Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Felipe Ferreira da Silva

O Método dos Mínimos Quadrados: uma proposta ao Ensino Médio para o ajuste por parábolas

Rio de Janeiro
2014

Felipe Ferreira da Silva

O Método dos Mínimos Quadrados: uma proposta ao Ensino Médio para o ajuste por parábolas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UNIRIO

Rio de Janeiro

2014

Silva, Felipe

O Método dos Mínimos Quadrados: uma proposta ao Ensino Médio para o ajuste por parábolas / Felipe Silva - 2014

74.p

1.Matemática 2. Álgebra Linear. I.Título.

CDU 536.21

Felipe Ferreira da Silva

O Método dos Mínimos Quadrados: uma proposta ao Ensino Médio para o ajuste por parábolas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 28 de Maio de 2014

BANCA EXAMINADORA

Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UNIRIO

Silas Fantin

Doutor em Matemática - UNIRIO

Miguel Jorge

Mestre em Matemática - FGV

Agradecimentos

Ao meu pai, Ubirajara, um apaixonado pela profissão que com sua história de superação, me ensinou a perseguir meus sonhos sem esmorecer frente a obstáculos.

À minha mãe, Ana Regina , de quem herdei o dom do magistério e quem me ensinou, ao dedicar-se à família com tanto carinho, o sentido do amor incondicional.

À minha amada esposa, Mariana, por ser minha companheira, cúmplice e parceira todos dias. Pelo apoio e incentivo desde o momento da inscrição na prova de acesso ao PROFMAT e o sorriso a cada sucesso conquistado. Por ser o grande amor da minha vida e me fazer sentir o homem mais feliz do mundo.

Ao meu orientador, Professor Ronaldo Busse, por toda atenção e o carinho dados ao longo do curso e a dedicação dispensada para que este trabalho fosse concretizado.

Ao meu grande amigo, João Carlos, presente nos momentos cruciais para que esse curso e esse trabalho fossem concluídos. Grande parceiro de estudos e parte essencial neste projeto.

Resumo

Este trabalho tem por finalidade apresentar a Modelagem Matemática como uma importante alternativa no resgate de um ensino significativo de Matemática no Ensino Médio. Para tal, apresentamos o Método dos Mínimos Quadrados como estratégia de complementação de uma situação-problema modelada no que diz respeito à análise de tendências e previsão de resultados de um experimento. Assim, sugerimos uma proposta de aula para alunos do Ensino Médio na qual realizam-se atividades de modo que o estudante conheça o Método dos Mínimos Quadrados, aprenda a utilizá-lo e aplique-o desde situações simples até problemas interdisciplinares envolvendo, por exemplo, Biologia, Física e Geografia. Os principais objetivos dessa aula, o material e o tempo necessários bem como os pré-requisitos para o sucesso da mesma também serão detalhados nesse trabalho.

Palavras-chaves: Modelagem Matemática, Método dos Mínimos Quadrados, Ajuste de Curvas, Aproximação, Erro.

Abstract

This work aims at presenting Mathematical Modelling as an important alternative to the rescue of significant teaching of Mathematics in High School. For this purpose, we present the Least Squares Method as a complementary strategy modelled with respect to the analysis of trends and forecasting results of an experiment problem situation. Thus, we suggest a proposed class to High School students in which activities are held so that the student knows the Least Squares Method, learns how to use it and applies it from simple situations to interdisciplinary problems involving, for example, Biology, Physics and Geography. The main objectives of this lesson, the material and the time needed and the pre-requisites for its success will also be detailed in this work.

Keywords: Mathematical Modeling, Least Squares Method, Curve Fitting, Approximation, Error.

Sumário

1 Introdução

Atualmente, muitos professores buscam alternativas para tornar o ensino da Matemática mais atrativo. Existe um consenso de que o ensino de Matemática nos diversos níveis (Fundamental, Médio e Superior) pode se tornar mais atraente quando os assuntos estudados têm alguma relação com a realidade vivida pelo estudante.

Assim, com a necessidade de mudanças no modelo tradicional de ensino, a Modelagem Matemática se apresenta como estratégia de ensino que oferece a possibilidade de se aplicar uma prática pedagógica diferenciada.

De acordo com Santos e Bisognin (2006),

> "A Modelagem Matemática é uma alternativa metodológica de trabalhar a matemática de forma que a mesma esteja próxima da vida do aluno e permita que ele possa compreender e atuar no mundo com a obtenção de modelos matemáticos ou a resolução de situações-problema."([1], p.16)

Dessa forma, com a resolução de situações-problema, o professor estimula seus alunos a pensar na Matemática como instrumento de análise quantitativa e qualitativa na solução de problemas do mundo real.

Um dos atributos da Modelagem Matemática de uma situação problema está na possibilidade de estimar o comportamento de um experimento a longo prazo, o que se faz necessário em muitas pesquisas. Uma importante ferramenta nesse processo é o Método dos Mínimos Quadrados, que consiste em aproximar dados experimentais por um modelo matemático, de modo a minimizar os erros dessas previsões, dando assim, maior credibilidade para a análise de tendências de um experimento.

Portanto, tendo em vista a importância do assunto, interessa-nos nesse trabalho discutir a importância do Método dos Mínimos Quadrados como instrumento de Modelagem Matemática, em particular, sua aplicação ao ensino. Para tanto, apresentaremos um breve histórico sobre o surgimento do método, os seus objetivos e o descreveremos matematicamente, sob a perspectiva da Álgebra Linear, fornecendo todos os pré-requisitos necessários.

Em seguida, mostraremos de que forma o Método dos Mínimos Quadrados se traduz em um “ajuste de curvas”, que é o objetivo central da proposta. Assim, dado um “diagrama de dispersão”(gráfico com os pares ordenados que retrata o resultado de um experimento e as grandezas envolvidas), a aplicação do método está em determinar qual a função que melhor se ajusta aos pontos dados e, a partir disso, analisar as tendências do experimento. Aqui, ilustraremos algumas aplicações em diversas áreas do conhecimento como Geografia, Física e Biologia.

Por fim, será apresentada uma proposta de aula para o Ensino Médio visando o uso do Método dos Mínimos Quadrados. Nessa aula foram detalhados os objetivos bem como os pré-requisitos necessários, a série indicada, o tempo previsto e o material que será usado.

O desenvolvimento dessa aula será feito através de quatro atividades. Na primeira atividade, apresentamos um exemplo motivador para que o professor apresente o método aos alunos. Primeiro, mostramos uma solução alternativa para o problema e, em seguida, resolvemos a questão pelo Método dos Mínimos Quadrados. Na atividade 2, propomos um problema simples para os alunos entenderem a relação entre o método e o ajuste de curvas (em especial a parábola) e fixarem o método. Com ele, os alunos poderão entender o passo a passo do método que apresenta forte manipulação algébrica. Na atividade 3, abordamos uma situação composta por um número maior de dados coletados experimentalmente e com isso, um problema de ordem prática: a manipulação de matrizes com um número maior de linhas e colunas. Aproveitaremos esta atividade para apresentar um tutorial de utilização do software Geogebra que auxiliará na realização dos cálculos envolvidos nas operações com tais matrizes. Já na 4ª atividade, apresentamos uma proposta de aula que poderá ser realizada com alunos do Ensino Médio para a determinação do número por meio da aproximação da parábola que descreve a área de um círculo em função do seu raio, utilizando o Método dos Mínimos Quadrados. Para tanto, consideramos círculos de raios diferentes e aproximaremos a área de cada um pela média aritmética entre as áreas de dois polígonos, um inscrito e o outro circunscrito a ele.

No Apêndice apresentaremos o Método dos Mínimos Quadrados sob a ótica do Cálculo Diferencial. Para isso, escolhemos uma das atividades propostas e apresentamos uma solução alternativa seguindo a teoria de otimização de funções reais de várias variáveis. A parte teórica necessária, bem como a resolução, são detalhadas na última parte deste trabalho.

2 Modelagem Matemática

A evolução tecnológica e o desenvolvimento social observados nas últimas décadas têm trazido diversas transformações para a Educação, dentre as quais se pode destacar o ensino de Matemática.

Entretanto, segundo Fidelis e Almeida (2008),

> “as justificativas usadas nas análises de diferentes formas de ensinar Matemática estão longe de ser consensuais. As tendências de renovação e inovação da educação matemática envolvem mudanças na forma de ensinar, percebendo que o processo habitual onde o professor expõe o conteúdo, faz exercício de fixação e avalia, já não responde às necessidades dos estudantes na sociedade atual. Relacionam-se também com a complexidade da sociedade pós-moderna e com os desafios que ela coloca aos cidadãos e futuros profissionais”. ([2], p.1)

Assim, os antigos moldes de ensino devem ser substituídos pelas novas técnicas visando maior interação entre professores e alunos e uma aproximação com o cotidiano dos estudantes.

Existe um consenso de que o ensino de Matemática, no Nível Médio e no Fundamental, pode se tornar mais atraente quando os assuntos estudados têm uma aplicação imediata à realidade vivida pelo estudante. Na prática pedagógica é mais motivador propor problemas contextualizados porque eles, de certa forma, justificam o ensino dessa disciplina. Com a resolução desses problemas, o professor pode motivar seus alunos a pensar na Matemática como instrumento de análise quantitativa e qualitativa para observar o mundo real.

2.1 O que é Modelagem Matemática?

Dentre as diferentes metodologias de ensino que colaboram para que a aprendizagem se torne mais significativa e aplicável para os alunos, está a Modelagem Matemática.

Essa técnica está sendo aplicada nos variados níveis de ensino e em diferentes contextos, como na formação de professores, cursos de pós-graduação e em disciplinas regulares de cursos de graduação. Além disso, também pode ser aplicada nas salas de aula dos Ensinos Fundamental e Médio.

Trata-se, portanto, de uma ação pedagógica que se apresenta como um caminho para tornar as aulas de Matemática mais interessantes, atraentes e agradáveis. É o que afirma Barbosa (2001),

> "Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade". ([3], p.6)

Com a exploração de questões referentes à realidade, a necessidade e o interesse dos conhecimentos matemáticos surgem naturalmente. Essas questões podem estar relacionadas à saúde, economia, estatística, política, entre outros. Assim, o aluno aprende interagindo e percebendo a Matemática que "atua" no seu dia a dia.

Para Bassanezi(2000),

> "Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual". ([4], p.24)

Ainda em Bassanezi (2000), lê-se que:

> "Modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos sempre elaborando representações de um sistema ou parte dele". ([4], p.24)

Por isso,

> "a modelagem matemática pode ser entendida como uma abordagem de um problema não matemático por meio da matemática onde as características pertinentes

de um objeto são extraídas com a ajuda de hipóteses e aproximações". ([2],2008)

Segundo Silveira e Ribas (2007),

"ao se trabalhar Modelagem Matemática, dois pontos são fundamentais: aliar o tema a ser escolhido com a realidade dos alunos e aproveitar as experiências extraclasse dos alunos aliadas à experiência do professor em sala de aula. O objetivo dessa estratégia é ensinar Matemática para a vida". ([5])

A Modelagem Matemática é, então, um bom caminho para alcançar esse objetivo, pois o modelo matemático, resultado de uma modelagem, envolve justamente o processo de levantar um problema e propor a solução com a geração de fórmulas, equações, gráficos ou, ainda, programas computacionais.

Como destaca Cipriano (2013),

"Na matemática podemos definir modelo como representações que são capazes de explicar e interpretar fenômenos em estudo, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam uma situação, um fenômeno ou um objeto real a ser estudado". ([6])

Um modelo matemático deve expressar de maneira clara o que está sendo tratado e servir de referência para a resolução de problemas semelhantes. Assim, o aluno deve investigar a situação dada para possibilitar maior conhecimento e aprendizado do assunto. A Modelagem Matemática surge como essa possibilidade.

Além disso, ao se modelar um problema, ferramentas matemáticas podem ser utilizadas para auxiliar a resolução do problema. Dentre elas, destacam-se as funções. Como destacam Fortes, Junior e Oliveira (2013),

"Na atualidade, as funções podem ser aplicadas e relacionadas em todas as ciências, por exemplo, na física, química, biologia e outras. É excelente ferramenta de solucionar e representar questões atuais, simular graficamente uma situação problema como, por exemplo, obter uma Função Custo, Receita ou lucro. Isto a torna uma importante ferramenta para modelar situações encontradas no cotidiano, pois sua aplicação no campo da matemática e em outras ciências é vasta". ([7])

Muitas dessas aplicações são obtidas através da modelagem matemática de uma situação. Assim, além de aliar o ato de modelar com conteúdos matemáticos, chega-se ao objetivo central da modelagem matemática: tornar mais significativo e contextualizado o ensino, por exemplo, das funções e mostrar algumas de suas aplicações.

Ainda sobre a modelagem, Barbosa (2001) esclarece que:

"O ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, pode-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo". ([3], p.3)

Portanto, nota-se que a Modelagem Matemática é uma importante ferramenta na conquista de novos rumos para o ensino da Matemática, tanto na Educação Básica como na Educação Superior.

2.1.1 Etapas da Modelagem Matemática

Para Bassanezi (2000), a Modelagem Matemática de um problema real deve seguir uma sequência de etapas, visualizadas e discriminadas na figura(2.1):

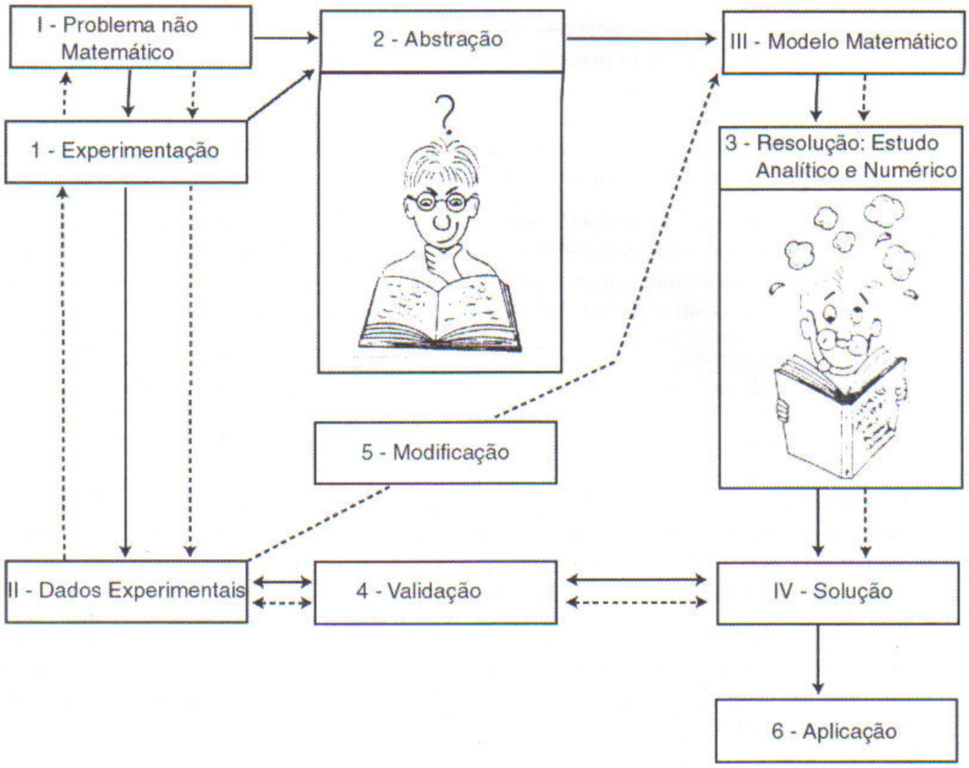

Figura 2.1: Bassanezi [4], p.27

Na figura (2.1), as setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, conforme indicado pelas setas pontilhadas.

Note-se, ainda, que a figura exibe uma sequência de números romanos e indo-arábicos. Os primeiros fazem referência ao processo geral da modelagem, ou seja, detalha os passos mais "superficiais" que devem ser seguidos. Assim, parte-se de um "problema não-matemático" (I) e, a partir disso, realiza-se a pesquisa e a coleta de "dados experimentais" (II) que serão vitais na elaboração do "modelo matemático" (III), responsável por retratar com detalhes a situação-problema e a partir do qual se pode chegar a uma possível "solução" (IV).

Já os números indo-arábicos representam uma sequência de cinco etapas mais específicas, chamadas por Bassanezi (2000) de "atividades intelectuais" e que serão detalhadas a seguir:

1. **Experimentação**: é uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados;

2. **Abstração**: é o procedimento que deve levar à formulação dos modelos matemáticos (seleção de variáveis, problematização, formulação de hipóteses, simplificação);

3. **Resolução**: o modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente – é como num dicionário, a linguagem matemática admite "sinônimos" que traduzem os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural;

4. **Validação**: é o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para validação;

5. **Modificação**: alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Quando são obtidos considerando simplificações e idealizações da realidade, suas soluções geralmente não conduzem às previsões corretas e definitivas, pois o aprofundamento da teoria implica na reformulação desses modelos. Como já foi dito, nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado; pode-se dizer que bom é aquele que propicia a formulação de novos modelos; sendo esta reformulação uma das partes fundamentais do processo de modelagem. ([4], p.26-31)

Esses passos são suficientes para efetivar o processo de Modelagem Matemática. Além disso, é importante observar que, segundo Souza, Lima e Cordeiro (2009)

> "é durante o processo que os conceitos vão sendo pesquisados e incorporados na bagagem cognitiva do sujeito, objetivando a resolução de um problema formulado". ([8])

Assim, vale ressaltar que um modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procuram traduzir, de alguma forma, um fenômeno, um determinado evento ou problema de situação real. Através destes modelos é possível simular e prever certas situações.

Dessa forma, esses modelos podem se apresentar na forma de: gráficos, diagramas, fórmulas e expressões numéricas, construções, objetos e artefatos, representações geométricas ou expressões algébricas, tabelas, e outros.

Um modelo é uma aproximação do que se estuda e quanto melhor elaborado mais se aproximará da realidade. Porém, dificilmente conseguirá retratar com total confiança essa realidade.

Biembengut e Hein (2000), apresentam o esquema de Modelagem Matemática, conforme figura (2.2), no qual Matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é o meio de fazê-los interagir.

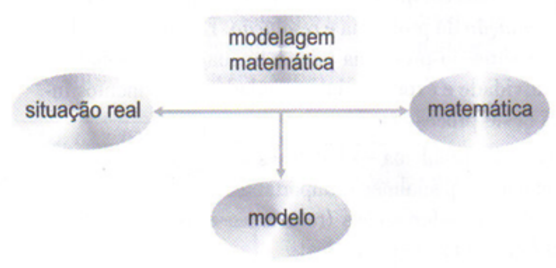

Figura 2.2: Biembengut [9], p.13

Segundo Biembengut e Hein (2000), essa interação, que permite representar um fenômeno através da linguagem matemática (modelo matemático), envolve uma série de procedimentos que podem ser agrupados em três etapas:

- **Interação** – reconhecimento do problema ou situação, assim como conhecimento do assunto tratado associado à busca de um referencial teórico.
- **Matematização** – tornam-se necessárias várias ações: formular a hipótese, desenvolver o problema em função do modelo, traduzir o problema para linguagem matemática, levantar e classificar as variáveis. A precisão do modelo está diretamente ligada à escolha das variáveis nessa etapa do processo.
- **Modelo Matemático** – interpretação da solução, validação do modelo, simulação de

resultados para testes do modelo (geralmente esta simulação pode ser feita com o uso de um computador), e avaliação do mesmo. Nessa etapa, o modelo deve ser exaustivamente testado para que possa ser verificado se é eficiente, ou seja, se retrata bem a situação problema que o gerou e se pode ser confiável para resolução deste problema. ([9], p.13-15)

A qualidade do modelo está diretamente ligada ao desenvolvimento de todas as etapas. Todas as fases têm sua importância e por isso devem ser cuidadosamente trabalhadas e bem definidas garantindo assim essa qualidade. Cada vez que o processo for concluído, o modelo deve ser testado e todas as etapas reavaliadas. Se não atender às necessidades esperadas, o processo deve ser retomado na segunda etapa – Matematização – mudando-se ou ajustando-se hipóteses, variáveis, etc., conforme figura (2.3)

Figura 2.3: Biembengut [9], p.15

Torna-se necessário ressaltar que o modelo, descrito na figura (2.3) não é tão rico quanto o de Bassanezi, descrito na figura (2.1) já que não relaciona as etapas num sentido horizontal, o que seria desejável.

Portanto, é importante elaborar um relatório que registre e analise todas as fases do desenvolvimento ao concluir o modelo a fim de propiciar seu uso de forma adequada.

2.1.2 Modelagem Matemática e o Método dos Mínimos Quadrados

Dentre os objetivos destacados, a Modelagem Matemática tem por finalidade proporcionar ao aluno a capacidade de fazer estimativas sobre determinadas situações-problema. O modelo matemático obtido deve reproduzir as informações já existentes e ser capaz de estimar dados ainda não obtidos.

Segundo Cipriano (2013),

> "Essa etapa da "estimativa", muitas das vezes é pouco estimulada nos textos de modelagem, porém é de extrema importância para a construção do conhecimento". ([6])

Porém, nem sempre a modelagem de uma situação é suficiente para prever o que aconteceria com um determinado experimento com valores não testados. Para isso, o Método dos Mínimos Quadrados aparece com uma alternativa para a análise de tendências de uma experiência com maior rigor.

Vamos supor uma situação em que se quer saber como se relacionam duas grandezas "X" e "Y" que, após serem testadas, apresentam os resultados conforme tabela (2.1):

X	1	2	3	4
Y	2.5	5.3	6.8	9.7

Tabela 2.1: Duas grandezas após serem testadas

Dispondo os pares ordenados (x, y) obtidos em um plano cartesiano, conforme figura (2.4).

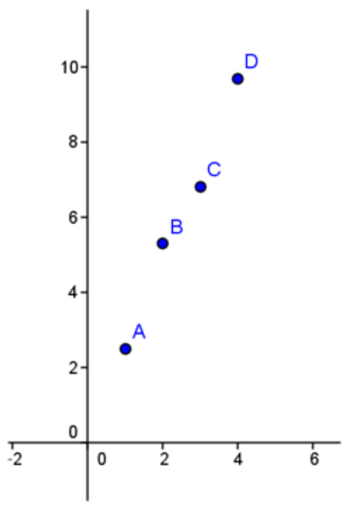

Figura 2.4: Disposição dos pares ordenados (x, y) no plano cartesiano

O objetivo, agora, é estimar qual será o valor "Y" desse experimento para, por exemplo, $X = 100$.

Pela disposição dos pontos obtidos, pode-se chegar à conclusão de que existe uma função afim (uma reta) que relaciona essas duas grandezas. Mas será que uma função do tipo $y = ax + b$ é a melhor opção para esse experimento?

Usando um programa para a construção de gráficos, pode-se chegar a funções afins que se aproximam dos pontos dados. Por exemplo, vamos testar a proximidade dos pontos à função afim: $f(x) = 3x - 1$.

O resultado segue na figura (2.5):

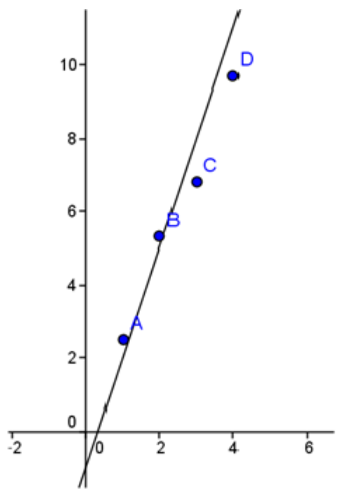

Figura 2.5: Proximidade dos pontos à função afim: $f(x) = 3x - 1$

Podemos notar que os pontos A e B não satisfazem à reta, mas se aproximam da função proposta. Já os pontos C e D não se encontram tão próximos da função, o que pode tornar a previsão do experimento para $x = 100$, errada e incoerente. Substituindo na função, teríamos: $f(100) = 299$.

Escolhendo outros valores para os coeficientes "a"e "b"da função afim, tomamos, agora $a = 2,5$ e $b = 0$, ou seja, traça-se o gráfico da função linear definida por: $f(x) = 2,5x$.

Assim, obtemos, conforme figura (2.6):

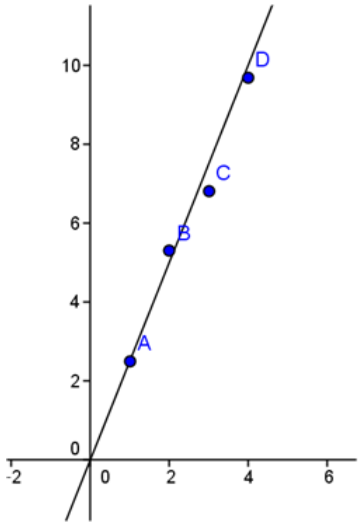

Figura 2.6: Gráfico da função linear definida por: $f(x) = 2,5x$

É fácil perceber que o gráfico (2.6) dessa função se “ajusta”melhor aos pontos dados no experimento do que o gráfico anterior (2.5). Afinal, a proximidade dos quatro pares ordenados com a função proposta é maior, o que tornaria a previsão desse experimento para $x = 100$ mais precisa.

Desenvolvendo o valor dessa função para $x = 100$, teremos: $f(100) = 250$. A mudança nos valores das constantes “a”e “b”já apresenta uma diferença de estimativa significativa.

Porém, poderíamos ficar testando inúmeras funções sem ter a certeza se estaríamos escolhendo a função correta, ou seja, a função que minimizaria o erro para o valor proposto.

Essa ideia de calcular uma curva que melhor se ajuste aos resultados obtidos é feita de maneira mais rigorosa com o Método dos Mínimos Quadrados que será detalhado e aplicado nos capítulos 3 e 4 deste trabalho.

Com isso, aspectos importantes em inúmeras experiências, como analisar as tendências de um experimento e prever o resultado obtido para valores não testados, podem ser feitos de maneira mais segura e confiável.

3 O Método dos Mínimos Quadrados

Em diversos ramos da ciência é comum tentar descobrir se existe uma relação matemática entre duas ou mais grandezas. Para isso, em geral, realiza-se algumas medições gerando dados que, em seguida, servirão como base para modelar uma curva que procura descrever a possível relação.

Entretanto, dados coletados experimentalmente dificilmente atendem a uma única função e, dessa forma, a busca por parâmetros que caracterizem tal função, normalmente, resulta em sistemas impossíveis.

Esse tipo de sistema aparece muitas vezes na realização de experimentos. O motivo usual para esse fato são as demasiadas equações, resultantes das muitas medições. Usualmente, tem-se mais equações do que incógnitas e, portanto, a menos que todas as medidas se “encaixem” perfeitamente, o sistema não possui solução. Nesse caso, torna-se necessário determinar uma função cujo gráfico melhor representa o comportamento dos dados.

Na Engenharia, por exemplo, inúmeros testes são realizados em laboratórios na expectativa da validação de sistemas reais. Geralmente, os resultados desses testes são dispostos na forma de pontos (pares ordenados) que relacionam as duas grandezas em questão. O gráfico desses pontos é chamado de diagrama de dispersão, conforme figura (3.1).

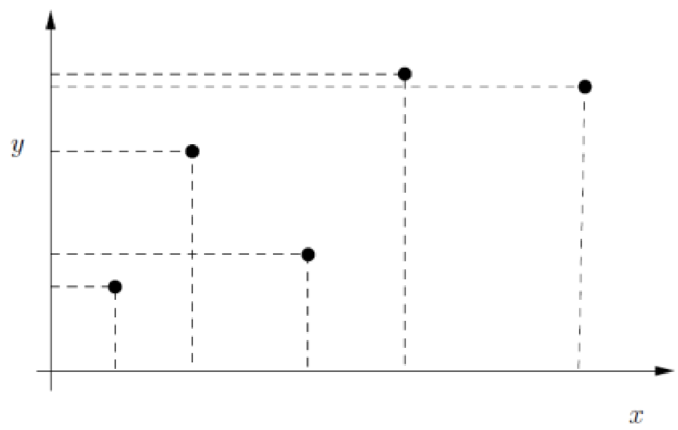

Figura 3.1: Exemplo ilustrativo de um diagrama de dispersão

A construção desses gráficos permite que o "experimentador" tenha uma visão aproximada do tipo de dependência existente entre as variáveis estudadas. Assim, o mesmo poderá decidir que tipo de curva melhor se adapta às grandezas medidas e fundamentar melhor a relação entre elas.

Na Administração, diversos problemas relacionam, por exemplo, o custo médio por unidade produzida de um determinado produto com a quantidade de unidades produzidas em um dia. Esses cálculos levam em consideração diversos fatores como custos com mão-de-obra, matéria-prima, uso de energia, aluguel de equipamentos e/ou estabelecimentos, etc. A parábola é uma curva que, normalmente, traduz esse comportamento do custo médio por unidade em função do número de unidades produzidas.

A figura (3.2) representa essa relação em uma indústria de peças automotivas, onde o eixo "x" representa a produção (em unidades de peças) e o eixo "y" o custo médio por unidade.

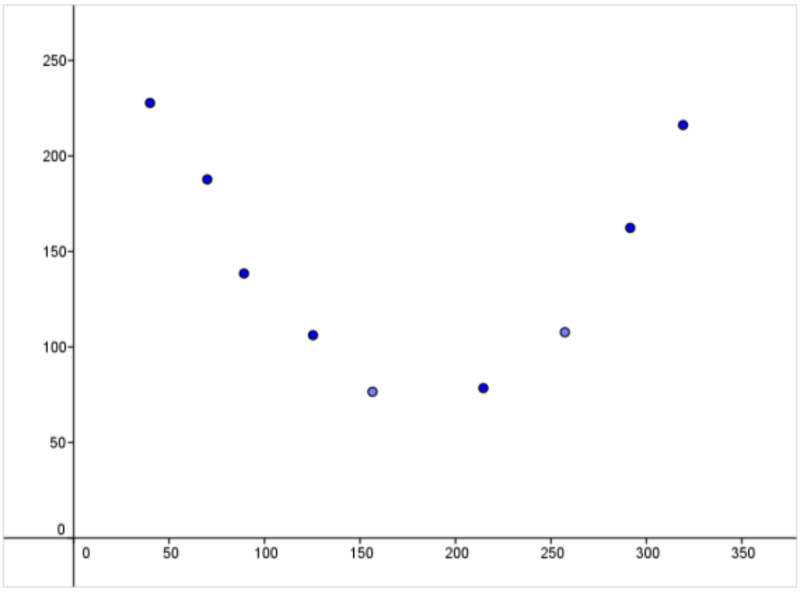

Figura 3.2: Relação em uma indústria de peças automotivas

Ao analisar esse gráfico, por exemplo, é fácil perceber que a curva que melhor se aproxima do modelo em questão é da forma $y = ax^2 + bx + c$, conforme figura (3.3).

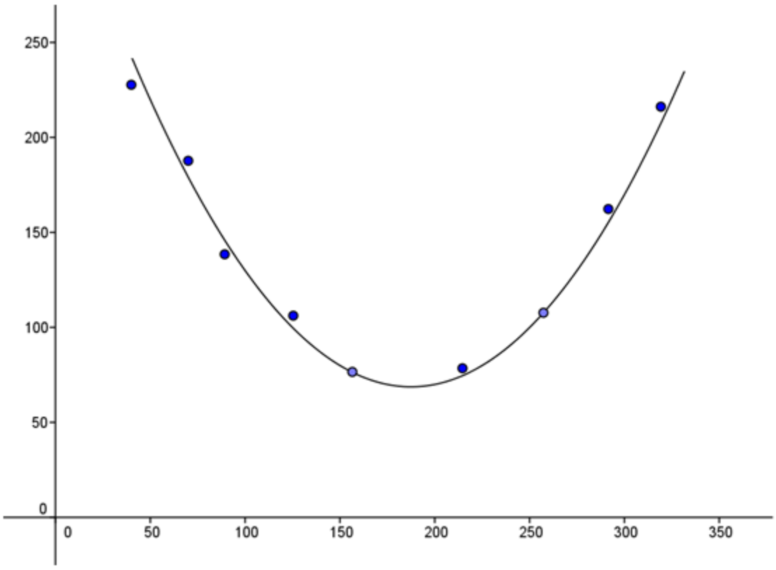

Figura 3.3: Curva que melhor se aproxima do modelo em questão

O processo de sobrepor uma determinada curva a um conjunto de pontos experimentais não se aplica apenas quando a relação entre as grandezas da situação é quadrática, como no exemplo anterior. Toda vez que existir alguma previsão teórica para essa relação matemática é possível encontrar os parâmetros que ajustem a curva correspondente com os dados experimentais. A técnica matemática que permite esse tipo de ajuste é chamada de **Método dos Mínimos Quadrados**.

Note que, ao determinar os valores desses parâmetros e, consequentemente, encontrar a curva que mais se adapta aos resultados de um experimento, é possível realizar uma previsão para medidas não testadas. A análise de tendências de um sistema permite que o observador possa estimar, por exemplo, a evolução da população de uma cidade, estimar a quantidade de indivíduos de uma espécie que se encontra ameaçada, ou ainda, prever um momento para a sua extinção.

Segundo Marinelli (2011):

> "vale destacar que o Método dos Mínimos Quadrados é uma ferramenta muito útil a diversas áreas como Astronomia, Administração, Biologia, Engenharia, Probabilidade e Estatística e Física Experimental. Existe até um modelo de mínimos quadrados para a audição humana."([10])

3.1 O surgimento do Método dos Mínimos Quadrados

Desde a Grécia Antiga, astrônomos se deparavam com o problema da conciliação de medidas obtidas experimentalmente na determinação da posição de corpos celestes.

Muitos astrônomos como Eratóstenes (180 – 125 a.C.), primeiro a medir o raio da Terra, e Aristarco (310 – 230 a.C.), que mediu as distâncias relativas do Sol e da Lua, sabiam que suas medidas apresentavam erros. Afinal, variavam dependendo do momento que eram feitas e, ainda, de observador para observador. Por mais que aceitassem uma medida aproximada, faltavam fundamentos que explicassem a discrepância dos resultados obtidos.

De acordo com Marinelli (2011):

> "O primeiro problema de que se tem registro na história foi em 1740, quando Jacques Cassini montou uma listagem de dados astronômicos coletados por inúmeros astrônomos desde 140 a.C. Nessa listagem, os resultados obtidos para um mesmo acontecimento apresentavam divergências significativas. O problema então era o de encontrar a melhor equação ou a melhor curva que satisfizesse tais dados."([10])

Antes, no Renascimento, Tycho Brahe (1546 – 1601), último grande astrônomo da era pré-telescópica, preocupado com a precisão das medidas, desenvolveu um mecanismo rigoroso na obtenção de medidas astronômicas. Para ele, na evolução da astronomia, quanto mais preciso fosse o resultado de uma experiência, mais confiáveis eram as previsões e as estimativas.

Além disso, segundo Crato (1999),

> "As suas observações sobre a posição dos astros, o movimento dos planetas e as distâncias serviram de base ao trabalho do seu colaborador Johannes Kepler (1571 – 1630), para o estabelecimento das célebres leis sobre as órbitas dos planetas. Sem as medidas rigorosas de Tycho Brahe, é pouco provável que Kepler pudesse ter estabelecido as leis que levam o seu nome." ([11])

Nessa época, métodos mais modernos como a utilização da variância, desvio-padrão e intervalos de confiança ainda estavam longe de serem descobertos.

Com o passar dos anos, a procura pela melhor forma de se combinar as observações de um experimento e a precisão das medidas obtidas passaram por inúmeros cientistas, matemáticos, astrônomos e físicos como: Marquis de Laplace (1749 – 1827), Adrien-Marie Légendre (1752 – 1833) e Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), todos na tentativa de encontrar um modelo ideal para a combinação de medidas.

Em particular, as observações feitas nas posições de corpos celestes como os cálculos que definissem a órbita de um cometa, por exemplo, se tornavam problemas sem solução. Os parâmetros eram obtidos de medidas tiradas em diferentes momentos com erros decorrentes do processo.

Com isso, inúmeras soluções foram apresentadas na tentativa de resolver o problema da estimação do conjunto de parâmetros que define a órbita de um corpo celeste. Porém, a considerada mais eficaz foi o Método dos Mínimos Quadrados, publicado em 1805 por Légendre na sua obra: "*Nouvelles Méthodes pour La Détermination des Orbites dês Comètes*". Nela, Légendre propõe a minimização dos erros das medições feitas. Além de ser considerado mais coerente, o método possuía um desenvolvimento teórico mais claro e apresentava maior aplicação prática.

Todavia, em 1809, Gauss publicou um livro de órbitas planetárias, intitulado "*Theoria Motus Corporum Coelestium*", onde introduziu o Método de Quadrados Mínimos, citando seu uso desde 1795 ([10],2011).

Segundo Crato (1999),

> "Com publicações em datas tão próximas, estes dois matemáticos vieram a se envolver em polêmicas sobre a autoria da descoberta. Mesmo com Légendre tendo divulgado primeiro os seus resultados, sabe-se que Gauss os tinha obtido muito antes, em 1794 – 1795, pelo que hoje se atribui a este último a prioridade da criação do método." ([11])

Com as publicações, Laplace e outros matemáticos aderiram ao método que se tornara essencial na análise de dados astronômicos. Mais tarde, em 1839, Gauss generalizou o Método dos Mínimos Quadrados, fundamentando melhor suas bases teóricas e encontrando um modelo funcional para a minimização de erros.

Mesmo assim, ainda demorou cerca de um século para que o método fosse adotado por outras áreas que trabalham com a análise de resultados, dados de um experimento e combinações de medidas, como a Biologia e as Ciências Sociais. Aproximadamente dois séculos depois da descoberta do método, o mesmo voltou a ser essencial em outra descoberta astronômica: a existência de planetas extra-solares.

Ainda segundo Crato (1999),

> “Trata-se da descoberta dos planetas que orbitam outras estrelas que não o Sol. Conhecem-se, hoje, duas dezenas de planetas que orbitam estrelas afastadas. Essa descoberta deve-se a extraordinários progressos na técnica da espectroscopia e, mais uma vez, ao método dos mínimos quadrados.”([11])

Nota-se, desse modo, que o Método dos Mínimos Quadrados continua sendo útil para diversas áreas de conhecimento, inclusive a Astronomia que motivou o seu desenvolvimento.

3.2 Os Fundamentos Matemáticos do Método

Nessa seção, será apresentada a descrição matemática do Método dos Mínimos Quadrados. Começaremos pela fundamentação teórica necessária sob a ótica da Álgebra Linear; em seguida deduziremos o resultado principal e, finalmente, faremos um breve estudo sobre os erros associados ao método.

3.2.1 Preliminares

Esta seção se propõe a fornecer embasamento teórico com alguns pré-requisitos que serão necessários para uma maior compreensão do método dos mínimos quadrados. As definições aqui presentes foram retiradas do livro Álgebra Linear de David Poole.

Definição 1: Seja V um conjunto no qual estão definidas as seguintes operações, para $u, v \in V$ e $c \in \mathbb{R}$:

- adição: $u + v$

- multiplicação por escalar: $c \cdot u$

Se os axiomas a seguir são verdadeiros para todo $u, v, w \in V$ e para todos os escalares $c, d \in \mathbb{R}$, então V é chamado **espaço vetorial real** e seus elementos são chamados vetores.

a) Comutatividade: $u + v = v + u$

b) Associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$

c) Existe um elemento $0 \in V$, chamado elemento neutro, tal que $u + 0 = u$

d) Para cada $u \in V$, existe um elemento $-u \in V$, chamado simétrico, tal que $u + (-u) = 0$

e) Associatividade da multiplicação por escalar: $c \cdot (d \cdot u) = (c \cdot d) \cdot u$

f) Elemento Neutro da Multiplicação por Escalar: $1 \cdot u = u$

g) Distributividade: $(c + d) \cdot v = c \cdot v + d \cdot v \quad$ e $\quad c \cdot (v + w) = cv + cw$

Observação: Ao longo desse trabalho, consideraremos apenas o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

Definição 2: Um subconjunto não vazio W de um espaço vetorial real V é chamado de subespaço vetorial de V se W é um espaço vetorial real com a mesma adição e a mesma multiplicação por escalar que V. Para tanto, basta que W seja fechado para as operações, isto é,

a) se u e $v \in W$, então $u + v \in W$

b) se $v \in W$ e $c \in \mathbb{R}$, então $c \cdot v \in W$

Definição 3: Um subconjunto $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ de um espaço vetorial V é uma **base** de V se:

a) Todo vetor $v \in V$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores que compõem $\mathcal{B}$, isto é, $v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \ldots + a_n \cdot v_n$ com $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Nesse caso, dizemos que $\mathcal{B}$ **gera** V.

b) $\mathcal{B}$ é **linearmente independente**, isto é, nenhum vetor de $\mathcal{B}$ pode ser escrito como combinação linear dos demais vetores de $\mathcal{B}$.

Exemplo 1: Determinar o subespaço W, do $\mathbb{R}^3$, gerado pelos vetores coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que os vetores coluna da matriz A são: $v_1 = (1, 2, 3)$ e $v_2 = (0, -1, 2)$. Note que v_1 e v_2 são linearmente independente, pois não existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 = k \cdot v_2$. Desta forma, podemos escolher os vetores v_1 e v_2 como os elementos que compõem uma base para W. Logo, todo vetor $v \in W$ pode ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2, isto é, $v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2$

$$(x, y, z) = a_1 \cdot (1, 2, 3) + a_2 \cdot (0, -1, 2) = (a_1, 2a_1, 3a_1) + (0, -a_2, 2a_2) = (a_1, 2a_1 - a_2, 3a_1 + 2a_2)$$

Escrevendo essa igualdade de outra maneira, temos o sistema linear

$$\begin{cases} x = a_1 \Rightarrow a_1 = x \\ y = 2a_1 - a_2 \Rightarrow y = 2x - a_2 \Rightarrow a_2 = 2x - y \\ z = 3a_1 + 2a_2 \Rightarrow z = 3(x) + 2 \cdot (2x - y) \end{cases}$$

cujas soluções satisfazem a equação do plano

$$7x - 2y - z = 0$$

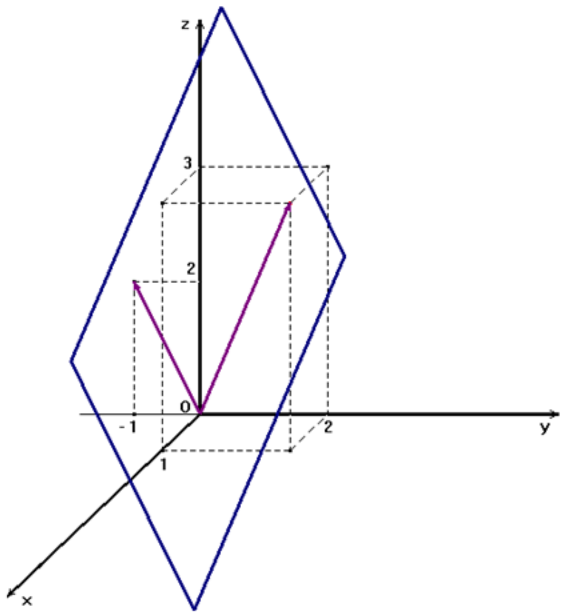

Figura 3.4: Plano $W : 7x - 2y - z = 0$

Definição 4: Sejam $u = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ vetores de $\mathbb{R}^n$. Definimos o produto escalar canônico de u e v por:

$$\langle u, v\rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n.$$

Em palavras, $\langle u, v\rangle$ é a soma dos produtos das componentes correspondentes de u e v. O produto escalar também é denotado por $u \cdot v$.

Observação: O produto interno possui as seguintes propriedades para todos os vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^n$:

- $\langle u, u\rangle \geq 0$ e $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = (0, 0, ..., 0)$
- $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
- $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$.
- $\langle au, v\rangle = a\,\langle u, v\rangle$, com $a \in \mathbb{R}$.

Definição 5: Seja $W \subset \mathbb{R}^n$. Definimos o **complemento ortogonal de** W como sendo o conjunto formado pelos vetores ortogonais a W, isto é,

$$W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n;\ \ \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in W\}$$

Definição 6: Considere um subespaço W de $\mathbb{R}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{R}^n$. Chamamos de **projeção ortogonal** de v sobre W, o vetor $w \in W$ tal que $\|v - w\|$ é mínimo.

Note que o vetor $(v - w)$ é perpendicular ao subespaço W, isto é, $(v - w)$ é perpendicular a qualquer vetor pertencente a W. Observe ainda que qualquer vetor que represente a diferença de $(v-w)$, não perpendicular a W, possui módulo maior do que o vetor perpendicular, ou seja, a distância é mínima se tomarmos a projeção sobre a perpendicular, figura (3.5).

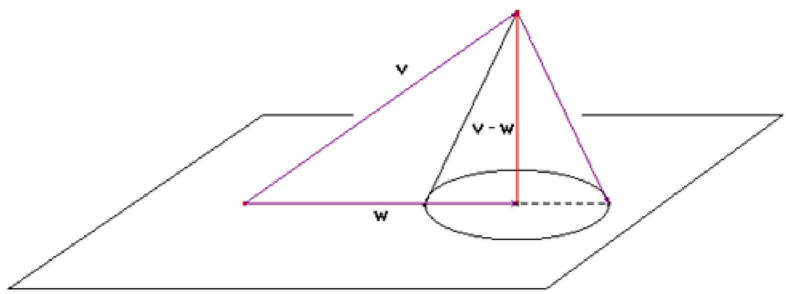

Figura 3.5: a distância é mínima se tomarmos a projeção sobre a perpendicular

Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ e W um subespaço de $\mathbb{R}^n$, queremos determinar o vetor projeção de v em W: $proj_W v$. Para isso, suponha, inicialmente, que v possa ser escrito como

$$v = v_0 + \nu$$

onde $v_0 = proj_W v \in W$ e $\nu \in W^{\perp}$, conforme figura (3.6)

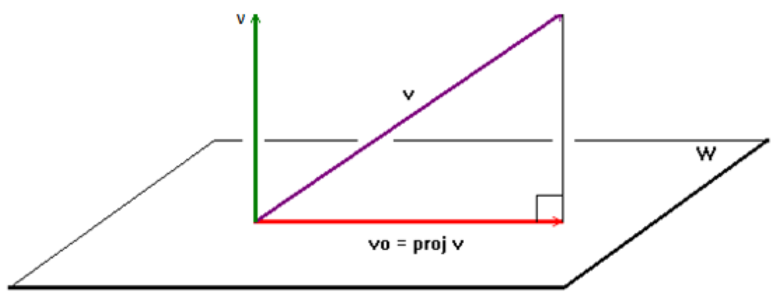

Figura 3.6: vetor projeção de v em W: $proj_W v$

Se $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ é uma base ortogonal de W, existem escalares a_1,a_2,...,a_k tais que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k + \nu$$

Aplicando o produto escalar canônico em relação a cada vetor v_i, com $i \leq k$, temos:

$$\langle v, v_i\rangle = \langle v_0, v_i\rangle + \langle \nu, v_i\rangle = \langle v_0, u_i\rangle,$$

pois $\langle \nu, u_i\rangle = 0$, uma vez que $\nu \in W^{\perp}$. Sendo assim,

$$\langle v, v_i\rangle = \langle a_1v_1 + \ldots + a_kv_k, v_i\rangle = a_1\langle v_1, v_i\rangle + \ldots + a_k\langle v_k, v_i\rangle$$

e, portanto, como $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é uma base ortogonal, segue-se que

$$\langle v, v_i\rangle = a_i\langle v_i, v_i\rangle \Rightarrow a_i = \frac{\langle v, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}$$

Desta forma, obtém-se::

$$proj_W v = v_0 = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}v_2 + \ldots + \frac{\langle v, v_k\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle}v_k$$

A expressão anterior nos induz ao seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em [12].

Teorema da Decomposição Ortogonal: *Seja W um subespaço do $\mathbb{R}^n$. Então, cada $v \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito de maneira única na forma*

$$v = v_0 + \nu$$

onde $v_0 \in W$ e $\nu \in W^{\perp}$. De fato, se $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ é uma base ortogonal de W, então

$$v_0 = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}v_2 + \ldots + \frac{\langle v, v_k\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle}v_k$$

e $\nu = v - v_0$.

Exemplo 2: Determinar a projeção ortogonal do vetor $v(1, 1, 2)$ sobre o plano $\pi : 7x-2y-z = 0$, figura (3.7) .

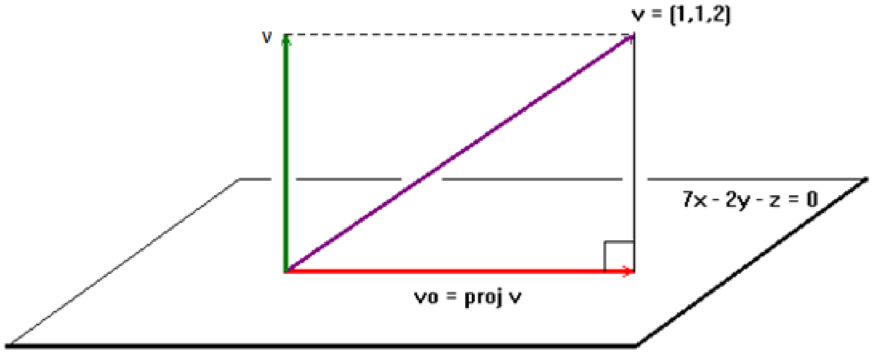

Figura 3.7: projeção ortogonal do vetor $v(1,1,2)$ sobre o plano $\pi : 7x - 2y - z = 0$

Sejam $v_0 = proj_\pi v$ e $\nu = v - v_0 \in \pi^\perp$. Vimos no exemplo 1 que os vetores $v_1(1,2,3)$ e $v_2(0,-1,2)$ formam uma base (não ortogonal) para π e, portanto, existem constantes reais a_1 e a_2 tais que $v_0 = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2$. Assim

$$v = v_0 + \nu \Rightarrow v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \nu.$$

Aplicando o produto escalar canônico, temos:

$$\langle v, v_1 \rangle = \langle a_1 v_1 + a_2 v_2 + \nu, v_1 \rangle = a_1 \langle v_1, v_1 \rangle + a_2 \langle v_2, v_1 \rangle + \langle \nu, v_1 \rangle$$

Desse forma, como $\langle \nu, v_1 \rangle = 0$, segue-se que:

$$\langle v, v_1 \rangle = a_1 \langle v_1, v_1 \rangle + a_2 \langle v_2, v_1 \rangle \tag{3.1}$$

De maneira análoga, aplicando o produto escalar canônico em relação à v_2, temos:

$$\langle v, v_2 \rangle = a_1 \langle v_1, v_2 \rangle + a_2 \langle v_2, v_2 \rangle \tag{3.2}$$

Substituindo os vetores dados no exemplo:

na equação (3.1):

$$\langle (1,1,2), (1,2,3) \rangle = a_1 \langle (1,2,3), (1,2,3) \rangle + a_2 \langle (0,-1,2), (1,2,3) \rangle \Rightarrow 9 = 14 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2$$

na equação (3.2):

$$\langle (1,1,2), (0,-1,2) \rangle = a_1 \langle (1,2,3), (0,-1,2) \rangle + a_2 \langle (0,-1,2), (0,-1,2) \rangle \Rightarrow 3 = 4 \cdot a_1 + 5 \cdot a_2$$

$$\begin{cases} 14 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2 = 9 \\ 4 \cdot a_1 + 5 \cdot a_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{9} \text{ e } a_1 = \frac{11}{18}$$

Assim,

$$x_1 = \frac{11}{18} \cdot (1,2,3) + \frac{1}{9} \cdot (0,-1,2) = \left(\frac{11}{18}, \frac{10}{9}, \frac{37}{18}\right)$$

3.2.2 Descrição matemática do Método dos Mínimos Quadrados

Considere um sistema representado em sua forma matricial por $AX = B$, onde A é uma matriz $(m \times n)$, B é um vetor de $\mathbb{R}^m$ e X é o vetor de $\mathbb{R}^n$ formado pelas incógnitas do sistema.

Obter uma solução para o sistema equivale a encontrar um vetor X tal que $\|B - AX\| = 0$. No caso em que o sistema é impossível, o Método dos Mínimos Quadrados consiste em minimizar a norma associada ao sistema, ou seja, determinar o vetor em $\mathbb{R}^n$ tal que:

$$\|B - A\overline{X}\| \leq \|B - AX\|, \forall X \in \mathbb{R}^n$$

Com o objetivo de determinarmos o vetor , vamos estudar o vetor AX. Quanto X varia sobre todos os vetores de $\mathbb{R}^n$, o vetor AX descreve um subespaço vetorial, uma vez que AX é uma combinação linear destes vetores-coluna da matriz A. Denotaremos esse subespaço por $col(A)$.

É facil perceber que o vetor $A\overline{X} \in col(A)$ e pela definição de projeção ortogonal, vista na seção anterior, podemos afirmar que $A\overline{X} = proj_{col(A)}B$.

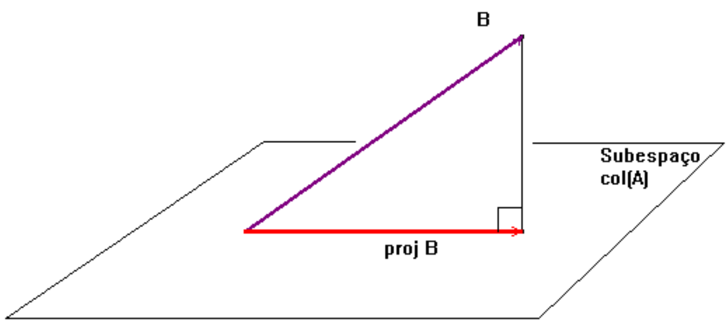

Figura 3.8: $A\overline{X} = proj_{col(A)}B$

Observando a figura (3.8) e utilizando soma de vetores, temos:

$$B = proj_{col(A)}B + Z \text{ então, } Z = B - proj_{col(A)}B = B - A\overline{X}$$

Pelo Teorema da Decomposição Ortogonal podemos afirmar que Z é ortogonal ao subespaço $col(A)$, isto é, Z é perpendicular a todo vetor pertencente a $col(A)$. Para facilitar a escrita, utilizaremos a notação A_i com $i = 1, 2, \ldots, n$ para representarmos o vetor-coluna correspondente a coluna i da matriz A. Assim, o produto escalar é igual a zero para todo i, isto é:

$$\langle A_i, B - A\overline{X} \rangle = \langle A_i, Z \rangle = 0, \forall i \in 1, 2, \ldots, n$$

Para utilizarmos um caráter matricial vamos transformar os vetores-coluna da matriz A, que denotamos por A_i em vetores-linha A_i^t e com isso formar a matriz A^t.

Dessa forma, temos que:

$$\langle A_i^t, B - A\overline{X} \rangle = 0, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow (A^t) \cdot (B - A\overline{X}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^t \cdot B - A^t \cdot A\overline{X} = 0 \Leftrightarrow A^t \cdot A\overline{X} = A^t \cdot B$$

A seguir, apresentamos o teorema principal do trabalho que fundamenta toda a proposta de aula que será descrita no capítulo seguinte.

Teorema dos Mínimos Quadrados: *Seja A uma matriz $(m \times n)$ e seja B um vetor em $\mathbb{R}^m$. Então, $AX = B$ sempre tem pelo menos uma solução por mínimos quadrados $\overline{X}$.*

i) $\overline{X}$ é solução por mínimos quadrados de $AX = B$ se, e somente se, $\overline{X}$ é uma solução da equação

$$A^t \cdot A\overline{X} = A^t \cdot B.$$

ii) A matriz A possui vetores-coluna linearmente independentes (L.I) se, e somente se, $A^t \cdot A$ é invertível. Neste caso, a solução por mínimos quadrados é única e é dada por:

$$\overline{X} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t B.$$

Comprovação: Se a matriz A apresentar vetores-coluna linearmente independentes (L.I) então $A^t \cdot A$ será uma matriz invertível. Assim, é possível determinar explicitamente o vetor $\overline{X}$.

$$\begin{aligned}
A^t \cdot A\overline{X} &= A^t \cdot B \\
(A^t \cdot A)^{-1} \cdot (A^t \cdot A) \cdot \overline{X} &= (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t B \\
I \cdot \overline{X} &= (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t B \\
\overline{X} &= (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t B
\end{aligned}$$

Exemplo 3: A fim de ilustrar o Método dos Mínimos Quadrados, considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

que, na forma matricial, é escrito como $AX = B$ onde,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Observe que o sistema é possível se, e somente se, existirem reais x e y tais que

$$x(1,2,3) + y(0,-1,2) = (1,1,2)$$

isto é, se o vetor B pertencer ao subespaço vetorial gerado pelas colunas da matriz A. Vimos no exemplo 1 que tal espaço é dado pelo plano $7x - 2y - z = 0$ e, portanto, não contém o vetor B.

Desta forma, o sistema é impossível e podemos utilizar o Método dos Mínimos Quadrados para obter $\overline{X}$ que minimiza $\|B - A\overline{X}\|$. Pela teoria vista anteriormente, $\overline{X}$ é dado por:

$$\overline{X} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t B.$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t \cdot A = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^t \cdot A)^{-1} = \frac{1}{54}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t = \frac{1}{54}\begin{bmatrix} 5 & 14 & 7 \\ -4 & -22 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t B = \overline{X} = \frac{1}{54}\begin{bmatrix} 5 & 14 & 7 \\ -4 & -22 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{18} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Por fim, vale notar que o vetor

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} \frac{11}{18} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

é solução do sistema: $A\overline{X} = proj_{col(A)}B$

$$A\overline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{11}{18} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{18} \\ \frac{10}{9} \\ \frac{37}{18} \end{bmatrix} = proj_{col(A)}B$$

Vale ressaltar que a última igualdade foi vista no exemplo 2.

3.2.3 O Método dos Mínimos Quadrados e o ajuste de curvas

A principal aplicação do Método dos Mínimos Quadrados está no ajuste de curvas. Ao se realizar um experimento, muitas vezes os dados obtidos são retratados com pontos (pares ordenados) que relacionam as duas grandezas existentes no processo. O gráfico desses pontos é chamado de diagrama de dispersão.

Dado um conjunto de n pontos, é possível determinar um único polinômio de grau $n-1$, passando por esse pontos, dito polinômio interpolador. No entanto, dependendo do número de pontos, obter esse polinômio pode ser bastante custoso matematicamente. Dessa forma, torna-se interessante buscar funções mais simples que se aproximem desses pontos, num certo sentido. Assim, o ajuste de curvas tem como objetivo encontrar uma função que melhor se adeque aos dados obtidos. Esta função é chamada de "curva de quadrados mínimos". Observe-se que, a grande vantagem de se obter uma curva que melhor se ajuste aos pontos da experiência realizada é a possibilidade de prever os valores da função, ou seja, fazer estimativas e uma análise das tendências para valores não testados. Obtendo, assim, respostas com aproximações bem razoáveis.

Nesse sentido, Pedrosa estabelece que:

> "para definir uma função analítica que descreva o sistema não se deve optar por uma forma polinomial interpoladora dos pontos fornecidos, e sim uma curva que melhor se ajusta a estes pontos levando em consideração a existência de erros que, em geral, não são previsíveis."([13])

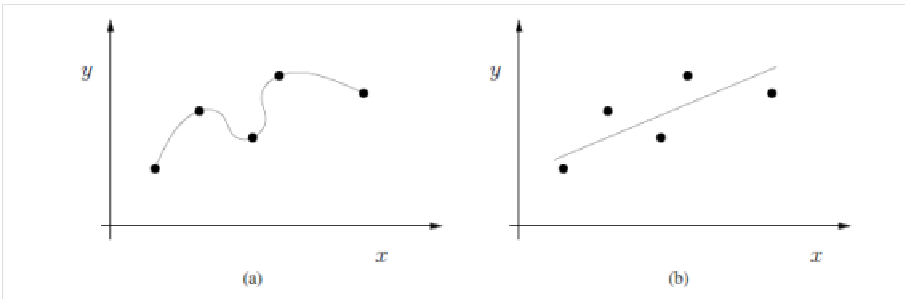

Figura 3.9: Exemplos ilustrativos de uma curva polinomial interpoladora (a) e uma curva que se ajusta aos pontos de um diagrama de dispersão (b)

Muitas vezes, o grande desafio está em determinar qual é a função que melhor se adapta ao modelo proposto. Como os resultados da experiência são descritos por um conjunto de pontos, geralmente faz-se a observação do diagrama de dispersão para ver a forma geral dos mesmos. Assim, o problema de ajuste de curvas segue o modelo matemático mais coerente com a disposição dos pontos.

Por exemplo, se um automóvel percorre um determinado trecho com velocidade constante V, sabemos que a relação entre o tempo de deslocamento T e a posição S atingida pelo automóvel é dada por $S = S_o + VT$, onde S_o é a posição inicial.

Vamos supor que medimos S em vários instantes T chegando aos seguintes resultados:

T	30	50	80	100
S	50	60	90	110

Montando o gráfico de dispersão desse experimento, tem-se, conforme figura (3.10):

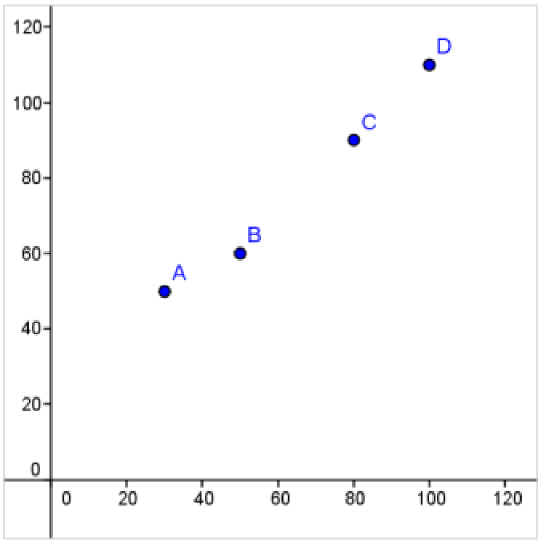

Figura 3.10: gráfico de dispersão desse experimento

Note-se que os pontos dispostos no gráfico (3.10), apresentam uma tendência de comportamento linear e, só não estão perfeitamente alinhados, por possíveis erros de medição na execução do processo, afinal a relação entre S e T é linear.

Como os pontos obtidos estão sujeitos a erros experimentais, a equação $S = S_o + VT$ não é satisfeita. Assim, o objetivo desse trabalho é deduzir qual é a melhor curva, nesse caso, qual a melhor reta que se adapta aos dados obtidos no experimento.

De maneira geral, colocados os pontos resultantes da experiência no plano cartesiano, qual é a relação que melhor aproxima o deslocamento S do tempo T que serão dados por uma equação linear do tipo $S = aT + b$, como disposto na figura (3.11):

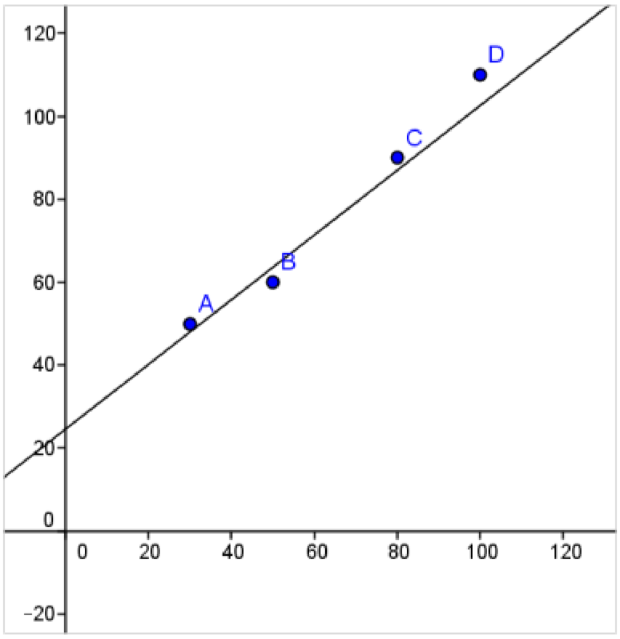

Figura 3.11: pontos resultantes da experiência no plano cartesiano

Agora, supondo-se que após a realização de um experimento envolvendo duas grandezas P e Q, onde o valor obtido para P é determinado em função do valor de Q, chega-se aos seguintes resultados:

Q	$1,1$	$1,4$	$1,9$	$2,7$	$3,4$	$3,6$	$3,8$
P	$0,4$	$1,0$	$2,0$	$2,1$	$1,7$	$1,1$	$0,3$

Montando o gráfico de dispersão desse experimento, tem-se, conforme figura (3.12):

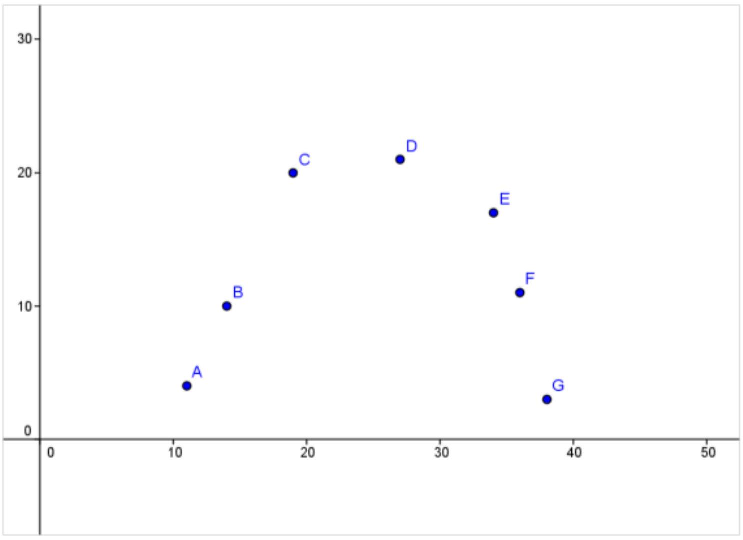

Figura 3.12: pontos resultantes da experiência da medição de P e Q

Analisando o diagrama de dispersão, nota-se que os pontos apresentam um comportamento parabólico. Então, o objetivo desse estudo é determinar qual a função do tipo $P = aQ^2 + bQ + c$ que melhor se ajusta aos resultados da experiência, conforme figura (3.13):

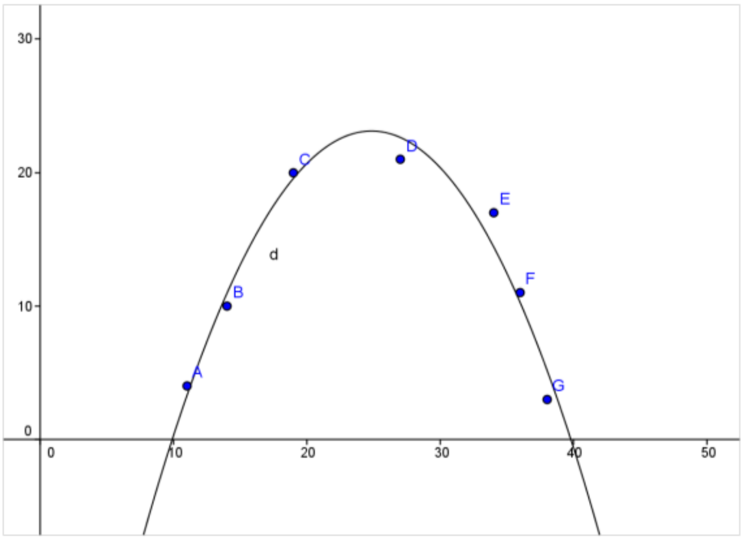

Figura 3.13: Gráfico da função do tipo "$P = aQ^2 + bQ + c$"

A forma correta de determinar a equação das funções que melhor se ajustam aos pontos obtidos será explicitada a seguir para alguns casos particulares.

Ajuste por Retas

Suponha um conjunto finito $\{P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)\}$ composto por n pontos pertencentes ao $\mathbb{R}^2$. Vamos determinar uma reta r $(y = ax + b)$ que melhor se ajuste a esse conjunto de pontos. Esta reta será chamada **reta de mínimos quadrados**.

É importante destacar que esta reta não deverá, necessariamente, conter todos ou até mesmo algum destes pontos. Chamaremos de e_i a **diferença ou erro na direção vertical** entre o valor de y_i e o valor da função para $x = x_i$, conforme figura (3.14).

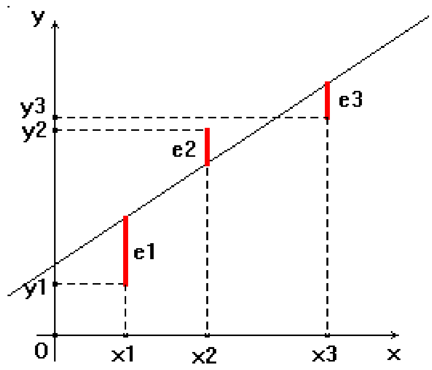

Figura 3.14: Gráfico de e_i

Assim, definiremos $e_i = y_i - (ax_i - b)$ e para cada valor natural de i variando de 1 até n teremos um conjunto de valores e_i que serão dispostos na forma de um vetor

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

chamado vetor-erro.

Para que o resultado encontrado seja o melhor possível, queremos que o vetor-erro seja o menor possível e por isso, seu módulo $\|E\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2}$, dito **erro quadrado mínimo**, deverá ficar o mais próximo de zero.

Se todos os pontos $P_i(x_i, y_i)$ estivessem sobre uma mesma reta (colineares), poderíamos formar um sistema possível e determinado com n equações e apenas duas incógnitas, a e b, que seriam os coeficientes da reta de mínimos quadrados $(y = ax + b)$ e cujo erro quadrado mínimo seria igual a zero.

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \\ \vdots \\ ax_n + b = y_n \end{cases}$$

Entretanto, o nosso interesse é pensar e tentar resolver o caso em que esses pontos não sejam colineares. Por isso, o sistema escrito acima passará a ser um sistema impossível e não apresentará solução. O Método dos Mínimos Quadrados tem por objetivo encontrar a solução do sistema que mais se aproxima do sistema original.

Transformando o sistema acima para uma forma matricial temos:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \\ \vdots \\ ax_n + b = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

podemos escrever o sistema inicial na seguinte forma reduzida: $AX = B$, cuja solução nos dará os parâmetros a e b da reta procurada.

Observe que

$$B - AX = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ax_1 + b \\ ax_2 + b \\ \vdots \\ ax_n + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - (ax_1 + b) \\ y_2 - (ax_2 + b) \\ \vdots \\ y_n - (ax_n + b) \end{bmatrix} = E \text{ (vetor-erro)}$$

Ajuste por parábolas

Suponha um conjunto finito $\{P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)\}$ composto por n pontos pertencentes ao $\mathbb{R}^2$. Queremos determinar uma parábola p $(y = ax^2 + bx + c, a \neq 0)$ que melhor se ajuste a esse conjunto de pontos. Esta parábola será chamada *parábola de mínimos quadrados.*

Mais uma vez, é importante destacar que esta parábola não deverá, necessariamente, conter todos ou até mesmo algum destes pontos. Chamaremos de e_i a *diferença ou erro na direção vertical* entre o valor de y_i e o valor da função para $x = x_i$, conforme figura (3.15).

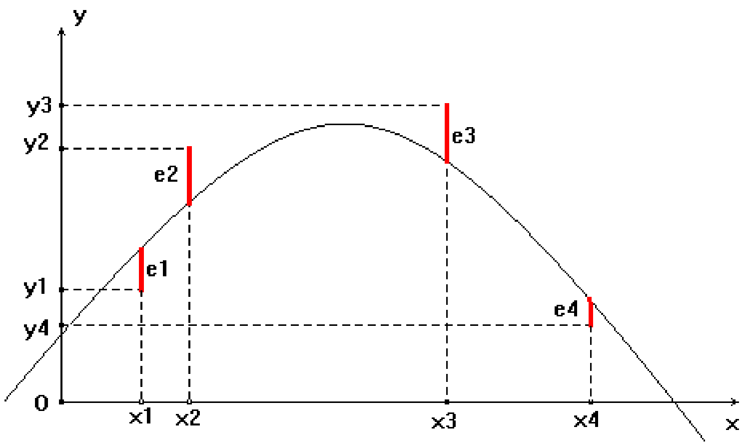

Figura 3.15: diferença ou erro na direção vertical

Assim, definiremos $e_i = y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)$ e para cada valor natural de i variando de 1 até n teremos um conjunto de valores e_i que serão dispostos na forma de um vetor

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

chamado vetor-erro.

Para que o resultado encontrado seja o mais próximo possível, queremos que o vetor-erro seja o menor possível e por isso, seu módulo $\|E\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2}$, dito **erro quadrado mínimo**, deverá ficar o mais próximo de zero.

Se todos os pontos $P_i(x_i, y_i)$ estivessem sobre uma mesma parábola, poderíamos formar um sistema possível e determinado com n equações e apenas três incógnitas, a, b e c, que seriam os coeficientes da parábola de mínimos quadrados $(y = ax^2 + bx + c, a \neq 0)$ e cujo erro quadrado mínimo seria igual a zero.

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ \vdots \\ ax_n^2 + bx_n + c = y_n \end{cases}$$

Entretanto, o nosso interesse é pensar e tentar resolver o caso em que esses pontos não pertencem a uma mesma parábola. Por isso, o sistema escrito acima passará a ser um sistema impossível e não apresentará solução. O Método dos Mínimos Quadrados tem por objetivo encontrar a solução do sistema que mais se aproxima do sistema original.

Transformando o sistema acima para uma forma matricial temos:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ \vdots \\ ax_n^2 + bx_n + c = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ & \vdots & \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ & \vdots & \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

podemos escrever o sistema inicial na seguinte forma reduzida: $AX = B$, cuja solução nos dará os parâmetros a, b e c da parábola procurada.

Observe que

$$B - AX = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ax_1^2 + bx_1 + c \\ ax_2^2 + bx_2 + c \\ \vdots \\ ax_n^2 + bx_n + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c) \\ y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c) \\ \vdots \\ y_n - (ax_n^2 + bx_n + c) \end{bmatrix} = E \text{ (vetor-erro)}$$

Ajuste pelo gráfico de uma função exponencial

Suponha um conjunto finito $\{P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)\}$ composto por n pontos pertencentes ao $\mathbb{R}^2$. Queremos determinar uma função do tipo exponencial $y = P \cdot e^{k \cdot x}$ que melhor se ajuste a esse conjunto de pontos. Esta exponencial será chamada *exponencial de mínimos quadrados.*

Mais uma vez, é importante destacar que esta exponencial não deverá, necessariamente, conter todos ou até mesmo algum destes pontos. Chamaremos de e_i a *diferença ou erro na direção vertical* entre o valor de y_i e o valor da função para $x = x_i$, conforme gráfico (3.16).

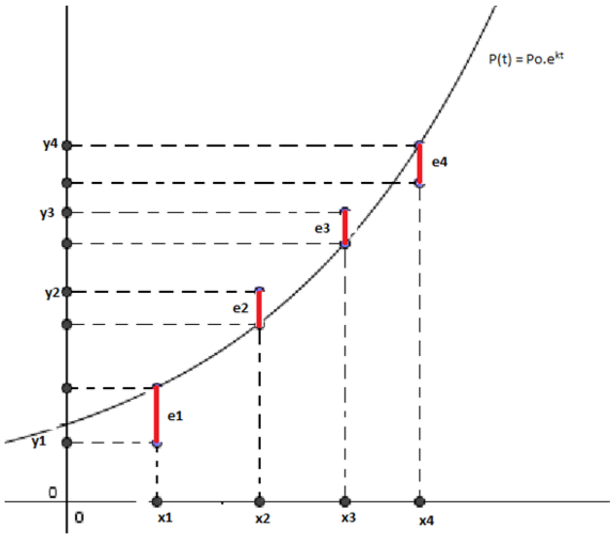

Figura 3.16: diferença ou erro na direção vertical

Assim, sendo $e_i = y_i - (P \cdot e^{kx})$ obtemos o vetor

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

chamado vetor-erro.

Para que o resultado encontrado seja o mais próximo possível, queremos que o vetor-erro seja o menor possível e por isso, seu módulo $\|E\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2}$, dito **erro quadrado mínimo**, deverá ficar o mais próximo de zero.

Se todos os pontos $P_i(x_i, y_i)$ estivessem sobre uma mesma função exponencial, poderíamos formar um sistema possível e determinado com n equações e apenas duas incógnitas, P e k, que seriam os coeficientes da exponencial de mínimos quadrados ($y = P \cdot e^{kx}$) e cujo erro quadrado mínimo seria igual a zero.

$$\begin{cases} P \cdot e^{kx_1} = y_1 \\ P \cdot e^{kx_2} = y_2 \\ \qquad \vdots \\ P \cdot e^{kx_n} = y_n \end{cases}$$

Entretanto, o nosso interesse é pensar e tentar resolver o caso em que esses pontos não pertencem a uma mesma exponencial. Por isso, o sistema escrito acima passará a ser um sistema impossível e não apresentará solução. O Método dos Mínimos Quadrados tem por objetivo encontrar a solução do sistema que mais se aproxima do sistema original.

$$\begin{cases} P \cdot e^{kx_1} = y_1 \\ P \cdot e^{kx_2} = y_2 \\ \qquad \vdots \\ P \cdot e^{kx_n} = y_n \end{cases}$$

Para linearizar o sistema acima, aplicaremos o logaritmo neperiano em todas as equações. Assim, recairemos no primeiro caso por Ajuste de Retas.

$$\begin{cases} \ln P + kx_1 = \ln y_1 \\ \ln P + kx_2 = \ln y_2 \\ \quad\quad\vdots \\ \ln P + kx_n = \ln y_n \end{cases}$$

Transformando o sistema acima para uma forma matricial temos:

$$\begin{cases} \ln P + kx_1 = \ln y_1 \\ \ln P + kx_2 = \ln y_2 \\ \quad\quad\vdots \\ \ln P + kx_n = \ln y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ln P \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} \ln P \\ k \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

podemos escrever o sistema inicial na seguinte forma reduzida: $AX = B$, cuja solução nos dará os parâmetros lnP e k da função exponencial procurada.

Observe que

$$B - AX = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ln P + kx_1 \\ \ln P + kx_2 \\ \vdots \\ \ln P + kx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - (\ln P + kx_1) \\ y_2 - (\ln P + kx_2) \\ \vdots \\ y_n - (\ln P + kx_n) \end{bmatrix} = E \text{ (vetor-erro)}$$

Vamos finalizar essa seção apresentando um exemplo de aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para o ajuste de pontos pelo gráfico de uma função exponencial.

Exemplo 4: Dentre os animais que habitam a fauna brasileira com risco de extinção destaca-se a onça-pintada. Também conhecida por *jaguar* ou *jaguaretê*, costuma ser encontrada em matas cerradas e em reservas florestais.

Suponha que um grupo de ambientalistas decide monitorar a quantidade de onças-pintadas em uma determinada região e que, no momento inicial da observação, constatam a presença de 240 onças. Após dois anos, o mesmo grupo retorna a região e verifica a presença de apenas 218 dessas onças e, finalmente, quatro anos depois da observação inicial, contam somente 192 delas. Mantendo esse nível de decrescimento, qual seria a melhor estimativa de tempo para que as onças-pintadas dessa região sejam consideradas em extinção, considerada pelos biólogos em 100 indivíduos?

Solução: Os pontos destacados no problema são $A = (0, 240)$, $B = (2, 218)$ e $C = (4, 192)$.

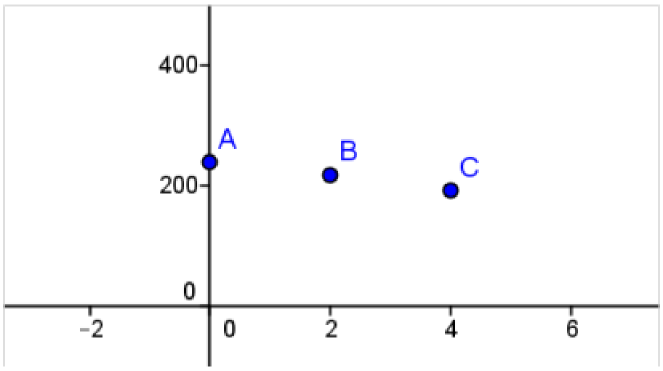

Figura 3.17: Gráfico dos pontos A,B e C

A curva que melhor se ajusta a esse conjunto de pontos é do tipo exponencial, isto é, $P(t) = P_o \cdot e^{kt}$. Aplicando os pontos, temos:

$$\begin{cases} P_o \cdot e^{0k} = 240 \\ P_o \cdot e^{2k} = 218 \\ P_o \cdot e^{4k} = 192 \end{cases}$$

Como o sistema acima não é linear, aplicaremos o logaritmo natural em cada uma das equações

$$\begin{cases} \ln P_o + 0k = \ln 240 = 5,48 \\ \ln P_o + 2k = \ln 218 = 5,38 \\ \ln P_o + 4k = \ln 192 = 5,26 \end{cases}$$

Passando para o modelo matricial, temos: $AX = B$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \ln P_o \\ k \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5,48 \\ 5,38 \\ 5,26 \end{bmatrix}}_{B}$$

Como os vetores-coluna da matriz A são L.I. temos solução única por mínimos quadrados, dada por $X = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$$

$$(A^t \cdot A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,833 & -0,25 \\ -0,25 & 0,125 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t = \begin{bmatrix} 0,833 & 0,333 & -0,167 \\ -0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

$$X = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B = \begin{bmatrix} 5,483 \\ -0,055 \end{bmatrix}$$

donde

$$\ln P_o = 5,483 \Rightarrow P_o = 240$$

$$k = -0,055$$

Assim, a função que descreve o número de onças pintadas na região é

$$P(t) = 240 \cdot e^{-0,055t}$$

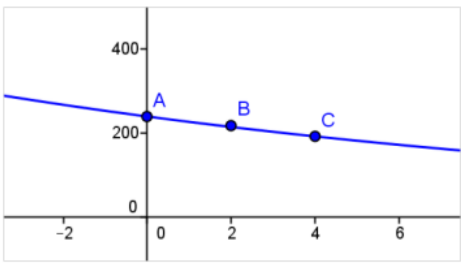

Figura 3.18: Gráfico da função que descreve o número de onças pintadas na região

4 Uma proposta de aula para o Ensino Médio

Nesse capítulo, será apresentada uma sugestão de aula para se trabalhar o Método dos Mínimos Quadrados no Ensino Médio. Nela mostraremos todo o encaminhamento necessário para que o professor desenvolva com sucesso uma aula: exemplo motivador, solução alternativa, apresentação e aplicações do método.

Objetivos: Mostrar ao aluno a importância de se trabalhar com aproximações na Matemática. Apresentar o Método dos Mínimos Quadrados e mostrar a sua utilidade em Modelagem Matemática.
Pré-requisitos: Discussão de um Sistema Linear; Operações com Matrizes; Conceitos básicos de Geometria Analítica no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$; Operações com Vetores; Produto Escalar.
Turma indicada: 3^o ano
Tempo necessário: Aproximadamente 1h 40 min (equivalente a 2 tempos de aula)
Materiais utilizados: Quadro, pilot, computadores que disponham do software Geogebra

A aula proposta divide-se em 4 atividades principais.

Atividade 1: Essa atividade tem por objetivo motivar a apresentação do Método dos Mínimos Quadrados como ferramenta de resolução de sistemas impossíveis.

Sugerimos ao professor que inicie a aula com o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

observando com seus alunos que, ao analisar as duas primeiras equações, trata-se de um sistema impossível, isto é, não existe um par ordenado (x, y) que satisfaça simultaneamente as três sentenças.

Em seguida, o professor deve procurar as condições sobre o terno ordenado (a, b, c) para que seja possível o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ 2x + y = b \\ 3x + y = c \end{cases}$$

É fácil notar que esse sistema só apresentará solução se $a = b$, podendo estar livre a variável c, ou seja, o terno ordenado que atende esse sistema deverá ser da forma: (a, a, c) com $a, c \in \mathbb{R}$. Geometricamente, o sistema só será possível se o terno pertencer ao plano $x = y$.

Em seguida, o professor deve observar, juntamente com seus alunos, que o terno $(4, 3, 0)$ do sistema original não pertence ao plano $x = y$, conforme gráfico (4.1).

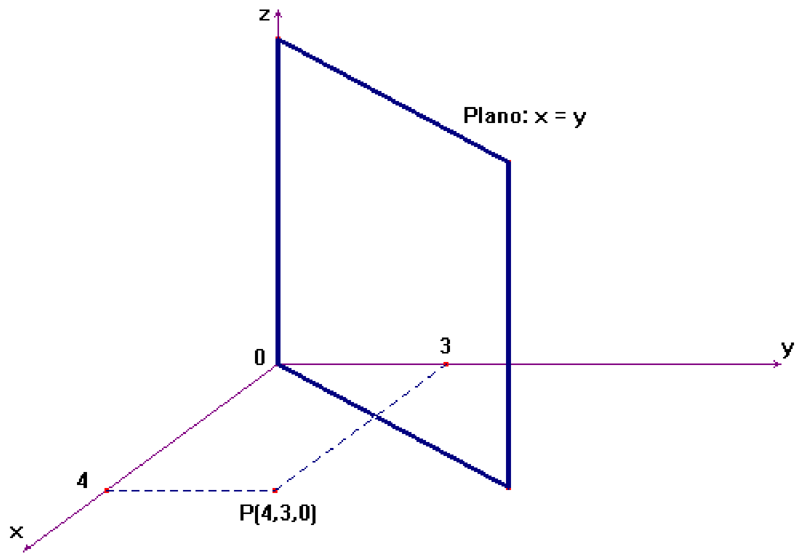

Figura 4.1: O terno $(4, 3, 0)$ do sistema original não pertence ao plano $x = y$

Nesse momento, o professor deve apresentar o princípio básico do Método dos Mínimos Quadrados: colocando o sistema na forma matricial $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ele deve observar que não existe uma solução que satisfaça $\|B - AX\| = 0$ e, portanto, uma possibilidade é obter um vetor $\overline{X}$ que torne $\|B - AX\| = 0$ o menor possível. Em seguida deve discutir com os alunos que isso é equivalente a encontrar uma solução para o sistema $A\overline{X} = B'$ onde B' é o vetor de coordenadas $P'(x, y, z)$ do ponto pertencente ao plano xy mais próximo de $P(4, 3, 0)$, dado pela projeção ortogonal de P sobre o plano.

A seguir apresentamos uma forma de obter P':

Como o ponto P pertence ao plano xOy, vamos determinar essa projeção em $\mathbb{R}^2$. A projeção ortogonal P', que desejamos determinar, está sobre a reta de interseção entre os planos $x = y$ e $z = 0$, isto é, a reta de $\mathbb{R}^2$ cuja equação é $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares). Assim, o ponto P' é da forma (k, k) com $k \in \mathbb{R}$.

Sejam $A = (3, 3)$ e $P' = (k, k)$ pontos sobre essa reta. Além disso, seja $P = (4, 3)$. Observe essa situação representada na figura (4.2):

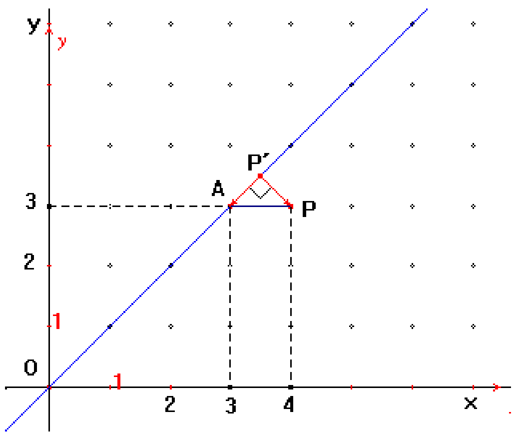

Figura 4.2: $P = (4, 3)$

Consideramos, agora, os vetores:

- $\overrightarrow{P'A} = A - P' = (3, 3) - (k, k) = (3 - k, 3 - k)$
- $\overrightarrow{P'P} = P - P' = (4, 3) - (k, k) = (4 - k, 3 - k)$

Observe que o triângulo $AP'P$ é retângulo em P', assim os vetores $\overrightarrow{P'A}$ e $\overrightarrow{P'P}$ são ortogonais, logo o produto escalar entre eles é nulo.

$$\langle \overrightarrow{P'A}, \overrightarrow{P'P} \rangle = 0 \Rightarrow \langle (3-k, 3-k), (4-k, 3-k) \rangle = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (3-k)\cdot(4-k) + (3-k)\cdot(3-k) = 0$$

Colocando $(3-k)$ em evidência, temos:

$$(3-k)\cdot(7-2k) = 0$$

O que nos dá $k = 3$ (não convém) ou $k = \dfrac{7}{2}$. Assim, $P' = \left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{2}, 0\right)$ é o ponto procurado.

Após encontrar o ponto P', o professor deve retomar o sistema inicial, substituindo B por B', tornando-o possível

$$\begin{cases} 2x + y = \frac{7}{2} \\ 2x + y = \frac{7}{2} \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

e encontrar a solução $\overline{X} = \left(\dfrac{-7}{2}, \dfrac{21}{2}\right)$.

Após a conclusão do exemplo, o professor deve generalizar a ideia, observando que, quando o sistema $AX = B$ é impossível, o processo consiste em projetar ortogonalmente o termo constante B sobre o conjunto formado pelos vetores B' para os quais o sistema $AX = B'$ possui solução e, em seguida, encontrar a solução do novo sistema, dada pela fórmula

$$\overline{X} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B.$$

Sugerimos que apenas nesse momento seja dado o nome de Método dos Mínimos Quadrados a esse processo, relacionando-o ao fato de que obter uma solução do sistema $AX = B'$ é equivalente a minimizar a expressão $\|B - AX\|$ constituída pela somados quadrados dos erros coordenada a coordenada.

Observação: Vale ressaltar que não é nosso objetivo aqui que o professor deduza a fórmula com os alunos em sala. A demonstração foi realizada no capítulo 3 deste trabalho com todo rigor e formalidade necessária para sua generalização em um espaço $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, é interessante que o professor retorne ao sistema dado no início da aula e o resolva pela fórmula, com o intuito de ilustrar a sua consistência.

Assim, o retornando ao sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

o professor deve escrevê-lo na sua forma matricial $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e obter a solução pelo Método dos Mínimos Quadrados, dada por:

$$\overline{X} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B.$$

Substituindo os valores na fórmula acima, temos:

$$A^t \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^t \cdot A)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 17 \end{bmatrix}$$

$$(A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{2} \\ \frac{21}{2} \end{bmatrix}$$

que é o mesmo resultado encontrado na solução geométrica.

No exemplo anterior, foram escolhidos pontos e equações de fácil visualização geométrica possibilitando uma resolução, de certa forma, prática. Porém, muitas vezes, ao modelar um certo fenômeno ou relacionarmos duas grandezas experimentalmente, nos deparamos com sistemas impossíveis dados por equações de visualização geométrica mais complexa.

A fórmula dada pelo *Método dos Mínimos Quadrados* torna viável a obtenção dessa aproximação para qualquer conjunto de equações decorrentes da sistematização dos dados empíricos coletados tornando o erro menor possível. Nos exemplos seguintes, trabalharemos com equações mais complexas e, portanto, assumiremos esse método como única forma de solução.

Atividade 2: Essa atividade tem por objetivo relacionar o Método dos Mínimos Quadrados à obtenção da equação da parábola que melhor se aproxima de pontos que não satisfazem uma mesma equação do segundo grau.

Encontre a equação da curva que melhor se ajusta aos pontos $A(-1,2)$, $B(0,4)$, $C(1,4)$ e $D(2,1)$, conforme a figura (4.3).

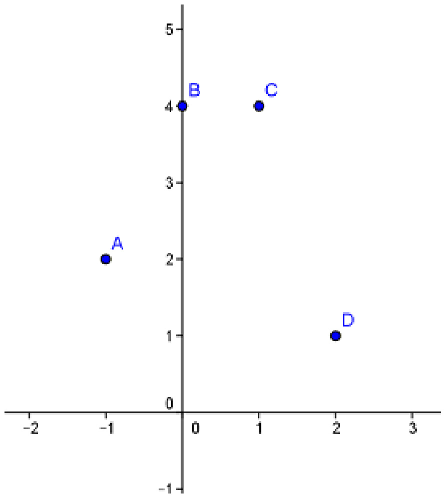

Figura 4.3:

Aqui o professor deve observar que aproximar esses pontos por uma reta não seria uma escolha correta, afinal os pontos dados não apresentam um comportamento linear. Deve induzir os alunos a concluírem que o comportamento do diagrama de dispersão sugere a escolha da parábola como melhor opção.

Solução A parábola tem sua equação dada por: $y = ax^2 + bx + c$. Aplicando os pontos, formamos o sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ c = 4 \\ a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$$

Transformando temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \text{ ou seja, } AX = B$$

Como as colunas de A são linearmente independentes, podemos afirmar pelo teorema dos mínimos quadrados que existe uma única solução $\overline{X} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B$. Assim,

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t \cdot A = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A^t \cdot A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,45 & 0,15 \\ -0,25 & 0,15 & 0,55 \end{bmatrix}$$

$$(A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t = \begin{bmatrix} 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 \\ -0,55 & 0,15 & 0,35 & 0,05 \\ 0,15 & 0,55 & 0,45 & -0,15 \end{bmatrix}$$

$$\overline{X} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B = \begin{bmatrix} -1,25 \\ 0,95 \\ 4,15 \end{bmatrix}.$$

Logo, a melhor parábola será: $y = -1,25x^2 + 0,95x + 4,15$, conforme figura (4.4)

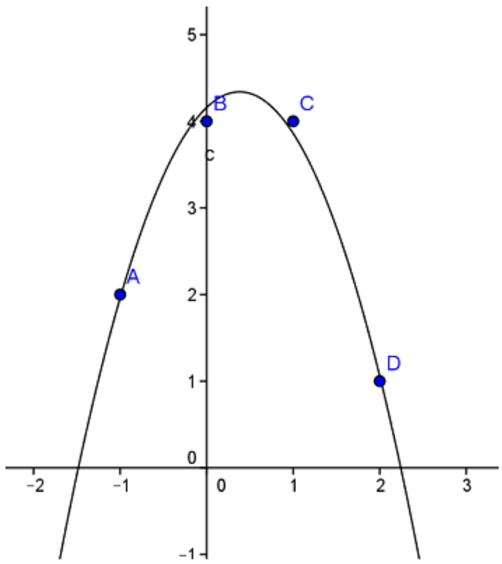

Figura 4.4: Parábola $y = -1,25x^2 + 0,95x + 4,15$

Vamos calcular o erro

$$
\begin{aligned}
e_i &= y_i - (y = ax^2 + bx + c) \\
e_1 &= 2 - (-1,25 - 0,95 + 4,15) = 0,05 \\
e_2 &= 4 - (0 + 0 + 4,15) = -0,15 \\
e_3 &= 4 - (-1,25 + 0,95 + 4,15) = 0,15 \\
e_4 &= 1 - (-5 + 1,9 + 4,15) = -0,05 \\
\|E\| &= \sqrt{(0,05)^2 + (-0,15)^2 + (0,15)^2 + (-0,05)^2} \cong 0,22
\end{aligned}
$$

Atividade 3: Em geral, ao modelarmos uma situação real, utilizamos diversas medições e, consequentemente, o sistema associado envolve muitas equações. Dessa forma, as operações de matrizes que aparecem durante o Método dos Mínimos Quadrados tornam-se árduas de serem feitas manualmente. Nessa atividade, propomos a resolução de um problema concreto, envolvendo um número grande de equações, com o objetivo de apresentar um tutorial de utilização do recurso computacional para resolvê-lo. O software que indicaremos é o Geogebra, por ser gratuito e facilmente encontrado.

Um grupo de agricultores aplicou um determinado fertilizante em uma plantação para acelerar a colheita de soja. Com isso, a produção P (em toneladas) de soja variou de acordo com o tempo decorrido "t" (em dias) após a aplicação do produto.

A tabela abaixo apresenta os dados obtidos em determinados dias:

Tempo (dias)	11	14	19	27	34	36	38
Produção (T)	4	10	20	21	17	11	3

Esses dados foram dispostos compondo o diagrama de dispersão, conforme figura (4.5):

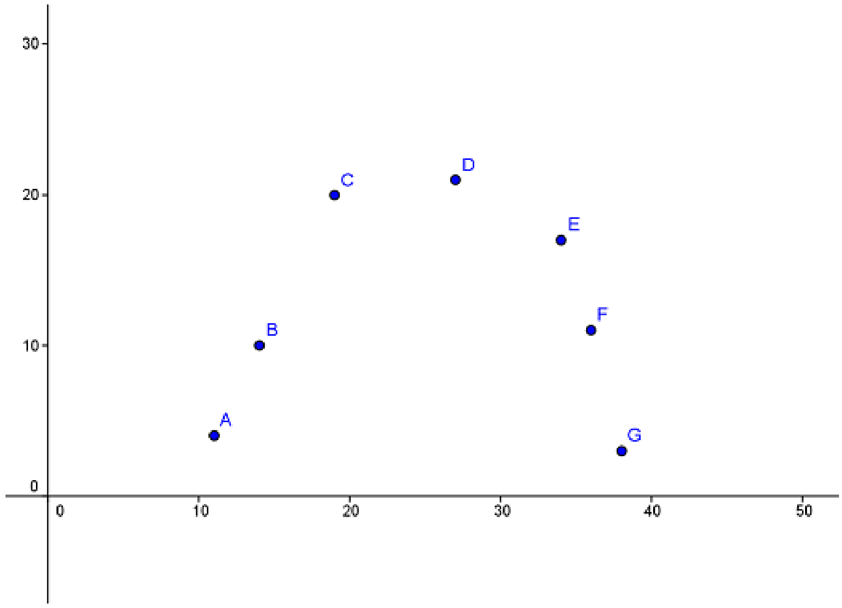

Figura 4.5: gráfico de dispersão desse experimento

É fácil notar que a posição dos pontos nos remete a uma parábola do tipo: $P(t) = at^2 + bt + c$.

Substituindo os pontos na parábola, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 121a + 11b + c = 4 \\ 196a + 14b + c = 10 \\ 361a + 19b + c = 20 \\ 729a + 27b + c = 21 \\ 1156a + 34b + c = 17 \\ 1296a + 36b + c = 11 \\ 1444a + 38b + c = 3 \end{cases}$$

passando para a forma matricial, temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 121 & 11 & 1 \\ 196 & 14 & 1 \\ 361 & 19 & 1 \\ 729 & 27 & 1 \\ 1156 & 34 & 1 \\ 1296 & 36 & 1 \\ 1444 & 38 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 20 \\ 21 \\ 17 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B}$$

Como os vetores coluna de A são linearmente independentes, temos pelo teorema dos mínimos quadrados, uma solução única $\overline{X}$ que minimiza o erro quadrado, tal que:

$$\overline{X} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B.$$

Observe que a matriz A é de ordem 7×3 e, com isso, operar com a mesma torna o processo trabalhoso e suscetível a erros. Assim, vamos utilizar o software computacional Geogebra para resolver a atividade acima, descrevendo os passos na forma de tutorial.

1° **passo**: ao abrir o programa, clicar em **"Exibir"** $\rightarrow$ **"Planilha"**, conforme figura (4.6):

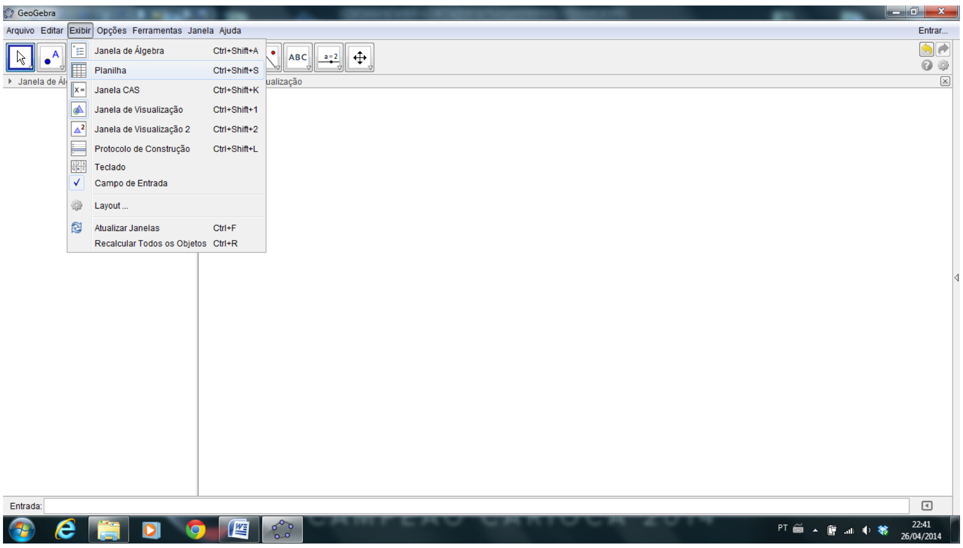

Figura 4.6: **"Exibir"** $\rightarrow$ **"Planilha"**

2° **passo:** Note que abrirá, à direita da tela, uma grade com espaços que podem ser preenchidos por números onde os números indicam a linha da matriz que será gerada, enquanto as letras representam as colunas, conforme figura (4.7):

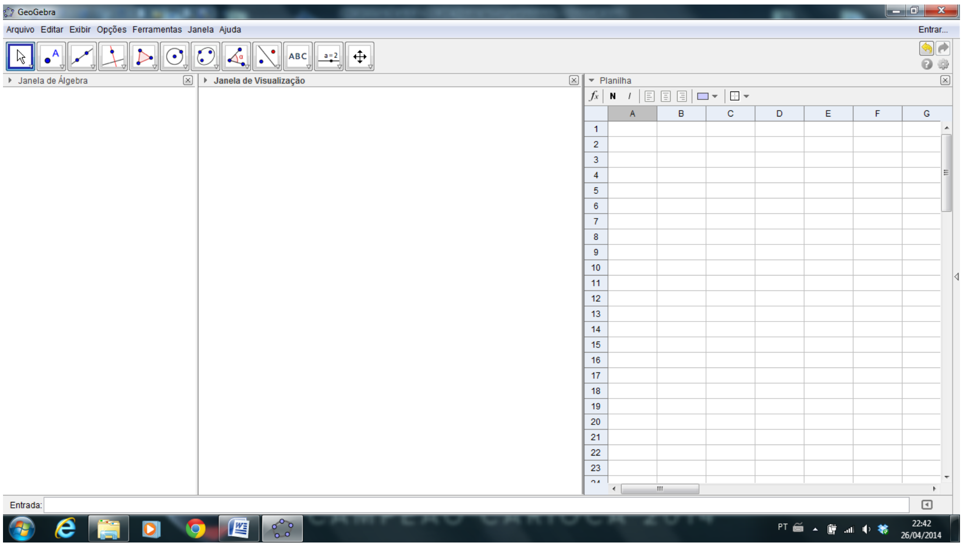

Figura 4.7: grade com espaços que podem ser preenchidos por números

3° **passo:** Preencha os espaços com os dados da matriz A, conforme figura (4.8):

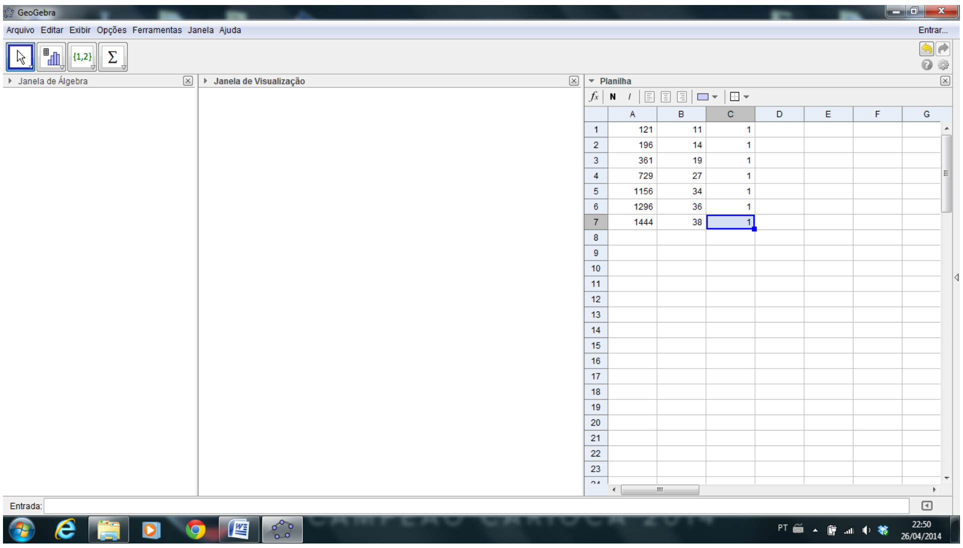

Figura 4.8: dados da matriz A

4° **passo:** Selecione os dados preenchidos, clique com o botão direito do mouse, escolhendo as opções: **"Criar"** → **"Matriz"**. A matriz aparecerá no canto superior esquerdo da tela com o nome de "matriz1", conforme figura (4.9):

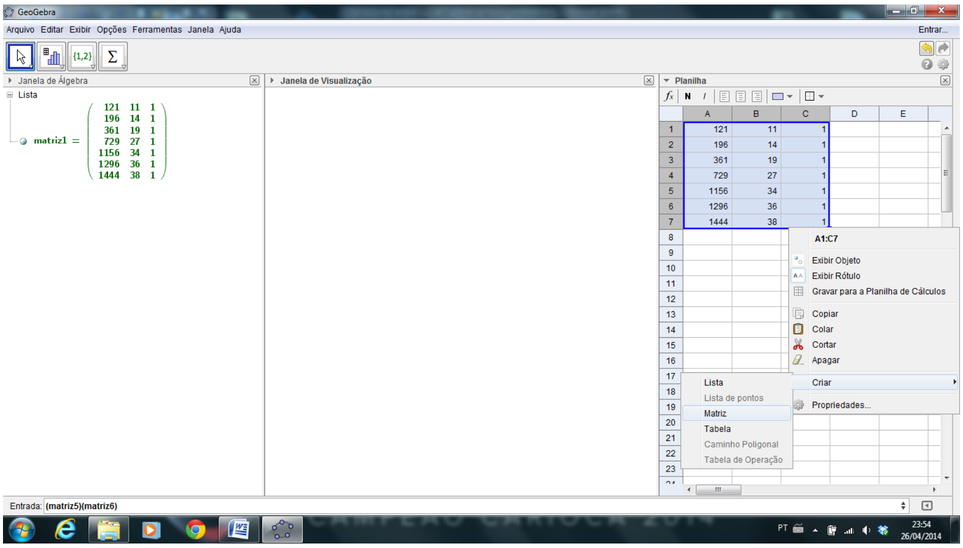

Figura 4.9: "matriz1"

5° **passo:** Agora, precisamos da transposta da matriz A, na barra de comandos (parte inferior da tela) escreva: **MatrizTransposta**[**(matriz1)**]. A transposta aparecerá abaixo da matriz A (matriz1), com o nome "matriz2".

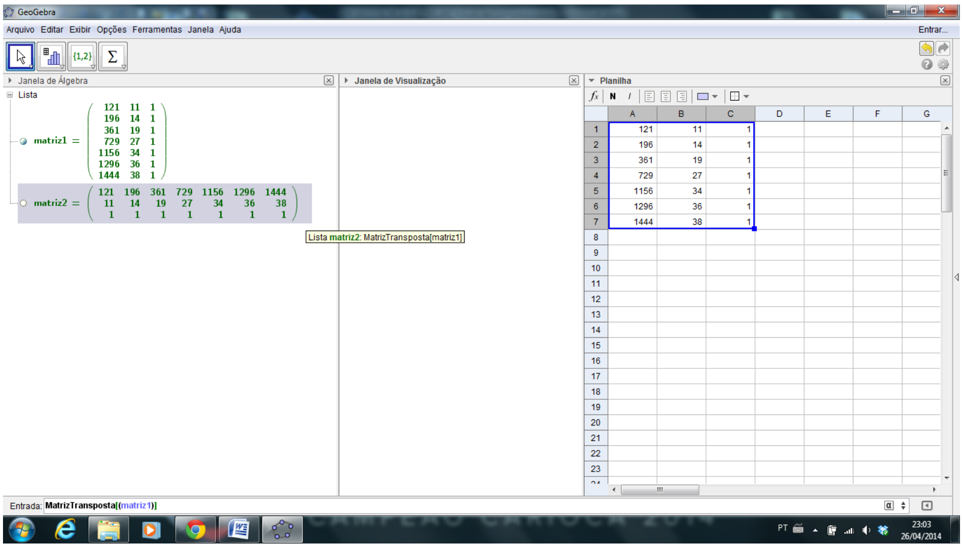

Figura 4.10: "matriz2"

6° **passo:** Seguindo a fórmula do método, devemos iniciar efetuando o produto $A^t \cdot A$, assim na barra de comandos escreveremos: (**matriz2**)(**matriz1**). O resultado do produto aparecerá como "matriz3", conforme figura (4.11):

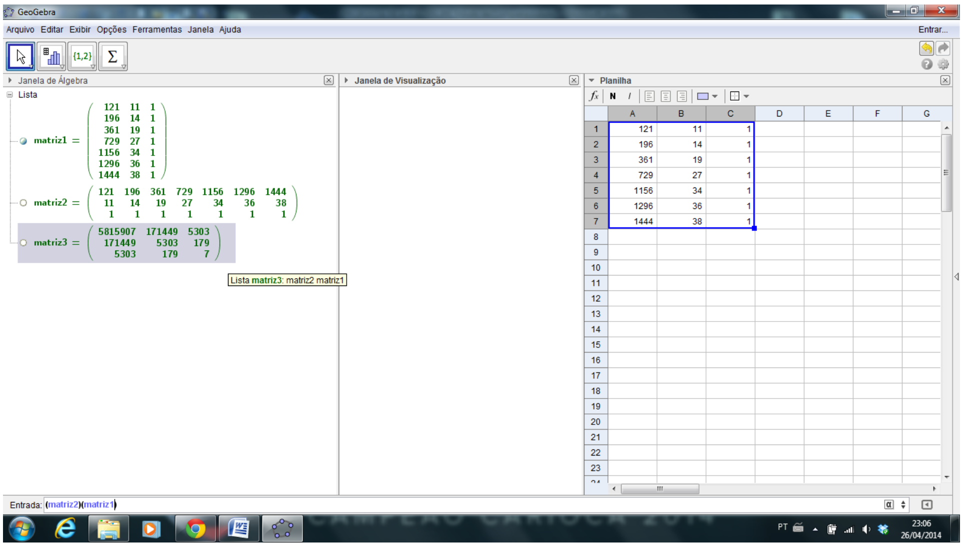

Figura 4.11: "matriz3"

7° **passo:** Antes de realizarmos a próxima operação, clique em **"Opções"** → **"Arredondamento"** → **"5 Casas Decimais"** a fim de que alguns elementos da próxima matriz não sejam nulos devido ao truncamento numérico realizado pelo computador:

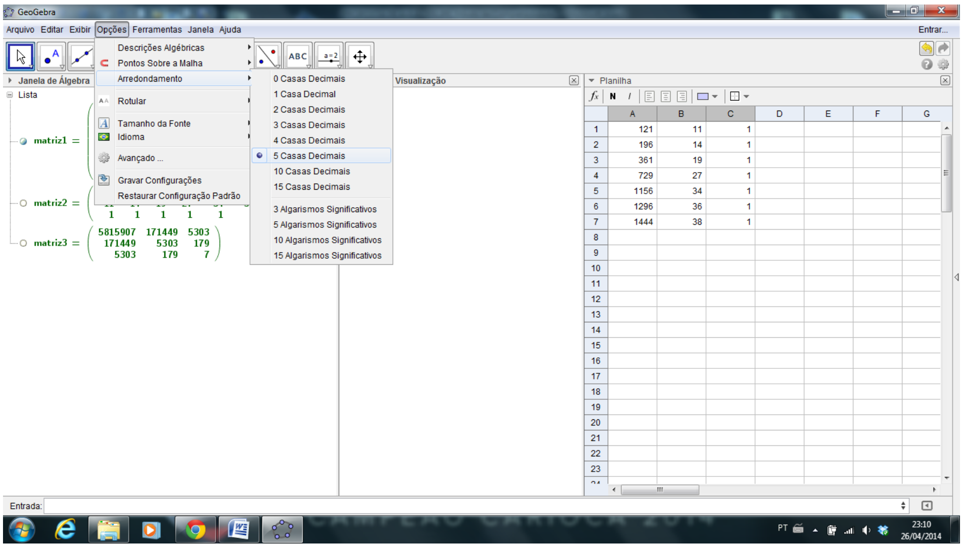

Figura 4.12: **"Opções"** → **"Arredondamento"** → **"5 Casas Decimais"**

8° **passo:** Atendendo a fórmula, encontraremos agora a Matriz Inversa do produto $A^t \cdot A$, nesse caso, a inversa da "matriz3". Na barra de comandos, escrever: **MatrizInversa**[**(matriz3)**]. A inversa será denominada "matriz4", conforme figura (4.13):

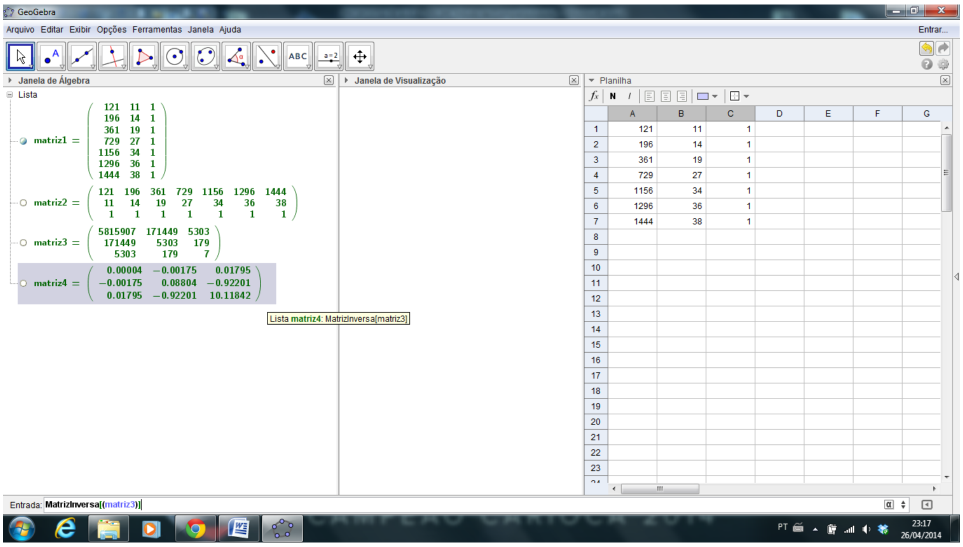

Figura 4.13: "matriz4"

9° **passo:** Dando continuidade, a "matriz5"será o produto da "matriz4"pela "matriz2", ou seja, $(A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t$. Logo, na barra de comandos digite: **(matriz4)(matriz2)**, conforme figura (4.14):

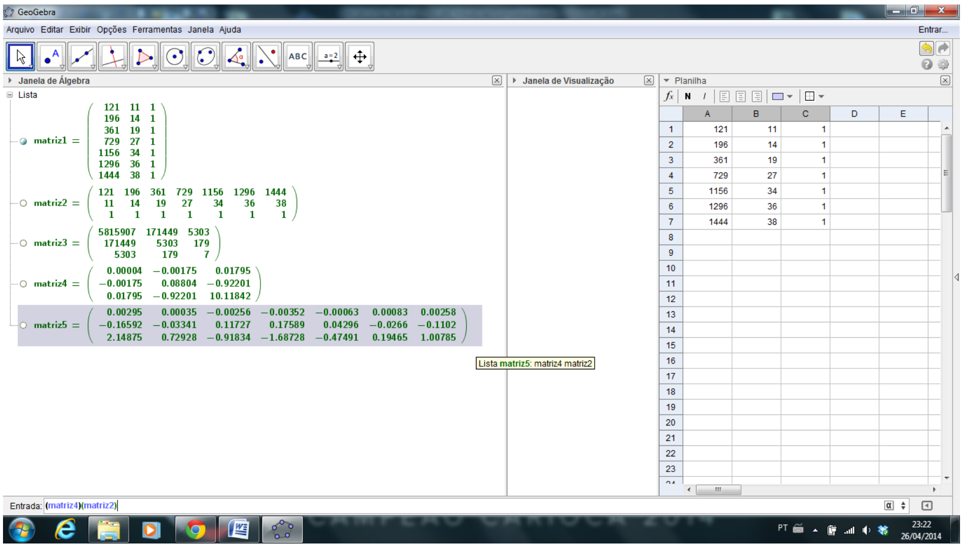

Figura 4.14: **(matriz4)(matriz2)**

10° **passo:** Repetir os 3° e 4° passos para criar a matriz B do sistema que aparecerá como "matriz6", conforme figura (4.15):

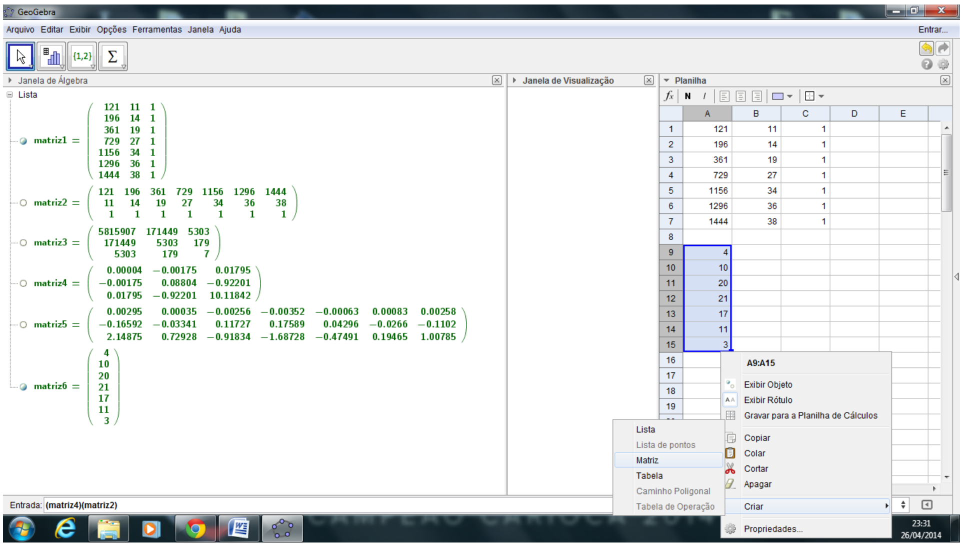

Figura 4.15: "matriz6"

11° **passo:** Concluindo a fórmula para determinar o valor de $\overline{X} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B$, devemos digitar na barra de comandos: **(matriz5)(matriz6)**. Aparecerá a "matriz7"que já apresenta os coeficientes do polinômio do 2° grau procurado, conforme figura (4.16):

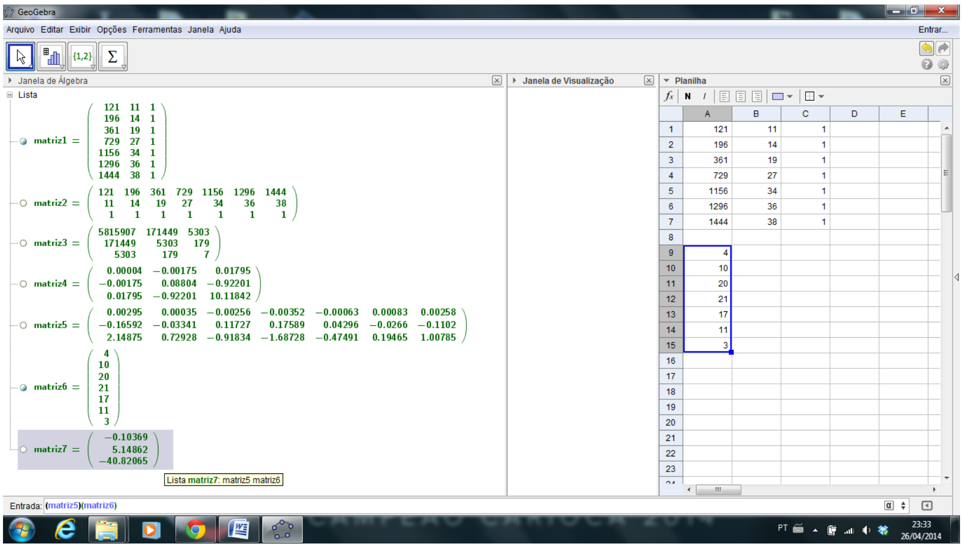

Figura 4.16: "matriz7"

Logo, a função é dada por: $P(t) = -0,10369t^2 + 5,14862t - 40,82065$, conforme figura (4.17)

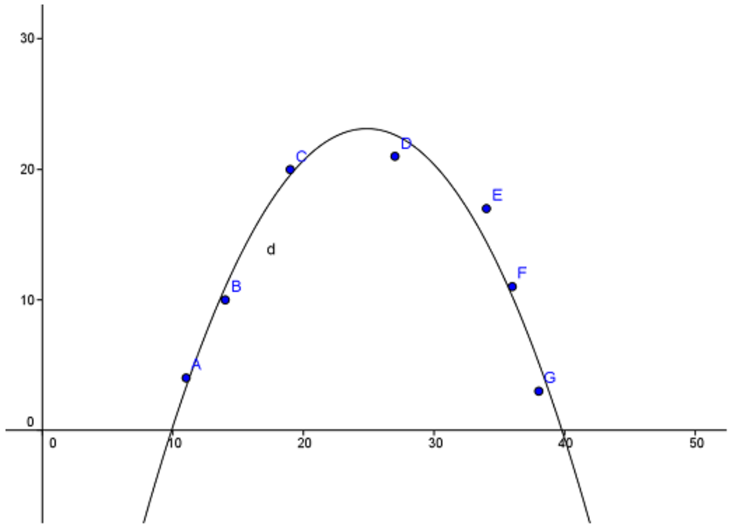

Figura 4.17: gráfico da função $P(t) = -0,10369t^2 + 5,14862t - 40,82065$

Não calcularemos o erro para esse exemplo.

<u>Atividade 4</u>: O objetivo dessa atividade é apresentar uma aplicação interessante do ajuste por parábolas. A proposta é determinar uma aproximação para o valor de π, por intermédio de uma aproximação da equação que relaciona o raio de um círculo à sua área.

O professor deve iniciar descrevendo brevemente a atividade: "conhecida a fórmula da área de um círculo, $A = \pi r^2$, a ideia consiste em obter a parábola que melhor ajusta 4 pontos (r, A), onde A é uma aproximação para área do círculo de raio r."Nesse momento, o professor deve discutir com os alunos sobre a forma de se encontrar as aproximações tais aproximações e concluir que uma boa maneira é considerar a média aritmética entre as áreas de um polígono regular inscrito e outro circunscrito à circunferência (áreas que são mais simples de se calcular).

Em seguida, o professor deve determinar os raios que serão considerados e os respectivos polígonos cujas áreas serão determinadas. Sugerimos como primeiro valor $r = 0$ pois, nesse caso, é natural considerar $A = 0$ e, com isso, tem-se o primeiro ponto sem a necessidade de se fazer contas. Nessa proposta de aula, consideraremos para os demais raios,

$r = 1, 3$ e 5. Para a aproximação da área dos respectivos círculos, utilizaremos hexágonos regulares no primeiro caso e dodecágonos regulares nos outros dois, figura (4.18).

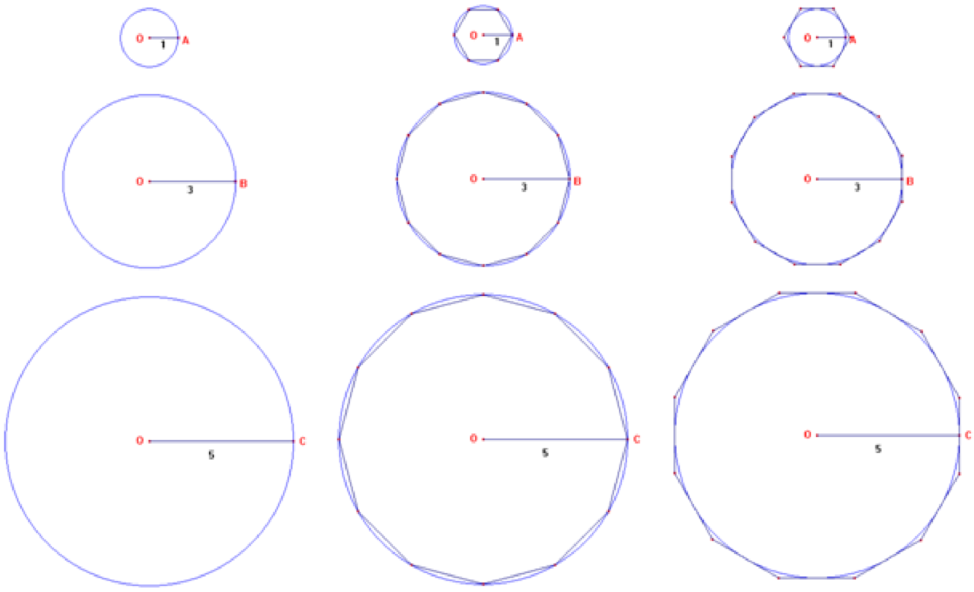

Figura 4.18: Aproximação da área dos respectivos círculos

O próximo passo é pedir que os alunos calculem as áreas dos polígonos regulares, com seus conhecimentos de Geometria Plana. Sugerimos que o professor entregue, a cada aluno, uma folha com os círculos e polígonos regulares construídos, além de uma tabela onde devem ser marcados os valores obtidos.

r	$A(P_1)$	$A(P_2)$	$A \approx \dfrac{A(P_1)+A(P_2)}{2}$
0	0	0	0
1	$2,60$	$3,51$	$3,05$
3	$27,00$	$28,59$	$27,80$
5	$75,00$	$80,27$	$77,64$

Após o preenchimento da tabela, os alunos devem construir um diagrama de dispersão, conforma figura (4.19):

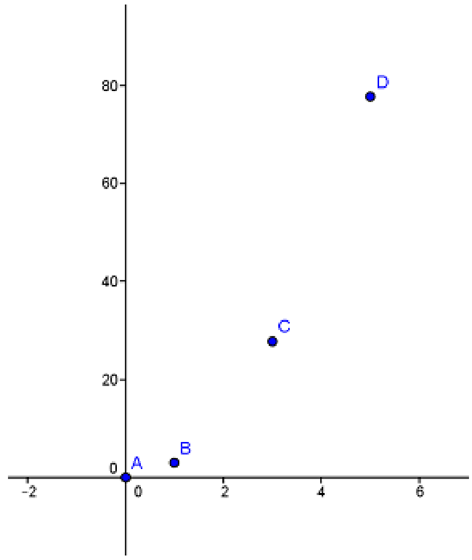

Figura 4.19: Diagrama de dispersão

e concluir que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ é uma boa aproximação para esses pontos.

Em seguida, os alunos devem obter os coeficientes a, b, c por intermédio do Métodos dos Mínimos Quadrados. Assim, aplicando os dados obtidos pelos alunos, escrevemos o sistema:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0,00 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3,05 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 27,80 \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 77,64 \end{cases}$$

Passando para a forma matricial, $A \cdot X = B$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 3,05 \\ 27,80 \\ 77,64 \end{bmatrix}$$

Como os vetores coluna da matriz A sã LI, temos uma solucão única por mínimos quadrados dada por: $\overline{X} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B$

Realizando os cálculos abaixo, encontraremos a solução

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 & 25 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot A = \begin{bmatrix} 707 & 153 & 35 \\ 153 & 35 & 9 \\ 35 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A^t \cdot A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,03706 & -0,18656 & 0,09548 \\ -0,18656 & 1,00691 & -0,63317 \\ 0,09548 & -0,63317 & 0,8392 \end{bmatrix}$$

$$(A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t = \begin{bmatrix} 0,09548 & -0,05402 & -0,13065 & 0,0892 \\ -0,63317 & 0,18719 & 0,70854 & -0,26256 \\ 0,8392 & 0,30151 & -0,20101 & 0,0603 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 3,05 \\ 27,80 \\ 77,64 \end{bmatrix}$$

$$\overline{X} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B = \begin{bmatrix} 3,12825 \\ -0,11697 \\ 0,01347 \end{bmatrix}$$

Assim, a parábola que melhor se ajusta a esse conjunto de pontos é dada pela expressão:

$$y = 3,12825 \cdot x^2 - 0,11697 \cdot x + 0,01347$$

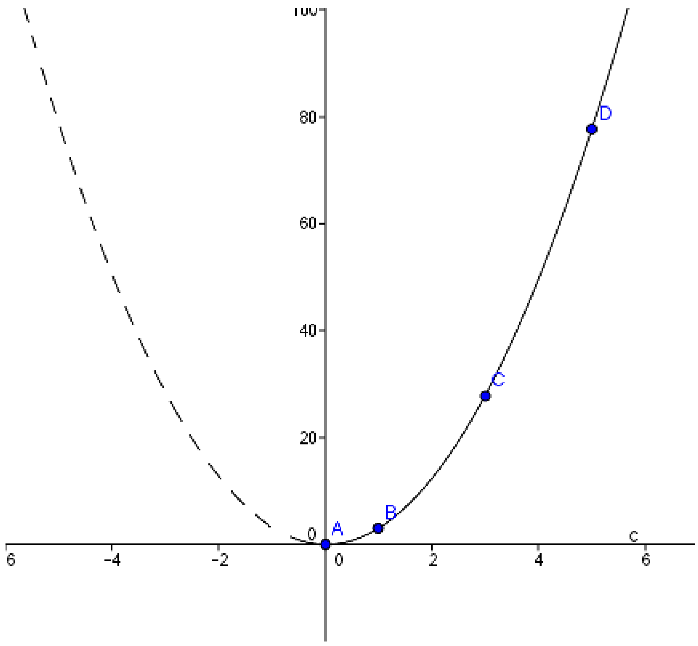

Figura 4.20: Gráfico da equação $y = 3,12825 \cdot x^2 - 0,11697 \cdot x + 0,01347$

Finalmente, o professor deve observar que o resultado obtido aproxima a fórmula da área da circunferência $A = \pi r^2$. Nesse caso, **b** e **c** devem ser próximos de 0 e **a** é uma aproximação para o valor de π

Observação: Ao final da atividade, o professor pode comentar que a forma usual (e oriunda da Grécia Antiga) de se obter uma aproximação para a área de um círculo fixado, é por intermédio da área de polígonos inscritos e circunscritos à circunferência que o delimita, aumentando-se o número de lados desses polígonos. Por outro lado, a atividade realizada permite a obtenção de uma aproximação dessas áreas, fixando-se esses polígonos e variando os círculos.

5 Considerações Finais

A aplicação de questões envolvendo situações reais faz com que os alunos percebam a importância da Matemática, ou seja, dá significado ao seu estudo. Esse é um dos objetivos da Modelagem Matemática que, além de motivar o aprendizado, desenvolve a criatividade dos alunos, seu raciocínio lógico e propicia uma maior compreensão e interpretação de um problema real.

Em consonância com a Modelagem Matemática está o Método dos Mínimos Quadrados que estima a tendência de comportamento das grandezas relacionadas em um experimento previamente modelado. Neste trabalho, além de apresentar a comprovação desse método, mostra-se que é possível aplicá-lo ainda no Ensino Médio.

Assim, sugere-se uma proposta de aula na qual, após apresentar o Método dos Mínimos Quadrados ao aluno, concilia-se essa importante ferramenta matemática com situações-problema de outras áreas do conhecimento. Essa interdisciplinaridade faz com que o aluno desperte mais interesse no método ao ver sua utilidade em situações do cotidiano.

Além disso, as aplicações realizadas nas atividades desse trabalho mostram a importância de se trabalhar com aproximação em Matemática e ressaltam a necessidade de se prever resultados não testados em experimentos. O Método dos Mínimos Quadrados é responsável por realizar tais estimativas tornando a análise de tendências mais precisa e confiável, ou seja, tornando o erro dessas previsões o menor possível.

Portanto, a aplicação das atividades visa apresentar ao professor uma nova ferramenta matemática que pode ser utilizada ao longo das aulas do Ensino Médio, além de dar ênfase a conteúdos ensinados como, por exemplo, o estudo das funções (mostrando aos alunos a importância de se modelar uma situação) e a necessidade de saber operar com matrizes para resolver as situações-problema propostas.

6 Apêndice

No presente trabalho, apresentamos o Método dos Mínimos Quadrados soba ótica da Álgebra Linear. No entanto, por se tratar de um processo de minimização de normas, é possível uma abordagem do assunto por intermédio da teoria de otimização de funções reais de várias variáveis, vista em cursos de Cálculo Diferencial de Várias Variáveis.

Neste apêndice, resolveremos o problema dado na atividade 2 da proposta de aula, visando apenas ilustrar essa outra possível abordagem, em particular, em cursos de nível superior. Para isso, é necessária a apresentação de algumas definições e resultados referentes à teoria de otimização.

Não apresentaremos aqui as demonstrações dos resultados. No entanto, elas podem ser vistas em Simon ([14])

Definição 1: Seja uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que um ponto $X_0 \in D$ é um ponto de mínimo local ou relativo de f se existir uma vizinhança V de X_0 tal que

$$f(X_0) \leq f(X), \ \forall X \in V \cap D.$$

Analogamente, $X_0 \in D$ é dito um ponto de máximo local ou relativo de f se existir uma vizinhança V de X_0 tal que

$$f(X_0) \geq f(X), \ \forall X \in V \cap D.$$

Em ambos os casos, dizemos que X_0 é um extremo local ou relativo de f.

Definição 2: Seja uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que um ponto $X_0 \in D$ é um ponto de mínimo global ou absoluto de f em D se

$$f(X_0) \leq f(X), \ \forall X \in D.$$

Analogamente, $X_0 \in D$ é dito um ponto de máximo global ou absoluto de f em D se

$$f(X_0) \geq f(X), \ \forall X \in D.$$

Em ambos os casos, dizemos que X_0 é um extremo global ou absoluto de f em D.

Teorema 1: Sejam D um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(D)$, isto é, com todas as derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D. Se X_0 é um extremo local de f, então

$$\nabla f(X_0) = \overrightarrow{0},$$

onde

$$\nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right)$$

é o gradiente da função f no ponto X_0.

Com as definições e o teorema anteriores, podemos retornar ao problema da atividade 2: "Encontre a equação da curva que melhor se ajusta aos pontos $A(-1;2)$, $B(0;4)$, $C(1;4)$ e $D(2;1)$"

Sabendo que a curva procurada é uma parábola, o problema consiste em obter os coeficientes a, b e c que minimizam a norma do erro, dada por

$$\|e\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2},$$

onde

$$\begin{aligned} e_1 &= 2 - \left(a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c\right) \\ e_2 &= 4 - \left(a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c\right) \\ e_3 &= 4 - \left(a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c\right) \\ e_4 &= 1 - \left(a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c\right). \end{aligned}$$

Por sua vez, esses coeficientes são os mesmos que minimizam a função

$$f(a,b) = \|e\|^2 = (2 - a + b - c)^2 + (4 - c)^2 + (4 - a - b - c)^2 + (1 - 4a - 2b - c)^2.$$

Aqui, optamos por trabalhar com o quadrado da norma do erro apenas para facilitar as contas.

Em resumo, os coeficientes a, b e c que determinam a reta procurada correspondem às coordenadas do ponto de mínimo absoluto (a,b,c) de f em $\mathbb{R}^3$. Note que o domínio de f é todo o plano $\mathbb{R}^3$ e, nesse caso, todo extremo absoluto tem que ser um extremo local. Dessa forma, como a função f é de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$, devemos ter

$$\nabla f(a,b,c) = (0,0,0).$$

A condição anterior, dada pelo Teorema 1 não é suficiente para que um ponto seja extremo local e, sim, necessária. Dessa forma, visto que temos garantida a existência do mínimo, vamos encontrar todos os pontos (x, y, z) que satisfazem

$$\nabla f\,(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

e, dentre eles, vamos determinar o ponto (a, b, c) desejado.

Assim, retomando a função

$$f\,(a, b, c) = (2 - a + b - c)^2 + (4 - c)^2 + (4 - a - b - c)^2 + (1 - 4a - 2b - c)^2\,,$$

após os cálculos das derivadas parciais, obtemos

$$\nabla f\,(a, b) = (36a + 16b + 12c - 20, 16a + 12b + 4c - 8, 12a + 4b + 8c - 22)\,.$$

Dessa forma, segue da condição $\nabla f\,(a, b, c) = (0, 0, 0)$ o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 36a + 16b + 12c - 20 = 0 \\ 16a + 12b + 4c - 8 = 0 \\ 12a + 4b + 8c - 22 = 0 \end{cases}$$

cuja solução única é dada por

$$(a, b, c) = (-1,25; 0,95; 4,15)\,.$$

Como o sistema possui solução única ela é, de fato, o ponto de mínimo absoluto de f e, portanto, a parábola procurada é dada por

$$y = -1,25x^2 + 0,95x + 4,15,$$

coincidindo com o resultado obtido com as ferramentas de Álgebra Linear.

Referências Bibliográficas

[1] SANTOS, C.; MACLYNE, D. A modelagem matemática como estratégia no ensino-aprendizagem 2009. http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/posteres/PO02111714410T.doc. 30.09.2010.

[2] FIDELIS, R.; DE ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática em sala de aula: Contribuições para a competencia de refletir na acao 2008. http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_Orais/co0080.doc. 03.10.2010.

[3] BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: Concepções e experiências de futuros professores. http://sites.uol.com.br/joneicb. 02.10.2010.

[4] BASSANEZI, R. C. *Ensino – aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto, 2000.

[5] SILVEIRA, J. C.; RIBAS, J. L. D. Discussões sobre modelagem matemática e o ensino-aprendizagem 2007. http://www.somatematica.com.br/artigos/a8/. 29.09.2010.

[6] CIPRIANO, T. S. Modelagem matemática como metodologia no ensino regular: Estratégias e possibilidades. http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/479/2011_00371_TATIANA_SOARES _CIPRIANO.pdf?sequence=1. 10.02.2014.

[7] DE VARGAS FORTES, E.; DE SOUZA JUNIOR, A. W.; DE OLIVEIRA, A. M. L. O uso de modelagem matemÁtica no ensino de funÇÕes nas sÉries finais do ensino fundamental: Um estudo de caso. http://www.revistas.ufg.br/index.php/ritref/article/viewFile/26414/15839. 16.03.2014.

[8] DE SOUZA, E. S. R.; LIMA, C. F.; CORDEIRO, M. J. Interdisciplinaridade por meio da modelagem matemática: Uma atividade envolvendo matemática e física

2009. http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/artigo/1-2009-02-28-12-40-16.pdf. 08.10.2010.

[9] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino.* São Paulo: Contexto, 2000.

[10] MARINELLI, M. F. Método de quadrados mínimos. https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97165/Maura_Ferreira_Marinilli.PDF?sequence=1. 05.02.2014.

[11] CRATO, N. O papel dos mínimos quadrados na descoberta dos planetas. http://pascal.iseg.utl.pt/ ncrato/papers/MinQdSPM.pdf. 27.01.2014.

[12] LAY, D. C. *Álgebra linear e suas aplicações.* 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

[13] PEDROSA, D. P. F. Ajuste de curvas. http://www.dca.ufrn.br/ diogo/FTP/dca0304/ajustedecurvas.pdf. 07.02.2014.

[14] SIMON, C. P.; BLUME, L. *Matemática para economistas.* Porto Alegre: Bookman, 2004.