Universidade Estadual de Santa Cruz

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL: USO DA *TÁBUA TRIGONOMÉTRICA*

por

Cleyton Barros Souza ⋆

Mestrado Profissionalizante em Matemática - Ilhéus - BA

Orientador: Ricardo M. Bentín

⋆Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes obtido através da SBM.

Cleyton Barros Souza

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL: USO DA TÁBUA TRIGONOMÉTRICA

Ilhéus
2013

Cleyton Barros Souza

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL: USO DA TÁBUA TRIGONOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo M. Bentín

Universidade Estadual de Santa Cruz
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Ilhéus
2013

S729 Souza, Cleyton Barros.

Matemática experimental: uso da tábua trigonométrica / Cleyton Barros Souza . – Ilhéus, BA: UESC, 2013.

xiii, 89 f. : il.

Orientador: Ricardo M. Bentín.

Dissertação (mestrado) –Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Bibliografia e apêndice.

1. Trigonometria – Estudo e ensino. 2. Trigonometria – Tabelas. 3. Trigonometria – Construções geométrícas. I. Título.

CDD 516.24

Cleyton Barros Souza

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL: USO DA TÁBUA TRIGONOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 21 de março de 2013:

Ricardo M, Bentín
Orientador

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves

Jailson de A. Rodrigues

Prof. Dr. Jailson de Araujo Rodrigues

Ilhéus - 2013

DEDICATÓRIA

As pessoas que souberam me estender a mão nas horas difíceis; a meus pais, Joseane e Genivaldo, que acreditaram na minha capacidade, perseverança e força de vontade. E de modo muito especial, dedico todo o meu trabalho e cada passo que dei neste curso às duas pessoas incríveis e singulares na minha vida: minha esposa, Ana Carolina e minha filha, Ana Clara, pelo apoio, paciência e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

Agradeço a **Luz Divina** por sempre iluminar meus caminhos, fazendo com que perceba as oportunidades que a vida me oferece;

Ao professor **Ricardo M. Bentín**, meu orientador, por sua atenção, dedicação e importantes contribuições ao longo deste estudo, principalmente pela amizade e confiança depositadas em minha pessoa, pelo suporte e auxílio a essa pesquisa, mas também pela figura humana, meu muito obrigado;

A todos os colegas da turma de mestrado do **PROFMAT/UESC**, pela oportunidade de estarmos juntos. Em especial aos amigos Evandro, Igor, Marcos e Satiro, pelas inúmeras horas de estudo, cumplicidade, companheirismo, e cuja amizade e colaboração foram muito importantes para poder continuar insistindo no que parecia às vezes ser uma meta inatingível;

Aos professores do **PROFMAT**, com um carinho especial à Sérgio Mota, André Nagamine, German Ignácio, Afonso Henriques e Francisco Bruno, pelas valiosas contribuições ao meu crescimento e amadurecimento;

Ao professor Geraldo, pelo carinho e pronto atendimento nas inúmeras vezes em que pedi ajuda;

Eu jamais posso esquecer do coordenador do nosso programa, professor **Sérgio Mota Alves**, a pessoa que me auxiliou o tempo todo durante todo o curso, sou grato pela amizade paciência e entusiasmo aspectos essenciais para que este projeto se tornasse possível. A ele devo muito e carregarei esta gratidão comigo sempre;

À **CAPES** pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

À **SBM** pela brilhante iniciativa de criar este programa.

Aos membros da banca pelas valiosas sugestões, apontamentos e correções propostas;

A meus pais **Joseane Barros Souza** e **Genivaldo de Albuquerque Souza**, minha avó **Judite Barbosa da Silva**, e minhas tias **Elisabete Barros** e **Jesonete Ferreira**, pela compreensão, incentivo e por tudo que fizeram nesta vida para que eu me tornasse a pessoa que sou.

A minha esposa **Ana Carolina** e minha filha **Ana Clara**, sem as quais eu não teria sequer começado esse trabalho, pelo apoio incomensurável e por acreditar mesmo quando eu não acreditava.

ABSTRACT

First of all we make an approach on trigonometric patterns found in everyday life and some ideas about the emergence and development of trigonometry theorems to Verifying the necessity for precision in some settings. Then we will see some basic definitions of trigonometric ratios *sine*, *cosine*, *tangent*, *cotangent*, *secant* and *cosecant* and their representations determined by some remarkable angles. Later we will propose situations related to everyday problems, where we write the representation of these situations for better implementation from *written language* for *mathematical language*, which can be induced to find some patterns of regularity, by registering and representing geometrically their views. Then we will describe the preparation of material support for *Trigonometric Board* where this material will be of paramount importance for this work, also we will described the materials needed for manufacturing, the construction stages, as well as some visual records. Finally we will suggest an approach to teaching trigonometric ratios via geometric construction, using the *Trigonometric Board* created specifically for this purpose, with the goal of improving a conceptual and geometrical approach on right triangles in which they will be related and will not diverge allowing to work the related trigonometric concepts will be, regarding to viewing, measuring and handling. In the development process we present this material so that we can manipulate, investigate and analyze these concepts through activities and proposals that we can reach conclusions so we can still enrich and stimulate our future thoughts.

RESUMO

Primeiramente verificamos padrões trigonométricos encontrados no cotidiano em uma introdução ao estudo do surgimento e desenvolvimento da Trigonometria, observamos a necessidade de teoremas para a precisão de algumas definições. Na continuação, vimos algumas definições básicas das razões trigonométricas *seno*, *cosseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante* e *cossecante* e suas representações determinadas por alguns ângulos notáveis.

Na sequência propomos uma situações problemas relacionadas com o cotidiano, onde fizemos a representação escrita destas situações para uma melhor transposição da *linguagem escrita* para a *linguagem matemática*, onde encontramos padrões de regularidade, registrando e representando geometricamente as suas observações. Logo, descrevemos a elaboração do material de apoio, a *Tábua Trigonométrica*, este material é de suma importância para a realização deste trabalho, sendo descrito os materiais necessários para a sua confecção, as etapas de construção, bem como o seu registro visual.

Finalmente apresentamos uma abordagem do ensino de razões trigonométricas via construção geométrica, utilizando a *Tábua Trigonométrica* criada especificamente para este fim, com o objetivo de se criar uma abordagem conceitual e geométrica no triângulo retângulo onde elas se relacionem e não divirjam, permitindo que se trabalhem os conceitos trigonométricos relacionados, no que se refere a visualização, medição e manipulação. No desenvolvimento do processo apresentamos o material de modo que possamos manipular, investigar e analisar os conceitos através das atividades propostas e que consigamos chegar as conclusões que nos enriqueçam e possam ainda estimular nosso pensamento futuro.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Várias vezes no decorrer da minha atividade profissional fui abordado pelos meus alunos perguntando-me: "professor nesta questão uso seno, cosseno ou tangente." Analisava a questão com a experiência que tinha e facilmente indicava para eles a razão correta a ser utilizada. Após essa intervenção verifiquei que eles conseguiam desenvolver a questão sem nenhum problema e chegar aos resultados corretos. Mas, se eu não tivesse lhes mostrado o caminho, dificilmente eles conseguiriam encontrá-lo sem questionar seus resultados, pois naquele momento, para eles, qualquer razão trigonométrica poderia ser usada. Quando as questões eram formuladas por meio de representação geométrica, notei que era mais fácil, pois era só identificar primeiramente qual era a hipotenusa e depois os catetos e o valor a ser encontrado teria que estar em alguma daquelas razões, daí era só escolher a que se adequaria a mesma. Notei, porém que eles só sabiam fazer a manipulação das questões unicamente daquela forma, pois o ensino era feito a partir de definições e depois de aplicações de vários exercícios até "aprenderem" pela repetição do exaustivo trabalho de resolver questões. Pergunto-me: "será que ensinei de maneira correta? Os alunos realmente entenderam a importância e o significado do que foi proposto?" A minha atuação como professor de Matemática era apenas superficial.

A forma com que os livros didáticos aborda determinados assuntos não é clara, especialmente quando se trata de Trigonometria. As relações trigonométricas apareciam prontas, desprovidas de significado. Quando o estudo se aprofundava na abordagem de algumas questões sobre as fórmulas das razões trigonométricas no triângulo retângulo, por exemplo:

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad cos\ \alpha = \frac{c}{a},$$

é notório e visivelmente claro que em hipótese alguma os alunos iriam conseguir um aprendizado eficaz, pois lamentavelmente os livros didáticos não abordam de forma adequada e minuciosa suas respectivas demonstrações, pois é desta forma que o conteúdo é proposto para o aluno.

Neste trabalho, propomos o desenvolvimento de estratégias para o ensino de razões trigonométricas no triângulo retângulo. Explicando passo a passo os caminhos que os alunos precisam utilizar para obter a resposta do que foi proposto e descrever com palavras a construção de resultados, utilizaremos uma Tábua Trigonométrica que foi confeccionada exclusivamente para esta atividade, para assim explicar e dar sentido ao estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Com o uso deste material concreto abordaremos o conteúdo de uma forma diferente, pois estas atividades podem ser desenvolvidas, de forma a proporcionar uma melhor compreensão destes conceitos de Trigonometria. Esse domínio passa por um processo lento e trabalhoso, cujo começo deve ter como objetivo a elaboração de conjecturas que estimulem a busca de regularidades, a generalização de *padrões* e a capacidade de argumentação, os quais são elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento não só de caráter trigonométrico, mas também matemático.

Contudo, a Trigonometria não deve possuir apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista sem chegar a deixar de levar em conta suas características estruturais específicas. É importante que se perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos tem a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. De fato, não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informações com suas definições e exemplos. Acrescentamos aqui, apenas que, na medida do possível, que seja proposto neste trabalho não apenas a apresentação de soluções dos problemas abordados, mas a discussão e concretização adequada através do material concreto no processo de construção do conhecimento.

A abstração torna-se um novo ponto de partida, numa “cadeia”, em geral não linear, onde podem coexistir em um mesmo nível, diferentes estruturações do concreto, organizadas a partir de distintos sistemas de abstrações e que podem dar origem a diversos procedimentos, como é colocado pelo prof. Antar [3].

A partir destas observações verificaremos que não basta termos só ideias, elas tem que ser claras e objetivas, pois aquilo que é ensinado tem que fazer sentido para aqueles que estão construindo um aprendizado significativo, embasado não só em teoremas mas nas observações de infinitas possibilidades que nos cercam, onde tudo que está ao nosso redor é de alguma forma uma representação geométrica, sejam elas regulares ou não, e tem que fazer algum sentido, senão irão se tornar meras informações. Este trabalho está embasado nestas observações, onde os alunos não irão relacionar os teoremas a partir de aplicações em exemplos como é abordado nos livros didáticos, mas de uma forma puramente construtiva, feita a partir de suas próprias observações e com material concreto, manipulável e com um grande número de possibilidades como veremos no decorrer do texto.

CAPÍTULO 1

DIRECIONANDO O ENSINO DA TRIGONOMETRIA

1.1 Reconhecendo padrões trigonométricos em situações do cotidiano

Em um dia como outro qualquer, fui abordado por um aluno que estava a observar os seus colegas se deslocando em um movimento linear sobre uma rampa com um ângulo qualquer e a medida que eles subiam esta rampa a distância entre esta pessoa que estava sendo observada e o solo aumentava. O aluno então me perguntou:

"professor aquela rampa é semelhante ao triângulo ao qual nós estávamos estudando em nossa aula de Trigonometria. Mas o que eu não entendo é porque quando a distância entre a pessoa e o solo aumenta o ângulo continua o mesmo?"

De fato **ensinei** ao meus alunos a resolver razões trigonométricas por meios de exemplos prontos abordados nos livros didáticos, mas a partir desta observação identifiquei que o que eu tinha ensinado não fazia sentido algum. Bastava uma observação diferente e todos as definições passavam a não fazer sentido.

A partir daí comecei a fazer algumas observações em relação a abordagem deste conteúdo. Vamos observar esta rampa, na figura (1.1), que une dois pisos em desnível.

Figura 1.1: Trigonometria no cotidiano: rampa em declive

1.1.1 Representação escrita de definições formais

Baseada na figura (1.1), usaremos como exemplo a seguinte situação problema:

"Uma pessoa desloca-se sobre uma rampa, e percorre uma distância de 2 metros, verificando que seu deslocamento na vertical foi de 1 metros, pois consegue-se verificar isso facilmente através de uma fita métrica de exatamente 1 metros de comprimento. Usa essa fita duas vezes consecutivas para seu deslocamento sobre a rampa e uma vez para verificar a distância que se encontra do solo. Continuando seu deslocamento sobre a rampa ela percorreu agora 3 metros de comprimento. Usou a fita três vezes consecutivas para seu deslocamento sobre a rampa e agora não conseguiu verificar a distância que se encontra do solo, pois a fita estava restrita a 1 metros de comprimento. E agora como ela poderá calcular esta distância?"

Na maior parte das vezes, não é prático ou possível tentar esticar uma fita métrica que nos permita fazer a medição diretamente e também não teríamos em qualquer ponto da rampa resultados precisos.

Primeiramente poderemos descrever o que realmente a questão está propondo como atividade e o que queremos encontrar. Quando isto estiver bem claro é hora de seguirmos para o próximo passo que é representar geometricamente esta atividade no papel. Então iremos desenhar uma reta representando o solo como referência, localizaremos a rampa em relação ao solo, verificaremos que existe um ângulo entre o solo e a rampa e definiremos um limite para esta rampa, onde teremos então por construção geométrica e pela necessidade de resolver esta questão o aparecimento de um triângulo específico que é o triângulo retângulo. Observamos que no início da questão não definimos nem ao menos citamos que usaríamos, triângulos, nem triângulos retângulos e muito menos alguma figura geométrica.

Antes de continuar o estudo sobre o problema proposto iremos salientar a importância histórica da Trigonometria. O objetivo desta observação é mostrar como a Trigonometria evoluiu ao longo da história, e que o seu surgimento está relacionado com a mensuração prática, e tais abordagens devem ser usadas, ao ensinar Trigonometria, e de alguma forma se discuta com os alunos questões que os levem a perceber que o conhecimento matemático não surgiu pronto e acabado, que de alguma forma a evolução possa ser acompanhada e alguma parte do caminho feita com eles.

Assim, descreveremos alguns momentos do desenvolvimento da Trigonometria que nos leve à compreensão do por que e para que usaremos esses conceitos. Para que desse modo, possamos ter um melhor acesso à conceitos trigonométricos onde se faz necessário não só entender os resultados implicados por esses conceitos, entendendo também o motivo pelo qual o conceito foi apresentado de uma determinada forma. Então precisamos fazer um refinamento preciso dos conceitos, para que a partir deles possamos defender uma estrutura teórica e dessa forma enxergar uma definição como uma síntese de um grande desencadeamento de ideias.

1.2 Introdução ao estudo do surgimento e desenvolvimento da Trigonometria

A origem da Trigonometria é incerta. Entretanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento desta se deu principalmente devido aos problemas ocasionados pela Astronomia, Agrimensura e pelas Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios.

Boyer[2] comenta que a Trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação. Teoremas entre as razões, entre lados dos triângulos semelhantes, tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. Com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem.

Nas obras de *Euclides* citadas em *Boyer*[2] não há Trigonometria no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas.

Segundo descrito em *Eves*[1] o astrônomo *Hiparco de Nicéia*, por volta de 180 a 125 a.C., ganhou o direito de ser chamado **"o pai da Trigonometria"**, pois na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. Evidentemente, *Hiparco* fez esses cálculos para usá-los em seus estudos de Astronomia, sobre sua origem pouco se sabe. Também destaca *Eves* [1] que *Aristarco* sabia que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180^o para 0^o, aproximando-se do limite 1. No entanto, parece que antes de *Hiparco* empreender a tarefa ninguém tinha tabulado valores correspondentes do arco e da corda para toda uma série de ângulos. Foi sugerido, no entanto, que *Apolônio* pode ter-se antecipado a *Hiparco* quanto a isto, e que a contribuição deste último à Trigonometria foi apenas a de calcular um melhor conjunto de cordas do que seus predecessores.

Mas a necessidade de resolver problemas com representações trigonométricas no triângulo retângulo é ainda mais antiga. Veremos na figura (1.2) um problema que foi enunciado em uma publicação chinesa *Kin Tschang*, 2600 a.C. e editado por *Tsin-Kin-Tschaou*, 1250 a.C..

Figura 1.2: Bambu quebrado em um certo ponto

No século XII, o matemático *Bhaskara* assim o publicou no *Lilavati* e *Vija-Ganita*:

"Um bambu de 32 côvados, erguendo-se verticalmente sobre um terreno horizontal, é

quebrado num certo ponto pela força do vento. Sua extremidade vem tocar a terra a 16 *côvados de seu pé. Dize, matemático, a quantos côvados do pé ele se quebrou".* Ver figura (1.2) , atividade extraída do livro de Ênio[5].

Figura 1.3: Papiro *Rhind*, Museu de Londres

No Egito isso pode ser observado no Papiro de *Ahmes*, conhecido como Papiro *Rhind*, ver figura (1.3), que data de aproximadamente 1650 a.C. e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo. *Ahames* não foi claro ao expressar o significado desta palavra mas, pelo contexto, pensa-se que o **seqt** de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à ***co-tangente***. Destaca Eves [1], que talvez seja a mais notável das tabulas matemáticas babilônicas já analisadas e que de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três milênios e meio. O mais extenso dos de natureza matemática tem cerca de $0,3$ m de altura e 5 m de comprimento, que está agora no *British Museum*, exceto uns poucos fragmentos que estão no *Brooklin Museum*. Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do rio Nilo, por um antiquário escocês, *Henry Rhind*, que lhe emprestou o nome. Às vezes, é chamado Papiro *Ahmes* em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. O escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio, de cerca de 2000 a 1800 a.C., e é possível que parte desse conhecimento tenha provindo de *Imhotep*, o quase lendário arquiteto e médico do Faraó *Zoser*, que superintendeu a construção de sua pirâmide há cerca de 5000 anos.

1.3 Verificando a necessidade de teoremas para justificar algumas definições

Podemos observar como citado na subseção (1.1.1), que a Trigonometria não foi definida a partir de teoremas propostos e sim da necessidade de resolver problemas ao qual o homem se deparou durante suas necessidades.

Desta forma veremos essa rampa sendo construída geometricamente na figura (1.4).

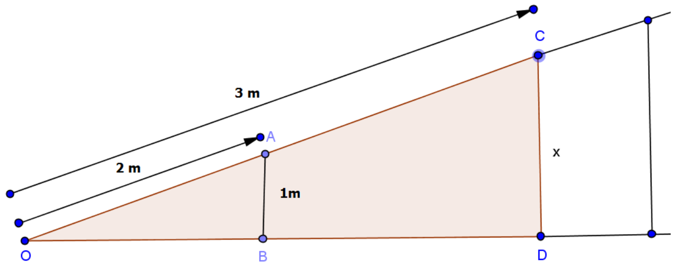

Figura 1.4: Representação geométrica da rampa.

Observamos que existem dois triângulos e estes triângulos por sua vez são retângulos. Então a priori foi verificada a necessidade de trabalharmos com triângulos retângulos. Feito esta triagem fica claro e evidente qual parte da Matemática teremos que utilizar para resolvermos este problema.

Iremos observar que estes triângulos OAB e OCD tem algo em comum, pois fazem parte de um desenho representativo do problema. A primeira análise dos triângulos é a observação que ambos possuem elementos comuns, depois verificamos que os ângulos correspondentes tem a mesma medida, então as medidas dos segmentos correspondentes são proporcionais, isto foi verificado por construção geométrica na figura (1.4) onde o deslocamento linear sobre a rampa é proporcional a distância da mesma ao solo. A conclusão é óbvia. Trata-se de duas figuras semelhantes as quais são triângulos. Podemos salientar que teremos que tomar cuidado, pois esta definição de polígono só é válida quando **pelo menos uma das condições** são satisfeitas: (i)ângulos correspondentes congruentes ou (ii)lados correspondentes proporcionais.

Definição: *"Dois polígonos são **semelhantes** quando os ângulos correspondentes são congruentes ou os lados correspondentes são proporcionais".*

Então podemos concluir que a razão entre dois lados correspondentes em polígonos semelhantes denomina-se **razão de semelhança**, ou seja:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC}.$$

Então a partir desta definição poderemos resolver a situação problema proposta. Substituindo nas razões acima temos:

$$\frac{1}{CD} = \frac{2}{3} \Longrightarrow CD = 1,5\ metros.$$

Logo, percorrendo 3 metros de comprimento na rampa, o deslocamento na vertical será de $1,5$ metros. A razão entre o deslocamento na vertical e a distância percorrida sobre a rampa depende exclusivamente do ângulo que a rampa forma com o plano horizontal, isso pode ser facilmente visto, pois se a rampa tiver sua inclinação aumentada isto acarretará em um aumento das distâncias da rampa ao plano horizontal. Podemos também relacionar o deslocamento na horizontal com a distância percorrida sobre a rampa ou ainda relacionar os deslocamentos na vertical e na horizontal. Observamos que essas relações também dependem **somente do ângulo** que a rampa forma com o plano horizontal. Então a partir deste exemplo poderemos definir no capítulo seguinte algumas razões entre os lados de um triângulo retângulo. Essas razões são o alicerce da Trigonometria.

Podemos utilizar as razões trigonométricas em situações em que se deseja efetuar medidas envolvendo objetos que não são diretamente acessíveis, verificando deslocamentos lineares entre um ângulo qualquer representado por um triângulo retângulo. Sendo talvez necessário trabalhar com a realidade em exemplos relacionados como cotidiano, criando assim possibilidades para a própria produção ou construção.

CAPÍTULO 2

DEFINIÇÕES BÁSICAS DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

2.1 A importância do uso das razões trigonométricas

Agora verificaremos como poderemos entender um teorema a partir de observações de padrões encontrados em situações propostas e não abordar diretamente os conteúdos e conceitos previamente definidos. De agora em diante iremos considerar o que vimos anteriormente sobre as construções dos triângulos retângulos semelhantes.

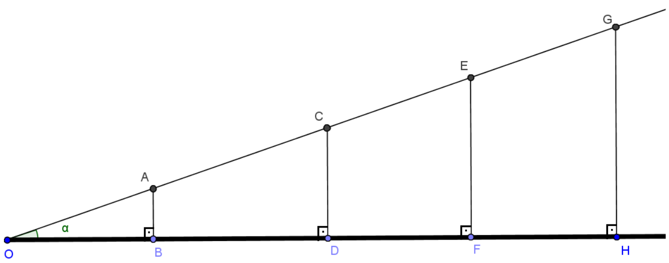

Figura 2.1: Triângulos retângulos semelhantes.

Dado um ângulo agudo qualquer de medida α, e considerando os infinitos triângulos retângulos que possuem o ângulo de medida α. Como podemos ver na figura (2.1) alguns triângulos que podem ser formados.

Observemos na figura (2.1) que os triângulos OAB, OCD, OEF e OGH são semelhantes. Assim podemos afirmar baseado no capítulo anterior, que a razão entre dois lados quaisquer de um deles é igual à razão entre os lados correspondentes aos outros.

Porém, observamos em nossos estudos que fizemos utilizando o livro de Morgado [11], que o *Princípio Fundamental da Enumeração* ou *Princípio da Multiplicação*, nos diz que:

Definição: *"Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy."*

Assim se o triângulo estudado tem três lados, podemos formar as respectivas razões desses lados tomando as decisões d_1, d_2 e d_3, onde d_1 é a primeira decisão que será tomada pelo maior lado deste triângulo e d_2 e d_3 pelos outros dois lados.

Como d_1 pode ser tomada de duas maneira diferentes onde o maior lado pode escolher primeiro um lado e depois o outro lado que não foi escolhido primeiramente, depois d_2 e d_3 podem serem tomadas também de duas maneira diferentes cada uma, fazendo de modo análogo a d_1. O número total de decisões que podem ser formadas pelos lados do triângulo estudado é portanto $2 + 2 + 2 = 6$ ou $3 \times 2 = 6$, notemos que o *Princípio Multiplicativo* permite obter o número de elementos do conjunto. Ou seja, podemos formar seis razões trigonométricas com os lados destes triângulos.

Então veremos como podemos representar essas razões com base nos triângulos retângulos da figura (2.1) :

$$\frac{BA}{OA} = \frac{DC}{OC} = \frac{FE}{OE} = \frac{HG}{OG} \Longrightarrow r_1$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} \Longrightarrow r_2$$

$$\frac{BA}{OB} = \frac{DC}{OD} = \frac{FE}{OF} = \frac{HG}{OH} \Longrightarrow r_3$$

$$\frac{OB}{BA} = \frac{OD}{DC} = \frac{OF}{FE} = \frac{OH}{HG} \Longrightarrow r_4$$

$$\frac{OA}{BA} = \frac{OC}{DC} = \frac{OE}{FE} = \frac{OG}{HG} \Longrightarrow r_5$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OE}{OF} = \frac{OG}{OH} \Longrightarrow r_6$$

Notemos, então que as constantes r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 e r_6 dependem exclusivamente da medida α, e não das dimensões do triângulo escolhido para obtê-las. Se infinitos triângulos retângulos que possuem o mesmo ângulo agudo são semelhantes entre si, então as constantes r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 e r_6 podem ser obtidas de maneira análoga, a partir de qualquer um deles.

Vamos considerar só um triângulo representado na figura (2.1), o triângulo AOB, os demais são feitos de modo análogo.

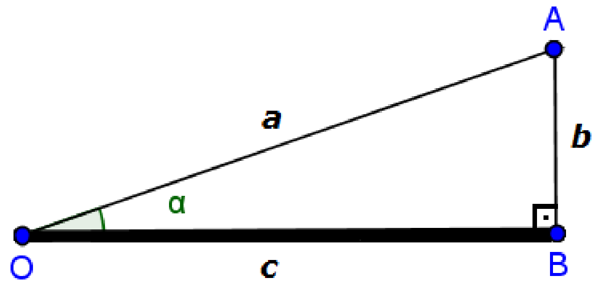

Figura 2.2: Triângulo retângulo AOB.

Observemos na figura (2.2), que o segmento de reta OA será representado por uma medida que iremos chamar de $\boldsymbol{a}$, o seguimento de reta AB, será representado por uma medida que iremos chamar de $\boldsymbol{b}$ e o segmento de reta OB será representado por uma medida que iremos chamar de $\boldsymbol{c}$. A medida $\boldsymbol{a}$ que é a medida do maior lado deste triângulo é denominada de *Hipotenusa*.

A palavra **Hipotenusa** (do grego, $\upsilon\pi o\tau\varepsilon\iota\nu o\upsilon\sigma\alpha$, *hypoteínousa*), que significa **"contrário a..."**, que se estende debaixo (dos ângulos agudos) é um termo que designa o lado mais longo de um triângulo retângulo, por ser oposto ao ângulo reto, que define este tipo de triângulo. As medidas $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ que representam os dois lados menores do triângulo retângulo serão denominadas de **"Catetos"**. A palavra **"Cateto"** (do grego, $\kappa\alpha\tau\varepsilon\tau o\sigma$, *kathetos*), significa **"que cai perpendicular"**, pois dependendo de como visualizamos o triângulo retângulo, um de seus lados menores estará na vertical - como algo que cai.

Os **catetos** formam o ângulo reto do triângulo retângulo e podem ser denominados **opostos** ou **adjacentes**, de acordo com a sua posição em relação a um dado ângulo do triângulo retângulo. Se o **cateto** está junto ao ângulo de referência que poderemos chamar de α, é chamado **adjacente**; se está oposto a este ângulo α, é chamado **oposto**, como podemos ver na figura (2.2). Logo no triângulo dado o lado $\boldsymbol{b}$ será o **cateto oposto** e o lado $\boldsymbol{c}$ o **cateto adjacente** relativos ao ângulo α.

Podemos representar r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 e r_6 da seguinte forma:

$$r_1 = \frac{\textit{medida do cateto oposto a } \alpha}{\textit{medida da hipotenusa}},$$

$$r_2 = \frac{\textit{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\textit{medida da hipotenusa}},$$

$$r_3 = \frac{\textit{medida do cateto oposto a } \alpha}{\textit{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

$$r_4 = \frac{\textit{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\textit{medida do cateto oposto a } \alpha},$$

$$r_5 = \frac{\textit{medida da hipotenusa}}{\textit{medida do cateto oposto a } \alpha},$$

$$r_6 = \frac{\textit{medida da hipotenusa}}{\textit{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

Agora para podermos fazer uma melhor manipulação na resolução de problemas propostos, é conveniente usarmos variáveis nos lugares dos catetos e da hipotenusa, como descrevemos acima.

Então vejamos como ficaria esta representação usando as variáveis nos lugares das denominações que foram verificadas.

$$r_1 = \frac{b}{a}, \qquad r_2 = \frac{c}{a}, \qquad r_3 = \frac{b}{c}, \qquad r_4 = \frac{c}{b}, \qquad r_5 = \frac{a}{b}, \qquad r_6 = \frac{a}{c}$$

Estas razões r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 e r_6, servirão de referência para que possamos nos embasar nas relações que iremos desenvolver mais adiante.

2.1.1 *Seno* e *cosseno* de um ângulo agudo qualquer

Agora que já sabemos as denominações das razões de r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 e r_6, onde estas se comportam da mesma forma em qualquer triângulo retângulo. Iniciaremos o nosso estudo chamando a razão r_1 de ***seno***.

Vamos voltar um pouco na história da Matemática, para entendermos porque a palavra ***seno*** foi usada para denominar essa razão.

A palavra hindu *jiva* que significa meia corda, dada ao ***seno*** foi traduzida para o árabe que chamou o ***seno*** de *jiba*, pois esta palavra tem o mesmo som que *jiva*. Então *jiba* se tornou *jaib* nos escritos árabes. Mas a palavra adequada que deveria ter sido traduzida seria *jiba*, que significava **a corda de um arco**, em vez de *jaib*. Pois a origem do ***seno*** era relacionado ao estudo das cordas de arcos numa circunferência.

Continuando a nossa tradução observamos que a origem do nome ***seno*** vem do latim ***sinus*** que significa seio, curva, concavidade ou volta. Muitos acreditam que este nome se deve ao fato que o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso. O interessante nesta abordagem e que na verdade, ***sinus*** é a tradução latina da palavra árabe *jaib*, que significa, **bolso ou prega de uma vestimenta** que não tem nada a ver com o conceito matemático de ***seno***. Até hoje perdura esta tradução defeituosa. Mas foi **Fibonacci** que usou o termo **sinus rectus arcus** com isso o uso universal de ***seno*** foi rapidamente encorajado. Então qual seria a justificativa para este erro de tradução? Um argumento lógico seria o fato de que em árabe, como em hebraico, é frequente escrever-se apenas as consoantes das palavras, cabendo ao leitor à colocação das vogais.

Chamaremos o r_2 de ***cosseno***. Por sua vez, o ***cosseno*** seguiu um curso semelhante no que diz respeito ao desenvolvimento da notação. **Viète** usou o termo ***sinus residuae*** para o ***cosseno***, e **Gunter** em 1620, sugeriu ***co-sinus***, como descrito em Eves [1].

Usaremos ***sen*** e ***cos*** nos lugares de ***seno*** e ***cosseno***, respectivamente para simplificarmos nossa simbologia. Substituindo a razão r_1 e r_2 por ***seno*** e ***cosseno*** do respectivo ângulo α, temos:

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a}, \quad cos\ \alpha = \frac{c}{a}.$$

Assim podemos reescrever as representações das razões r_1, r_2, como:

$$sen\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa},$$

$$cos\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}.$$

A partir dos conhecimentos destas razões relacionadas especificamente com um certo ângulo α, poderemos nos aprofundarmos em relação ao estudo trigonométrico no triângulo retângulo no que diz respeito ao ***seno*** e ***cosseno*** deste ângulo α.

Não é nosso objetivo nos aprofundarmos no estudo de ***seno*** e ***cosseno*** de um arco trigonométrico, mas como título de esclarecimento em nosso trabalho iremos verificar como é representado trigonometricamente a ideia de ***seno*** e ***cosseno***.

Consideremos agora uma circunferência de raio unitário **(r=1, por conveniência)** e para facilitar nosso trabalho, onde o seu centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal como podemos ver na figura (2.3).

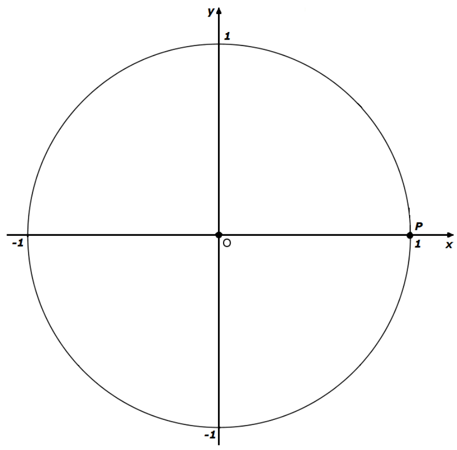

Figura 2.3: Circunferência trigonométrica.

Essa estrutura é chamada de circunferência trigonométrica. Não temos necessidade de relatar neste trabalho, as convenções que as descreve. Consideremos nesta circunferência trigonométrica um arco PA de medida α, $0^{o} < \alpha < 90^{o}$ representado na figura (2.4).

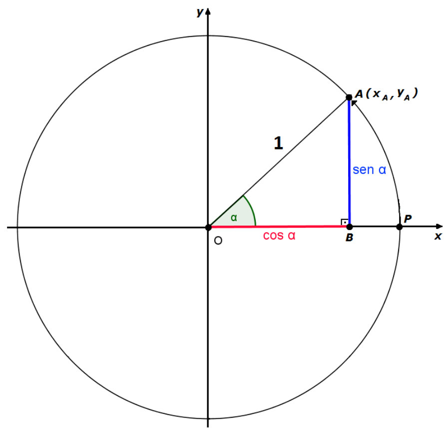

Figura 2.4: Representação das posições do *seno* e *cosseno* no círculo trigonométrico.

No triângulo retângulo OAB, temos:

$$sen\ \alpha = \frac{AB}{1} = AB,$$

$$cos\ \alpha = \frac{OB}{1} = OB.$$

Vejamos a seguir a definição de ***seno*** e ***cosseno*** no círculo trigonométrico de acordo com Paiva[8].

Definição: *"Dado um arco trigonométrico PA de medida α, chama-se* ***seno*** *e* ***cosseno*** *de α a ordenada e a abscissa do ponto A, respectivamente:"*

$$sen\ \alpha = Ordenada\ de\ \text{A}= y_A,$$

$$cos\ \alpha = Abscissa\ de\ \text{A}= x_A.$$

A abordagem do círculo trigonométrico é de suma importância para darmos sentido ao que iremos descrever e representar posteriormente.

2.1.2 *Tangente* e *co-tangente* de um ângulo agudo qualquer

Chamaremos as razões r_3 e r_4 de ***tangente*** e ***co-tangente***, respectivamente. E veremos a seguir o porque destas denominações.

Deveria ser *tanjente*, mas ***tangente*** é a forma correta de escrita da palavra, devendo assim ser escrita com **g** e não com **j**. Devemos utilizar a palavra ***tangente*** sempre que quisermos referir alguma coisa que **tange** ou **toca**. Esta palavra é utilizada na Matemática para indicar uma linha que toca num só ponto outra linha ou superfície, sem a cortar. A palavra ***tangente*** tem sua origem na palavra em latim *tangens*, **"o que toca"**, do verbo *tangere*, **"tocar"**, de uma fonte Indo-Européia *tag*, **"tocar, manusear"**. E ***co-tangente*** nada mais é do que a tangente do complemento de um ângulo.

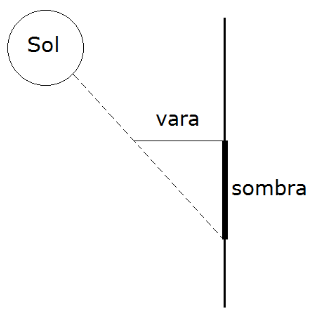

Figura 2.5: Sombra projetada por uma vara colocada na horizontal.

Não falaremos neste trabalho das *funções trigonométricas*, mas para que nossas explicações fiquem esclarecidas iremos usar adiante essa denominação. A *função tangente* era a antiga *função sombra*, que tinha ideias associadas a sombras projetadas por uma vara colocada na horizontal. A variação na elevação do Sol causava uma variação no ângulo que os raios solares formavam com a vara, ver na figura (2.5) e, portanto modificava o tamanho da sombra.

Assim, a *tangente* e a *co-tangente* vieram por um caminho diferente daquele das cordas que geraram o *seno* e o *cosseno*. Foram conceitos desenvolvidos juntos e não foram primeiramente associados a ângulos, sendo importantes para calcular o comprimento da sombra que é produzida por um objeto. O comprimento das sombras foi também de importância no relógio de Sol que por muitos séculos, a humanidade guiou-se pela sombra de um objeto projetada pelo Sol, a sombra do *gnomo*, dos relógios de Sol, para medir o tempo. O mais antigo relógio de Sol está exposto no museu de Berlim, acredita-se que pertenceu ao faraó *Tutmés III* do Egito (1504-1450 a.C.), e foi denominada ***régua egípcia***. Este era em pedra, na forma de um T, com uns 30 cm, suportando outra peça de mesmo comprimento e perpendicular. As linhas das horas eram marcadas na pedra a intervalos regulares. O T era voltado para o Este na parte da manhã e a Oeste na tarde. A posição da sombra da parte superior do T indicava a hora, como podemos ver na figura (2.6).

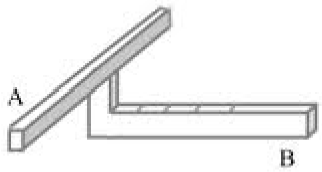

Figura 2.6: Régua egípcia, Egito (1504-1450 a.C.).

Tales usou os comprimentos das sombras para calcular as alturas das pirâmides através da semelhança de triângulos. As primeiras tabelas de sombras conhecidas foram produzidas pelos árabes por volta de 860. A palavra ***tangente*** foi primeiramente usada por *Thomas Fincke*, em 1583. O termo ***co-tangente*** foi primeiro usado por *Edmund Gunter*, em 1620. Ver em Eves [1]. As notações para a ***tangente*** e a ***co-tangente*** seguiram um desenvolvimento semelhante àquele do *seno* e *cosseno*. *Cavalieri* usou **Ta** e **Ta.2**, *Oughtred* usou **t arc** e **co arc**, enquanto *Wallis* usou **T** e **t**. As abreviações comuns usada hoje é **tan** ou **tg** sendo que a primeira ocorrência desta abreviação é devida a *Albert Girard* em 1626, com

tan escrito por cima do ângulo; **cot** foi primeiro usada por *Jonas Moore* em 1674.

Usaremos ***tg*** e ***cotg*** nos lugares de ***tangente*** e ***co-tangente***, respectivamente para simplificarmos nossa simbologia. Substituindo a razão r_3 e r_4 por ***tangente*** e ***co-tangente***, temos:

$$tg\ \alpha = \frac{b}{c} \quad \text{e} \quad cotg\ \alpha = \frac{c}{b}$$

Assim podemos reescrever as representações das razões r_3 e r_4, como:

$$tg\ \alpha = \frac{\textit{medida do cateto oposto a } \alpha}{\textit{medida do cateto adjacente a } \alpha},$$

$$cotg\ \alpha = \frac{\textit{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\textit{medida do cateto oposto a } \alpha}.$$

Observemos que a ***co-tangente*** é o inverso da ***tangente***, então podemos representa-lá da seguinte forma:

$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}.$$

Não é objetivo do nosso trabalho nos aprofundarmos no estudo da ***tangente*** e ***co-tangente***, pois verificamos anteriormente que o estudo foi feito em épocas bastantes distintas, mas para que nossas explicações fiquem esclarecidas no nosso trabalho como fizemos na seção (2.1.1), iremos verificar como são representadas trigonometricamente as ideias de ***tangente*** e ***co-tangente***, tendo em vista que em Matemática, a palavra ***tangente*** tem dois significados distintos mas **epistemologicamente relacionados**: um em *Geometria*, sendo o que toca uma curva ou superfície sem cortá-la, compartilhando um único ponto, e o outro em *Trigonometria*, onde a ***tangente*** é o coeficiente angular de uma reta.

Está descrito em Eves [1] que em Astronomia o plano tangente à Terra, era visto como:

"O ponto em que está o observador, ou plano paralelo a este e passando pelo centro da terra. Também linha circular, de que é centro o observador, em que parte da superfície entre o céu e a Terra, que a nossa vista abrange parecem juntar-se."

Acreditamos que a a partir deste fato a circunferência foi introduzida no estudo da representação da ***tangente*** nas razões trigonométricas.

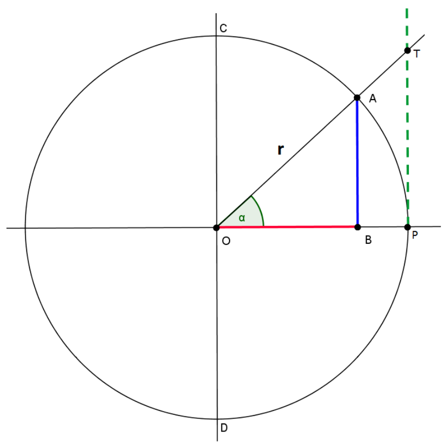

Figura 2.7: Círculo trigonométrico de centro O.

Podemos ver uma abordagem deste conceito em uma circunferência de raio r qualquer, cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal. Podemos então considerar um ângulo α e segmentos de retas paralelos aos eixos x e y.

Até aqui definimos ***seno***, ***cosseno*** e ***tangente*** somente para ângulos agudos, não sendo necessário para o nosso estudo estender esse conceitos para ângulos não agudos.

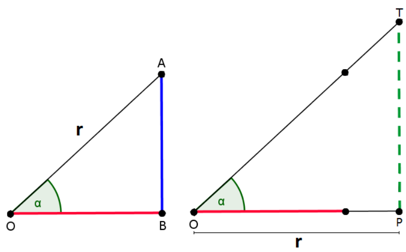

Figura 2.8: Triângulos semelhantes extraídos do círculo trigonométrico.

Como visto anteriormente, já conhecemos bem as relações entre os triângulos retângulos, então consideremos a semelhança entre os triângulos representados na figura (2.8), extraídos da figura (2.7).

Usando as razões estudadas sobre semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{AB}{TP} = \frac{OB}{OP}.$$

Observando o triângulo AOB, temos que:

$$sen\ \alpha = \frac{AB}{r}, \quad cos\ \alpha = \frac{OB}{r},$$

colocando os segmentos AB e OB em evidência, temos:

$$AB = r\ sen\ \alpha, \quad OB = r\ cos\ \alpha.$$

Notemos na figura (2.8) que no triângulo TOP, a medida do segmento OP é igual a r. Agora substituindo na primeira razão de semelhança, teremos:

$$\frac{r\ sen\ \alpha}{TP} = \frac{r\ cos\ \alpha}{r}.$$

Desta forma podemos observar que o único segmento de reta representado por um lado do triângulo TOP que ficou **indeterminado** em relação a circunferência foi o segmento TP.

Colocando o segmento TP em evidência teremos:

$$TP = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}\ r.$$

Mas vimos anteriormente que o *seno* e o *cosseno* dependem exclusivamente do ângulo e não das dimensões dos lados desses triângulos. Consideremos uma circunferência de raio igual a **um**, como fizemos nas seção (2.1.1).

Teremos agora, a definição algébrica de ***tangente***, a partir dessas observações:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}.$$

Também citamos anteriormente que ***tangente*** era uma reta que tocava a circunferência em um único ponto sem corta-lá. Então para dar sentido a descrição que fizemos de ***tangente***, devemos representá-la geometricamente.

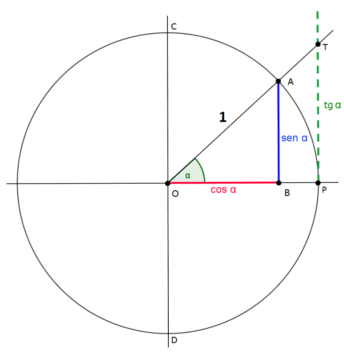

Figura 2.9: Representação da posição da *tangente* no círculo trigonométrico.

Podemos ver na figura (2.9) a representação geométrica deste conceito em uma circunferência de raio **r=1**.

Veremos a seguir a definição de ***tangente*** no círculo trigonométrico de acordo com Paiva [8].

Definição: *"Dado um arco trigonométrico PA, $A \neq C$ e $A \neq D$, de medida α, chama-se tangente de α ($tg\alpha$) a ordenada do ponto T obtido pela intersecção do prolongamento do raio $\overline{OA}$ com o eixo das tangentes."*

Para o estudo da ***co-tangente*** continuaremos a abordagem deste conceito em uma circunferência de raio r qualquer, como fizemos na ***tangente***, cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal e consideremos também um ângulo α e segmentos de retas paralelos aos eixos x e y.

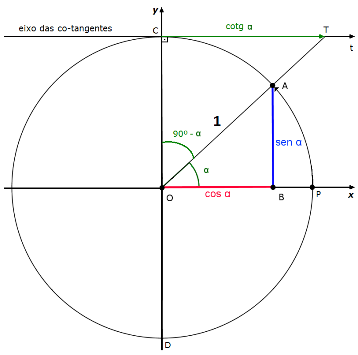

Figura 2.10: Representação da posição da *co-tangente* no círculo trigonométrico.

Para simplificarmos nosso trabalho faremos a representação no círculo trigonométrico da ***co-tangente*** a partir da definição da *tangente*, pois o seu desenvolvimento via semelhança de triângulos é feita de maneira análoga.

Consideremos nesta circunferência trigonométrica um arco PA de medida α, $0^{o} < \alpha < 90^{o}$ e o ponto **T**, de intersecção do eixo **t** com a reta OA representado na figura (2.10).

Do triângulo OCT, temos que:

$$tg\ (90^{o} - \alpha) = \frac{CT}{OC},$$

$$tg\ (90^{o} - \alpha) = \frac{sen\ (90^{o} - \alpha)}{cos\ (90^{o} - \alpha)} = \frac{CT}{1},$$

Observando a representação geométrica da figura (2.10), temos:

$$sen\ (90^o - \alpha) = cos\ \alpha,$$

$$cos\ (90^o - \alpha) = sen\ \alpha.$$

Logo:

$$\frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = CT \Longrightarrow CT = cotg\ \alpha,$$

como $CT = cotg\ \alpha$, podemos concluir a definição algébrica de ***co-tangente***

$$cotg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}.$$

Veremos a seguir a definição de ***co-tangente*** no círculo trigonométrico de acordo com Paiva [8].

Definição: *"A co-tangente de um arco trigonométrico PA de medida α, com sen $\alpha \neq 0$, é a abscissa do ponto T de intersecção do eixo das co-tangentes com a reta OA."*

Temos neste trabalho como foco principal o triângulo retângulo e não o círculo trigonométrico, mas não faria sentido algum afirmarmos as descrições das nomenclaturas da ***tangente*** e ***co-tangente*** sem ter representado as mesmas no círculo trigonométrico.

2.1.3 *Secante* e *co-secante* de um ângulo agudo qualquer

Chamaremos as razões r_5 e r_6 de ***secante*** e ***co-secante***, respectivamente. E veremos a seguir o porque destas denominações.

A ***secante*** do latim *(**secans**, **-antis**, particípio presente de seco, -are cortar)*, e em [*Geometria*], **diz-se de linha ou superfície que corta outra**. A ***co-secante***, por sua vez quer dizer, a secante do complemento de um ângulo.

De acordo com Eves [1] a ***secante*** e a ***co-secante***, não foram usadas pelos antigos astrônomos ou agrimensores. Estas surgiram quando os navegadores por volta do século XV começaram a preparar tabelas para se localizarem e usavam um antigo instrumento astronômico chamado **astrolábio**, que teve muita importância na astronomia, principalmente na astronomia náutica, quando os astros visíveis no céu constituíam o principal referencial dos primeiros grandes navegadores. O modelo mais antigo, **astrolábio planisférico**, foi provavelmente inventado pelos *gregos* ou *alexandrinos*, em aproximadamente 150 a.C., e mais tarde aperfeiçoado pelos árabes. Como podemos ver na figura (2.11) o **astrolábio planisférico** consiste basicamente de dois discos planos, geralmente feitos de cobre. Um deles representa a Terra e é marcado com as linhas de latitude, longitude, horizonte do observador e outras linhas indicando ângulos acima do horizonte. O outro disco é um mapa simples do céu, com as posições das estrelas indicadas por ponteiros curvos e com a eclíptica **(linha do movimento anual aparente do Sol)**. O **astrolábio** também era usado na agrimensura, para se conhecer, por exemplo, a altura de uma montanha a partir do cálculo do ângulo formado por sua sombra.

Figura 2.11: Astrolábio de 1572, construído por *Gualterus Arsenius*. O anel na parte superior permite que o instrumento seja pendurado na vertical. As partes em relevo curvo indicam algumas estrelas com seus nomes escritos em latim.

Copérnico sabia da ***secante*** que ele a chamou hipotenusa. **Viète** conhecia os resultados de:

$$\frac{cos\ sec\ \alpha}{sec\ \alpha} = cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{cos\ sec\ \alpha} = \frac{cos\ \alpha}{cotg\ \alpha} = sen\ \alpha.$$

As abreviações usadas por vários autores para ***secante*** e ***co-secante*** foram semelhantes para as funções trigonométricas já discutidas. **Cavalieri** usou **Se** e **Se.2**, **Oughtred** usou **se arc** e **sec co arc**, enquanto **Wallis** usou **S** e **s** . **Albert Girard** usou **sec**, escrito por cima do ângulo como ele fez para a tangente.

Usaremos ***sec*** e ***cossec*** nos lugares de ***secante*** e ***co-secante***, respectivamente para simplificarmos nossa simbologia. Substituindo a razão r_5 e r_6 por ***secante*** e ***co-secante***, temos:

$$sec\ \alpha = \frac{a}{c}, \quad cossec\ \alpha = \frac{a}{b}.$$

Assim podemos reescrever as representações das razões r_5 e r_6, como:

$$sec\ \alpha = \frac{medida\ da\ hipotenusa}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha},$$

$$cossec\ \alpha = \frac{medida\ da\ hipotenusa}{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}.$$

Observemos que a ***secante*** é o inverso do ***cosseno*** e a ***co-secante*** é o inverso do ***seno***, então podemos representa-lá da seguinte forma:

$$sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}, \quad cossec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}.$$

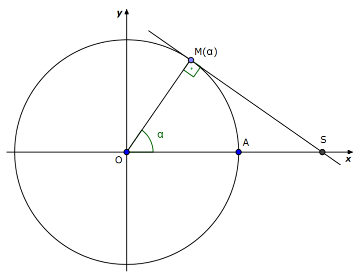

Figura 2.12: Representação do ponto S intersectando o eixo das abscissa com a reta que tangencia a circunferência no ponto M.

Para o estudo da ***secante*** e da ***co-secante*** continuaremos a abordagem deste conceito em uma circunferência de raio r qualquer, como fizemos na ***tangente e co-tangente***, cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal e consideremos também um ângulo α e segmentos de retas paralelos aos eixos x e y.

Para simplificarmos nosso trabalho faremos a representação no círculo trigonométrico da ***secante*** e da ***co-secante*** a partir da definição da *cosseno* e *seno* respectivamente , pois o seu desenvolvimento via semelhança de triângulos é feita de maneira análoga.

Para a ***secante***, consideremos na circunferência trigonométrica de centro O, o ponto $A(1,0)$ e um arco trigonométrico AM de medida α, $0^o < \alpha < 90^o$ e o ponto **S**, de intersecção do eixo das abscissas com a reta que tangencia a circunferência no ponto **M**, representado na figura (2.12).

Do triângulo MOS, temos que:

$$cos\ \alpha = \frac{OM}{OS} \Longrightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{OS}\ \therefore\ OS = \frac{1}{cos\ \alpha}.$$

Logo,

$$OS = sec\ \alpha.$$

Como definimos anteriormente a relação da ***secante*** com o ***cosseno***, então basta agora representa-la no círculo trigonométrico, como vemos na figura (2.13).

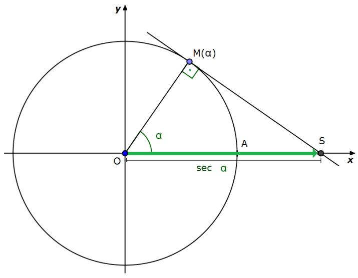

Figura 2.13: Representação da posição da *secante* no círculo trigonométrico.

Veremos a seguir a definição de ***secante*** no círculo trigonométrico de acordo com Paiva[8].

Definição: *"A secante de um arco trigonométrico AM de medida α, com cos $\alpha \neq 0$, é a abscissa do ponto S de intersecção do eixo das secantes com a reta que tangencia a circunferência trigonométrica no ponto M."*

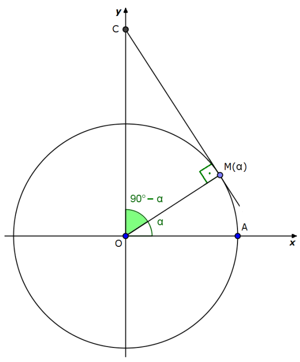

Figura 2.14: Representação do ponto C intersectando o eixo das ordenadas com a reta que tangencia a circunferência no ponto M.

Para a ***co-secante***, consideremos na circunferência trigonométrica de centro O, o ponto $A(1,0)$ e um arco trigonométrico AM de medida α, $0^o < \alpha < 90^o$ e o ponto **C**, de intersecção do eixo das ordenadas com a reta que tangencia a circunferência no ponto **M**. Ver figura (2.14).

Do triângulo MOC, temos que:

$$cos\ (90-\alpha) = \frac{OM}{OC} \Longrightarrow\ sen\ \alpha = \frac{1}{OC}\ \therefore\ OC = \frac{1}{sen\ \alpha}.$$

Logo,

$$OC = cossec\ \alpha.$$

Veremos a seguir a definição de ***co-secante*** no círculo trigonométrico de acordo com Paiva[8].

Definição: *"A co-secante de um arco trigonométrico AM de medida α, com sen $\alpha \neq 0$, é a ordenada do ponto C de intersecção do eixo das co-secantes com a reta que tangencia a circunferência trigonométrica no ponto M."*

Como definimos anteriormente a relação da ***co-secante*** com o ***seno***, então basta agora representa-la no círculo trigonométrico, como podemos ver na figura (2.15).

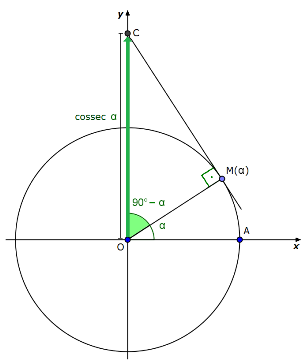

Figura 2.15: Representação da posição da *co-secante* no círculo trigonométrico.

2.2 Razões trigonométricas especiais

Convém conhecermos o *seno*, o *cosseno*, a *tangente*, a *co-tangente*, a *secante* e a *co-secante* do ângulos de 30º, 45º e 60º. Só iremos fazer as demonstrações das três primeiras razões, pois as outras podem ser obtidas a partir delas.

2.2.1 *Seno*, *cosseno* e *tangente* para o ângulos de 45º.

Para calcularmos o *seno*, *cosseno* e *tangente* de 45º vamos considerar um quadrado $ABCD$ de lado l e diagonal d, mostrado na figura (2.16).

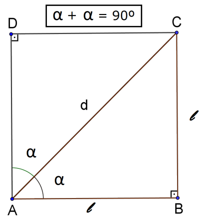

Figura 2.16: Quadrado $ABCD$ de lado l e diagonal d.

A diagonal d forma com os lados l dois ângulos congruentes que somados valem 90º, então cada um deles é um ângulo de 45º, usando o **Teorema de Pitágoras** (ver apêndice A), podemos escrever a diagonal d em função dos lados l:

$$d^2 = l^2 + l^2,$$

$$d^2 = 2l^2,$$

$$d = l\sqrt{2}.$$

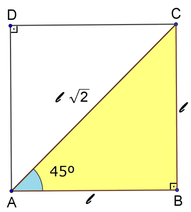

Figura 2.17: Quadrado $ABCD$ de lado l e diagonal $l\sqrt{2}$.

Podemos destacar no quadrado $ABCD$ representado na figura (2.17) o triângulo retângulo e seus respectivos lados e ângulos:

Podemos representar na figura (2.18) o triângulo retângulo, a partir da figura (2.17).

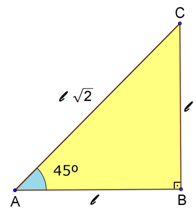

Figura 2.18: Triângulo retângulo isósceles ABC de lado l.

Aplicando as definições de *seno*, *cosseno* e *tangente* para o ângulo de 45º , temos:

$$sen\ 45^o = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$cos\ 45^o = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$tg\ 45^o = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{l}{l} = 1.$$

2.2.2 ***Seno*, *cosseno* e *tangente* para o ângulo de 30º**

Para isso, vamos considerar na figura (2.19) um triângulo equilátero ABC.

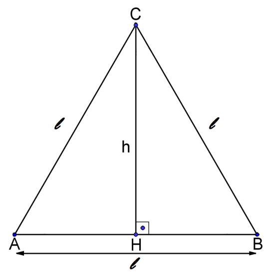

Figura 2.19: Triângulo equilátero ABC de altura h e lados l.

Podemos destacar algumas relações:

Cada lado do triângulo mede l;

CH é a bissetriz de ACB;

CH é a mediana, que também é mediatriz e altura de AB. Dividindo AB em duas partes iguais de tamanho $\dfrac{l}{2}$ em H. Como podemos ver na figura (2.20).

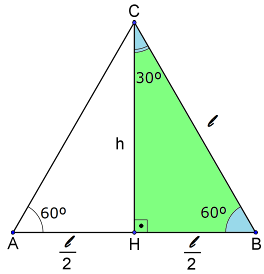

Figura 2.20: Triângulo equilátero ABC, destacando seus lados e ângulos.

Usando o **Teorema de Pitágoras** (ver apêndice A), podemos escrever a altura h em função dos lados l, da seguinte forma:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4},$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4},$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Teremos na figura (2.21) um triângulo retângulo HCB, destacando seus lados e ângulos.

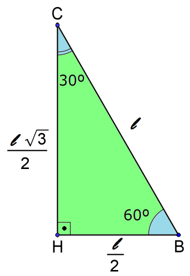

Figura 2.21: Triângulo retângulo HCB, destacando seus lados e ângulos.

Aplicando as definições de *seno*, *cosseno* e *tangente* para o ângulo de 30º, temos:

$$sen\ 30^o = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2},$$

$$cos\ 30^o = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$tg\ 30^o = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2.2.3 ***Seno***, ***cosseno*** e ***tangente*** para o ângulo de 60^o

Para isso, vamos considerar o triângulo retângulo que usamos na figura (2.21). Aplicando as definições do *seno*, *cosseno* e *tangente* para o ângulo de 60^o, temos:

$$sen\ 60^o = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$cos\ 60^o = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2},$$

$$tg\ 60^o = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{l} = \sqrt{3}.$$

2.2.4 ***Co-tangente***, ***secante*** e ***co-secante*** para os ângulos de 30^o, 45^o e 60^o

Para tanto utilizaremos as definições que vimos anteriormente nas subseções (2.1.2) para a ***co-tangente***, e (2.1.3) para a ***secante*** e ***co-secante***. E substituiremos pelos valores encontrados, nas subseções (2.2.1), (2.2.2) e (2.2.3), para 30^o, 45^o e 60^o respectivamente.

Para a ***co-tangente***, temos:

$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha},$$

$$cotg\ 30^o = \frac{1}{tg\ 30^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3},$$

$$cotg\ 45^o = \frac{1}{tg\ 45^o} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$cotg\ 60^o = \frac{1}{tg\ 60^o} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Para a ***secante***, temos:

$$sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha},$$

$$sec\ 30^o = \frac{1}{cos\ 30^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$sec\ 45^o = \frac{1}{cos\ 45^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$sec\ 60^o = \frac{1}{cos\ 60^o} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = 2.$$

Para a ***co-secante***, temos:

$$cossec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha},$$

$$cossec\ 30^o = \frac{1}{sen\ 30^o} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = 2,$$

$$cossec\ 45^o = \frac{1}{sen\ 45^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$cossec\ 60^o = \frac{1}{sen\ 60^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Representaremos, agora, na figura (2.22) a construção de uma tabela com os resultados encontrados.

2.2.5 Resumo dos resultados encontrados - "Tabela Trigonométrica"

x	30º	45º	60º
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cossec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Figura 2.22: Tabela de razões trigonométricas

CAPÍTULO 3

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS UTILIZANDO O MÉTODO TRADICIONAL

3.1 Encontrando padrões de regularidades e usando o *seno* em situações do cotidiano

Como foi descrito anteriormente neste trabalho, primeiramente iremos propor uma situação problema do nosso cotidiano, depois iremos fazer a representação escrita dessa situação, quer dizer, escrever inicialmente um registro em linguagem natural, e a *"representação discursiva"*. O próximo passo será uma representação não discursiva com uma ilustração do problema de acordo com sua interpretação com um destaque para os dados em *"modelo matemático"*. Além disso, almejamos que possamos representar uma solução do problema em uma conversão do tratamento num sistema simbólico, definindo o que o problema realmente está pedindo para depois entendermos o que poderíamos fazer para resolver a situação proposta. Desta forma esperamos que tenhamos condições de associar o real sentido da utilização de tais teoremas em situações cotidianas.

3.1.1 Problema 01

O primeiro problema do instrumento está relacionado a seguinte situação:

"Um avião ao decolar forma um certo ângulo α com a pista que está localizada horizontalmente. Na primeira observação ele atingiu 500 *metros de altura e percorreu uma distância de* 1000 *metros. O respectivo avião continua subindo agora na segunda observação ele atingiu* 1000 *metros de altura e percorreu uma distância de* 2000 *metros. E por fim foi observado que quando ele atingiu* 1500 *metros de altura ele tinha percorrido uma distância de* 3000 *metros."*

1. Representação Discursiva:

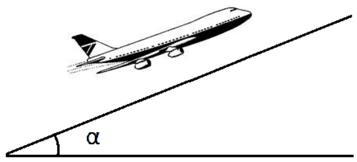

Figura 3.1: Avião em decolagem segundo um ângulo α.

Observando a figura (3.1) visualizamos e identificamos o ângulo entre o solo e o deslocamento feito pelo avião a direção e o sentido do percurso.

2. Modelo Matemático:

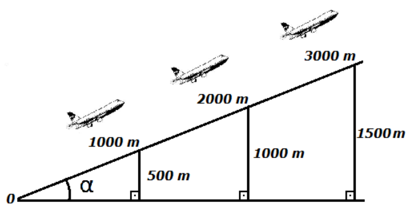

Figura 3.2: Representação das observações das posições relativas ao avião.

Desta forma observamos, que para o problema ser resolvido, precisamos conhecer o estudo trigonométrico do triângulo retângulo.

3. Análise do Modelo Matemático:

   Com base na representação do modelo matemático descrito na figura (3.2), calculemos a razão entre a altura que se encontrava o avião e a distância percorrida por ele na primeira observação.

$$\frac{500}{1000} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

   Na segunda observação calculemos a razão entre a altura que se encontrava o avião e a distância percorrida por ele.

$$\frac{1000}{2000} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

   Agora calculemos a razão entre a altura que se encontrava o avião e a distância percorrida por ele na terceira observação.

$$\frac{1500}{3000} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

   Nesse momento observamos o real significado da pertinência das razões trigonométricas em diferentes etapas do deslocamento do avião. Ficado claro que **as razões** encontradas **dependem exclusivamente do ângulo de decolagem** do avião e não dos deslocamentos feito por ele.

4. Atividade Proposta:

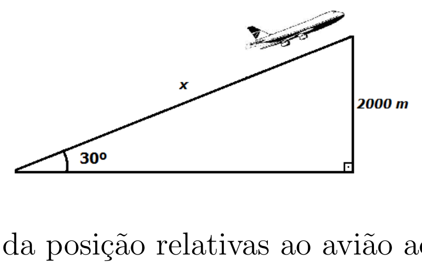

Figura 3.3: Representação da posição relativas ao avião ao atingir 2000 m de altura.

   O problema agora é enunciado, assim:

   "Agora imaginemos que o avião continue a subir, como está representado na figura (3.3) formando um ângulo de 30^o *com a pista que está localizada horizontalmente.*

Como seria possível encontrar a distância percorrida pelo avião quando este atingir 2000 *metros de altura?"*

Neste momento podemos observar que a razão entre qualquer altura que o avião venha a se encontrar e a respectiva distância percorrida por ele, segundo o ângulo dado é constante. Mas ainda temos um problema! Existem várias razões trigonométricas. Qual delas será usada?

Para um problema simples deste ser resolvido, basta somente sabermos identificar, onde estão os catetos e a hipotenusa. Em geral o que nos levada ao erro, é o fato de não sabermos identificar no problema onde estão estas medidas e a interpretação do problema de forma errada. Uma vez que os *catetos* e a *hipotenusa* são identificados poderemos utilizar as noções sobre razões trigonométricas para resolver esta atividade.

Com os dados obtidos no problema, observemos que temos a medida do *cateto oposto* ao ângulo de 30º e queremos encontrar a medida da *hipotenusa*, então das razões trigonométricas estudadas associadas com essas medidas é o *seno* do ângulo de 30º. Então podemos usar a razão encontrada:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}.$$

Substituindo por valores encontrados no problema, temos:

$$sen\ 30^o = \frac{2000}{x}.$$

Substituindo o *sen* 30º por $\frac{1}{2}$, encontrados na tabela trigonométrica que podemos ver na figura (2.22), temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{2000}{x}$$
$$x = 2 \cdot 2000$$
$$x = 4000\ metros$$

Logo, o avião quando se encontra a 2000 metros de altura terá percorrido uma distância de 4000 metros. Então podemos concluir que para resolver o problema o aluno foi levado a encontrar a razão correta, e não fazer por tentativa até encontrar uma relação que possa satisfazer a questão.

3.2 Uso do *cosseno* em situações do cotidiano

3.2.1 Problema 02

Vamos ao enunciado do segundo problema:

"Euclides deseja subir até o alto de um edifício por uma escada que tem aproximadamente 30 *metros de comprimento. O pé desta escada forma com o solo um ângulo de* 60^o. *Euclides antes de subir percebeu que tinha que caminhar do pé da escada até o edifício para buscar uma ferramenta que seria necessária para ser utilizada quando chegasse ao topo do edifício. Quantos metros Euclides teria que andar para buscar esta ferramenta antes de subir a escada?"*

1. Representação Discursiva:

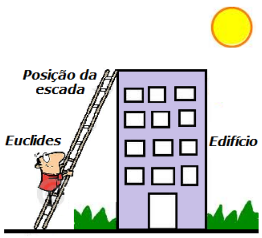

Figura 3.4: Desenho representando Euclides subindo o Edifício.

   Observando a figura (3.4) interpretamos o problema de maneira correta e identificamos a posição da escada em relação ao solo; a posição de Euclides ao se deslocar na escada; e onde se localiza o edifício.

2. Modelo Matemático:

   Localizamos a posição do ângulo entre o solo e a escada; o comprimento da escada; a altura do edifício; e a distância do pé da escada até o edifício.

Figura 3.5: Desenho representando a posição de Euclides em ralação ao Edifício.

3. Análise do Modelo Matemático:

   De acordo como foi visto no primeiro problema, podemos identificar os *catetos* e a *hipotenusa*, como vemos na figura (3.6), e poderemos utilizar as noções sobre razões trigonométricas para resolver esta atividade. Com os dados obtidos no problema, observemos agora que temos a medida da *hipotenusa* e queremos encontrar a medida do *cateto adjacente* ao ângulo de 60º, então das razões trigonométricas estudadas associadas com essas medidas é o *cosseno* do ângulo de 60º.

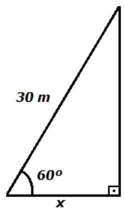

Figura 3.6: Representação geométrica no triângulo retângulo do deslocamento de Euclides.

Então podemos usar a razão encontrada:

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}.$$

Substituindo por valores encontrados no problema, temos:

$$cos\ 60^o = \frac{x}{30}.$$

Substituindo *cos* 60º por $\frac{1}{2}$ encontrados na tabela trigonométrica que podemos ver na figura (2.22), temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{30},$$

$$2 \cdot x = 30,$$

$$x = 15\ metros.$$

Para resolver o problema fomos levados a encontrar a razão correta. Dando-nos a noção de sabermos distinguir o uso do *seno* e do *cosseno* em problemas propostos.

3.3 Uso da *tangente* em situações do cotidiano

3.3.1 Problema 03

Vamos ao enunciado do terceiro problema:

"Euclides deseja medir a altura de um edifício mas neste momento ele se encontra atrás de um posto de observação situado a 30 *metros deste edifício. Euclides vê o ponto mais alto do edifício atrás deste posto de observação sob um ângulo de* 30^o*. Ele está impossibilitado de subir no edifício, pois a distância que separa o posto de observação e o edifício está coberto por uma estranha vegetação, onde sua travessia não será possível. Sabendo que o posto de observação encontra-se a* 1 *metro do solo. Como Euclides poderá calcular a altura deste edifício?"*

1. Representação Discursiva:

   Interpretamos o problema e identificamos a posição correta do posto de observação em relação ao solo e ao edifício; a localização de Euclides em relação ao posto de observação e o edifício; a posição do edifício, e também identificamos que há um desnível do observador em relação ao edifício. Como podemos ver na figura (3.7).

Figura 3.7: Desenho representando Euclides no posto de observação.

2. Modelo Matemático:

   Identificamos o ângulo de observação de Euclides em relação ao topo do edifício; a distância entre o posto de observação e o edifício; a altura do edifício; a altura do posto de observação; e o desnível entre o posto de observação e o edifício. Como podemos ver na figura (3.8).

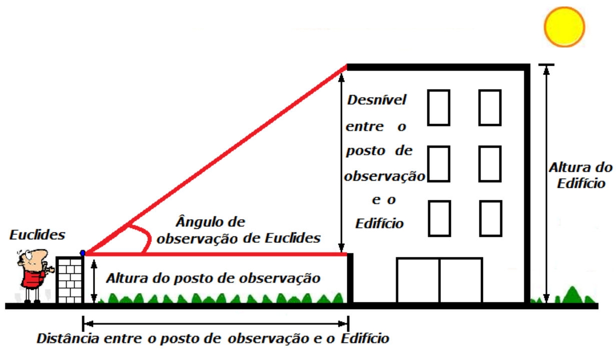

Figura 3.8: Desenho representando a posição de Euclides no posto de observação em relação ao edifício.

3. Análise do Modelo Matemático:

   Como foi visto nos problemas anteriores, podemos identificar os *catetos* e a *hipotenusa*, mas temos um dado novo, o posto de observação está situado **a uma altura de 1 metro em relação ao solo**. Ver na figura (3.9). Não podemos considerar esta informação para calcular o problema, só iremos utiliza este dado para representar o resultado final.

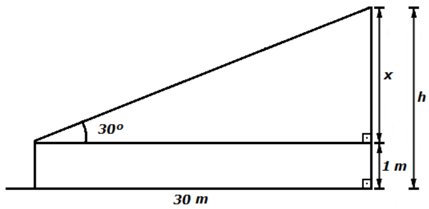

Figura 3.9: Representação geométrica no triângulo retângulo da altura do Edifício.

Com os dados obtidos no problema, observemos agora que temos a medida do *cateto adjacente* e queremos encontrar a medida do *cateto oposto* ao ângulo de 30º, então das razões trigonométricas estudadas associadas com essas medidas é a *tangente* do ângulo de 30º.

Então podemos usar a razão encontrada:

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}.$$

Substituindo por valores encontrados no problema, temos:

$$tg\ 30^o = \frac{x}{30}.$$

Substituindo tg 30º por $\frac{\sqrt{3}}{3}$ encontrados na tabela trigonométrica que podemos ver na figura (2.22), temos:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{30},$$

$$3 \cdot x = 30 \cdot \sqrt{3},$$

$$x = \frac{30 \cdot \sqrt{3}}{3},$$

$$x = 10\sqrt{3}\ metros.$$

Este problema é bem diferente dos anteriores, pois ainda não chegamos ao resultado esperado. Embora tenhamos encontrado o valor correspondente no triângulo retângulo dado, temos que levar em consideração o desnível do posto de observação o o edifício.

Então não basta só sabermos as razões trigonométricas, temos que saber usar a razão correta em cada situação e também temos que ter uma **boa percepção representativa** para termos condições de chegar ao resultado pedido na questão e não só resolver razões trigonométricas utilizando o triângulo retângulo descrito no problema.

Então vamos concluir o problema para chegarmos ao resultado pedido que é a altura h do edifício.

$$h = x + 1 \; metro,$$

$$h = (10\sqrt{3} + 1) \; metros.$$

3.4 Uso do *seno*, *cosseno* e *tangente* em situações do cotidiano

3.4.1 Problema 04

Agora observaremos uma questão que irá envolver múltiplas razões trigonométricas. A seguir enunciaremos da seguinte forma:

"Nesta manhã Euclides que é um excelente profissional foi designado para fazer serviços elétricos em cima de três edificações. Para realizar esses serviços ele terá que subir até o topo de cada um desses edifícios. O primeiro serviço será realizado na torre da Igreja, o segundo em cima do telhado da escola, e o terceiro no Edifício Plasma de três andares. Euclides levará para esse serviço sua caixa de ferramentas e sua escada com 20 *metros de comprimento. Agora vamos ajudar Euclides a realizar os três serviços descritos acima. Vejamos que em cada serviço ele se depara com uma situação diferente.*

a)Para realizar o primeiro serviço, Euclides colocou sua escada até o topo da torre da igreja, e o padre lhe informou que a torre tem 10 *metros de altura. Qual é o ângulo formado pela escada e o solo?*

b)Para realizar o segundo serviço, Euclides colocou sua escada até o topo do telhado e observou que a escada formava com o solo um ângulo de 60^o. *Qual a distância do pé da escada até a parede da escola que sustenta o telhado?*

c)E por fim no último serviço, Euclides não poderá usar sua escada, pois a mesma não tinha comprimento suficiente para chegar até o topo do Edifício Plasma. Então ele pegou emprestado uma escada auxiliar que se encontrava no terreno ao lado do edifício de comprimento desconhecido. Ao colocar essa escada até o topo do edifício de 30 *metros de altura ele observou que a escada formava um ângulo com o solo de* 45^o*. Qual é a distância do edifício até o pé desta escada auxiliar?"*

1. Representação Discursiva:

Figura 3.10: Desenho representando Euclides subindo uma Edificação.

Interpretamos o problema e identificamos as posições corretas, da escada, das edificações, da posição de Euclides e observamos que a mesma representação discursiva da questão serve para resolver as três situações propostas, mas cada uma será resolvida de maneira diferente. Como podemos ver na figura (3.10).

2. Modelo Matemático:

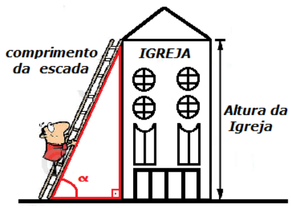

Figura 3.11: Desenho representando Euclides subindo até o topo da torre da igreja.

Nesta situação, temos a medida do comprimento da escada e a medida da altura da igreja. Observemos que não foi mencionado a medida da distância do pé da escada até a igreja. Então o que queremos saber é o ângulo de inclinação entre a escada e o solo. Como podemos ver na figura (3.11). É fundamental sabermos a localização exata desse ângulo.

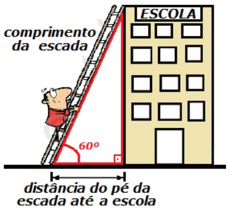

Figura 3.12: Desenho representando Euclides subindo até o topo do telhado da escola.

Agora queremos a medida da distância do pé da escada até a escola e continuamos tendo a medida do comprimento da escada. Observemos que não foi mencionado a medida da altura da escola, mas nos foi dado o ângulo de inclinação entre a escada e o solo. Como podemos ver na figura (3.12).

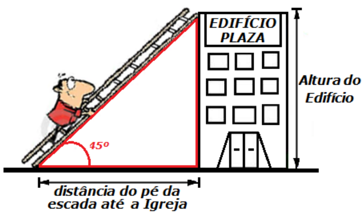

Figura 3.13: Desenho representando Euclides subindo até o topo do Edifício Plasma.

Continuamos querendo a medida da distância do pé da escada, agora até o edifício e pela primeira vez neste problema não temos a medida do comprimento da escada. O que foi mencionado na questão é a medida da altura do edifício e o ângulo de inclinação entre a escada e o solo.

3. Análise do Modelo Matemático:

De acordo com a figura (3.14), podemos identificar o *catetos oposto* e a *hipotenusa*, e queremos encontrar o ângulo de inclinação entre a *hipotenusa* e o *cateto adjacente*.

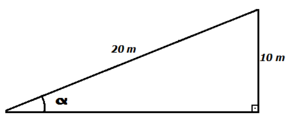

Figura 3.14: Representação geométrica no triângulo retângulo do ângulo de inclinação da escada com a torre da igreja.

Então das razões trigonométricas a que tem a razão associada com essas medidas é o *seno* do ângulo α.

Então podemos usar a razão:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}.$$

Substituindo por valores encontrados no problema, temos:

$$sen\ \alpha = \frac{10}{20},$$

$$sen\ \alpha = \frac{1}{2}.$$

Verificando na tabela trigonométrica que podemos ver na figura (2.22), construída no capítulo anterior que $sen\ 30^o = \frac{1}{2}$.

Logo, o ângulo formado pela escada e o solo é de 30º.

De acordo com a figura (3.15), podemos identificar a *hipotenusa*, e o ângulo de inclinação entre a *hipotenusa* e o *cateto adjacente* que é de 60º. Queremos encontrar a medida do *cateto adjacente* representado por y, como está destacado na figura (3.15). Então das razões trigonométricas a que tem a razão associadas com essas medidas é o *cosseno* do ângulo de 60º.

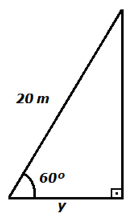

Figura 3.15: Representação geométrica no triângulo retângulo da distância do pé da escada até a parede da escola que sustenta o telhado.

Então podemos usar a razão:

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}.$$

Substituindo por valores encontrados no problema, temos:

$$cos\ 60^o = \frac{y}{20}.$$

Substituindo $cos\ 60^o$ por $\frac{1}{2}$ que podemos ver na tabela trigonométrica da figura (2.22), da mesma forma como foi descrita nos problemas anteriores, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{20},$$

$$y = 10.$$

Logo, a distância do pé da escada até a parede da escola que sustenta o telhado é de 10 metros.

De acordo com a figura (3.16), podemos identificar o *cateto oposto*, e o ângulo de inclinação entre a *hipotenusa* e o *cateto adjacente* que é de 45º. Queremos encontrar a medida do *cateto adjacente* representado por z, como está destacado na figura (3.16). Então das razões trigonométricas estudadas a que tem a razão associadas com essas medidas é a *tangente* do ângulo de 45º.

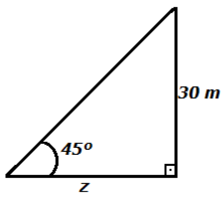

Figura 3.16: Representação geométrica no triângulo retângulo da distância do pé da escada até o topo do Edifício Plasma.

Então podemos usar a razão:

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}.$$

Substituindo por valores encontrados no problema, temos:

$$tg\ 45^o = \frac{30}{z}.$$

Substituindo $tg\ 45^o$ por 1 da tabela trigonométrica da mesma forma como foi descrita anteriores, temos:

$$1 = \frac{30}{z},$$

$$z = 30.$$

Logo, a distância do pé da escada auxiliar até a parede do Edifício Plasma é de 30 *metros*.

O objetivo desta questão é observar que podemos usar as três razões trigonométricas destacadas neste trabalho, cada uma foi utilizada em determinadas circunstância dando uma reflexão de aplicabilidade entre essas razões. O mais importante é que podemos identificar as pequenas diferenças entre elas na hora das abordagens de resoluções das questões. Embora possamos concluir que um erro na interpretação dessas pequenas diferenças nos levarão a encontrar resultados completamente diferentes dos esperados.

3.5 Conclusões

Não é suficiente sabermos só as razões trigonométricas, se não tivermos a capacidade de identificar todos os fatores pertinentes que estão inseridos nos problemas propostos, como acabamos de verificar nas estruturas de interpretação e resolução dos problemas que formamos.

Observamos nessas atividades a aplicabilidade dos conceitos anteriores, em especial os lados dos triângulos retângulos em relação aos ângulos. Os conceitos até aqui trabalhados nos levaram ao pensamento formal e significativo que foi se formando ao longo do desenvolvimento da proposta. As situações reais propostas nos problemas nos permitiram uma melhor reflexão ao mostrar que os conceitos é que determinam o significado e a aprendizagem ocorre de forma primária e sem obstáculos e o entendimento desses conceitos básicos determinam o desenvolvimento de todo o processo de conhecimento acerca do conteúdo estudado.

CAPÍTULO 4

A TÁBUA TRIGONOMÉTRICA

4.1 O uso de materiais manipuláveis

Após a construção dos problemas feitos a partir das observações do cotidiano, observamos a necessidade de elaborar um **material concreto** de apoio didático para ser utilizado em sala de aula, um material que pudesse ser manuseado pelos próprios alunos, fazendo com que eles descobrissem por si só um padrão de regularidade entre as observações as quais estavam manipulando neste respectivo material. O objetivo é levar o aluno à encontrar os teoremas como se fosse suas próprias descobertas.

Elaboramos um material concreto e o chamamos de **Tábua Trigonométrica** onde os alunos poderão fazer variações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo qualquer. O interessante neste material é que os alunos possam simular triângulos retângulos, só com os movimentos das réguas de apoio, onde um régua fica fixa, definindo assim o ângulo e a outra régua pode-se movimentar horizontalmente fazendo com que nesta tábua sejam formados um grande número de triângulos todos semelhantes entre si.

4.2 Construção da Tábua Trigonométrica

4.2.1 Materiais necessários:

1. Quatro pedaços de $MDF(15,0mm)$ de espessura e de aproximadamente $40,0cm$ a $60,0cm$ de comprimento que foram usados para fazer móveis sob medida encontrados em marcenaria que seriam descartados por não terem utilidade, onde esses foram utilizados para fazer as bordas da Tábua Trigonométrica . Sem custo algum.

2. Um pedaço de folha de $MDF(5,0mm)$ de espessura e de aproximadamente $50,0cm$ de largura por $60,0cm$ comprimento que foram usados para fazer móveis sob medida encontrados em marcenaria que seriam descartados por não terem utilidade onde esses foram utilizados para fazer a superfície de apoio da Tábua Trigonométrica. Sem custo algum.

3. Dois pedaços de ripas de madeira de aproximadamente $30,0cm$ a $50,0cm$ cada um que também seriam descartados.

4. Duas fitas métricas amarelas compradas em casa de material de aviamento para custura de tecidos. Uma para ser fixada nas bordas da Tábua Trigonométrica e outra na régua de movimentação horizontal. Cada fita custou $R\$1,50$.

5. Uma fita métrica azul comprada em casa de material de aviamento para custura de tecidos, para ser fixada na régua de movimentação angular. A fita custou $R\$1,50$.

6. Dois parafusos pequenos com $10,0mm$ de comprimento comprados em casa de material de construção para que a régua de movimentação horizontal fosse movimentada ou fixada de acordo com a manipulação feita pelos alunos para dar maior precisão as medidas. Cada parafuso custou $R\$0,30$.

7. Dois parafusos médios com $16,0mm$ de comprimento comprados em casa de material de construção para que a régua de movimentação angular fosse movimentada ou fixada de acordo com a manipulação feita pelos alunos para dar maior precisão as medidas. Cada parafuso custou $R\$0,40$.

8. Quatro porcas com borboletas para fixação dos respectivos parafusos citados no item 7. Cada porca borboleta custou $R\$1,80$.

9. Uma base de plástico de apoio para a porca borboleta que fixa a régua de movimentação angular. Foi usada uma tampinha retirada de uma garrafa PET. Sem custo algum.

10. Utilizamos uma serra elétrica para fazer os cortes no MDF nas madeiras e uma furadeira para fazer os furos nas réguas.

11. Utilizamos um transferidor para confeccionar os ângulos propostos para serem utilizados como referência nas posições feitas pela régua de movimentação angular na Tábua Trigonométrica.

12. E por fim utilizamos uma cola de madeira para unir as extremidades dos materiais que foram confeccionados e a colagem das fitas métricas na Tábua e nas réguas de movimentação.

Observemos que os valores citados acima são correspondentes ao ano e local de elaboração deste trabalho.

4.2.2 Etapas da construção:

1. Primeiramente cortamos com a serra elétrica as extremidades do $MDF(15,0mm)$ com 45^o para serem usados para os lados da Tábua Trigonométrica, tomando cuidado para que os cortes fiquem todos homogêneos onde poderemos fazer nossas medições com precisão. Neste mesmo material fizemos cortes paralelos as faces voltadas para o interior da Tábua, onde iremos encaixar a folha de MDF.

2. Fizemos um corte paralelo a face voltada para cima da peça que ficará localizada a direita da Tábua, para que a régua de movimentação angular possa se deslocar com facilidade.

3. Fizemos um corte paralelo ao comprimento da régua de movimentação horizontal de aproximadamente $20,0cm$ de comprimento.

4. Na base inferior da régua de movimentação horizontal tivemos que remover uma superfície de aproximadamente $3,0cm$ por $5,0cm$, para que ao ser movimentada fosse possível realizar os ajustes necessários para a precisão da Tábua Trigonométrica.

5. Na folha de $MDF(5,0mm)$ fizemos dois cortes paralelos a dois dos lados da Tábua com espaçamento de aproximadamente $20,0cm$ de comprimento para que a régua de movimentação horizontal possa se deslocar com facilidade.

6. Depois usando uma furadeira fizemos três furos com uma broca de $6,0mm$ nas duas réguas de movimentação.

7. Com a cola de madeira fizemos a união das extremidades do $MDF(15,0mm)$ com a folha de $MDF(5,0mm)$ e colamos também a base de referência dos ângulos no lado inferior esquerdo.

8. As fitas métricas amarelas também foram coladas, mas em três faces voltadas para cima: a superior, a inferior e a lateral direita. A outra fita métrica azul foi colada na régua de movimentação angular.

9. Feito isso foram colocados os quatro parafusos com suas respectivas porcas borboletas, findando assim o processo de construção do material proposto.

4.2.3 Registro das etapas da construção do material:

Figura 4.1: União das extremidades dos quatro pedaços de $MDF(15,0mm)$ com o pedaço de folha de $MDF(5,0mm)$; réguas de movimentação com medidas definidas e cortes longitudinais.

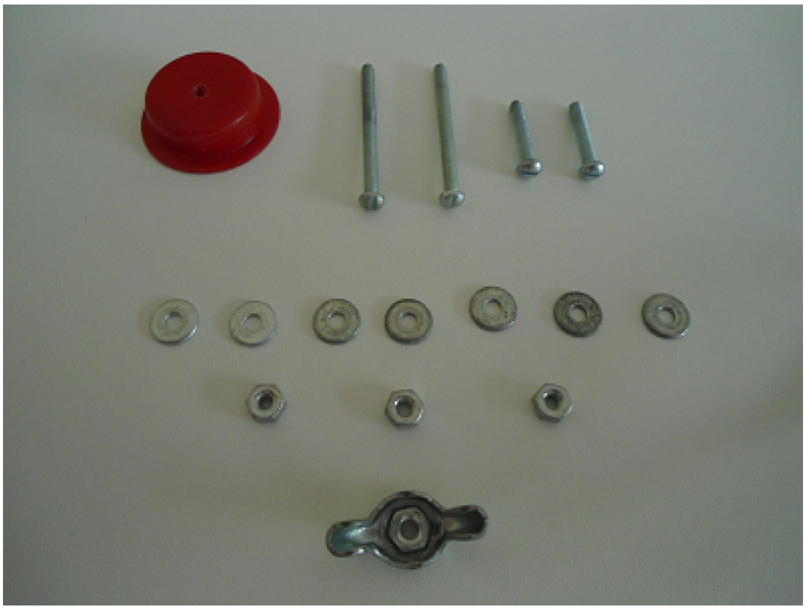

Figura 4.2: Uma base de plástico de apoio; Dois parafusos médios com $16,0mm$ de comprimento; Dois parafusos pequenos com $10,0mm$ de comprimento; Arruelas de apoio aos parafusos; Porcas com e sem borboletas para fixação.

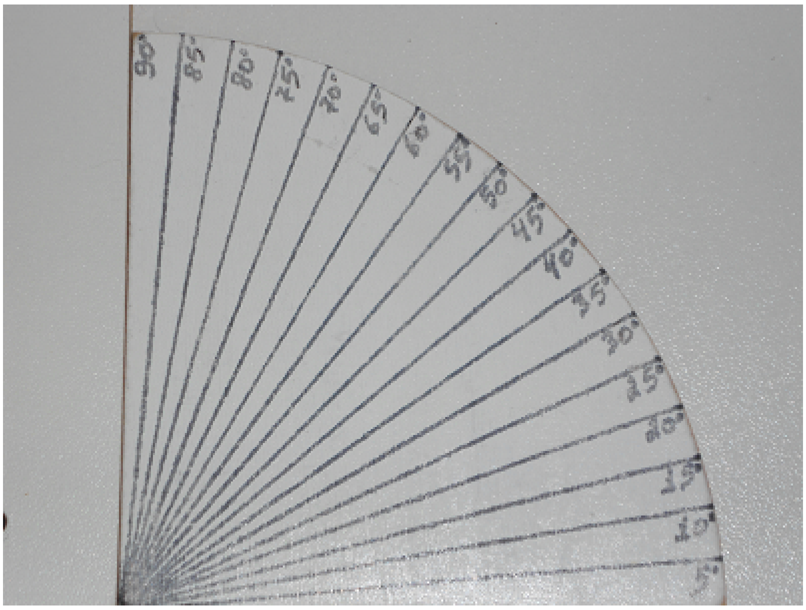

Figura 4.3: Medidas angulares marcadas em um quarto de uma circunferência feita em $MDF(5,0mm)$.

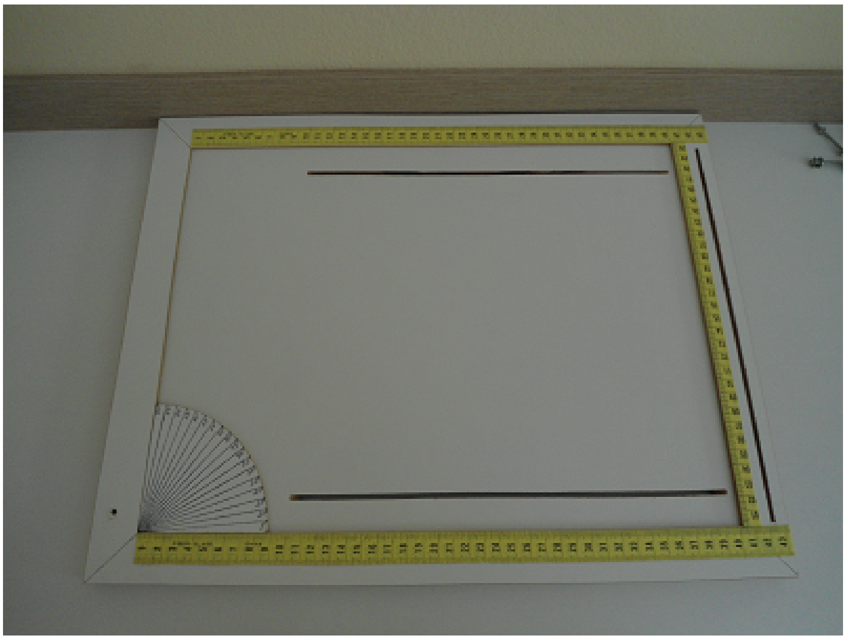

Figura 4.4: Fixação das medidas angulares e das fitas métricas nas extremidades da Tábua Trigonométrica.

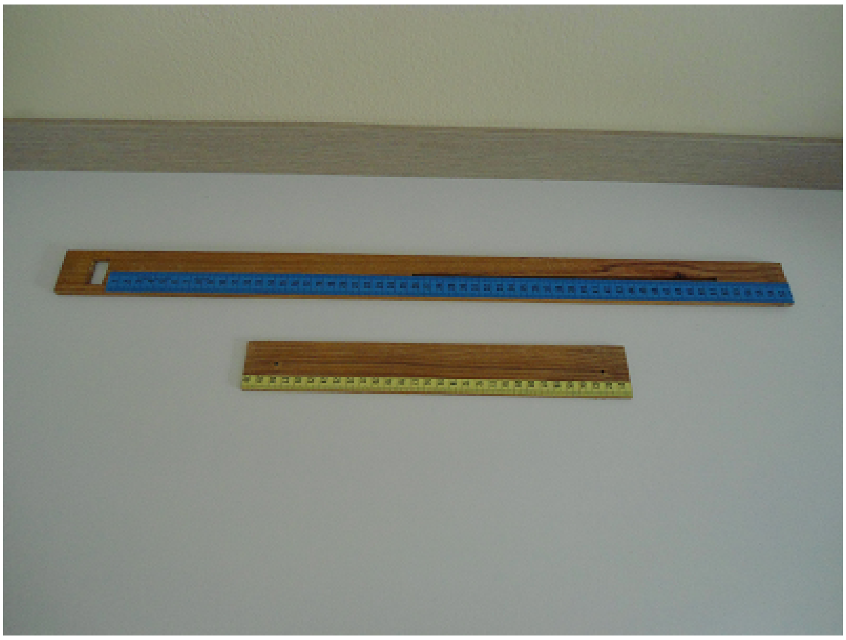

Figura 4.5: Colagem das fitas métricas nas réguas de movimentação.

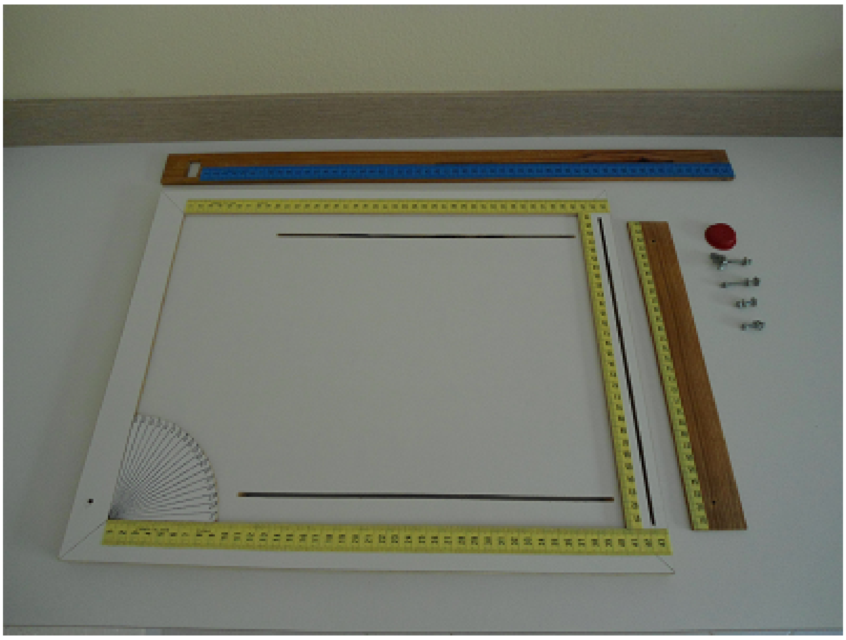

Figura 4.6: Material pronto para montar: Tábua centimetrada, duas réguas de movimentação centimetradas, parafusos com porcas e arruelas e uma base de apoio plástica.

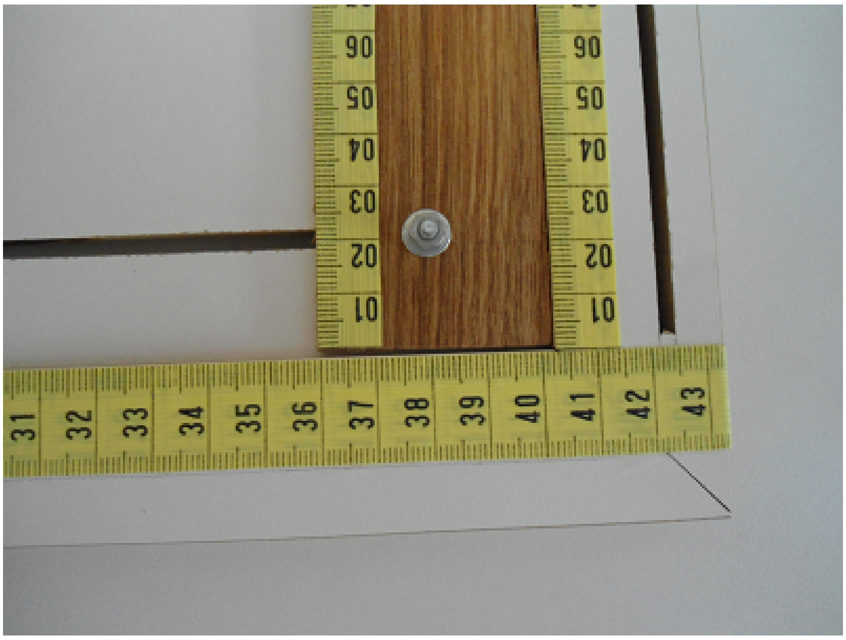

Figura 4.7: Fixação inferior com um parafuso da régua de movimentação horizontal.

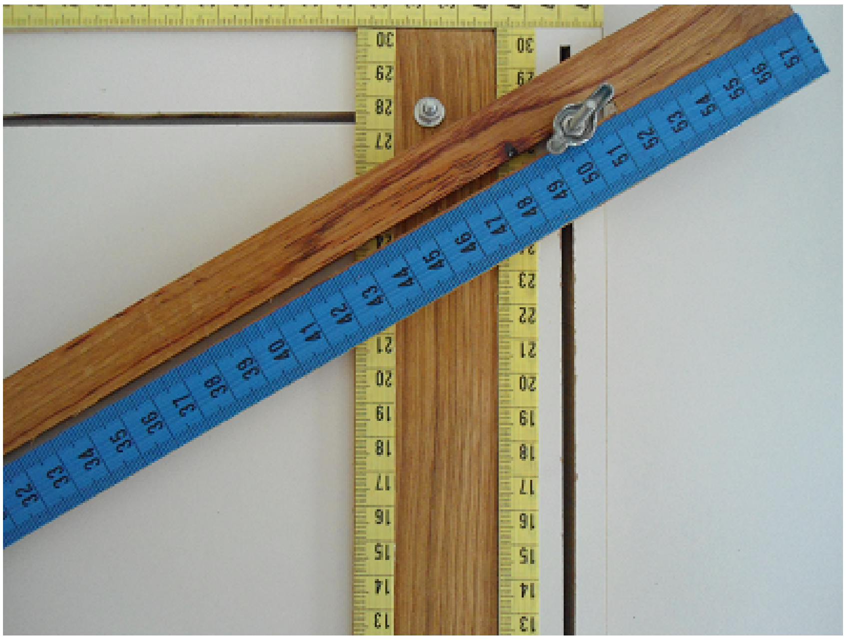

Figura 4.8: Fixação superior com um parafuso da régua de movimentação horizontal, e da régua de movimentação angular.

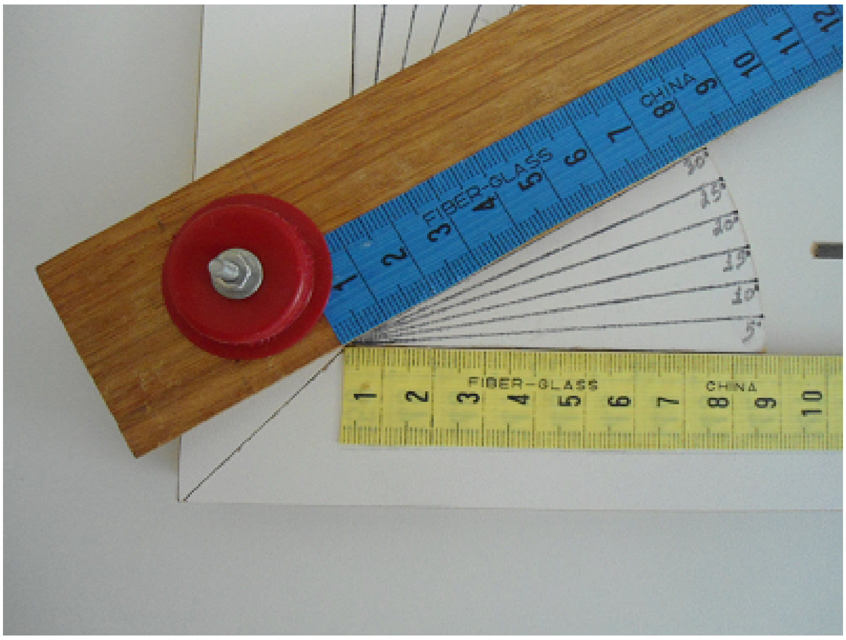

Figura 4.9: Fixação inferior com um parafuso da régua de movimentação angular.

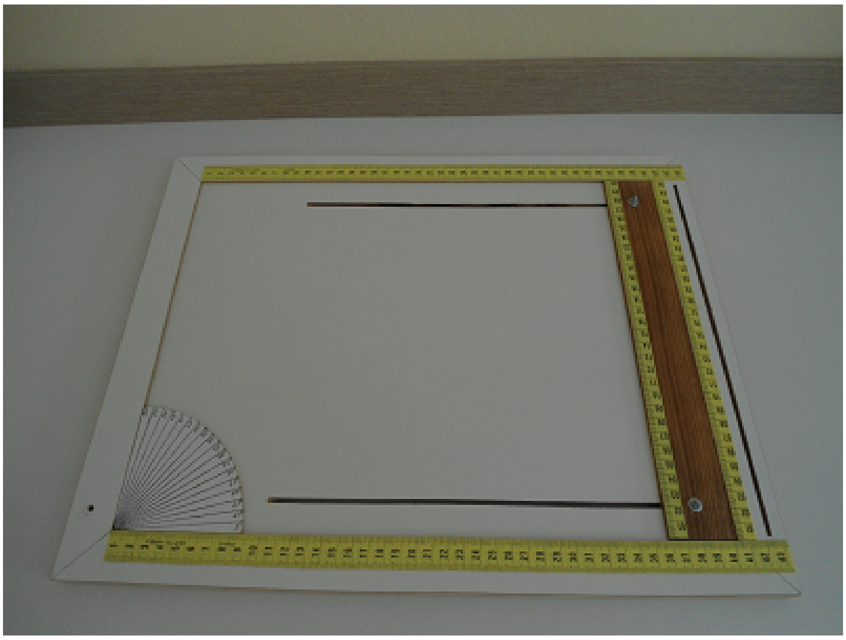

Figura 4.10: Observação posicional da régua de movimentação horizontal.

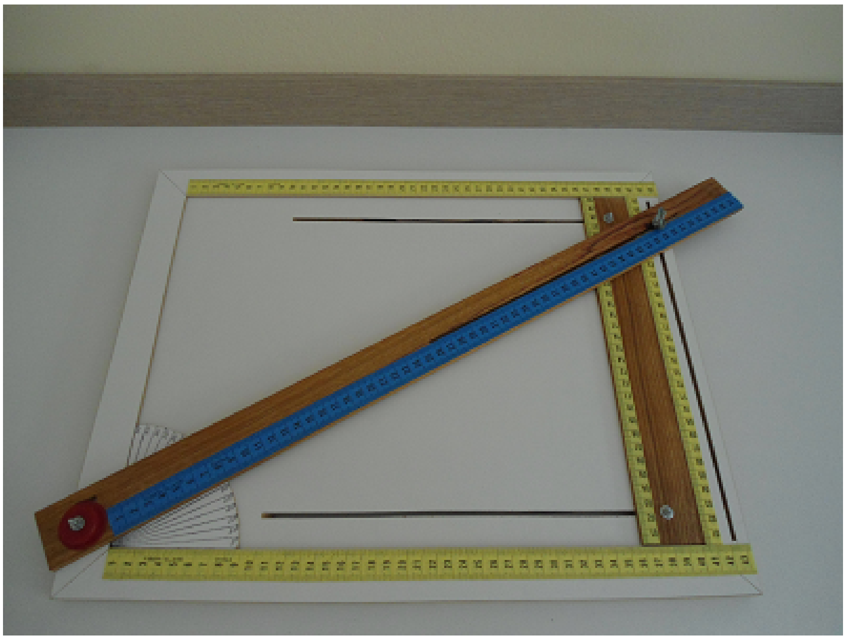

Figura 4.11: Vejamos agora como fica a Tábua Trigonométrica depois de pronta.

Elaboramos esse material com o objetivo de fornecermos, orientações técnicas, na fase de confecção que possibilitem o desenvolvimento do processo de construção do material concreto.

Salientamos ainda, que o material produzido apresenta riqueza científica, sem deixar de adentrar para a linguagem do cotidiano que, além de dinâmica, deve convidar os educandos para a leitura de experiências junto a grupos de estudos e permitir que eles criem imagens mentais de conceitos abstratos.

Mesmo sabendo que o material foi produzido para o conteúdo específico referente a área do conhecimento para qual foi selecionado, consideremos o seu percurso acadêmico em demais aplicações na área de concentração.

Verificamos que a Tábua Trigonométrica é um material barato e fácil de ser confeccionado, podendo ser construído por qualquer um que deseje ensinar e/ou estudar as razões métricas existentes em um triângulo retângulo. Acreditamos que a Tábua Trigonométrica é um instrumento importante para motivar; inovar; auxiliar na construção do conhecimento; desenvolver o pensamento matemático e desenvolver a criatividade, entre outras coisas e pode ajudar em atividades lúdicas que servirá de estímulo para que os estudantes participem do processo de aprendizagem pela busca de estratégias e soluções, tornando o aprendizado mais prazeroso.

CAPÍTULO 5

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS UTILIZANDO A TÁBUA TRIGONOMÉTRICA

5.1 Introdução

No capítulo anterior discutimos a necessidade de construir um material manipulável para ser utilizado como apoio na resolução dos problemas propostos. Agora resolveremos esses problemas utilizando a *Tábua Trigonométrica*, que foi construída para este fim. Abordaremos os problemas apenas com a manipulação deste material, chegando assim aos resultados esperados. Acreditamos que a *Tábua Trigonométrica* possibilitará aos alunos não só à manipulação do material, mas também a possibilidade de conseguir identificar as posições angulares corretas entre os lados dos triângulos formados, e a visualização das distinções existentes entre os lados formados com **a manipulação deste material**.

Interpretaremos os problemas diretamente no material proposto, conseguindo assim melhorar a interpretação descrita em *linguagem usual* e efetivar seu registro em *linguagem Matemática*.

Vejamos na figura (5.1) a *Tábua Trigonométrica* pronta para ser usada:

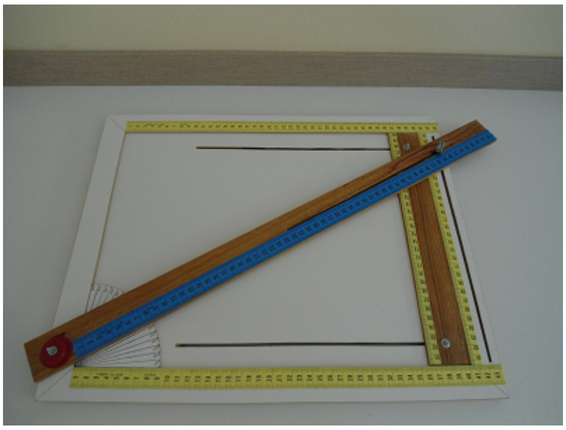

Figura 5.1: Tábua Trigonométrica

5.2 Usando a Tábua Trigonométrica para encontrar padrões de regularidades e resolver problemas

Usaremos os enunciados dos problemas do instrumento utilizados no capítulo 3, modificando as representações numéricas e escalas das medidas, para a melhor manipulação na *Tábua Trigonométrica*. Usaremos a simbologia *u.m.* para representarmos a noção de *unidade de medida*.

5.2.1 Problema 01

Vamos ao enunciado do primeiro problema:

"Um avião ao decolar forma um ângulo α com a pista que está localizada horizontalmente. Na primeira observação ele atingiu 5 *u.m. de altura e percorreu uma distância de* 10 *u.m.. O respectivo avião continua subindo agora na segunda observação ele atingiu* 10 *u.m. de altura e percorreu uma distância de* 20 *u.m.. E por fim foi observado que quando ele atingiu* 15 *u.m. de altura ele tinha percorrido uma distância de* 30 *u.m.."*

1. Representação Discursiva:

   Com a manipulação da *Tábua Trigonométrica*, identificamos as posições dos lados do triângulo retângulo que representam: o deslocamento feito pelo avião e a altura atingida por ele, e também a posição do ângulo de decolagem do avião em relação ao solo. Verificando qual é o referencial usado para a resolução da questão. Destacamos na figura (5.2) a manipulação da *Tábua Trigonométrica* nas três fazes do deslocamento do avião.

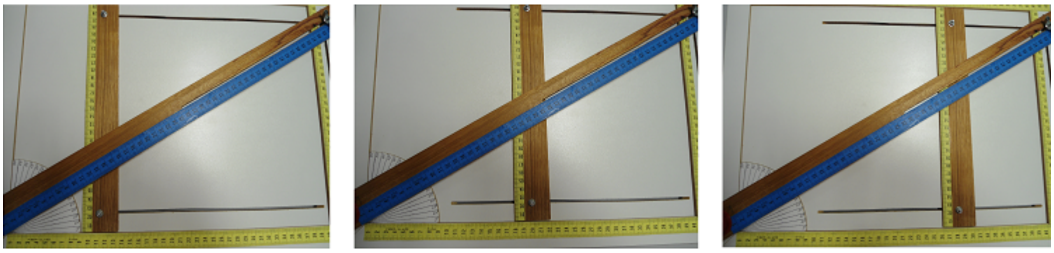

Figura 5.2: As três representação do deslocamento do avião via Tábua Trigonométrica

2. Modelo Matemático:

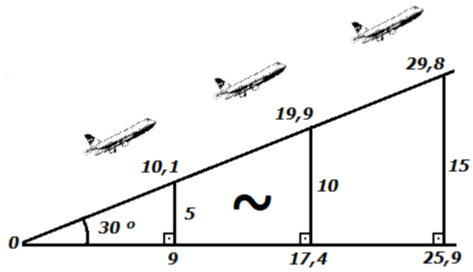

Figura 5.3: Representação geométrica do deslocamento do avião com resultados da Tábua Trigonométrica

Destacamos na figura (5.3) os "triângulos retângulos" formados nas fazes de observação do avião e todas as medidas escalares e angulares representadas pelo seu deslocamento. (Observamos que são triângulos retângulos aproximados e por isso utilizamos o símbolo $\sim$ neles).

3. Análise do Modelo Matemático:

Usando a *Tábua Trigonométrica* e com base na representação do modelo matemático descrito na figura (5.3), calculamos a razão entre a altura que se encontrava o avião e a distância percorrida por ele na primeira observação.

$$\frac{5}{10,1} = 0,4950 \; u.m..$$

Na segunda observação calculamos a razão entre a altura que se encontrava o avião e a distância percorrida por ele.

$$\frac{10}{19,9} = 0,5025 \ u.m..$$

Agora calculamos a razão entre a altura que se encontrava o avião e a distância percorrida por ele na terceira observação.

$$\frac{15}{29,8} = 0,5033 \ u.m..$$

Sabemos que a razão entre qualquer altura que o avião venha a se encontrar e a respectiva distância percorrida por ele, segundo o ângulo dado é praticamente constante. Observamos que há um pequena diferença entre os resultados, falaremos e discutiremos sobre estas diferenças quando estivermos finalizando este problema.

4. Atividade Proposta:

"Agora imaginemos que o avião continue a subir, como está representado na figura (5.3) formando um ângulo de 30^o *com a pista que está localizada horizontalmente. Segundo como foi descrito anteriormente, como seria possível encontrar a distância percorrida pelo avião quando este atingir* 20 *u.m.."*

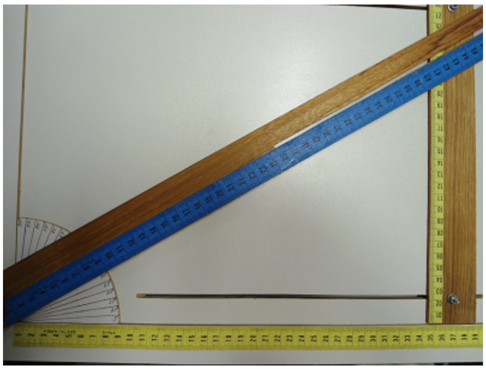

Figura 5.4: Representação do deslocamento feito pelo avião a uma altura de 20 $u.m.$ via Tábua Trigonométrica

Podemos observar, na figura (5.4) como ficaria o modelo matemático desta situação na *Tábua Trigonométrica*.

Para resolvermos este problema, primeiramente teremos que verificar na *Tábua Trigonométrica* qual das medidas representadas nela é correspondente ao deslocamento do avião.

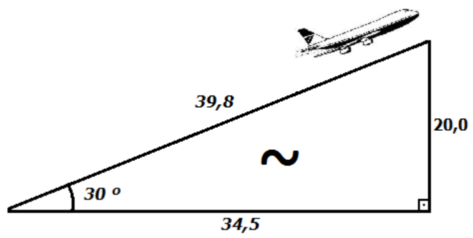

Figura 5.5: Representação do deslocamento feito pelo avião a 20 unidades de medidas de altura, via Tábua Trigonométrica

Verificamos na figura (5.5), retirada da *Tábua Trigonométrica* que está marcando $39,8$ $u.m.$, para o deslocamento do avião quando ele se encontra à 20 $u.m.$ de altura. Como vimos no capítulo 3 ao resolver esse problema da forma tradicional encontramos 40 $u.m.$, ocorrendo assim uma diferença entre os resultados.

Logo, quando o avião se encontra a 20 $u.m.$ de altura ele terá percorrido uma distância de 40 $u.m.$ ou $39,8$ $u.m.$? Nosso objetivo na resolução desta questão não é a precisão dos resultados e sim a manipulação do problema.

5. Medidas e erros:

Como esta descrito no (apêndice B), todas as máquinas operam com um sistema de ponto flutuante, e iremos agora analisar as diferenças entre os resultados encontrados. Essas diferenças deve-se ao fato de que a *Tábua trigonométrica* não apresenta alta precisão. E em sua manipulação vimos que algumas medidas não correspondem aos resultados que queríamos encontrar. Verifiquemos agora usando para tanto uma análise de medidas de erros, para sabermos qual o grau de precisão que encontramos nesse material.

Para a primeira análise o valor esperado era de $0,5$ $u.m.$ e os valores encontrados foram: $0,4950$ $u.m.$, $0,5025$ $u.m.$ e $0,5033$ $u.m.$. Para a segunda análise o valor esperado era de $40,0$ $u.m.$, e o valor encontrado foi de $39,8$ $u.m.$.

Usando as fórmulas para calcular, os valores dos erros absoluto e relativos que podem serem vistas no (apêndice B). E usando $|E_A|$ para representar o valor do erro absoluto e $|E_R|$ para representar o valor do erro relativo, e consideraremos x para o valor teórico e $\tilde{x}$ para o valor medido, temos:

$$|E_A| = |x - \tilde{x}| \qquad \text{e} \qquad |E_R| = \frac{|E_A|}{\tilde{x}} = \frac{|x - \tilde{x}|}{\tilde{x}}$$

Para o caso **A** temos:

$|E_{A1}| = |0,5 - 0,4950| = 0,0050 \quad \Longrightarrow \quad |E_{R1}| = \dfrac{0,0050}{0,4950} = 0,0101;$

$|E_{A2}| = |0,5 - 0,5025| = 0,0025 \quad \Longrightarrow \quad |E_{R2}| = \dfrac{0,0025}{0,5025} = 0,0049;$

$|E_{A3}| = |0,5 - 0,5033| = 0,0033 \quad \Longrightarrow \quad |E_{R3}| = \dfrac{0,0033}{0,5033} = 0,0065.$

Para o caso **B** temos:

$|E_{A4}| = |40,0 - 39,8| = 0,2 \quad \Longrightarrow \quad |E_{R4}| = \dfrac{0,2}{39,8} = 0,0050.$

O erro relativo é frequentemente dado como porcentagem. Então, representando os resultados encontrados em termos percentuais, temos:

$1,01\%$, $0,49\%$, $0,65\%$ e $0,50\%$,

usando a fórmula da média aritmética (M_A) que pode ser vista no (apêndice B), para os valore encontrados no caso **A**, temos:

$$M_A = \frac{1,01 + 0,49 + 0,65}{3} = \frac{2,15}{3} = 0,7166\%$$

Logo, a *Tábua trigonométrica* apresenta nos resultados encontrados neste problema um erro de aproximadamente $0,7\%$ para o caso **A** e $0,5\%$ para o caso **B**.

5.2.2 Problema 02

Vamos ao enunciado do segundo problema:

"Euclides deseja subir até o alto de um edifício por uma escada que tem aproximadamente 30 *u.m.. O pé desta escada forma com o solo um ângulo de* 60^o*. Euclides antes de subir percebeu que tinha que caminhar do pé da escada até o edifício para buscar uma ferramenta que seria necessária para ser utilizada quando chegasse ao topo do edifício. Quantas unidades de medidas Euclides teria que andar para buscar esta ferramenta antes de subir a escada?"*

1. Representação Discursiva:

   Destacamos na figura (5.6) a manipulação da *Tábua Trigonométrica* referente ao deslocamento feito por Euclides.

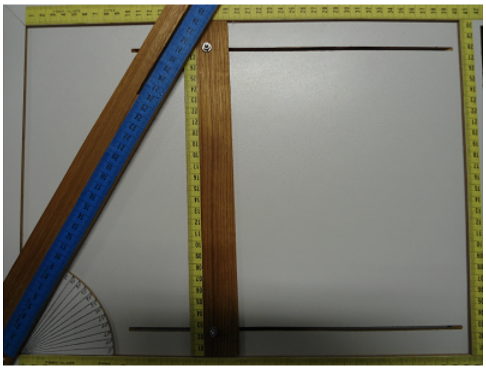

Figura 5.6: Representação do deslocamento feito por Euclides via Tábua Trigonométrica.

   Com a manipulação da *Tábua Trigonométrica*, identificamos as posições dos lados do triângulo retângulo que representam: a posição da escada em relação ao solo; o deslocamento feito por Euclides do pé da escada até o edifício; a localização e a altura do edifício. Verificando qual é o referencial usado para a resolução da questão.

2. Modelo Matemático:

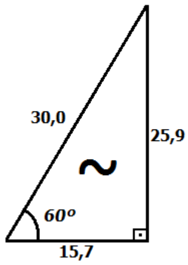

Figura 5.7: Representação geométrica no triângulo retângulo do deslocamento feito por Euclides, retirada da Tábua Trigonométrica.

   Destacamos na figura (5.7) o triângulo retângulo formado pelo deslocamento feito por Euclides observando-se as medidas escalares e angulares.

3. Análise do Modelo Matemático:

Usando a *Tábua Trigonométrica* e com base na representação do modelo matemático descrito na figura (5.7), primeiramente verificamos qual das medidas representadas nela é correspondente ao deslocamento do pé da escada até o edifício feito por Euclides. Nesta figura identificamos os *catetos* e a *hipotenusa*. Observamos na *Tábua Trigonométrica* que queremos encontrar a medida do *cateto adjacente* ao ângulo de 60°.

Observando esta medida verificamos a marcação de $15,7$ *u.m.*, para o deslocamento feito por Euclides do pé da escada até o edifício. Como vimos no capítulo 3 ao resolver esse problema da forma tradicional encontramos 15 *u.m.*, ocorrendo assim uma diferença entre os resultados.

4. Medidas e erros:

   Representamos essas medidas da mesma forma como foi descrito no primeiro problema deste capítulo.

   Para nossa análise o valor esperado era de 15 *u.m.* , e o valor encontrado foi de $15,7$ *u.m.*.

   Usando as fórmulas de $|E_A|$ e $|E_R|$, temos:

   $|E_A| = |15,0 - 15,7| = 0,7 \quad \Longrightarrow \quad |E_R| = \dfrac{0,7}{15,7} = 0,0445.$

   Representando os resultados encontrados em termos percentuais, temos: $4,45\%$.

   Logo, a *Tábua trigonométrica* apresenta no resultado encontrado neste problema um erro de aproximadamente $4,4\%$.

5.2.3 Problema 03

Vamos ao enunciado do terceiro problema:

"Euclides deseja medir a altura de um edifício mas neste momento ele se encontra atrás de um posto de observação situado a 30 *u.m. deste edifício. Euclides vê o ponto mais alto do edifício atrás deste posto de observação sob um ângulo de* 30°*. Ele está impossibilitado de subir no edifício, pois a distância que separa o posto de observação e o edifício está coberto por uma estranha vegetação, onde sua travessia não será possível. Sabendo que o posto*

de observação encontra-se a 1 *u.m. do solo. Como Euclides poderá calcular a altura deste edifício?"*

1. Representação Discursiva:

   Destacamos na figura (5.8) a manipulação da *Tábua Trigonométrica* referente a altura do edifício em relação a ao solo e ao deslocamento feito por Euclides sobre a escada.

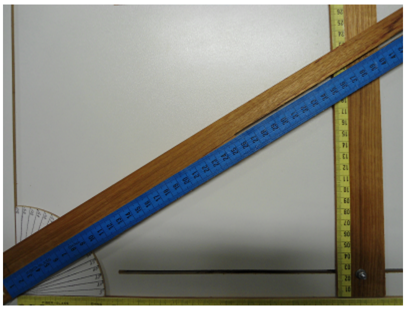

Figura 5.8: Representação da altura do edifício, via Tábua Trigonométrica.

   Com a manipulação da *Tábua Trigonométrica*, identificamos as posições dos lados do triângulo retângulo que representam: a posição correta do posto de observação em relação ao solo e ao edifício; a localização de Euclides em relação ao posto de observação e o edifício; a posição e a altura do edifício. Verificando qual é o referencial usado para a resolução da questão.

2. Modelo Matemático:

Figura 5.9: Representação geométrica no triângulo retângulo da altura do edifício, retirada da Tábua Trigonométrica.

   Destacamos na figura (5.9) o triângulo retângulo formado pelo ângulo de observação de Euclides em relação ao topo do edifício; pela distância entre o posto de observação e o edifício e pela altura do edifício.

3. Análise do Modelo Matemático:

   Como foi visto nos problemas anteriores, usando a *Tábua Trigonométrica* e com base na representação do modelo matemático descrito na figura (5.9), identificamos os *catetos* e a *hipotenusa*, mas temos um dado novo o posto de observação está situado **a uma altura de 1 u.m. em relação ao solo**. Não podemos considerar esta informação para resolvermos o problema, pois observamos que a *Tábua Trigonométrica* é limitada não tendo uma régua de movimentação vertical para verificar este deslocamento.

   Observamos na *Tábua Trigonométrica* que queremos encontrar a medida correspondente a altura do edifício que é representada pelo *cateto oposto* ao ângulo de 30º.

   Verificamos a marcação de $17,51$ $u.m.$, para a altura do edifício. Como vimos no capítulo 3 ao resolver esse problema da forma tradicional encontramos $17,32$ $u.m.$, ocorrendo assim uma diferença entre os resultados.

4. Medidas e erros:

   Representamos essas medidas da mesma forma como foi descrito nos problemas anteriores.

   Para nossa análise o valor esperado era de $17,32$ $u.m.$, e o valor encontrado foi de $17,51$ $u.m.$.

   Usando as fórmulas de $|E_A|$ e $|E_R|$, temos:

   $$|E_A| = |17,32 - 17,51| = 0,19 \quad \Longrightarrow \quad |E_R| = \frac{0,19}{17,51} = 0,0108.$$

   Representando os resultados encontrados em termos percentuais, temos:

   $1,08\%$.

   Logo, a *Tábua trigonométrica* apresenta no resultado encontrado neste problema um erro de aproximadamente $1,0\%$. Não conseguimos representar na *Tábua Trigonométrica* a altura do posto de observação em relação ao solo para podermos calcular o seu desnível.

5.2.4 Problema 04

Enunciaremos a questão da seguinte forma:

"Nesta manhã Euclides, que é um excelente profissional, foi designado para fazer serviços elétricos em cima de três edificações. Para realizar esses serviços ele terá que subir até o topo de cada um desses edifícios. O primeiro serviço será realizado na torre da Igreja, o segundo em cima do telhado da escola, e o terceiro no Edifício Plasma de três andares. Euclides levará para esse serviço sua caixa de ferramentas e sua escada com 20 *u.m.. Agora vamos ajudar Euclides a realizar os três serviços descritos acima. Vejamos que em cada serviço ele se depara com uma situação diferente.*

a)Para realizar o primeiro serviço, Euclides colocou sua escada até o topo da torre da igreja, e o padre lhe informou que a torre tem 10 *u.m. de altura. Qual é o ângulo formado pela escada e o solo?*

b)Para realizar o segundo serviço, Euclides colocou sua escada até o topo do telhado e observou que a escada formava com o solo um ângulo de 60^o*. Qual a distância do pé da escada até a parede da escola que sustenta o telhado?*

c)E por fim no último serviço, Euclides não poderá usar sua escada, pois a mesma não tinha comprimento suficiente para chegar até o topo do Edifício Plasma. Então ele pegou emprestado uma escada auxiliar que se encontrava no terreno ao lado do edifício de comprimento desconhecido. Ao colocar essa escada até o topo do edifício de 30 *u.m. de altura ele observou que a escada formava um ângulo com o solo de* 45^o*. Qual é a distância do edifício até o pé desta escada auxiliar?"*

1. Representação Discursiva:

   Destacamos na figura (5.10) a manipulação da *Tábua Trigonométrica* referente ao deslocamento de Euclides sobre a escada até o topo da torre da igreja, até o topo do telhado da escola e até o topo do Edifício Plasma.

   Com a manipulação da *Tábua Trigonométrica*, identificamos as posições corretas: da escada, das edificações e da posição de Euclides. E observamos que a mesma representação discursiva da questão serve para resolver as três situações propostas, mas cada uma será resolvida de maneira diferente verificando qual é o referencial usado para a resolução de cada questão.

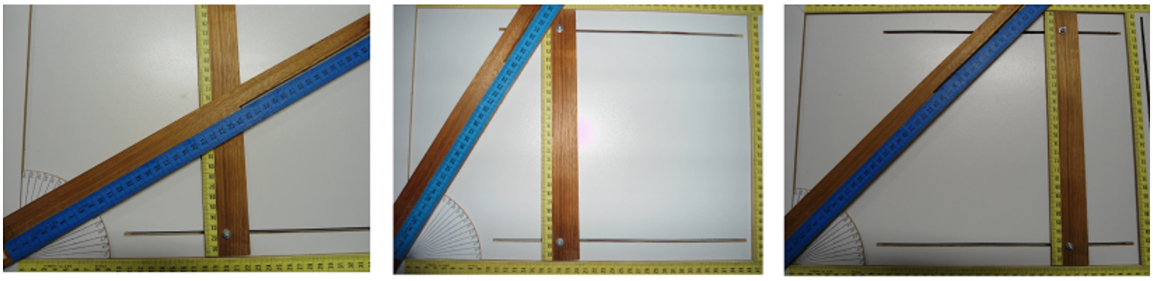

Figura 5.10: Representação das alturas da igreja, da escola e do Edifício Plasma, via Tábua Trigonométrica.

2. Modelo Matemático:

   Destacamos na figura (5.11) o triângulo retângulo formado pelo ângulo de observação de Euclides em relação ao topo da torre da igreja, pela distância entre o pé da escada até a torre, pela altura da torre da igreja e pelo comprimento da escada.

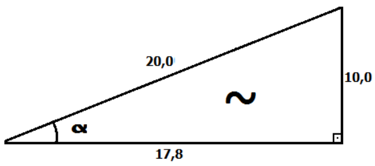

Figura 5.11: Representação geométrica no triângulo retângulo da primeira situação, retirada da Tábua Trigonométrica.

   Na figura (5.12) destacamos o triângulo retângulo formado pelo ângulo de observação de Euclides em relação ao topo do telhado da escola, pela distância entre o pé da escada até a parede da escola que sustenta o telhado, pelo comprimento da escada e pela altura do telhado da escola.

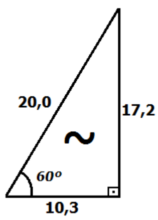

Figura 5.12: Representação geométrica no triângulo retângulo da segunda situação, retirada da Tábua Trigonométrica.

E na figura (5.13) destacamos o triângulo retângulo formado pelo ângulo de observação de Euclides em relação ao topo do Edifício Plasma, pela distância entre o pé da escada até o edifício, pela altura do edifício e pelo comprimento da escada.

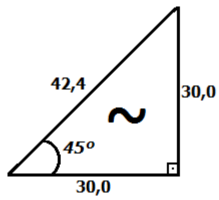

Figura 5.13: Representação geométrica no triângulo retângulo da terceira situação, retirada da Tábua Trigonométrica.

3. Análise do Modelo Matemático:

Como foi visto nos problemas anteriores, usando a *Tábua Trigonométrica* e com base na representação do modelo matemático descrito nas figura (5.11), (5.12) e (5.13) identificamos os *catetos* e a *hipotenusa*.

Observamos na figura (5.11) que encontramos o ângulo de inclinação entre a escada e o solo. Para encontrar esse ângulo basta verificar na *Tábua Trigonométrica* a medida correspondente a altura da torre da igreja que é representada pelo *cateto oposto* e o comprimento da escada que é representado pela *hipotenusa*.

Verificamos a marcação de 29º para o ângulo de inclinação. Ao resolver esse problema da forma tradicional encontramos 30º, ocorrendo assim uma diferença entre os resultados.

Já na figura (5.12), encontramos a distância do pé da escada até a parede da escola que sustenta o telhado que é representada pela medida do *cateto adjacente*. Verificando na *Tábua Trigonométrica* o que nos foi dado na questão que é o ângulo de inclinação entre a escada e o solo e a medida do comprimento da escada que é representada pela *hipotenusa*.

Verificamos a marcação de $10,3$ *u.m.*, para a distância do pé da escada até a parede da escola que sustenta o telhado. Ao resolver esse problema da forma tradicional encontramos 10 *u.m.*, ocorrendo também uma diferença entre os resultados.

Na figura (5.13), encontramos a medida da distância do pé da escada até o Edifício Plasma, que é representada pela medida do *cateto adjacente*. Verificando na *Tábua Trigonométrica* o que nos foi dado na questão foi a medida da altura do edifício que é representada pela medida do *cateto oposto* e o ângulo de inclinação entre a escada e o solo. Não temos a medida do comprimento da escada que é representada pela medida do *hipotenusa*.

Verificamos a marcação de $29,8$ *u.m.*, para a distância do pé da escada até o Edifício Plasma. Ao resolver esse problema da forma tradicional encontramos 30 *u.m.*, ocorrendo também uma diferença entre os resultados.

4. Medidas e erros:

Representamos essas medidas da mesma forma como foi descrito nos problemas anteriores deste capítulo.

Para nossa análise o valor esperado na primeira situação o valor esperado era de 30^o, e o valor encontrado foi 29^o. Na segunda situação o valor esperado era de 10 *u.m.*, e o valor encontrado foi de $10,3$ *u.m.*. Na terceira situação o valor esperado era de 30 *u.m.*, e o valor encontrado foi: $29,8$ *u.m.*.

Usando as fórmulas de $|E_A|$ e $|E_R|$, nas três situações, temos:

$$|E_{A1}| = |30,0 - 29,0| = 1,0 \quad \Longrightarrow \quad |E_{R1}| = \frac{1,0}{29,0} = 0,0344.$$

$$|E_{A2}| = |10,0 - 10,3| = 0,3 \quad \Longrightarrow \quad |E_{R2}| = \frac{0,3}{10,3} = 0,0291.$$

$$|E_{A3}| = |30,0 - 29,8| = 0,2 \quad \Longrightarrow \quad |E_{R3}| = \frac{0,2}{29,8} = 0,0067.$$

Representando os resultados encontrados em termos percentuais, temos:

$3,44\%$, $2,91\%$ e $0,67\%$,

Logo, a *Tábua trigonométrica* apresenta nos resultados encontrados neste problema um erro de aproximadamente $3,4\%$, $2,9\%$ e $0,6\%$, respectivamente, bem acima dos demais problemas feitos neste capítulo.

5.3 Resultados e Conclusões

Acreditamos que a **Tábua Trigonométrica** possibilita não só a conversão para um registro gráfico como também o tratamento desse registro. Consideramos aqui que a representação de um objeto via **Tábua Trigonométrica** constitui um nexo entre a representação e articulação de imagens, de conceitos, uma vez que quando manipulamos a representação temos a possibilidade de discutir as propriedades e registrar as ideias envolvidas em uma linguagem natural ou em uma notação simbólica ou algébrica. Colocamos a importância da utilização do ângulo, suas necessidades e sua aplicação no cotidiano. Nesse momento os alunos passam a ter uma visão mais estrutural, estabelecendo relações adquiridas com a manipulação do material.

Assim desta forma, o aluno teria um dos seus primeiros encontros nesse confronto do valor teórico calculado e do valor experimental obtido na medição.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aprendizagem matemática tem sido destaque de inúmeras pesquisas, contudo o desinteresse dos estudantes é um dos temas abordados por elas. O objetivo é apresentar uma proposta para o ensino da trigonometria de forma alternativa e prática.

O uso da **Tábua Trigonométrica** para a resolução de problemas propostos nos permite identificar algumas carências de conceitos básicos na formação do conhecimento dos alunos, que interfere nos resultados em se tratando de cálculos, medições e aplicações de regras ou fórmulas. A intenção é ampliar as ações deste projeto, trazendo novas alternativas para ensinar outros conteúdos em diferentes níveis de ensino, usando materiais concretos como no caso da **Tábua Trigonométrica** que auxiliem no processo de abstração de tais conceitos.

A manipulação desse material nos possibilitará uma prática que instigue a curiosidade, a compreensão e o raciocínio lógico, superando a concepção baseada nas repetições e memorizações, em vistas a um processo de formação que complete a construção do conhecimento científico significativo dos aprendizes. Nossa intenção ao elaborar este material foi criar as condições para que os alunos participem do processo de construção dos conceitos de trigonometria. Acreditamos que com a ajuda da **Tábua Trigonométrica** consigamos um ambiente mais propício no que diz respeito a relacionar e desenvolver alguns conceitos trigonométricos, onde a aprendizagem desses conceitos é de suma importância para a vida cotidiana, na escola ou fora dela. A utilização deste material concreto deve construir um método capaz de intermediar a aprendizagem possibilitando a abstração dos conceitos e desenvolvendo o raciocínio lógico dos estudantes, tornando-se um recurso capaz de amenizar a falta de entendimento desses em relação a matemática.

Ao trabalhar com problemas propostos para o ensino de trigonometria no ensino fundamental, percebi claramente a dificuldade que os alunos tinham em visualizar figuras. Só as ilustrações que eu fazia no quadro não eram suficiente para que eles criassem imagens mentais. Esperamos que a partir da manipulação pelos alunos da **Tábua Trigonométrica**, isso se tornará mais fácil.

Poderemos adotar em trabalhos posteriores uma pesquisa qualitativa e metodológica para promover o envolvimento dos participantes visto que o pesquisador esteja presente no contexto observado, pois neste trabalho não foi possível tal aplicação. Será escolhida essa abordagem porque o trabalho será realizado dentro do ambiente escolar, tendo como fonte de dados as ações dos alunos nas resoluções das atividades propostas. O professor pesquisador deve tentar a ação dos alunos, resgatando e elaborando conceitos matemáticos com a utilização da **Tábua Trigonométrica** para uma posterior compreensão e sistematização dos conteúdos estudados. A **Tábua Trigonométrica** poderá ser usada sempre durante as aulas para que os alunos visualizem e criem imagens mentais sobre o triângulo retângulo e suas aplicações. Muitas vezes, achamos que com uma única aplicação o material conseguirá fazer o seu papel. Porém ele se torna mais eficaz quando é manipulado várias vezes até que os alunos consigam realmente apreender as informações nele contidas, não só fazer cálculos, mas calcular aquilo que se percebe da realidade.

Espera-se assim que o uso da **Tábua Trigonométrica** proporcione vantagens no desenvolvimento e aplicação dos conteúdos propostos, mesmo que não atenda os requisitos matemáticos das definições encontradas nos livros. Para tanto fizemos este estudo aprofundado destes conceitos, onde abordamos suas origens.

É bom salientar que este encontro do aluno com situações reais de medição é uma interessante introdução ao mundo das ciências aplicadas como são a Física, Química e a Engenharia, sendo esta última de importância estratégica no desenvolvimento futuro do nosso pais.

Ao produzir esse material refletimos sobre a nossa prática de ensino no que se refere a trigonometria no triângulo retângulo e procuramos instrumentos que de alguma forma contribuam para a melhoria das nossas aulas.

APÊNDICE A

TEOREMA DE PITÁGORAS

A.1 Introdução

O **Teorema de Pitágoras** leva o nome do matemático e filósofo grego ***Pitágoras***($\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma o\rho\alpha\varsigma$) (570 a.C. – 495 a.C.), que tradicionalmente é creditado pela sua descoberta e demonstração, embora seja frequentemente argumentado que o conhecimento do teorema seja anterior a ele (há muitas evidências de que matemáticos babilônicos conheciam algoritmos para calcular os lados em casos específicos, mas não se sabe se conheciam um algoritmo tão geral quanto o teorema de Pitágoras). Ele é uma das joias da Geometria Analítica Plana, também conhecida como Geometria Euclidiana.

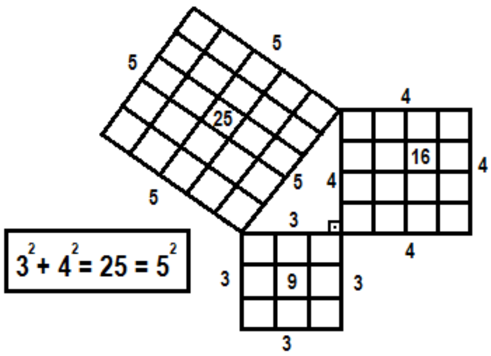

Figura A.1: "Demonstração" do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo 3, 4 e 5.

Para finalizar esta introdução observaremos na figura (A.1) que alguns livros didáticos colocam o caso como sendo uma demonstração do Teorema de Pitágoras, mas na verdade é só um exemplo particular ilustrativo limitado ao caso de um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5.

A.2 O Teorema

O **Teorema de Pitágoras** é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo.

Na Geometria Euclidiana, o teorema afirma que:

"Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos."

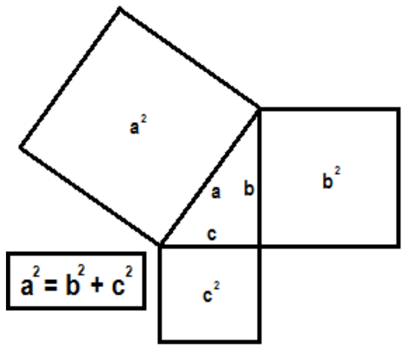

Figura A.2: Teorema de Pitágoras: a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos **b** e **c** equivale à área do quadrado construído sobre a hipotenusa **a**.

Pelo teorema, a hipotenusa **a** é o lado oposto ao ângulo reto, e os catetos **b** e **c** são os dois lados que o formam. O enunciado anterior relaciona comprimentos, mas o teorema também pode ser enunciado como uma relação entre áreas:

"Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos.". Ver figura (A.2).

Para ambos os enunciados, pode-se equacionar:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

onde **c** representa o comprimento da **hipotenusa**, e **a** e **b** representam os comprimentos dos **catetos**.

Todo teorema precisa ser demonstrado então na continuação serão mostradas algumas formas de prova-los. O livro ***The Pythagoream Proposition*** contém 370 demostrações.

A.3 Demonstrações

A.3.1 Prova 01

A demostração do **Teorema de Pitágoras** elaborada por *Euclides* é um exemplo do seu estilo matemático.

Antes de iniciarmos esta demonstração, devemos levar em conta que, para *Euclides*, duas figuras geométricas são iguais se têm a mesma área.

Vejamos a seguir a definição do **Teorema de Pitágoras** de acordo com *Euclides*[14].

Teorema: *"Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto **a** é igual aos quadrados formados sobre os outros lados **b** e **c**, que fazem o mesmo ângulo reto."*

Seja ABC um triângulo retângulo, com ângulo reto em A. Ver figura (A.3).

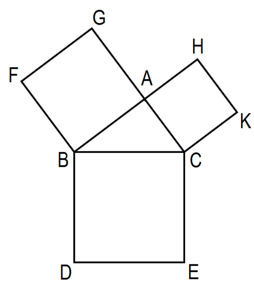

Figura A.3: Triângulo retângulo ABC e os quadrados formados a partir de seus lados.

Dizemos que o quadrado feito sobre BC é igual à soma dos quadrados feitos sobre AB e AC.

Descrevam-se o quadrado $BDEC$ sobre BC e os quadrados $BAGF$ e $ACKH$ sobre AB e AC, respectivamente.

A partir de A vamos traçar uma reta AL paralela a EC ou a BD, e tracemos também as retas AD e FC. Ver figura (A.4).

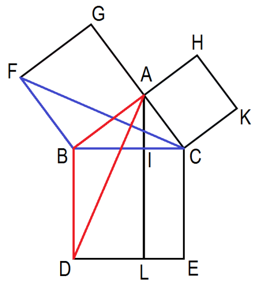

Figura A.4: Comparação entre os triângulos ABD e FBC.

Como $\angle BAG$ e $\angle CAB$ são retos, os segmentos CA e AG estão na mesma reta, do mesmo modo, temos AB e AH.

Por $\angle FBA$ ser reto e $\angle CBD$ também, os ângulos $\angle FBC$ e $\angle ABD$ são iguais, já que ambos resultam da soma do ângulo ABC com um ângulo reto. Observemos que $BD = CB$ e $FB = AB$, então os triângulos FBC e ABD são congruentes, pois eles têm dois lados iguais entre si, onde os ângulos compreendidos por estes lados também são iguais.

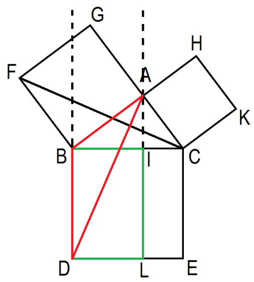

Figura A.5: Relação entre o triângulo ABD e o paralelogramo $BDLI$.

Observemos na figura (A.5) que BD e AL por estarem na mesma paralela e terem a base BD comum, o paralelogramo $BDLI$ é o dobro do triângulo ABD.

Podemos ver na figura (A.6), por razão semelhante a anterior, que o paralelogramo $ABFG$ que é um quadrado e iremos designar seu lado por "b", onde este é o dobro do triângulo CBF, já que estão entre as mesmas paralelas BF e CG e partilham a base BF.

Desde modo, como $ABD = FBC$, os paralelogramos $ABFG$ e $BDLI$ são iguais, porém suas áreas são congruentes, logo igual a "b^2".

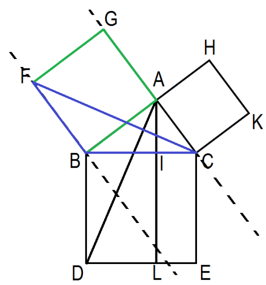

Figura A.6: Relação entre o triângulo FBC e o paralelogramo $GFBA$.

Trabalhando de forma análoga chegamos a que os paralelogramos $ACKH$ e $CELI$ tem a mesma área, igual a "c^2", onde "c" é o lado do quadrado $ACKH$. Ver figura (A.7).

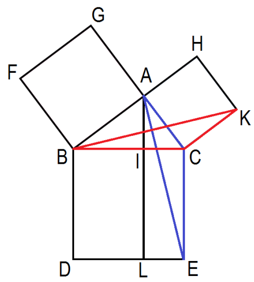

Figura A.7: Comparação entre os triângulos AEC e BCK.

Observemos na figura (A.8), que AEC e $ILEC$ estão entre as mesmas paralelas AL e CE e terem a mesma base CE, $ILEC$ é o dobro de AEC

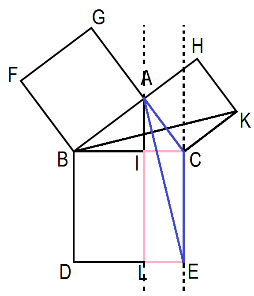

Figura A.8: Relação entre o triângulo AEC e o paralelogramo $ILEC$.

Do mesmo modo podemos observar na figura (A.9), que por BCK e $HACK$ estarem entre as paralelas HB e CK e terem a mesma base CK, $HACK$ é o dobro de BCK. Como $AEC = BCK$, podemos concluir que $ILEC$ é igual a $HACK$.

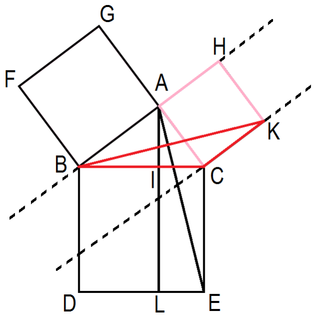

Figura A.9: Relação entre o triângulo BCK e o quadrilátero $HACK$.

Veremos na figura (A.10) que como foi provado que $GFBA = BDLI$ e $HACK = ILEC$, temos que o quadrado $BDEC$ feito sobre BC, lado oposto ao ângulo reto $\angle CAB$, é igual à soma dos quadrados $HACK$ e $BAGF$, feito sobre AC e AB, respectivamente.

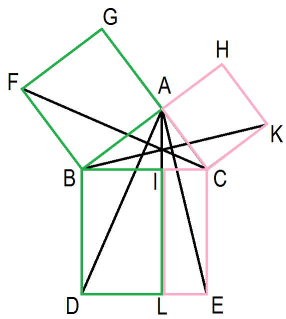

Figura A.10: A soma dos quadrados $HACK$ e $GFBA$ é igual ao quadrado $BDEC$.

A.3.2 Prova 02

Esta demonstração foi elaborada por *James Abram Garfield*, um general que foi eleito presidente dos Estados Unidos por quatro meses (assassinado em 1881). *James Garfield* gostava muito de Matemática. Sua prova foi baseada numa figura, o trapézio, formada por três triângulos retângulos como podemos ver na figura (A.11).

Área do trapézio é igual:

$$\frac{base\ maior\ +\ base\ menor}{2} \cdot altura.$$

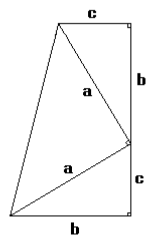

Figura A.11: Trapézio formado por três triângulos retângulos.

Retirando os dados da figura (A.11), temos:

$$\frac{(b+c)}{2} \cdot (b+c).$$

Área do trapézio é igual a soma das áreas dos triângulos, como podemos ver na figura (A.12).

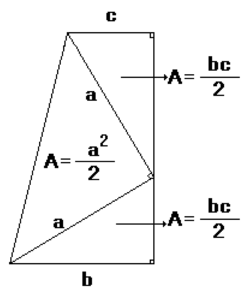

Figura A.12: Áreas destacadas do trapézio formado por três triângulos retângulos.

então,

$$\frac{(b+c)}{2} \cdot (b+c) = 2 \cdot \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2},$$
$$(b+c)^2 = 2bc + a^2,$$
$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2,$$
$$b^2 + c^2 = a^2,$$

logo,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

A.3.3 Prova 03

1º*Passo* :

Pitágoras considerou um triângulo retângulo cujos os catetos medem **b** e **c** e cuja a hipotenusa mede **a**, como podemos ver na figura (A.13).

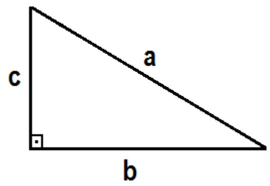

Figura A.13: Triângulo retângulo de lados **a**, **b** e **c**.

2º*Passo* :

Construiu em seguida um quadrado de lado igual à soma dos dois catetos do triângulo $(b + c)$ e fez nele a respectiva decomposição. Ver figura (A.14).

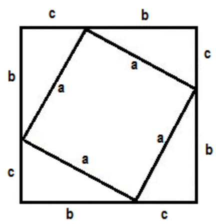

Figura A.14: Quadrado de lados $(b + c)$.

3º*Passo* :

Provemos que o quadrilátero interno é um quadrado, como efeito podemos ver na figura (A.15).

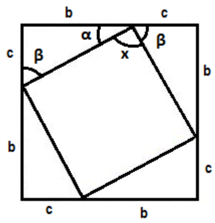

Figura A.15: Quadrado interno, inscrito no quadrado externo.

Analisaremos esse quadrado da seguinte forma:

Todos os seus lados têm o mesmo comprimento, pois são hipotenusas dos triângulos retângulos.

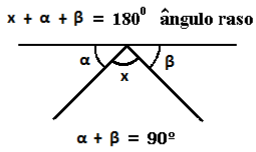

Figura A.16: Comparação da soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo, com o ângulo raso.

Os seus ângulos internos são todos retos. Observe o ângulo X da figura (A.16).

Pois:

$$x + 90^o = 180^o \Longleftrightarrow x = 90^o.$$

E analogamente para os outros ângulos internos. Desta forma, fica provado que o quadrilátero interno é um quadrado.

Vejamos agora como é que Pitágoras comprovou a sua demonstração. A demonstração resulta do confronto da primeira figura com a que se segue, compondo as peças do quadrado de uma outra forma, como veremos na figura (A.17).

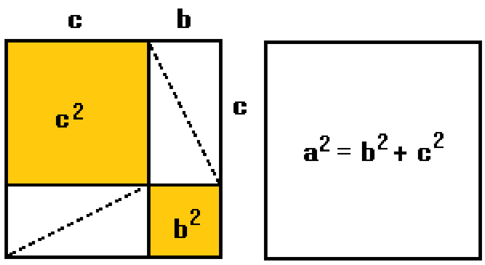

Figura A.17: Comparação entre as figuras, resulta na demostração do teorema.

Pitágoras nesta demonstração partiu da hipótese (um triângulo retângulo qualquer) e chegou à tese

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

APÊNDICE B

NOÇÕES BÁSICAS DE ERROS E MEDIDAS

B.1 Erros absolutos e relativos

B.1.1 O porque dos erros nas medidas

Quando realizamos uma medição precisamos estabelecer a confiança de que o valor encontrado é realmente a medida precisa ou exata. Medir é um ato de comparar e esta comparação envolve erros dos instrumentos, do operador, do processo de medida e outros. Podemos ter erros sistemáticos que ocorrem quando há falhas no método empregado, defeito dos instrumentos, etc. e erros acidentais que ocorrem quando há imperícia do operador, erro de leitura em uma escala, erro que se comete na avaliação da menor divisão da escala utilizada. Em qualquer situação deve-se adotar um valor que melhor represente a grandeza e uma margem de erro dentro da qual deve estar compreendido o valor real.

É importante chamar a atenção para o fato de que a unidade de arredondamento é um valor independente da magnitude do número que está sendo aproximado. A acurácia do resultado de uma grandeza pode ser estimada por seus erros absolutos e relativos.

Os conceitos de precisão e exatidão são distintos um do outro. A precisão de uma máquina informa sobre o número de dígitos significativos da máquina, sendo este fixo para uma máquina. A exatidão, ao contrário, define a precisão do resultado, que depende de diversos fatores, entre a precisão, a base do sistema de numeração, etc.

B.1.2 Definições

Agora colocaremos as definições básicas que precisaremos nesta secção.

Definição:[Valor Real] *"Definimos o valor real, como sendo o valor proveniente do calculo teórico da variável x".*

Definição:[Valor Estimado] *"Definimos o valor estimado, como sendo o valor proveniente do ato da medida de uma certa variável x, que denotaremos mediante $\tilde{x}$".*

Definição:[Erro absoluto] *"Sejam os valores reais de x e estimados de $\tilde{x}$. Definimos como erro absoluto a diferença entre o valor exato de um número x e de seu valor aproximado $\tilde{x}$:"*

$$|E_A| = |x - \tilde{x}|.$$

Definição:[Erro relativo] *"O erro relativo é definido como o erro absoluto dividido pelo valor aproximado $\tilde{x}$:"*

$$|E_R| = \frac{|E_A|}{\tilde{x}} = \frac{|x - \tilde{x}|}{\tilde{x}}.$$

B.2 Média aritmética simples

A média aritmética simples é a mais utilizada no nosso dia a dia. É obtida dividindo-se a soma das observações pelo número delas. É um quociente geralmente representado pelo símbolo $\overline{x}$. Se tivermos uma série n de valores de uma variável x, a média aritmética simples será determinada pela expressão:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] EVES, H., Introdução a História da Matemática,
São Paulo, v.1, n.1, p. 57-89, May 2004.

[2] BOYER, C., História da Matemática,
São Paulo, v.1, n.2, p. 108-119, May 2002.

[3] ANTAR NETO, A., Trigonometria: Noções de Matemática,
São Paulo, v.3, n.1, p. 13-25, May 1979.

[4] MACHADO, N. J., Matemática e língua materna: Análise de uma impregnação mútua,
São Paulo, v.1, n.3, p. 15-55, May 1993.

[5] ÊNIO, S., MARQUES, C., Matemática,
São Paulo, v.4, n.1, p. 186-196, May 1995.

[6] IEZZI, G., Fundamentos de Matemática Elementar,
São Paulo, v.3, n.8, p. 10-22, May 2004.

[7] ANDRINI, A., Praticando Matemática,
São Paulo, v.4, n.1, p. 201-218, May 2007.

[8] PAIVA, M., Matemática,
São Paulo, v.1, n.1, p. 351-456, May 2002.

[9] ROQUE, W., Introdução ao cálculo numérico,
São Paulo, v.1, n.1, p. 17-49, May 2000.

[10] RUGGIERO, M., Cálculo numérico: Aspectos teóricos e computacionais,
São Paulo, v.1, n.2, p. 12-26, May 2004.

[11] MORGADO, A. S., Análise combinatória e probabilidade,
Rio de Janeiro, v.1, n.9, p. 17-27, May 1991.

[12] ROQUE, W. L., Introdução ao cálculo numérico: um texto integrado com DERIVE,
São Paulo, v.1, n.1, p. 28-46, May 2000.

[13] RUGGIERO, M. A., Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais,
São Paulo, v.1, n.2, p. 10-21, May 1996.

[14] BICUDO, I., EUCLIDES: Os Elementos,
São Paulo, v.1, n.1, p. 132-133, May 2009.