.6.2 Inequações simultâneas

Ainda no livro fundamentos de matemática elementar, vol.1, página 126, conjuntos e funções de Gelson Iezzi e Carlos Murakami ano 1995, a dupla desigualdade $f(x) > g(x) > h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é:

$$f(x) < g(x) < h(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) & 1^{\text{a}} \text{ inequação} \\ g(x) < h(x) & 2^{\text{a}}\text{inequação} \end{cases}$$

Indicando com S_1 o conjunto solução da 1ª inequação e S_2 o conjunto solução da 2ª inequação, o conjunto solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$.

Resolver a inequação simultânea $3x + 2 < -x + 3 \leq x + 4$.

Solução:

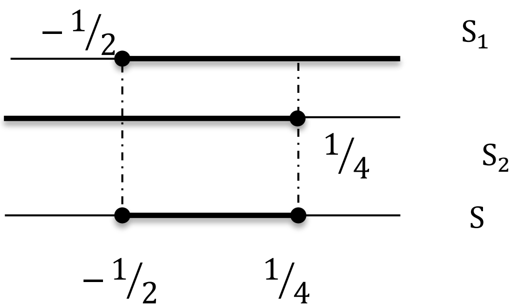
$$\underbrace{3x + 2 < \rlap{$\overbrace{}^{\text{2ª inequação}}$}-x + 3}_{\text{1ª inequação}} \leq x + 4$$

Temos que resolver duas inequações:

1ª inequação: $3x + 2 < -x + 3 \Rightarrow 4x < 1 \Rightarrow x < {}^{1}/_{4}$

2ª inequação: $-x + 3 \leq x + 4 \Rightarrow -2x \leq 1 \Rightarrow x \geq -{}^{1}/_{2}$

A interseção desses dois conjuntos é:



$S = \{x \in \mathbb{R} / -{}^{1}/_{2} \leq x < {}^{1}/_{4}\}$

4. EQUAÇÕES INDETERMINADAS

O primeiro a considerar problemas envolvendo equações indeterminadas que eventualmente admitem infinitas soluções, foi “Diophanto de Alexandria” (em torno de 250 d.C.); porém, ele procurava soluções racionais. De qualquer forma, esse tipo de equações associa-se tradicionalmente ao seu nome e, por extensão, até hoje o adjetivo “diofantino” é usado para indicar problemas relativos a números inteiros.

Na verdade, seria mais justo associar esses problemas ao nome de Fermat, que foi o primeiro a chamar a atenção sobre as questões aritméticas estritamente no conjunto dos números inteiros, no preâmbulo de um problema que propôs em 1657.

Naturalmente, muitos problemas da vida diária admitem apenas soluções inteiras. Suponhamos, por exemplo, que se quer adquirir um determinado líquido que é vendido em recipientes de $7l$ ou de $15l$ e se deseja fazer uma compra de $125l$.

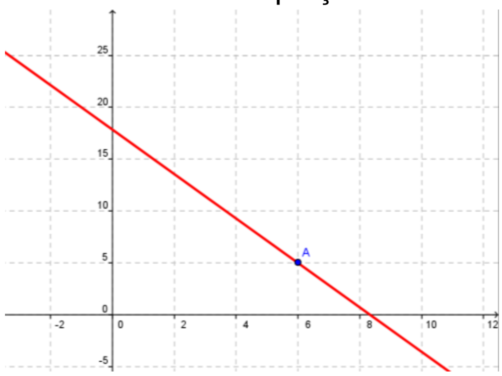
Chamando de $x\ e\ y$ o número de recipientes de $15l$ e $7l$, respectivamente, a resolução do problema acima nos leva à equação diofantina:

$$15.x + 7.y = 125$$

De uma perspectiva mais moderna, podemos dar uma interpretação geométrica dessas questões.

Sabe-se que uma equação do tipo $a.X + b.Y = c$, em que se admitem valores reais para as variáveis $X\ e\ Y$, representa uma reta no plano cartesiano. Assim, podemos interpretar a resolução da equação diofantina como o problema de determinar os pontos da reta que têm ambas as coordenadas inteiras.

Figura 3: Gráfico da equação diofantina.



Fonte: Criado pelo Autor

Neste caso temos x=6 recipientes com 15 litros e y=5 recipientes com 7 litros

4.1 QUEM FOI DIOFANTO?

Diofanto de Alexandria foi um grande matemático e teve uma importância enorme para o desenvolvimento da álgebra e uma grande influência sobre os europeus que posteriormente se dedicaram à teoria dos números. Tal como no caso de Herão, nada se sabe com certeza acerca da nacionalidade de Diofanto e da época exata em que viveu. Apesar de haver algumas evidências tênues de que possa ter sido contemporâneo de Herão, a maioria dos historiadores tende a situá-lo no século III de nossa era. Além do fato de que sua carreira floresceu em Alexandria, nada mais de certo se sabe sobre ele, embora se encontre na Antologia Grega uma epigrama que se propõe a dar alguns detalhes de sua vida.

> *"Deus lhe concedeu ser menino* pela sexta *parte de* sua *vida,* e somando uma *doudécima. parte a isso cobriu-lhe* as *faces de penugem.* ***Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma. sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! infeliz criança; depois de viver*** a metade *da* vida de *seu* pai, o *Destino frio o levou. Depois de se consolar de* sua *dor durante quatro anos com* a ciência *dos números ele terminou sua vida".*

Se esse enigma for historicamente exato, Diofanto viveu 84 anos.

Diofanto escreveu três trabalhos: **Aritmética**, o mais importante, do qual remanesceram seis dos treze livros; sobre **números poligonais** do qual restou apenas um fragmento; e **Porismas**, que se perdeu. A aritmética teve muitos comentadores, mas a primeira voz a clamar por uma tradução do original grego foi a de Regiomontanus, isso em 1463, ao descobrir em Pádua um exemplar da obra. Uma tradução de muitos méritos, com comentários, foi feita em 1575 por Xilander (nome grego adotado por Wilhelm Holzmann, um professor da Universidade de Heidelberg). Essa tradução, por sua vez, foi usada pelo francês Bachet de Méziriac que, em 1621, publicou a primeira edição do texto em grego juntamente com sua tradução latina acompanhada de notas. Em 1670 apareceu uma segunda edição, impressa de maneira negligente, que, apesar disso, é historicamente importante pelo fato de conter as famosas notas marginais de Fermat que tanto estimularam as pesquisas em teoria dos números. Traduções para o francês, o alemão e o inglês só apareceram mais tarde.

A Aritmética é uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que eleva o autor à condição de gênio em seu campo. A parte remanescente do trabalho se dedica à resolução de 130 problemas, numa variedade considerável, que levam a equações do primeiro e do segundo graus. Só uma cúbica muito particular é resolvida. O primeiro livro se ocupa de equações determinadas em uma incógnita e os demais de equações indeterminadas de segundo grau, e às vezes de grau maior, em duas ou três incógnitas. É notável a falta de métodos gerais e a publicação repetida de artifícios engenhosos ideados para as necessidades de cada problema específico. Diofanto só admitia respostas entre os números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia-se com uma resposta apenas do problema.

Há enunciados de teoremas penetrantes na Aritmética; assim é que encontramos; sem prova, mas com uma alusão a Porismas, que a diferença entre dois cubos racionais é também a soma de dois cubos racionais – uma questão que posteriormente iria merecer a atenção de Viète, Bachet e Fermat. Há muitas proposições relativas à representação de números como a soma de dois, três ou quatro quadrados, um campo de investigações que iria ser completo mais tarde por Fermat, Euler e Lagrange.

Página 207,208, livro: introdução à história da matemática; autor: Howard Eves; tradução; Hygino H. Domingues. São Paulo. Editora; Unicamp; ano;2004

4.2 A EQUAÇÃO DE DIOFANTO

Segundo Hefez[5], “A resolução de vários problemas de aritmética recai na resolução, em números naturais, de equação do tipo $\mathrm{a.x - b.y = c}$ ou ainda do tipo $\mathrm{a.x + b.y = c,\ com\ a, b \in \mathbb{N}^*}$”.

Tais equações são chamadas equações diofantinas lineares em homenagem a Diofanto de Alexandria (aprox.. 250 d.c.).

Mas nem sempre estas equações possuem solução. Por exemplo, as equações $4.x - 6.y = 3$ e $4.X + 6.Y = 2$ não possuem nenhuma solução em números naturais (x_0, y_0) pois, caso contrário, para a primeira equação, teríamos $4.x_0 - 6.\mathrm{y}_0$ par e, portanto, nunca igual a 3; e para a segunda equação, teríamos

[5] HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. 2ª ed. p.66. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

$4.x_0 + 6.\mathrm{y}_0 > 2$.

É, então, natural perguntar-se em que condições tais equações possuem soluções e, caso tenham, como determiná-las?

Proposição 4.2.1: Sejam a,b $\in IN^*$ e c $\in$ N. A equação $aX - bY = c$ admite solução em números naturais se, e somente se, $(a, b)|c$.

Se $aX - bY = c$ tem solução, então ela é equivalente á equação $a_1X - b_1Y = c_1$,

$$a_1 = \frac{a}{(a,b)}, b_1 = \frac{b}{(a,b)}, c_1 = \frac{c}{(a,b)}$$

Note que $(a_1, b_1) = 1$ e, portanto, podemos nos restringir às equações do tipo $aX - bY = c$, com $(a, b) = 1$. Que sempre tem soluções.

Uma solução minimal de $aX - bY = c$ é uma solução (x_0, y_0) da equação, tal que, se (x_1, y_1) é uma solução qualquer da equação, então $x_0 < x_1$.

Mostraremos a seguir como as soluções da equação diofantina $aX - bY = c$, com $(a, b) = 1$, podem ser determinadas a partir da solução minimal (x_0, y_0).

Proposição 4.2.2: Seja (x_0, y_0) a solução minimal da equação $aX - bY = c$, onde $(a, b) = 1$. Então, as soluções x, y em $\mathbb{N}$ da equação são

$X = x_0 + t.b$, $Y = y_0 + t.a, \quad t \in \mathbb{N}$

DEMONSTRAÇÃO: Seja x, y uma solução de $\mathrm{a.X - b.Y = c}$, logo,

$$\mathrm{a.x_0 - b.y_0 = a.x - b.y = c.}$$

Consequentemente,

$$\mathrm{a.(x - x_0) = b.(y - y_0).}$$

Como $(a, b) = 1$, segue-se que $\mathrm{b|(x - x_0)}$.

Logo,

$\mathrm{x - x_0 = t.b,\ t \in \mathbb{N}}$ ou $\mathrm{x} = x_0 + \mathrm{t.b}$

Substituindo a expressão de $\mathrm{x - x_0}$ acima, segue-se que $\mathrm{y - y_0 = t.a}$ ou

$y = y_0 + t.a$, o que prova que as soluções são do tipo exibido.

Exemplo: Resolvamos a equação $24.x - 14.y = 18$.

A equação tem solução, pois $(24,14)|18$; e é equivalente a $12.x - 7.y = 9$.

Vamos, em seguida, achar a solução minimal x_0, y_0 desta última equação. Pelo algoritmo euclidiano, temos;

$$12 = 7.1 + 5$$

$$7 = 5.1 + 2$$

$$5 = 2.2 + 1$$

Substituindo as equações acima umas nas outras, obtemos;

$$1 = 12.3 - 7.5,$$

e, portanto,

$$9 = 12.27 - 7.45.$$

Logo, $x_1 = 27$ e $y_1 = 45$ é solução particular da equação. A partir desta solução, vamos, com o auxilio do método acima exposto, determinar a solução minimal. Ponhamos: $x = 27 - 7.t$ e $y = 45 - 12.t$, e determinemos o maior valor de $t \in IN$, de modo que $x, y \in \mathbb{N}$. Isto ocorre quando $t = 3$, dando a solução minimal $x_0 = 6$ e $y_0 = 9$. As soluções da equação são, portanto;

$$x = 6 + 7.t \text{ e } y = 9 + 12.t$$

5. APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS NO ENSINO MÈDIO

O meu primeiro contato com equação diofantina se deu no ano de 1995 quando iniciei a graduação de matemática e de imediato me encantei por esse tema que é tão rico, e pouco ou quase nunca é explorado no ensino médio. Atualmente tenho percebido em diversos problemas da OBMEP e em alguns vestibulares, questões solucionáveis por equações diofantinas e desde então uma pergunta passou a incomodar meu espírito. Por que não apresentar estas equações aos alunos do ensino médio? Diante dessa indagação me senti na obrigação de pesquisar situações-problemas que pudessem ser apresentadas aos alunos do ensino médio de modo a trabalhar equações diofantinas e resgatando inclusive o estudo de aritmética que frequentemente aparecem nas provas da OBMEP.

5.1 EQUAÇÕES DIOFANTINAS NA DETERMINAÇÃO DO DIA E MÊS DO ANIVERSÁRIO DE UMA PESSOA

Este tópico foi inspirado a partir de um caso específico, e que já está bastante difundido entre os acadêmicos, sendo reiteradamente utilizado como exemplo na resolução de equações diofantinas.

Entretanto, nós o abordaremos, não apenas como mais um exemplo, mas como objeto de investigação, pois consideramos que sobre este problema temos muito a discutir e acrescentar.

Trata-se do “problema da data de nascimento”, o qual se propõe determinar o dia e mês de nascimento de uma pessoa a partir de uma combinação linear destes dois dados.

São variantes do mesmo problema os seguintes enunciados:

Enunciado 1:“Multiplique o mês do seu aniversário por 12 e multiplique o dia do seu aniversário por 31, some-os e me dê o resultado. Com alguns cálculos lhe direi o dia e o mês do seu aniversário.”

Enunciado 2:"Multiplique o mês do seu aniversário por 3 e multiplique o dia do seu aniversário por 5, some-os e me dê o resultado. Com alguns cálculos lhe direi o dia e o mês do seu aniversário."

Enunciado 3:"Multiplique o mês do seu aniversário por 3 e multiplique o dia do seu aniversário por 17, some-os e me dê o resultado. Com alguns cálculos lhe direi o dia e o mês do seu aniversário."

O que observamos em muitos trabalhos é apenas a solução do problema, não deixando bem claro a escolha do par de valores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ pelos quais devemos multiplicar o dia e o mês do aniversário. Uma pergunta interessante sobre este problema seria:

Por que devemos multiplicar o mês por 12 e o dia por 31? E se tivéssemos multiplicado o mês por 3 e o dia por 5 ou ainda, se tivéssemos multiplicado o mês por 3 e o dia por 17? Ou outros números? Faria diferença ou obteríamos os mesmos resultados?

REFLETINDO SOBRE O PROBLEMA

Uma pessoa que tenha realizado com sucesso o procedimento solicitado no enunciado 1 revela que o resultado obtido foi o número 332. Observemos que a equação diofantina linear será $12.x + 31.y = 332$ e que admite solução inteira, já que o mdc (31,12)=1 e 1 divide 332 pois sabemos que uma equação diofantina $ax + by = c$, tem solução (inteira) se e somente se o mdc (a, b) divide c.

Usando o algoritmo de Euclides temos que:

Figura 4: Dispositivo Prático 2.

	2	1	1	2	2
31	12	7	5	2	1
7	5	2	1	0	

Fonte: Criado pelo Autor

$31 = 2.12 + 7 \quad (1)$

$12 = 1.7 + 5$ (2)

$7 = 1.5 + 2$ (3)

$5 = 2.2 + 1$ (4)

$2 = 2.1 + 0$ (5)

Isolando o resto da expressão (4) temos;

$1 = 5 - 2.2$ (6)

Isolando o resto da expressão (3) e substituindo na expressão (6) temos;

$$1 = 5 - 2.(7 - 5.1)$$

Organizando a expressão temos;

$$1 = 3.5 - 2.7 \quad (7)$$

Isolando o resto da expressão (2) e substituindo na expressão (7) temos;

$$1 = 3.(12 - 1.7) - 2.7$$

Organizando a expressão temos;

$$1 = 3.12 - 5.7 \quad (8)$$

Isolando o resto da expressão (1) e substituindo na expressão (8) temos;

$$1 = 3.12 - 5.(31 - 2.12)$$

Organizando a expressão temos;

$$1 = 13.12 - 5.31$$

Escrevemos 1 como combinação linear dos coeficiente “a” e “b” acima Ajustando a equação temos a seguinte situação

$12.(13) + 31.(-5) = 1$, multiplicando esse resultado por 332 obtemos a expressão;

$$12.[13.(332)] + 31.[-5.(332)] = 1.(332)$$

$$12.(4316) + 31.(-1660) = 332$$

Vamos admitir $x_1 = 4316\, e\ y_1 = -1660$ uma solução particular da equação diofantina $12.x + 31.y = 332$. A equação diofantina $a.x + b.y = c$ tem solução (inteira) se e somente se mdc(a,b) dividir c. (observe que o mdc(12,31) = 1) e 1 divide 332, então esta equação é satisfeita por uma infinidade de pares (x,y) de inteiros, dados pelas expressões:

$$\begin{cases} x = 4316 + 31.t \\ y = -1660 - 12.t \end{cases}$$

Se $(x_{1,}y_1)$ é uma solução particular da equação diofantina $a.x + b.y = c$, com mdc(a,b)=1, então um par (x,y) será solução da equação se e somente se existir um inteiro t tal que $x = x_1 + b.t \;\; e \;\; y = \; y_1 - a.t$.

Observe que o problema em questão trata apenas de soluções positivas, ou seja, $1 \;\; \leq x \leq 12 \;\; e \;\; 1 \leq y \leq 31$, como $x = 4316 + 31.t$ e $y = -1660 - 12.t$ podemos ter a seguinte situação:

$$1 \leq 4316 + 31.t \leq 12 \qquad (1)$$

e

$$1 \leq -1660 - 12.t \leq 31 \qquad (2)$$

Resolvendo o sistema de inequação (1)

$1 \leq 4316 + 31.t$ e $4316 + 31.t \leq 12$

1º passo:

$31.t \geq -4316 + 1$

$31.t \geq -4315$

$t \geq \frac{-4315}{31}$

$\boldsymbol{t \geq -139,19355}$

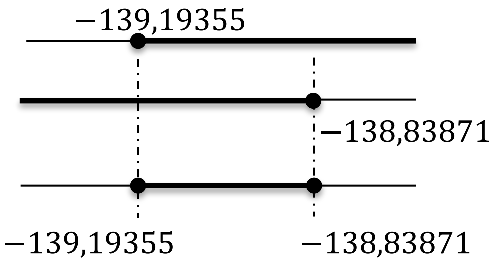
2º passo:

$31.t \leq 12 - 4316$

$31.t \leq -4304$

$t \leq \frac{-4304}{31}$

$\boldsymbol{t \leq -138,83}$



Como t é um número inteiro, temos que só pode ser $t = -139$;

Substituindo o valor de t nas equações;

$x = 4316 + 31.t \quad e\, y = -1660 - 12.t$, obtemos os valores: $x = 4316 + 31.(-139)$; logo $x = 7$. Sabemos que x representa o mês portanto o mês é JULHO e $y = -1660 - 12.(-139)$; logo y= 8 sabemos que y representa o dia portanto esta pessoa nasceu no dia 8 de julho.

Agora que sabemos o dia e o mês de nascimento dessa pessoa, podemos analisar os outros enunciados.

Se esta pessoa que nasceu no dia 8 do mês julho tivesse utilizado o enunciado 2 o resultado obtido seria 61 e a equação diofantina então seria 3x+ 5y=61 e sua solução:

Figura 5: Dispositivo Prático 3.

	1	1	2
5	3	2	1
2	1	0	

Fonte: Criado pelo Autor

$$5 = 3.(1) + 2$$
$$3 = 2.(1) + 1$$

$$1 = 3 - 2.1$$
$$1 = 3 - (5 - 3).1$$
$$1 = 3.(2) - 5.(1)$$
$$[3.(2) + 5.(-1) = 1].61$$
$$3.(122) + 5.(-61) = 61$$

Neste caso $x_1 = 122 \;\; e\, y_1 = -61$.

$$x = x_1 + b.t \quad e \quad y = y_1 - a.t$$
$$x = 122 + 5.t \quad e \quad y = -61 - 3.t$$

$$1 \leq x \leq 12 \quad e\, 1 \leq y \leq 31$$

$$1 \leq 122 + 5.t \leq 12$$

$$-121 \leq 5.t \leq -110$$

$$\frac{-121}{5} \leq t \leq \frac{-110}{5}$$

$$-24{,}2 \leq t \leq -22$$

$$t = \{-24, -23, -22\}$$

Substituindo o valor de $t = -24$ nas duas equações, temos:

$$x = 122 + 5.(-24) \quad e \quad y = -61 - 3.(-24)$$

$$x = 2(fevereiro) \quad e \quad y = 11(dia)$$

Substituindo o valor de $t = -23$ nas duas equações, temos:

$$x = 122 + 5.(-23) \quad e \quad y = -61 - 3.(-23)$$

$$x = 7(julho) \quad e \quad y = 8(dia)$$

Substituindo o valor de $t = -22$ nas duas equações, temos:

$$x = 122 + 5.(-22) \quad e \quad y = -61 - 3.(-22)$$

$$x = 12(dezembro) \quad e \quad y = 5(dia)$$

Temos três soluções: 11 de fevereiro, 8 de julho e 5 de dezembro. Portanto, não teríamos unicidade e não poderíamos afirmar com certeza a data do aniversário da pessoa.

Agora, se a pessoa que nasceu no dia 8 de julho tivesse seguido o enunciado 3 o resultado obtido seria 157 e a equação diofantina seria 3x+17y=157.

Figura 6: Dispositivo Prático 4.

	5	1	2
17	3	2	1
2	1	0	

Fonte: Criado pelo Autor

$$17 = 3.(5) + 2$$

$$3 = 2.(1) + 1$$

$$1 = 3 - 2.1$$

$$1 = 3 - (17 - 3.5).1$$

$$1 = 3 - 17.1 + 3.5$$

$$1 = 3.6 - 17.1$$

$$3.(6) + 17.(-1) = 1$$

$$[3.(6) + 17.(-1) = 1].157$$

$$3.(942) + 17.(-157) = 157$$

Neste caso $x_1 = 942 \;\; e \; y_1 = -157$

$$x = x_1 + b.t \quad e \quad y = y_1 - a.t$$

$$x = 942 + 17.t \quad e \; y = -157 - 3.t$$

$$1 \leq x \leq 12 \quad e \; 1 \leq y \leq 31$$

$$1 \leq 942 + 17.t \leq 12$$

$$-941 \leq 17.t \leq -930$$

$$\frac{-941}{17} \leq t \leq \frac{-930}{17}$$

$$-55{,}35 \leq t \leq -54{,}7$$

$$t = -55$$

Substituindo o valor de t = -55 nas duas equações, temos:

$$x = 942 + 17.(-55) \;\; e \;\; y = -157 - 3.(-55)$$

$$x = 7(julho) \;\; e \;\; y = 8(dia)$$

e neste caso a solução é única novamente, o dia 8 de julho

Observamos que ao multiplicar o mês por a e o dia por b, com mdc(a,b)=1, obtemos a equação diofantina, $a.x + b.y = c$ onde c é conhecido e fornecido pelo aniversariante.

Os resultados anteriores mostram que podemos formar infinitas equações diofantinas, sendo que em algumas temos unicidade (que é o caso que nos interessa) e em outras (caso em que não podemos concluir com certeza a data do aniversariante) a unicidade é perdida.

Um caso particular da unicidade é a equação diofantina $12.x + 31.y = c$

A pergunta é: Por que funciona?

Na verdade, a escolha desses coeficientes a e b influenciarão diretamente na unicidade da resposta. Esta discussão é que acreditamos ser o diferencial do nosso trabalho em relação às abordagens já mencionadas.

LIMITANDO SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Genericamente, o problema poderia ser escrito da seguinte forma:

“Multiplique o número desconhecido x pelo número definido **a**, agora multiplique o número desconhecido **y** pelo número definido **b**, some-os e forneça o resultado **c**.”. Sabendo que $m_1 \leq x \leq m_2$ ou que $n_1 \leq y \leq n_2$, qual o valor de x e y?

Matematicamente, temos:

$$a.x + b.y = c$$

Nossa proposta é averiguar em que condições os valores de **a** e **b** fornecem solução única.

Para isto, suporemos que $mdc(a, b) = 1$, e tomando como a solução minimal da equação acima o par (x_0, y_0), teremos a assim:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$$

Para termos de análise tomemos os intervalos de x e de y:

$$m_1 \leq x \leq m_2 \qquad\qquad n_1 \leq y \leq n_2$$

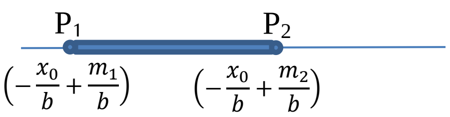
$$m_1 \leq x_0 + bt \leq m_2 \qquad\qquad -n_1 \geq at - y_0 \geq -n_2$$

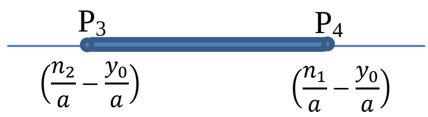
$$m_1 - x_0 \leq bt \leq m_2 - x_0 \qquad\qquad y_0 - n_1 \geq at \geq y_0 - n_2$$

$$\frac{m_1 - x_0}{b} \leq t \leq \frac{m_2 - x_0}{b} \qquad\qquad \frac{y_0 - n_1}{a} \geq t \geq \frac{y_0 - n_2}{a}$$

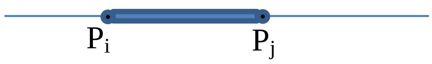
$$\frac{m_1}{b} - \frac{x_0}{b} \leq t \leq \frac{m_2}{b} - \frac{x_0}{b} \qquad\qquad \frac{n_1}{a} - \frac{y_0}{a} \geq t \geq \frac{n_2}{a} - \frac{y_0}{a}$$

Se procurássemos representar o valor de t numa reta, ele seria um ponto ou um conjunto de pontos dos intervalos seguintes:





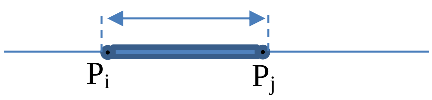
Agora deveríamos fazer a interseção dos dois intervalos, obtendo um terceiro intervalo no qual esteja mais restrito o valor de t.



Uma observação deve ser feita é que por admitirmos que a equação tenha solução minimal, a qual foi dada acima, isto implica que temos pelo menos um valor em comum nos dois intervalos, $t = 0$ (justamente o que nos interessa!).

Em outras palavras, é preciso que t esteja num intervalo $0 \leq t < 1$.

Mas o intervalo que contém t tem comprimento menor que a unidade, ou seja:



$$d_{P_iP_j} < 1$$

Para garantir facilmente que t esteja no intervalo desejado, podemos impor, por exemplo, que $d_{P_1P_2} < 1$, ou que $d_{P_3P_4} < 1$.

No primeiro caso, temos:

$$\left|\left(-\frac{x_0}{b}+\frac{m_2}{b}\right)-\left(-\frac{x_0}{b}+\frac{m_1}{b}\right)\right| = \left|\frac{m_2-m_1}{b}\right| < 1 \Leftrightarrow |m_2-m_1| < b$$

E, no segundo:

$$\left|\left(\frac{n_1}{a}-\frac{y_0}{a}\right)-\left(\frac{n_2}{a}-\frac{y_0}{a}\right)\right| = \left|\frac{n_1-n_2}{a}\right| < 1 \Leftrightarrow |n_1-n_2| < a$$

Desta forma podemos garantir com certeza, que o problema tenha solução única se:

$$\begin{cases} mdc(a,b) = 1 \\ |m_2-m_1| < b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} mdc(a,b) = 1 \\ |n_2-n_1| < a \end{cases}$$

Assim, para o caso específico em que $1 \leq x \leq 12$ ou que $1 \leq y \leq 31$, temos:

$$|m_2 - m_1| < b \Rightarrow |12 - 1| < b \Rightarrow 11 < b$$

Ou,

$$|n_2 - n_1| < a \Rightarrow |31 - 1| < a \Rightarrow 30 < a$$

E teremos:

$\begin{cases} mdc(a, b) = 1 \\ 11 < b \end{cases}$ ou $\begin{cases} mdc(a, b) = 1 \\ 30 < a \end{cases}$

$$a > 30 \; ou \; b > 11$$

Ou seja, para saber se o problema que trata da determinação do dia e mês do aniversário de uma pessoa tem solução única basta verificar que a equação diofantina linear do tipo $a.x + b.y = c$ tem um dos coeficientes $a > 30 \; ou \; b > 11$

Por exemplo, os pares (a, b) seguintes têm solução única:

a) $(31,3)$ $a > 30 \; e \; b < 114$

b) $(5,12)$ $a < 30 \; e \; b > 11$

c) $(3,13)$ $a < 30 \; e \; b > 11$

d) $(4,26)$, pois equivale a $(2,13)$ e $mdc(2,13) = 1$ $a < 30 \; e \; b > 11$

Mas os seguintes não:

a) $(3,5)$ $a < 30 \; e \; b < 11$

b) $(3,11)$ $a < 30 \; e \; b < 11$

c) $(30,7)$ $a < 30 \; e \; b < 11$

d) $(11,33)$, pois equivale a $(1,3)$ $.a < 30 \; e \; b < 11$

5.2 EQUAÇÕES DIOFANTINAS EM VESTIBULARES

Um aluno que tenha estudado equação diofantina no ensino médio teria condições de resolver facilmente este problema apresentado abaixo:

Problema

(UFC-CE/2004) Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices; então, o número de faces triangulares é:

a) 12 b) 11 c) 10 d) 9 e) 8

Solução:

Escrever uma equação diofantina linear $3.x + 4.y = 40$ onde x representa face triangular e y representa face quadrangular**.**(Obs.: 40 representa o dobro do número de arestas que são 20, pois cada aresta é contada duas vezes)

Vamos inicialmente encontrar o mdc(3,4) pelo algoritmo de Euclides:

Figura 7: Dispositivo Prático 5.

	1	2	1
4	3	1	1
1	1	0	

Fonte: criado pelo autor

Como o mdc(3,4)=1, a equação apresenta solução, pois o mdc(3,4)=1|12. Agora podemos escrever 1 como combinação linear de 3 e 4 da seguinte forma:

$$3.(-1) + 4.(1) = 1$$

Multiplicando a equação por 40, temos: $3.(-40) + 4.(40) = 1.(40)$

Logo, o par de inteiros $x_1 = -40 \; e \;\; y_1 = 40$ é uma solução particular da equação proposta, e x>0 e y>0, pois existem faces triangulares e quadrangulares.

$$x = x_1 + b.t = -40 + 4.t$$

$$y = y_1 - a.t = 40 - 3.t$$

$$-40 + 4.t > 0 \qquad\qquad e \qquad\qquad 40 - 3.t > 0$$

Resolvendo as inequações temos;

$$10 < t < 13{,}33$$

$$t = \{11{,}12{,}13\}$$

Pela relação de Euler sabemos que $V + F = A + 2$, encontramos $F = 12\; faces$.

Sabemos que $x + y = 12$ então $(-40 + 4.t) + (40 - 3.t) = 12$ logo $t = 12$

Sabemos que x representa o número de faces triangulares. Daí:

$$x = -40 + 4.t$$

$$x = -40 + 4.(12)$$

$$x = 8\; faces\; triangulares$$

Obs.: Se tivéssemos substituído todos os candidatos a t nas respectivas equações $x = -40 + 4.t$ e y$= 40 - 3.t$ encontraríamos os pares ordenados (4,7); (8,4) e (12,1) que satisfazem a equação, ,mas não ao problema, uma vez que a soma das faces devem totalizar 12. Portanto a única solução compatível com o problema é para t=12 , ou seja, o par ordenado (8,4), correspondendo a oito faces triangulares e quatro faces quadrangulares. **Resposta letra e)**

5.3 EQUAÇÃO DIOFANTINA NA OBMEP

A OBMEP é uma edição promovida pelo Ministério da Educação e pelo Ministério da Ciência e Tecnologia, em parceria com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), responsáveis pela Direção Acadêmica.

A OBMEP é uma ferramenta que permite que as escolas públicas avaliem o conhecimento adquirido pelos seus alunos. Na minha época de estudos não existiam essas olimpíadas, o que mostra o grande avanço e a grande oportunidade oferecida para os alunos do Ensino Médio ou Fundamental.

As provas priorizam o raciocínio lógico, aritmética, álgebra, geometria e combinatória, mas devemos lembrar que os professores passam um bom tempo ensinando Álgebra Elementar aos alunos, e raramente são apresentados problemas com este enfoque. Daí a importância de abordarmos o assunto sobre equação diofantina.

(OBMEP – 2012 – NÍVEL 3) Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R$ 2,99 para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

a) 2

b) 5

c) 10

d) 13

e) 23

Solução:

Sendo x o número de laços e y número de botões, temos:

$$0.07.x + 0,04.y = 2,99$$

$$[0.07.x + 0,04.y = 2,99].100$$

$$7.x + 4.y = 299$$

Figura 8: Dispositivo Prático 6.

	1	1	3
7	4	3	1
3	1	0	

Fonte: criado pelo autor

$$7 = 4.(1) + 3$$

$$4 = 3.(1) + 1$$

$$1 = 4 - 3.(1)$$

$$1 = 4 - (7 - 4).1$$

$$1 = 4 - 7.1 + 4.1$$

$$1 = 7.(-1) + 4.(2)$$

$$7.(-1) + 4.(2) = 1$$

$$[7.(-1) + 4.(2) = 1].299$$

$$7.(-299) + 4.(598) = 299$$

Neste caso $x_1 = -299 \;\; e \; y_1 = 598$

$$x = x_1 + b.t \quad e \; y = y_1 - a.t$$

$$x = -299 + 4.t \quad e \; y = 598 - 7.t$$

$$1 \leq x < y$$

$$1 \leq -299 + 4.t \leq 598 - 7.t$$

$$t \geq \frac{300}{4}$$

$$t \geq 75$$

$$t \leq \frac{897}{11}$$

$$t \leq 81{,}5$$

$$75 \leq t \leq 81{,}5$$

$$t = \{75{,}76{,}77{,}78{,}79{,}80{,}81\}$$

O número de botões deve ser múltiplo do número de laços, pois se supõe que em cada blusa haverá um laço e o mesmo número de botões por blusa. Portanto $\mathrm{y} = \mathrm{k.x}$, onde $\mathrm{k} \in \mathrm{IN}^*$

Obs.: Não devemos esquecer que o número de laços representa o número de blusas.

Substituindo todos os valores de t nas equações, $\mathrm{x} = -299 + 4.\mathrm{t}$ e $\mathrm{y} = 598 - 7.\mathrm{t}$ temos;

Para $t = 75$

$\mathrm{x} = -299 + 4.(75) \Rightarrow \mathrm{x} = 1$ laço = 1 blusa

$\mathrm{y} = 598 - 7.(75) \Rightarrow \mathrm{y} = 73$ botões

Para $t = 76$

$\mathrm{x} = -299 + 4.(76) \Rightarrow \mathrm{x} = 5$ laços = 5 blusa

$\mathrm{y} = 598 - 7.(76) \Rightarrow \mathrm{y} = 66$ botões

Para $\mathrm{t} = 77$

$\mathrm{x} = -299 + 4.(77) \Rightarrow \mathrm{x} = 9$ laços = 9 blusas

$\mathrm{y} = 598 - 7.(77) \Rightarrow \mathrm{y} = 59$ botões

Para $t = 78$

$x = -299 + 4.(78) \Rightarrow x = 13$ laços =13 blusas
$y = 598 - 7.(78) \Rightarrow y = 52$ botões

Para $t = 79$
$x = -299 + 4.(79) \Rightarrow x = 17$ laços =17 blusas
$y = 598 - 7.(79) \Rightarrow y = 45$ botões;

Para $t = 80$
$x = -299 + 4.(80) \Rightarrow x = 21$ laços =21 blusas
$y = 598 - 7.(80) \Rightarrow y = 38$ botões;

Para $t = 81$
$x = -299 + 4.(81) \Rightarrow x = 25$ laços =25 blusas
$y = 598 - 7.(81) \Rightarrow y = 31$ botões;

De todas as soluções possíveis existem duas que satisfazem $y = k.x$, entretanto para $t = 75, \text{temos } x = 1$ blusa e 73 botões (não consta esta opção), sendo assim para $t = 78, \text{temos } \mathbf{x = 13}$ **blusas** e 52 botões. **Resposta: letra d**)

5.4 EQUAÇÃO DIOFANTINA LINEAR COM TRÊS VARIÁVEIS

Problema
O consumo de 5 refrigerantes, 10 fatias de tortas e 6 sanduiches para um grupo de estudantes totalizou R$ 48,00. Quanto custa cada um dos produtos consumidos?
Solução
Identificando os preços dos produtos:
Preço do refrigerante: x; com x>o
Preço da fatia de torta: y; com y>0
Preço do sanduiche: z; com z >0;
Para responder a pergunta basta encontrar a solução geral da equação gerada.

$$5.x + 10.y + 6.z = 48$$

Como o $mdc(5, 10{,}6)$=1 e 1|48, segue que o problema possui solução.

Fazendo $5.x + 10.y = p, com\ p \in Z$, temos, $p + 6.z = 48$ e como mdc(1;6)= 1,podemos fazer:

$$1.(-5) + 6.(1) = 1$$

$$[1.(-5) + 6.(1) = 1].48$$

$$1.(-240) + 6.(48) = 48$$

Neste caso $\mathrm{p_1} = -240$ e $\mathrm{z_1} = 48$

Daí,

$$\mathrm{p} = \mathrm{p_1} + \mathrm{b.k} \quad \mathrm{e\ z} = \mathrm{z_1} - \mathrm{a.k}, \qquad \mathrm{k} \in \mathbb{N}^*$$

$$\mathrm{p} = -240 + 6.\mathrm{k} \quad \mathrm{e\ z} = 48 - \mathrm{k}$$

$$como\ p > 0\ temos\ que - 240 + 6.k > 0 \qquad e \qquad 48 - \mathrm{k} > 0$$

$$k > 40 \qquad e \qquad k < 48$$

como p e z devem ser números naturais positivos, devemos ter,

$$40 < k < 48$$

$$k = \{41,42, \dots ,46,47\}$$

Para encontrar x e y devemos escolher um valor conveniente para k, de forma que o mdc(5; 10) divida p. Sabemos que o mdc(5,10)=5

$$5 \nmid (-240 + 6.k)\ quando\ k = 41$$

$$5 \nmid (-240 + 6.k)\ quando\ k = 42$$

$$5 \nmid (-240 + 6.k)\ quando\ k = 43$$

$$5 \nmid (-240 + 6.k)\ quando\ k = 44$$

$$5|(-240 + 6.k)\ quando\ k = 45$$

$$5 \nmid (-240 + 6.k)\ quando\ k = 46$$

$$5 \nmid (-240 + 6.k)\ quando\ k = 47$$

Portanto, $k = 45\ e\ p = 30$

Substituindo o valor de p em $5.x + 10.y = p$, temos;

$$5.x + 10.y = 30$$

$$ou$$

$$x + 2.y = 6$$

Escrevendo 1 como combinação linear 1 e 2, temos;

$$1.(-1) + 2.(1) = 1$$

$$[1.(-1) + 2.(1) = 1].6$$

$$1.(-6) + 2.(6) = 6$$

Neste caso $x_0 = -6$ e $y_0 = 6$

Segue que,

$$x = x_0 + b.t \quad \text{e} \quad y = y_0 - a.t \quad com \ t \in Z$$

$x = -6 + 2.t$ e $y = 6 - t$ e como x e y devem ser números inteiros positivos,

$$-6 + 2.t > 0 \quad \text{e} \quad 6 - t > 0$$

$$3 < t < 6$$

Substituindo os valores de $t = \{4,5\}$ nas equações $x = -6 + 2.t$ e $y = 6 - t$ e o valor de $k = 45$ na equação $z = 48 - k$, chegamos aos seguinte valores para os preços dos produtos.

Preço do refrigerante: R$ 2,00
Preço da fatia de torta: R$ 2,00
Preço do sanduiche: R$ 3,00

Preço do refrigerante: R$ 4,00
Preço da fatia de torta: R$ 1,00
Preço do sanduiche: R$ 3,00

5.5 SISTEMA DE EQUAÇÃO DIOFANTINA LINEAR COM TRÊS VARIÁVEIS

Problema

O consumo de 5 refrigerantes, 10 fatias de tortas e 6 sanduiches para um grupo de estudantes totalizou R$ 48,00. Outro grupo consumiu 8 refrigerantes, 6 fatias de torta e 11 sanduiches ao preço de R$ 37,00. Quanto custa cada um dos produtos consumidos?

Solução

Identificando os preços dos produtos:

Preço do refrigerante: x; com x>o

Preço da fatia de torta: y; com y>0

Preço do sanduiche: z; com z >0

Seja a equação geral dada por;

a1.x1 + a2.x2 + a3.x3 + ... + ak.xk = c

Onde os ai´s são inteiros não nulos, e o mdc(a1, a2, ..., ak) = d. Evidentemente se d∤c então a equação não admite soluções inteiras. Mas por outro lado, se d|c e considerarmos d=1. Podemos encontrar as soluções através do seguinte método que reduz o número de variáveis da equação

$$5.x + 10.y + 6.z = 48 \qquad 1^{\underline{a}} \text{ equação}$$
$$8.x + 6.y + 3.z = 37 \qquad 2^{\underline{a}} \text{ equação}$$

Multiplicando a primeira equação por 8 e a segunda equação por -5 temos;

$$\begin{array}{r} \cancel{40}.x + 80.y + 48.z = 384 \\ -\cancel{40}.x - 30.y - 15.z = -185 \\ \hline 50.y + 33.z = 199 \end{array}$$

Figura 9: Dispositivo Prático 7.

	1	1	1	16
50	33	17	16	1
17	16	1	0	

Fonte: criado pelo autor

$$50 = 33.(1) + 17.(1)$$

$$33 = 1.(17) + 1.(16)$$

$$17 = 1.(16) + 1$$

Donde concluímos que

$$50.(2) + 33.(-3) = 1$$
$$[50.(2) + 33.(-3) = 1].199$$
$$50.(398) + 33.(-597) = 199$$

Neste caso $y_1 = 398$ e $z_1 = -597$

$$y = y_1 + b.k \quad e\ z = z_1 - a.k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 398 + 33.\mathrm{k} \quad \mathrm{e}\ z = -597 - 50.\mathrm{k}$$

$$398 + 33.\mathrm{k} > 0 \qquad \mathrm{e} \qquad -597 - 50.\mathrm{k} > 0$$

$$-12{,}06 < \mathrm{k} < -11{,}94$$

$$\mathrm{k} = -12$$

Substituindo o valor de $k = -12$ nas equações, temos;

$y = 398 + 33.(-12) \quad \Rightarrow y = 2$

$z = -597 - 50.(-12) \quad \Rightarrow z = 3$

Substituindo $y = 2$ e $z = 3$ em qualquer uma das equações iniciais, encontramos $x = 2$, logo;

Preço do refrigerante: R$ 2,00

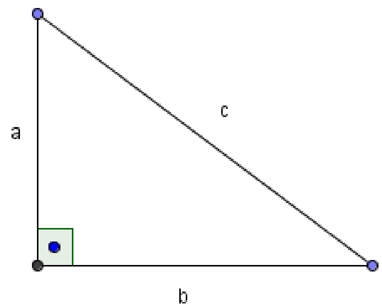
Preço da fatia de torta: R$ 2,00

Preço do sanduiche: z; R$ 3,00

5.6 APROXIMAÇÃO DE RAIZ QUADRADA DE 2

Seja um triângulo retângulo de catetos a e b, e hipotenusa c.

Figura 10 triângulo retângulo 1



Fonte: criado pelo autor

Desejamos determinar inteiros a, b e c que formem um triângulo retângulo, isto é, determinar números pitagóricos.

Em matemática, nomeadamente em teoria dos números, um terno pitagórico (ou trio pitagórico, ou ainda tripla pitagórica) é formado por três números naturais a, b e c tais que $a^2+b^2=c^2$. O nome vem do teorema de Pitágoras que afirma que se as medidas dos lados de um triângulo retângulo são números inteiros, então são um terno pitagórico. Se (a,b,c) é um terno pitagórico, então (ka,kb,kc) também é um terno pitagórico, para qualquer número natural k. Um terno pitagórico primitivo é um terno pitagórico em que os três números são primos entre si.

Sendo $m, n \in Z$, uma das maneiras de determinar estes números é:

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2.m.n$$

$$c = m^2 + n^2$$

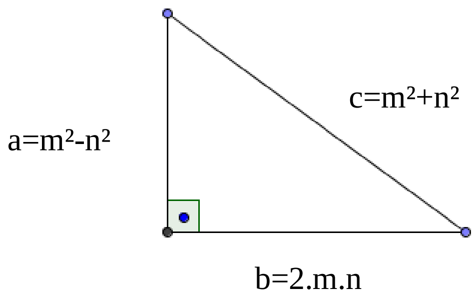
Justificativa;

$$c^2 - a^2 = (c + a).(c - a) = (m^2 + n^2 + m^2 - n^2).(m^2 + n^2 - m^2 + n^2)$$

$$c^2 - a^2 = 2.m^2.2.n^2 = (2.m.n)^2 = b^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

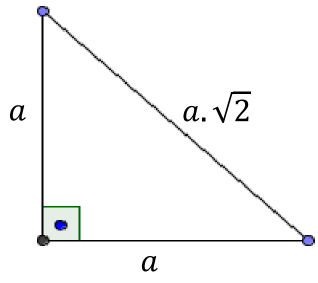
Figura 11 triângulo retângulo 2



Fonte: criado pelo autor

No caso do triângulo retângulo isósceles, aparece o número $\sqrt{2}$ na hipotenusa.

Figura 12 triângulo retângulo 3



Fonte: criado pelo autor

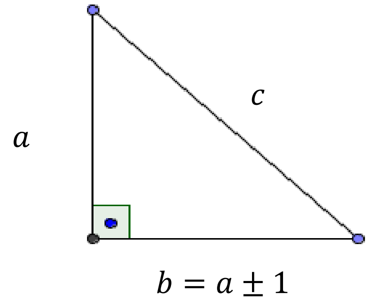
Com operações elementares não se pode aproximar a $\sqrt{2}$.

Vamos usar a seguinte aproximação $b = a \pm 1$

Para a grande, temos que $b = a \pm 1 \approx a$, isto é, o triângulo é aproximadamente isósceles. $\frac{c}{a+b} \approx \frac{c}{a+a} = \frac{a.\sqrt{2}}{2.a}$

Então; $\sqrt{2} \approx 2.\frac{c}{a+b}$

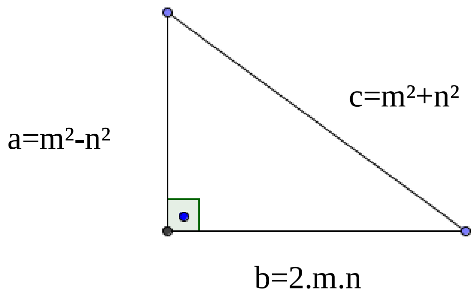
Figura 13 triângulo retângulo 4



Fonte: criado pelo autor

O objetivo é determinar números pitagóricos com a propriedade $b = a \pm 1$

Figura 14 triângulo retângulo 5



Fonte: criado pelo autor

$$b = a \pm 1$$

$$2.m.n = m^2 - n^2 \pm 1$$

$$m^2 - 2m.n = n^2 \pm 1$$

$$m^2 - 2m.n + (n^2) = (n^2) + n^2 \pm 1$$

$$(m-n)^2 = 2.n^2 \pm 1$$

$$(m-n)^2 = 2.n^2 + k, onde\ k = \pm 1$$

Estamos interessados em construir equações diofantinas lineares $a.x + b.y = c$, então faremos a seguinte substituição;

$$x = (m-n)^2 \quad e \quad y = n^2$$

Obtendo a equação diofantina $x = 2.y + k \quad ou \quad x - 2.y = k$, escrevendo 1 como combinação de $1\ e - 2$, temos;

$$1.(1) - 2.(0) = 1$$

$$[1.(1) - 2.(0) = 1].k$$

$$1.(k) - 2.(0.k) = k$$

Neste caso $\mathrm{x}_0 = \mathrm{k}$ e $\mathrm{y}_0 = 0$

$$x = x_0 + b.t \quad e \quad y = y_0 + a.t$$

$$x = k + 2.t \quad e \quad y = 0 + 1.t = t$$

$y = t = n^2$, podemos concluir que t é um quadrado perfeito, portanto os possíveis candidatos a t são: $t = \{1,4,9,16,25,36,..n^2\}, n \in Z$

Se $t = 1 \implies n^2 = 1 \Longrightarrow n = 1$

$$x = 2.y + k$$

$$(m-n)^2 = 2.n^2 + k, para\ n = 1\ e\ k = -1$$

$$(m-1)^2 = 2.(1)^2 - 1$$

$$m = 2$$

$$a = m^2 - n^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

$$b = 2.m.n = 2.2.1 = 4$$

$$c = m^2 + n^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

A aproximação é:

$$\sqrt{2} \approx 2.\frac{5}{3+4} = \frac{10}{7} \approx 1{,}4285714285$$

Se $t = 4 \implies n^2 = 4 \Longrightarrow n = 2$

$$x = 2.y + k$$

$$(m-2)^2 = 2.2^2 + k, para\ n = 2\ e\ k = +1$$

$$(m-2)^2 = 2.(2)^2 + 1$$

$$m = 5$$

$$a = m^2 - n^2 = 5^2 - 2^2 = 21$$
$$b = 2.m.n = 2.5.2 = 20$$
$$c = m^2 + n^2 = 5^2 + 2^2 = 29$$

A aproximação é:

$$\sqrt{2} \approx 2.\frac{29}{21+20} = \frac{58}{41} \approx 1,4146341463$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

Se $t = 144 \implies n^2 = 100 \Rightarrow n = 12$

$$x = 2.y + k$$
$$(m-12)^2 = 2.12^2 + k, para\ n = 12\ e\ k = +1$$
$$(m-12)^2 = 2.(12)^2 + 1$$
$$m = 29$$

$$a = m^2 - n^2 = 29^2 - 12^2 = 697$$
$$b = 2.m.n = 2.29.12 = 696$$
$$c = m^2 + n^2 = 29^2 + 12^2 = 985$$

A aproximação é:

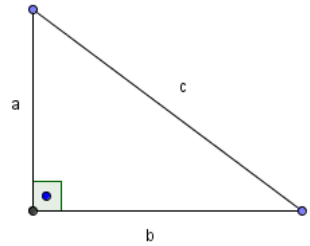
$$\sqrt{2} \approx 2.\frac{985}{697+696} = \frac{1970}{1393} \approx 1,4142139267$$

O que já é uma excelente aproximação para a $\sqrt{2}$

5.7 APROXIMAÇÃO DE RAIZ QUADRADA DE 5

Seja um triângulo retângulo de catetos $a\ e\ b$, e hipotenusa c.

Figura 15 triângulo retângulo 6



Fonte: criado pelo autor

Desejamos determinar inteiros $a, b\ e\ c$ que formem um triângulo retângulo, isto é, determinar números pitagóricos.

Sendo $m, n \in Z$, uma das maneiras de determinar estes números é:

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2.m.n$$

$$c = m^2 + n^2$$

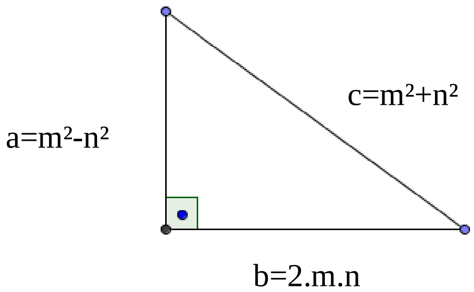
Justificativa;

$$c^2 - a^2 = (c + a).(c - a) = (m^2 + n^2 + m^2 - n^2).(m^2 + n^2 - m^2 + n^2)$$

$$c^2 - a^2 = 2.m^2.2.n^2 = (2.m.n)^2 = b^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

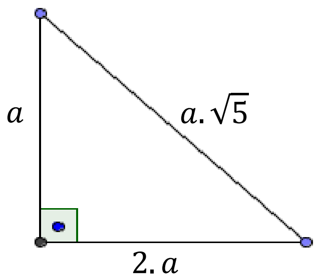
Figura 16 triângulo retângulo 7



Fonte: criado pelo autor

No triângulo retângulo de catetos a e b, onde $b = 2.a$, aparece o número $\sqrt{5}$ na hipotenusa.

Figura 17 triângulo retângulo 8

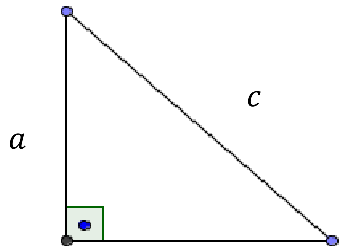


Fonte: criado pelo autor

Com operações elementares não se pode aproximar a $\sqrt{5}$.

Vamos usar a seguinte aproximação $b = 2.(a \pm 1)$

Figura 18 triângulo retângulo 9



$b = 2.(a \pm 1)$

Fonte: criado pelo autor

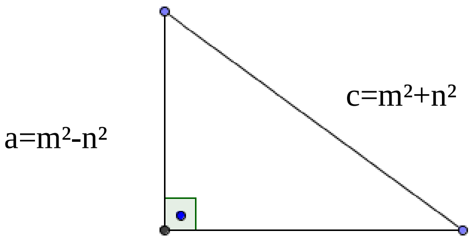
Para a grande, temos que $b = 2.(a \pm 1) \approx 2.a$

$$\frac{c}{a+b} \approx \frac{c}{a+2.a} = \frac{a.\sqrt{5}}{3.a}$$

Então; $\sqrt{5} \approx 3.\frac{c}{a+b}$

O objetivo é determinar números pitagóricos com a propriedade $b = 2.(a \pm 1)$

Figura 19 triângulo retângulo 10



b=2.m.n

Fonte: criado pelo autor

$$b = 2.(a \pm 1)$$

$$2.m.n = 2.(m^2 - n^2) \pm 2$$

$$[2.m.n = 2.(m^2 - n^2) \pm 2]/2$$

$$m^2 - m.n = n^2 \pm 1$$

$$m^2 - m.n + (-m.n) + (n^2) = (n^2) + n^2 + (-m.n) \pm 1$$

$$m^2 - 2.m.n + n^2 = 2.n^2 - m.n \pm 1$$

$$(m-n)^2 = 2.n^2 - k, \qquad onde \ \ k = m.n \pm 1$$

Estamos interessados em construir equações diofantinas lineares $a.x + b.y = c$, então faremos a seguinte substituição;

$$y = (m-n)^2 \qquad e \qquad x = n^2 \qquad e \qquad k = m.n \pm 1$$

Obtendo a equação diofantina $y = 2.x - k$ *ou* $2.x - y = k$, escrevendo 1 como combinação de $2\ e -1$, temos;

$$2.(0) - 1.(-1) = 1$$

$$[2.(0) - 1.(-1) = 1].k$$

$$2.(0.k) - 1.(-1.k) = k$$

Neste caso $x_0 = 0$ e $y_0 = -k$

$$x = x_0 + b.t \quad e \quad y = y_0 + a.t$$

$$x = 0 + 1.t \quad e \quad y = -k + 2.t = t$$

$x = t = n^2$, podemos concluir que t é um quadrado perfeito, portanto os possíveis candidatos a t são: $t = \{1,4,9,16,25,36,..n^2\}, n \in Z$

Se $t = 1 \implies n^2 = 1 \implies n = 1$

$$y = 2.x - k$$

$$(m-n)^2 = 2.n^2 - k, para\ n = 1, temos\ \ k = m.(1) \pm 1$$

$$k = m + 1 \quad ou\ k' = m - 1$$

Usaremos primeiramente $k = m + 1$

$$(m-1)^2 = 2.(1)^2 - k$$

$$(m-1)^2 = 2.(1)^2 - (m+1)$$

$$m^2 - 2.m + 1 = 2.(1)^2 - (m+1)$$

$$m^2 - m = 0$$

$$m' = 0 \ \ ou \quad m'' = 1$$

$substituindo\ m' = 0, n = 1$

$a = m^2 - n^2 = 0^2 - 1^2 = -1$, onde concluímos que estes valores não servem, pois a representa um dos catetos do triângulo e deve ser um inteiro positivo.

$substituindo\ m'' = 1, n = 1$

$a = m^2 - n^2 = 1^2 - 1^2 = 0$, onde concluímos que estes valores também não servem, pois a representa um dos catetos do triângulo e deve ser um inteiro positivo.

Se $t = 1 \implies n^2 = 1 \implies n = 1$

$$y = 2.x - k$$

$$(m-n)^2 = 2.n^2 - k, para\ n = 1, temos\ \ k = m.(1) \pm 1$$

$$k = m + 1 \quad ou\ k' = m - 1$$

Usaremos primeiramente $k' = m - 1$

$$(m-1)^2 = 2.(1)^2 - k'$$
$$(m-1)^2 = 2.(1)^2 - (m-1)$$
$$m^2 - 2.m + 1 = 2.(1)^2 - (m-1)$$
$$m^2 - m - 2 = 0$$
$$m' = -1 \ \ ou \quad m'' = 2$$

$substituindo\ m' = -1\ n = 1$

$a = m^2 - n^2 = (-1)^2 - 1^2 = 0$, onde concluímos que estes valores não servem, pois a representa um dos catetos do triângulo e deve ser um inteiro positivo.

$substituindo\ m'' = 2, n = 1$

$a = m^2 - n^2 = 2^2 - 1^2 = 3,$

$b = 2.m.n = 2.2.1 = 4$

$c = m^2 + n^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

A aproximação é:

$$\sqrt{5} \approx 3.\frac{5}{3+4} = \frac{15}{7} \approx 2{,}1428571429$$

Se $t = 4 \implies n^2 = 4 \implies n = 2$

$$y = 2.x - k$$
$$(m-2)^2 = 2.2^2 - k, para\ n = 2, temos\ \ k = m.(2) \pm 1$$
$$k = 2.m + 1 \quad ou\ k' = 2.m - 1$$

Usaremos primeiramente $k = 2.m + 1$

$$(m-2)^2 = 2.(2)^2 - k'$$
$$(m-2)^2 = 2.(2)^2 - (2.m + 1)$$
$$m^2 - 4.m + 4 = 8 - (2.m + 1)$$
$$m^2 - 2.m - 3 = 0$$

m'=3 e m''=-1, m'' já foi testado e não serve

$substituindo\ m'' = 3, n = 2$

$a = m^2 - n^2 = 3^2 - 2^2 = 5,$

$b = 2.m.n = 2.3.2 = 12$

$c = m^2 + n^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

A aproximação é:

$$\sqrt{5} \approx 3.\frac{13}{5+12} = \frac{39}{17} \approx 2{,}294117647$$

Se $t = 4 \implies n^2 = 4 \Longrightarrow n = 2$

$$(m-2)^2 = 2.2^2 - k, para\ n = 2, temos\ \ k = m.(2) \pm 1$$

$$k = 2.m + 1 \quad ou\ k' = 2.m - 1$$

Usaremos primeiramente $k' = 2.m - 1$

$$(m-2)^2 = 2.(2)^2 - k'$$

$$(m-2)^2 = 2.(2)^2 - (2.m - 1)$$

$$m^2 - 4.m + 4 = 8 - (2.m - 1)$$

$$m^2 - 2.m - 5 = 0$$

Neste caso, temos duas raízes irracionais e como sabemos $(m, n \in Z^*)$, portanto não servem.

⋮

⋮

Se $t = 169 \implies n^2 = 169 \Longrightarrow n = 13$

$$(m-13)^2 = 2.13^2 - k, para\ n = 13, temos\ \ k = m.(13) \pm 1$$

$$k = 13.m + 1 \quad ou\ k' = 13.m - 1$$

Usaremos primeiramente $k = 13.m + 1$

$$(m-13)^2 = 2.(13)^2 - k$$

$$(m-13)^2 = 2.(13)^2 - (13.m+1)$$
$$m^2 - 26.m + 169 = 338 - 13m - 1$$
$$m^2 - 13.m - 168 = 0$$
$$m' = 21 \quad m'' = -8\ (m'' \notin Z^*)$$

$substituindo\ m' = 21, n = 13$

$a = m^2 - n^2 = 21^2 - 13^2 = 272$,

$b = 2.m.n = 2.21.13 = 546$

$c = m^2 + n^2 = 21^2 + 13^2 = 610$

A aproximação é:

$$\sqrt{5} \approx 3.\frac{610}{272+546} = \frac{1830}{818} \approx 2{,}2371638142$$

O que nos dá uma boa aproximação da $\sqrt{5}$.

CONCLUSÃO

A educação é fundamental para o desenvolvimento de uma pessoa, estado ou nação. Entretanto, melhorar a qualidade da educação de modo geral, depende de como é conduzido esse processo, há muito a se fazer. Sabe-se que a deficiência na formação dos professores e os parcos recursos materiais são questões que se repetem há décadas. São muitas as dificuldades no ensino de maneira geral, e quando falamos de matemática então, as dificuldades parecem aumentar exponencialmente.

Portanto a finalidade deste trabalho apresentado é proporcionar aos alunos um maior contato com a aritmética no que diz respeito aos números inteiros, números primos e máximo divisor comum), mostrando alguns dispositivos práticos como o crivo de Eratóstenes e Algoritmo de Euclides, estudados de maneira superficial nos 5º anos, e que raramente são abordados na forma de problemas em séries subsequentes. Resgatamos um pouco da história dos números primos e da busca incessante dos matemáticos para encontrar um mecanismo que representasse todos eles, trouxemos à tona a importante contribuição de Eratóstenes e seu dispositivo para encontrar os primos menores que n. Não esquecemos de fazer referência a Euclides e seu dispositivo prático para determinação do mdc de dois números e que injustamente raramente é mencionado nos livros didáticos

O estudo sobre equação diofantina pode ser entendido como mais uma oportunidade de aprendizagem, pois não acreditamos no, “quanto mais exercícios, melhor”, mas “quanto melhores os exercícios, melhor”. Devemos manter nossos alunos em contato com a aritmética e a álgebra (a pele que segura todas as lindas penas da matemática.) durante todo o ensino médio.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Informação e documentação**: referências – elaboração: 6023: 2002. Rio de Janeiro, 2002.

______. **Informação e documentação**: Trabalhos acadêmicos - Apresentação: **NBR 14724**. Rio de Janeiro, 2005.

CONDURÚ, Marise Teles; José Almir Rodrigues. **Elaboração de trabalhos Acadêmicos** — Normas, critérios e procedimentos, 3ª Ed. Belém- PA: GPHS, 2007.

DECARTES, Renè. EPIGRAMA — **Discurso do Método**, pg.11.Tradução de: Enrico Corvisieri). Disponível em:< >. Acessado em 12 de dezembro de 2013.

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Teoria Elementar dos Números.** São Paulo: Editora Nobel S.A, ano 1981.

ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Tradução: Claus Ivo Doering. Porto Alegre — RS: Bookman, 2006.

BRUCHEIMER, M. & ARCAVI, A. **A visual approach to some elementary Number Theory**. Mathematical Gazette, 79, pág. 471, Nov. 1995.

Carvalho, J. B. Pitombeira de. **Euclides, Fibonacci e Lamé**. Revista do Professor de Matemática, 24, pág. 32, 1993.

GUZMAN, Miguel de. **Tendencias inovadoras en Educación Matemática**. Olimpiada Matematica Argentina, 1992.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

HYLE; HOSOYA, Haruo. **International Journal for Philosophy of Chemistry**, Vol. 19, No.1 (2013), p.87-105, 2013. Disponível em: <http://www.hyle.org>. Acessado em Março de 2014.

EVES, Howard. **Introdução à Historia da Matemática**. São Paulo: Unicamp, 2008.

LA ROQUE, Gilda; PITOMBEIRA, J. B. **Uma equação diofantina e suas resoluções**. Revista do Professor de Matemática, 19, pág. 39, 1991.

OLIVEIRA, Z. C. **Uma interpretação geométrica do *mdc***. *Revista do Professor de Matemática*, 29, pág. 24, 1995.

ORE, Oystein. **Number Theory and its History**. Mc-Graw-Hill, 1948.