Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Protótipo de um Programa de Aprendizagem, para Auxiliar Alunos do Ensino Médio a Revisarem e Aprofundarem Conhecimentos Matemáticos Básicos

por

Luiz Fernando Costa

Brasília
2014

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Protótipo de um programa de aprendizagem, para auxiliar alunos do ensino médio a revisarem e aprofundarem conhecimentos matemáticos básicos.

por

Luiz Fernando Costa*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 01 de julho de 2014.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Mauro Luiz Rabelo – MAT/UnB (Orientador)

Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas – UFMS/MS (Membro)

Prof. Dr. Rui Seimetz – MAT/UnB (Membro)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília. Acervo 1016164.

Costa, Luiz Fernando.

C837p Protótipo de um programa de aprendizagem, para auxiliar alunos do ensino médio a revisarem e aprofundarem conhecimentos matemáticos básicos / Luiz Fernando Costa. -- 2014.

viii, 102 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2014.

Inclui bibliografia.

Orientação: Mauro Luiz Rabelo.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Aprendizagem. 3. Didática. 4. Realidade virtual na educação. I. Rabelo, Mauro Luiz. II. Título.

CDU 37:51

Agradecimento

Agradeço a Deus pelas oportunidades, bênçãos e pessoas que estão presentes em minha vida. Neste momento, em especial, à oportunidade de ministrar aulas, uma de minhas verdadeiras paixões; às grandes bênçãos que são meus filhos Luiza e Felipe, verdadeiros milagres; à minha esposa Tatiana, pessoa de fundamental importância nas grandes conquistas e realizações de minha vida, inclusive na conclusão deste mestrado profissionalizante; à minha mãe que é responsável pela minha criação e educação; ao professor Mauro Rabelo pelas horas e preocupações investidas, que colaboraram diretamente para a realização deste trabalho de conclusão de curso e, finalmente, aos meus alunos que são os maiores motivadores para o dia-a-dia do meu ofício, dos meus estudos e da elaboração da ferramenta de aprendizagem aqui proposta.

“Nossa ignorância pode ser dividida em problemas e mistérios. Quando estamos diante de um problema, podemos não saber da solução, mas temos insights, acumulamos um conhecimento crescente sobre ele e temos uma vaga ideia do que buscamos. Porém, quando nos defrontamos com um mistério, ficamos entre maravilhados e perplexos, sem ao menos termos uma ideia de como seria a explicação.”

(NOAM CHOMSKY)

Resumo

O presente trabalho tem como principal objetivo desenvolver um programa de aprendizagem, em meio virtual, com a finalidade de oferecer uma oportunidade aos alunos do ensino médio de revisarem ou aprofundarem conhecimentos matemáticos que deveriam ter sido bem apreendidos em uma etapa anterior de escolaridade, mas que, por diversas razões, não foram. A estratégia didática é escolhida de modo a não comprometer a dinâmica de desenvolvimento dos conteúdos estabelecida pela coordenação pedagógica das escolas, levando em consideração as características da atual geração, denominada de *nascidos digitais*, e as demandas, decorrentes das políticas de avaliação externa, que hoje pairam sobre os professores e as escolas da educação básica.

O trabalho é composto por quatro partes: o desenvolvimento da fundamentação teórica, que justifica a estratégia didática escolhida; a programação de uma página eletrônica, que atenda às particularidades do programa de aprendizagem proposto; a ilustração do método, após escolha de um tema da educação básica no qual os alunos demonstram dificuldade de aprendizado; e análises qualitativa e quantitativa da eficácia do programa de aprendizagem.

Inicia-se o estudo com uma síntese das classificações das diferentes linhas, tendências ou abordagens pedagógicas no ensino brasileiro, segundo Bordenave, Libâneo, Saviani e Mizukami, seguida de uma síntese das características e do processo de elaboração de uma Instrução Programada, método escolhido para o desenvolvimento da parte teórica dos conteúdos didáticos.

O programa de aprendizagem apresenta, segundo a classificação de Misukami, características das abordagens comportamentalista, cognitivista e sociocultural, por ter sido estruturado segundo uma mescla de métodos didáticos tradicionais e modernos. Para o desenvolvimento da parte conceitual dos temas, ou seja, para a estruturação da linguagem do conteúdo, utiliza-se a Instrução Programada, um método com características procedimentais que prioriza o ritmo individualizado de aprendizagem. Porém, para a construção e solidificação do conhecimento, objetivando o desenvolvimento da autonomia intelectual do aluno, utilizou-se a interdisciplinaridade, a contextualização, bem como curiosidades históricas, que estimulem o pensar, as inferências e as tomadas de decisão do estudante.

Palavras-chave: Estratégias Didáticas. Programa de Aprendizagem. Instrução Programada. Contextualização.

Abstract

The main objective of this paper is to develop a learning program utilizing virtual media in order to offer secondary school students an opportunity to revise or deepen mathematical contents that should have been but, for a variety of reasons, were not learned in a previous period of schooling. The didactic strategy is chosen in such a way as to not jeopardize the dynamics of content development implemented by the teaching coordination staff of the school, taking due account of the characteristics of the current *born digital* generation and the demands imposed on teachers and primary education institutions as a result of external evaluation policies.

These work has four parts: development of the theoretical foundations that justify the chosen didactic strategy; programming of an electronic page that meets the peculiarities of the proposed learning program; illustration of the method after choosing a primary education theme in which students have faced learning difficulties; and qualitative and quantitative analyses of the efficacy of the learning program.

It begins with a synthesis of the classifications of the various pedagogical lines, tendencies or approaches in Brazilian education, according to Bordenave, Libâneo, Saviani and Mizukami, followed by a summary of the characteristics and process of elaborating Individually Prescribed Instruction, the method chosen to develop the theoretical segment of the didactic contents.

Following the classification of Mizukami, the learning program shows characteristics of the behaviorist, cognitive and socio-cultural approaches since it has been structured according to a mixture of traditional and modern didactic methods. In order to develop the conceptual component of the themes or, in other words, the structuring of the content language, Individually Prescribed Instruction, a method with procedural characteristics that prioritize the individualized pace of learning, is utilized. Nonetheless, in order to construct and solidify knowledge, with the objective of developing the intellectual autonomy of the student, interdisciplinarity, contextualization and historical curiosities were utilized in such a way as to stimulate students thought processes, inferences and decision-making.

Keywords: Didactic Strategy. Learning Program. Individually Prescribed Instruction. Contextualization.

Sumário

Introdução **1**

1 Abordagens Pedagógicas **5**

1.1 **Linhas pedagógicas segundo Bordenave** 6
1.2 **Linhas pedagógicas segundo Libâneo** 6
1.3 **Linhas Pedagógicas segundo Saviani** 7
1.4 **Linhas Pedagógicas segundo Mizukami** 8
1.4.1 **Abordagem tradicional** 8
1.4.2 **Abordagem comportamentalista** 8
1.4.3 **Abordagem humanista** 9
1.4.4 **Abordagem cognitivista** 9
1.4.5 **Abordagem sociocultural** 10

2 A Instrução Programada **11**

2.1 **Princípios da Instrução Programada** 12
2.2 **Vantagens da Instrução Programada** 14
2.3 **Etapas do processo de elaboração da IPI** 16
2.3.1 **Fase inicial** 16
2.3.2 **Fase de construção dos quadros** 16
2.3.3 **Fase final** 17

3 O Programa de Aprendizagem **19**

4 A Pesquisa e a Análise de Conteúdos **29**

4.1 Considerações iniciais 29
4.2 Descrição e interpretação dos dados 32
4.2.1 Das Avaliações Diagnóstica e de Conclusão 32
4.2.2 Das respostas ao questionário 36

4.3 Considerações Finais 40

5 Considerações Finais **43**

Referências Bibliográficas **46**

A Avaliação Diagnóstica **51**
A.1 **Questões da avaliação diagnóstica** 51
A.2 **Feedback da avaliação diagnóstica** 56

B Objetos de Estudo **57**
B.1 **Conceito de Fração** 57
B.2 **Conceito de Fração - Problematização** 65
B.3 **Comparação de Frações** 73
B.4 **Comparação de Frações - Problematização** 77
B.5 **Soma e Subtração de Frações** 82
B.6 **Soma e Subtração de Frações - Problematização** 86
B.7 **Multiplicação de Frações** 92
B.8 **Multiplicação de Frações - Problematização** 95
B.9 **Divisão de Frações** 99
B.10 **Divisão de Frações - Problematização** 102

C Avaliação de Conclusão **106**
C.1 **Questões da Avaliação de Conclusão** 106
C.2 **Feedback da Avaliação de Conclusão** 109

Introdução

A arte de ensinar é, geralmente, uma atividade muita prazerosa. Constatar que o aluno desenvolveu certas habilidades e que, com isso, consegue realizar novas tarefas, ou enfrentar novos desafios, é, para mim, a grande recompensa do ofício da docência. Entretanto, muitas vezes, os professores precisam lidar com situações conflituosas ou desconfortáveis que acabam comprometendo a alegria do ensinar. A pouca valorização da profissão docente pelo Estado e pela população de modo geral, a falta de empenho dos estudantes, os salários baixos e a precariedade das instituições de ensino são alguns exemplos dessas dificuldades enfrentadas pelos professores. Para alguns, os obstáculos são desmotivadores, mas, para outros, tornam-se desafios a serem superados.

Na qualidade de professor de matemática do ensino médio, vivencio, ao longo de 17 anos de experiência, uma angústia constante que muito me aflige: diversos alunos apresentam dificuldades para compreender determinado conteúdo novo de matemática trabalhado na sala simplesmente por não ter assimilado um assunto base, considerado pré-requisito, e que deveria ter sido apreendido em anos anteriores, via de regra no ensino fundamental, quer seja nas séries iniciais, quer seja nas finais.

Os resultados da aplicação do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e da Prova Brasil, por exemplo, têm revelado que apenas pouco mais de 10% dos estudantes brasileiros terminam o ensino médio com aprendizado adequado à série no que diz respeito aos conhecimentos matemáticos, como se infere da tabela 1, extraída de Rabelo (2013, p. 39).

Os resultados revelam que a situação, ao final do ensino fundamental, também é muito crítica. Na realidade, os dados mostram que nenhuma das séries avaliadas possui mais de 40% dos alunos com aprendizado adequado à série, seja em língua portuguesa, seja em matemática.

Por meio de uma sequência de exemplos de itens aplicados no SAEB, Rabelo (2013, p. 27-29) também aponta que somente cerca de 12,5% dos alunos brasileiros

Tabela 1: **Evolução da proporção de alunos com aprendizado adequado à série no Brasil (1999-2011), em %**

		1999	2001	2003	2005	2007	2009	2011
5º ano do EF	LP	24,8	23,7	25,6	26,6	27,9	34,2	40,0
5º ano do EF	MAT	14,4	14,9	15,1	18,7	23,7	32,5	36,0
9º ano do EF	LP	18,6	21,8	20,1	19,5	20,5	26,2	27,0
9º ano do EF	MAT	13,2	13,4	14,7	13,0	14,3	14,7	16,9
3º ano do EM	LP	27,6	25,8	26,9	22,6	24,5	28,9	29,0
3º ano do EM	MAT	11,9	11,6	12,8	10,9	9,8	11,0	10,3

Fonte: (RABELO, 2013, p. 39)

concluem o ensino fundamental demonstrando ter aprendido o conceito de fração. Para a esmagadora maioria de nossos estudantes, os números 0,25 e 2/5 são idênticos.

A solução desse problema dramático não parece ser nada fácil e torna-se quase impraticável se considerarmos a demanda que hoje paira sobre as escolas de educação básica: conteúdos muito extensos a serem trabalhados em sala de aula, aliados à cobrança dos gestores escolares para que os professores os cumpram na integralidade, no intuito de a escola responder aos anseios da comunidade e não ficar em posição ruim nas avaliações externas; falta de tempo para realização de trabalhos extracurriculares, uma vez que a realidade brasileira leva diversos professores a trabalharem em dois ou três turnos; problemas de indisciplina e violência no ambiente escolar; falta de credibilidade de docentes em relação à capacidade dos alunos superarem a enorme defasagem de conteúdos que vão acumulando ao longo da formação. Esses são apenas alguns poucos argumentos que ilustram a gravidade da situação vivenciada na educação básica.

António Nóvoa (2010) faz muito bem a crítica sobre o transbordamento da escola, no sentido de que ela incorpora hoje um excesso de missões. Sempre que surge um novo problema, é votada uma lei ou criado um projeto que o lança para dentro da escola. Segundo o autor, a sociedade foi carreando para dentro da escola uma série de missões, as quais foram apropriadas pelos professores com grande generosidade; porém isso tem levado a um excesso de dispersão, à dificuldade de se definir prioridades, como se tudo fosse importante. Surge, naturalmente, a pergunta: a escola pode fazer tudo? Faz-se necessário combater esse transbordamento. Ele sugere que é preciso "dar à escola o que é da escola e à sociedade o que é da sociedade" e "assegurar que todos os alunos tenham verdadeiramente sucesso" (p. 39). Não se pode esquecer que a prioridade dos docentes é a aprendizagem dos alunos. Logo, os professores precisam se imbuir da ideia de que todos devem sair da escola com um patamar comum de conhecimentos.

Naturalmente, sabe-se que o processo de desenvolvimento e apreensão de conhecimentos matemáticos é complexo e lento, e necessita de diversas estratégias para auxiliar os alunos no processo de aprendizagem.

Partindo dessas angústias e experiências, frequentemente faço a pergunta: o que eu poderia fazer para ajudar os meus alunos a superarem as dificuldades básicas em matemática que eles evidenciam ao ingressarem no ensino médio?

Para tentar responder a essa indagação, e aproveitando a oportunidade propiciada por este trabalho, resolvi desenvolver um programa de aprendizagem que, na minha perspectiva, pode auxiliar os professores a superarem o dilema descrito, sem comprometer a dinâmica de desenvolvimento dos conteúdos estabelecida pela coordenação pedagógica da escola, dando aos alunos uma oportunidade de retomarem um conhecimento matemático que deveria ter sido bem absorvido em uma etapa anterior de escolaridade.

Desse modo, o presente trabalho tem como objetivo geral desenvolver, apresentar e avaliar a eficácia do protótipo de um programa de aprendizagem, estruturado em meio virtual, criado para auxiliar os estudantes do ensino médio a superarem dificuldades individuais, no que diz respeito a determinados conteúdos e habilidades presentes nos Parâmetros Curriculares do Ensino Fundamental, fortalecendo suas bases conceituais para prosseguirem, com êxito, no estudo de temas da matemática usualmente abordados no ensino médio.

Como objetivos específicos, pretendo comentar brevemente as abordagens pedagógicas praticadas no Brasil, pois tendem a explicar práticas de ensino-aprendizagem e ações educativas, e apresentar uma síntese das características e do processo de elaboração de uma Instrução Programada, método escolhido para o desenvolvimento do conteúdo constante no programa de aprendizagem. Além disso, farei uma análise do desempenho de um grupo de estudantes que se submeteram a um módulo do programa e da opinião deles acerca da efetividade da ferramenta, a partir das respostas a um questionário aplicado.

Partindo do pressuposto de que o conhecimento é considerado uma construção contínua, e observando que o aprendizado da matemática, por parte de alguns alunos do ensino médio, é limitado não pelo que está sendo ensinado nessa etapa da escolaridade, mas por alguns conteúdos básicos que não foram apreendidos no decorrer do ensino fundamental, buscou-se desenvolver um programa de aprendizagem individualizado e autônomo, ou seja, que atenda a cada um dos alunos nas suas dificuldades, de modo que possam estudar, aprender e desenvolver as capacidades necessárias, de acordo com seus ritmos próprios de aprendizagem e que, para prosseguirem com seus estudos, necessitem prioritariamente de seus esforços individuais e compromissos. Aqui não se trata de devolver integralmente ao aluno a responsabilidade pela sua aprendizagem, mas de oferecer-lhe um meio de transpor barreiras e superar dificuldades.

Para que isso seja possível, propõe-se o uso da internet, um canal que completou 25 anos, desde o dia 12 de março de 1989, quando o cientista britânico Tim Berners-Lee, de apenas 34 anos, colocou duas máquinas em rede e permitiu que uma "conversasse" com a outra, e que mudou para sempre a forma como as pessoas se comunicariam daquele dia em diante. Nos dias de hoje, esse canal torna-se cada vez mais imprescindível para o acesso à informação e para a busca do conhecimento.

Os alunos da atual geração, denominados de "nascidos digitais", só conhecem o mundo que se descortinou com o avanço tecnológico provindo da internet e, portanto, conseguem agir/reagir de forma bastante natural a estímulos provocados nesse meio, o que pode ser um fator de grande motivação para o sucesso dos objetivos propostos neste trabalho.

Capítulo 1

Abordagens Pedagógicas

A busca pela resposta à pergunta

"O que fundamenta a ação docente?",

gera uma motivação ao estudo das diferentes linhas, tendências ou abordagens pedagógicas no ensino brasileiro. As abordagens pedagógicas "podem fornecer diretrizes à ação docente, mesmo considerando que a elaboração que cada professor faz delas é individual e intransferível" (MIZUKAMI, 1986). Nessa linha de pesquisa, destacam-se vários autores que analisaram os processos de ensino e aprendizagem através de diferentes enfoques e critérios: Bordenave (1984), Libâneo (1982), Saviani (1984) e Mizukami (1986).

Neste capítulo, faremos uma síntese das classificações sugeridas por esses autores, dando ênfase à classificação de Mizukami, que tem como essência básica de seu trabalho a busca pela resposta à pergunta enunciada acima.

Não pretendemos discorrer aqui da necessidade atual de mudanças na ação docente para que ela se adeque ao contexto no qual está inserida. Sabemos que a facilidade de acesso à informação e a reestruturação da sociedade em torno do conhecimento como capital global, levam a concepção de ensinar enquanto transmissão de conhecimentos para um passado cada vez mais distante, quando o professor era limitado ao quadro negro — imóvel, estático — e a informação que o aluno tinha acesso era, tão somente, aquela que o professor transmitia; poucos tinham acesso a ela e seu domínio era limitado. Hoje, o ato de "ensinar" assume mais o papel de "mediação", exigindo o desenvolvimento profissional contínuo dos docentes, conforme Roldão apud Malacrida e Barros (2011):

> Saber produzir essa mediação não é um dom, embora alguns o tenham; não é uma técnica, embora requeira uma excelente operacionalização técnico-estratégica; não é uma vocação, embora alguns a possam sentir. É ser um profissional de ensino, legitimado por um conhecimento específico exigente e complexo (p. 514).

1.1 Linhas pedagógicas segundo Bordenave

Bordenave apud Fernandes (2006) classifica e distingue as diferentes opções pedagógicas segundo o fator educativo que mais valorizam.

1. **Pedagogia da transmissão:** valoriza os conteúdos educativos, ou seja, os conhecimentos e os valores a serem transmitidos;

2. **Pedagogia de moldagem:** valoriza o resultado obtido pela educação, ou seja, as condutas conseguidas no indivíduo;

3. **Pedagogia da problematização:** valoriza a identificação, a análise, a teorização e a solução de "problemas" por meio do trabalho em grupo, em que o professor, além de facilitador, é também um aprendiz.

1.2 Linhas pedagógicas segundo Libâneo

Libâneo apud Fernandes (2006) utiliza como critério a posição que as teorias adotam em relação às finalidades sociais da escola.

1. Pedagogia liberal, em suas versões:

   (a) **Conservadora:** a escola tem por atividade preparar os alunos para as capacidades individuais. Os conteúdos, os procedimentos didáticos não têm nenhuma relação com o cotidiano do aluno e com as realidades sociais;

   (b) **Renovada progressista:** a escola valoriza os experimentos, a pesquisa, a descoberta, o estudo do meio natural e social. Privilegia o ensino sob o ângulo dos aspectos metodológicos, em contrapartida à ênfase nos conteúdos. O aluno aprende fazendo. Assim, os recursos fornecidos pela tecnologia da educação são incorporados à prática escolar;

   (c) **Renovada não-diretiva:** a escola propõe a autoeducação – o aluno como sujeito do conhecimento. Há uma ênfase na aquisição de processos de conhecimentos em oposição aos conteúdos.

2. Pedagogia progressista, em suas versões:

   (a) **Libertária:** o saber é sistematizado e só tem relevância se for possível seu uso prático. A ênfase na aprendizagem é informal;

   (b) **Libertadora:** prefere os círculos de cultura, os grupos de conscientização, às instituições formais. Os conteúdos devem estar relacionados à prática cotidiana da vida dos educandos;

   (c) **de Conteúdos:** admite-se o princípio da aprendizagem significativa, partindo do que o aluno já sabe. A escola serve como mediadora entre o indivíduo e o social, estimulando o saber elaborado pelo educando.

1.3 Linhas Pedagógicas segundo Saviani

Saviani apud Fernandes (2006) toma como critério de classificação a criticidade da teoria em relação à sociedade e o grau de percepção da teoria dos determinantes sociais.

1. Teorias não-críticas:

   (a) **Pedagogia tradicional:** a escola surge como um antídoto à ignorância, um instrumento para equacionar o problema da marginalidade. Seu papel é difundir a instrução e transmitir o conhecimento. Preocupa-se com os modelos, o ensino é mecanizado;

   (b) **Pedagogia nova:** surge um movimento de reforma na pedagogia tradicional, na qual aquele que é marginalizado não é mais só o ignorante, mas também o inapto, desajustado biológica e psiquicamente. A escola procura adaptar os indivíduos à sociedade e o professor agiria como um estimulador e orientador da aprendizagem, cuja iniciativa principal caberia aos próprios alunos. O importante não é aprender, mas aprender a aprender;

   (c) **Pedagogia tecnicista:** o indivíduo sem instrução é visto como ineficiente e improdutivo. A função da escola passa ser a de formação de indivíduos eficientes, para o aumento da produtividade social, associado diretamente ao rendimento e às capacidades de produção capitalistas.

2. Teorias críticos-reprodutivistas:

   (a) **Sistema de ensino enquanto violência simbólica:** enxerga a escola como uma reprodutora das desigualdades sociais. Marginalizados são aqueles que não possuem força simbólica, a instrução, e, portanto, são grupos ou classes dominados;

(b) **Escola enquanto aparelho ideológico do Estado:** os aparelhos ideológicos do Estado reproduzem as relações de exploração capitalista;

(c) **Escola dualista:** a divisão da escola em redes acompanha a divisão da sociedade capitalista em classes antagonistas, burguesia e proletariado.

1.4 Linhas Pedagógicas segundo Mizukami

Mizukami (1986, p. 2) considera que a base das teorias do conhecimento envolve três características básicas: primado no sujeito, primado no objeto e interação sujeito-objeto, apesar de reconhecer que existam muitas variações e diferentes combinações possíveis.

De acordo com Mizukami (1986), as linhas ou tendências pedagógicas, podem ser reunidas em cinco grandes grupos: abordagem tradicional, abordagem comportamentalista, abordagem humanista, abordagem cognitivista e abordagem sociocultural.

1.4.1 Abordagem tradicional

É caracterizada pela concepção de educação como um produto, em que os modelos a serem alcançados são preestabelecidos, resultando na ausência de ênfase no processo. As diferenças individuais não são levadas em conta e ensina-se sempre da mesma maneira, indiferentemente da classe ou nível do alunado. O aluno, que está aprendendo, deve memorizar definições, enunciados e demonstrações, e reproduzi-los de maneira idêntica.

Santos (2005), em seus estudos, destaca que existem referências ao ensino tradicional nos trabalhos feitos por Bordenave na pedagogia da transmissão, por Libâneo na pedagogia liberal conservadora e por Saviani na pedagogia tradicional.

1.4.2 Abordagem comportamentalista

O conhecimento é o resultado direto da experiência e o comportamento é estruturado indutivamente, via experiência. A preocupação está focada em fornecer uma tecnologia que seja capaz de explicar como fazer o aluno estudar e que produza mudanças comportamentais. Assim, o ensino-aprendizagem leva em conta o indivíduo e deve ajustar-se à capacidade de aprendizagem de cada um. Nesses casos, as "máquinas de ensinar" são úteis e necessárias, e a eficiência na elaboração e utilização dos sistemas e modelos de ensino depende das habilidades do professor.

Santos (2005), em seus estudos, destaca que existem referências à abordagem comportamentalista nos trabalhos feitos por Bordenave na pedagogia de moldagem, por Libâneo na pedagogia liberal renovada progressista e por Saviani na pedagogia tecnicista.

1.4.3 Abordagem humanista

Aqui, o processo ensino-aprendizagem é centrado no aluno, pois a abordagem humanista considera que o homem tem como objetivo a autorrealização. Não é o professor que ensina, mas o aluno que aprende, pois o ser humano naturalmente procura o conhecimento. O desejo de aprender é considerado nato, quase genético, e esse aprendizado pessoal é que gera as mudanças de comportamento. O professor não transmite conteúdo, ele é um facilitador da aprendizagem. Portanto, para a abordagem humanista, é necessário que se respeite o aluno levando em consideração suas individualidades e que se ofereçam condições para que ela possa desenvolver-se, o que significa criar ambientes de liberdade favorável à aprendizagem.

Referências à abordagem humanista, segundo Santos (2005), também são feitas por Bordenave, em parte, na pedagogia da problematização, por Libâneo na pedagogia liberal renovada não-diretiva e por Saviani na pedagogia nova.

1.4.4 Abordagem cognitivista

A ênfase, nessa abordagem, é procurar conhecer a capacidade do aluno de integrar informações e processá-las. O ser humano, a estrutura social e o meio ambiente em que ele está inserido são analisados conjuntamente, gerando conhecimentos e comportamentos. Nessa abordagem, não há um começo, pois toda nova assimilação é feita a partir do que já foi assimilado, o que resulta em um novo patamar de interações, conexões, e assim sucessivamente. É necessário, portanto, que, nessa visão, o aluno construa seu conhecimento e comportamento a partir de conexões com o meio, e cabe ao professor criar ambientes e situações propícios para que o aluno adquira uma autonomia intelectual. A abordagem cognitivista procura estudar cientificamente a aprendizagem como algo que é mais do que um produto do ambiente, das pessoas ou de fatores que são externos ao aluno. Existe ênfase nos processos cognitivos e na investigação científica, e as emoções são consideradas em suas relações com o conhecimento. A avaliação nessa abordagem deve permitir ao professor observar que nível de novas estruturações mentais o aluno atingiu.

Referências à abordagem cognitivista, segundo Santos (2005), também são feitas por Bordenave, em parte, na pedagogia da problematização, por Libâneo na pedagogia liberal renovada progressista e por Saviani na pedagogia nova.

1.4.5 Abordagem sociocultural

A abordagem sociocultural enfatiza os aspectos sociopolíticos e culturais da aprendizagem. Deve-se procurar dar oportunidades aos alunos para agirem criticamente, conscientizando-os de que são importantes e necessários à comunidade em que vivem, buscando sempre um processo de transformação pessoal e da comunidade conjuntamente. A ação educativa deve dar condições de promover o indivíduo e não apenas ajustá-lo à sociedade. A elaboração e o desenvolvimento do conhecimento estão ligados ao processo de conscientização. O professor, na relação ensino-aprendizagem, deverá partir da realidade social, econômica e política de seus alunos para conseguir o envolvimento destes no processo de ensino. Pode-se dizer que a educação é sempre um ato político, no sentido mais amplo do termo. Os conteúdos não devem estar distantes da realidade do aluno, pois, assim, não haverá interconexões e a relação professor-aluno deixa de ser vertical.

Referências à abordagem sociocultural, segundo Santos (2005), também são feitas por Bordenave, em parte, na pedagogia da problematização, por Libâneo na pedagogia progressista libertadora e por Saviani nas teorias crítico-reprodutivistas.

As cinco abordagens pedagógicas apresentadas por Mizukami estão intimamente ligadas e/ou derivam dos conhecimentos científicos de cada época em que foram desenvolvidas. Como novos conhecimentos surgem com o passar do tempo, naturalmente novas abordagens aparecerão ou mesmo poderá haver uma fusão entre as já existentes.

Capítulo 2

A Instrução Programada

Vivemos um momento peculiar de transformações, fortemente influenciado pela revolução digital, pela velocidade na transmissão de dados, a multiplicação das redes sociais, a superação dos limites espaciais — o nosso espaço deixa de ser "métrico" e passa a ser "topológico". Novas abordagens pedagógicas de ensino e aprendizagem aparecerão ou mesmo ocorrerá fusão entre as já existentes.

Nesse sentido, o programa de aprendizagem proposto neste trabalho fundamenta-se em uma mescla das abordagens comportamentalista, cognitivista e sociocultural. A comportamentalista, no que se diz respeito às máquinas de ensinar e ao considerar que conhecimento é o resultado direto da experiência. Já, a cognitivista defende que o aluno construa seu conhecimento e comportamento a partir de conexões com o meio. Nessa abordagem, cabe ao professor criar ambientes e situações propícios para que o educando adquira uma autonomia intelectual. Por fim, a sociocultural, em que se propõe que a aprendizagem deve procurar dar oportunidades aos alunos para agirem criticamente.

João Pedro da Ponte, pesquisador da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, defende um equilíbrio entre métodos tradicionais e métodos modernos, quando diz que "já erramos por tornar o ensino muito formal, mas agora se contextualiza tanto que se perde a perspectiva do que está sendo ensinado" (PONTE apud FERNANDES, 2006).

O programa de aprendizagem procura um equilíbrio entre métodos tradicionais e métodos modernos, pois propõe a estruturação da linguagem e dos conceitos de forma procedimental, utilizando a instrução programada, e, depois, a contextualização dos conteúdos, estimulando a criatividade, o espírito inventivo e a curiosidade do aluno.

> A Instrução Programada nasceu das pesquisas experimentais no campo da psicologia e realiza uma síntese de princípios de aprendizagem aplicados há muito tempo pela maioria dos educadores. Encontram-se os princípios da Instrução Programada nos métodos de Sócrates, Platão, Quintiliano, Descartes, Rousseau, Stuart Mill, Sidney Pressey (FERREIRA, 1973).

Atualmente, a Instrução Programada, IPI — (*Individually Prescribed Instruction*) — é utilizada pelo Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul no ensino presencial da disciplina FIS01182 - Física Geral - Eletromagnetismo (para maiores detalhes indica-se [27]) e no ensino a distância em Manitoba no Canadá, onde é conhecida como *"Computer-Aided Personalized System of Instruction"* — (CAPSI).

2.1 Princípios da Instrução Programada

Alguns princípios que condicionam a eficácia da aprendizagem por intermédio da Instrução Programada, tendo como referências os trabalhos de Ferreira (1973) e Muraro (1971), são assim definidos:

- **Princípio da participação ativa**

  Deve-se conduzir o aluno para que ele construa sua própria resposta e não para que ele escolha entre várias soluções dadas. O sistema de escolha tem o risco de reforçar respostas incorretas e de dar lugar ao acaso.

- **Princípio das pequenas etapas**

  A dificuldade global deve ser fragmentada em pequenas dificuldades fáceis de resolver. Quanto mais curtas as etapas, mais facilmente o estudante responderá de maneira correta. As sequências do programa devem ser planejadas de tal forma que mesmo os alunos com graves deficiências possam alcançar êxito.

- **Princípio de progressão gradual**

As pequenas etapas devem ser encaixadas de forma lógica para levar o indivíduo a um comportamento gradualmente mais complexo. O aluno deve ir de uma dificuldade a outra até que todos os conceitos a serem ensinados sejam assimilados. Não é suficiente que o programa seja fácil de percorrer; é necessário que ele desenvolva progressivamente a aprendizagem.

- **Princípio da verificação imediata**

  O reforço produzido pelo conhecimento da resposta correta à questão respondida deve ser imediato e sucessivo para ser eficaz.

- **Princípio do ritmo individual**

  O indivíduo não deve estar limitado pelo tempo. Ele deve poder refletir sobre cada etapa o tempo que desejar. O aluno impõe seu próprio ritmo. E essa liberdade permite uma individualização do ensino, uma adaptação aos casos particulares.

- **Princípio das respostas corretas**

  Deve-se procurar fazer com que o aluno tenha uma maioria de respostas corretas, pois o fracasso desencoraja o indivíduo. É necessário conduzir o aluno nesse caminho, orientando suas respostas de forma indireta antes de colocar questões em termos mais difíceis, sem lhe fornecer ajuda.

2.2 Vantagens da Instrução Programada

As vantagens da Instrução Programada podem ser enfocadas segundo os dois agentes principais do processo de aprendizagem: aluno e professor.

1. **Do ponto de vista do sujeito que aprende.**

- O sujeito é ajudado a ficar atento e ativo; o programa lhe ensina a se concentrar.

- A interpretação, fator de fundamental importância para a autonomia do sujeito que aprende, também é parte integrante do método.

- Adapta-se ao ritmo de cada um. O sujeito com grande déficit de conhecimento avança lentamente e aquele com poucas dificuldades evolui rapidamente.

- Os alunos mais tímidos não precisam dar respostas em público e serem eventualmente corrigidos. Assim, o medo de serem ridicularizados, humilhados é substituído gradativamente pela conquista de confiança, já que os conceitos são reforçados constantemente.

- O aluno não está condicionado a começar e a finalizar seus estudos em determinado horário. Caso seja necessário, ele pode interromper e depois continuar o programa de onde parou, sem qualquer prejuízo.

- O professor, pela complexidade dos cursos, nem sempre pode explicar o conteúdo em detalhes. A Instrução Programada permite ao aluno rever pontos que foram mal compreendidos.

- Em locais isolados ou em situações especiais em que não há professores, tais como afastamento médico ou viagens, o programa pode ser uma ajuda preciosa via ensino a distância.

2. Do ponto de vista do professor.

- A Instrução pode substituir trabalhos mecânicos (repetições, correção de exercícios iniciais) e o professor dispõe de mais tempo para interagir com as particularidades de seus alunos e/ou para trabalhar contextualizações e aplicações, em sala de aula.

- O professor pode acompanhar melhor o desenvolvimento dos alunos, observando quem está mais adiantado e quem está com maior dificuldade. Assim, abre-se a possibilidade para acompanhamentos mais individualizados. Os mais adiantados poderão receber atividades extras e os que sentirem maior dificuldade poderão ter atendimento individual.

- O fato de construir um programa constitui um exercício pedagógico útil na medida em que permite abordar o conhecimento de um ponto de vista novo, fracioná-lo e adaptá-lo ao estudante para facilitar sua compreensão.

- O professor pode verificar nos programas as respostas erradas, localizar as deficiências dos alunos e remediá-las, dando explicações particulares ou modificando os quadros do programa que acarreta muitos erros.

2.3 Etapas do processo de elaboração da IPI

2.3.1 Fase inicial

De acordo com Ferreira (1973), a elaboração da Instrução Programada deve seguir alguns passos iniciais: seleção de conteúdos; definição da população alvo; definição dos objetivos.

O professor que está elaborando a IPI, preferencialmente, deve enfatizar pontos em que métodos tradicionais apresentam falhas. Deve elaborar uma lista com os conceitos que serão explorados para o melhor entendimento dos conteúdos selecionados e, depois, procurar organizar esses conceitos em ordem crescente de dificuldade. Por fim, é importante estabelecer as interconexões dos conceitos listados, pois isso facilitará a montagem dos quadros, principalmente no que se diz respeito às revisões, ao nível de complexidade dos exemplos e aos novos conceitos formados a partir de outros já vistos.

No estudo da população alvo, deve-se analisar determinadas características, tais como nível de proficiência, nível de compreensão verbal, contexto cultural e motivações. Com essas informações, o professor terá capacidade de escolher, de forma mais adequada, os exercícios e exemplos que serão utilizados na IPI. Uma Instrução Programada pode mostrar-se bem eficaz para determinada população e não ser tão eficaz a outra, que possui características muito diferentes da primeira.

A intenção é provocar mudanças no nível de compreensão do aluno sobre determinado conteúdo. Os objetivos das atividades propostas devem ser claros e sucintos, sendo recomendável que o aluno tome conhecimento deles no início de seus estudos.

2.3.2 Fase de construção dos quadros

Como segunda etapa, tem-se a construção dos quadros, que podem ser divididos, de acordo com Ferreira (1973), em seis grupos:

1. **Sequência de quadros introdutória**

   Permite ao aluno responder utilizando elementos que lhe foram fornecidos inicialmente ou que constituam pré-requisitos.

2. **Sequência discriminativa**

   A sequência discriminativa é indicada, principalmente, para introduzir novos conceitos. É aconselhável construir esses conceitos do conhecido para o desconhecido, do simples para o complexo, das observações para o raciocínio, do geral para o particular.

3. **Sequência de quadros de revisão**

   São colocados no programa para testar e reforçar os novos conceitos abordados na sequência discriminativa.

4. **Sequência de generalização**

   Permite que o aluno generalize uma resposta para situação similar àquela fornecida anteriormente. Isso ocorre, principalmente, por meio de exemplos que aplicam os conceitos dados.

5. **Sequência em cadeia**

   Tem como principal objetivo finalizar o estudo dos conceitos vistos, fazendo as suas interconexões. Por meio de uma cadeia de respostas previamente aprendidas, cada membro da corrente estabelece o contexto necessário para os elos seguintes da corrente.

6. **Sequências terminais:**

   Essas sequências de quadros dão ao aluno a oportunidade de aplicar os conceitos recém-aprendidos. Desse modo, é dada chance ao educando de corrigir possíveis equívocos que, porventura, ainda perdurem, por meio da ilustração e aplicação dos conceitos.

2.3.3 Fase final

A última etapa no processo de elaboração da Instrução Programada consiste na confecção de duas avaliações, uma para o início do estudo e a outra para o final.

A primeira avaliação, que chamaremos de Avaliação Diagnóstica, tem de ser capaz de dar um *feedback* sobre a proficiência inicial do aluno em determinado conteúdo proposto. De posse dos resultados dessa avaliação, é possível fazer uma triagem dos conceitos que, assim, serão indicados para estudo por intermédio da Instrução Programada.

Luckesi (2006) assim comenta sobre a *avaliação diagnóstica*:

> [...] a avaliação deverá ser assumida como um instrumento de compreensão do estágio de aprendizagem em que se encontra o aluno, tendo em vista tomar decisões suficientes e satisfatórias para que possa avançar no seu processo de aprendizagem. (LUCKESI, 2006, p. 81)

Nesse momento do processo, somente estamos interessados em descobrir o nível de proficiência do aluno para subsidiar a tomada de decisão e redirecionar os próximos passos.

A segunda avaliação tem como principal papel verificar se os objetivos propostos com a sequência de atividades apresentadas ao aluno foram, de fato, atingidos. A ela chamaremos de Avaliação de Conclusão.

As avaliações, além de oferecerem *feedback* ao aluno acerca de seu grau de amadurecimento e desenvolvimento com relação ao conteúdo proposto na Instrução Programada, também podem fornecer parâmetros para que o professor aprimore cada vez mais a sequência de quadros elaborados.

Nesse caso, o processo funciona com um caráter de mediação, pois, de acordo com Hoffmann (2006), a *avaliação mediadora* apresenta princípios essenciais, que incluem:

> O princípio dialógico/interpretativo: avaliar como um processo de enviar e receber mensagens entre educadores e educandos e no qual se abrem espaços de produção de múltiplos sentidos para esses sujeitos. A intenção é a de convergência de significados, de diálogo, de mútua confiança para a construção conjunta de conhecimentos.
> (...)
> O princípio da reflexão-na-ação: avaliar como um processo mediador que se constrói na prática. O professor aprende a aprender sobre os alunos na dinâmica própria da aprendizagem, ajustando constantemente sua intervenção pedagógica a partir do diálogo que trava com eles, com outros professores, consigo próprio, refletindo criticamente sobre o processo em andamento e evoluindo em seu fazer pedagógico (HOFFMANN, 2006, p. 24-25).

Desse modo, o processo é dialógico, permitindo a ambos — docente e discente — repensar as próximas etapas a partir dos resultados, utilizando a avaliação como meio para regular as aprendizagens, sem nenhuma preocupação com classificação, aprovação ou reprovação.

Capítulo 3

O Programa de Aprendizagem

A Internet é um canal que, atualmente, torna-se cada vez mais indispensável no que diz respeito ao acesso à informação e à busca pelo conhecimento. Partindo do fato de que, por meio da rede mundial de computadores, a informação é obtida com enorme facilidade, as atuais gerações têm um grande desafio:

Como transformar a informação em conhecimento?

De acordo com a abordagem cognitivista, o ser humano, a estrutura social e o meio ambiente em que ele está inserido devem ser analisados conjuntamente, gerando comportamentos e conhecimentos. Para começar a responder a pergunta em questão, é importante o aparecimento de fontes confiáveis e de referência que possam auxiliar os internautas na busca por conhecimento.

O programa de aprendizagem propõe um protótipo, em um ambiente virtual, que caminha nessa direção. A modalidade de ensino a distância — EAD — pode ser um grande diferencial para que os objetivos propostos sejam atingidos, pois o público alvo deste Trabalho de Conclusão de Curso é a geração z, que já nasceu com o avanço tecnológico provindo da internet e, portanto, consegue agir/reagir de forma bastante natural a estímulos provocados nesse meio.

De acordo com Neto e Franco (2010), a geração z é composta por indivíduos que nasceram a partir de 1993 e que estão, portanto, na faixa de 0 (zero) a 21 anos. Esses jovens pertencem a uma realidade na qual a internet, os videogames, o download de filmes e músicas, as redes sociais, são partes integrantes de seu cotidiano desde que nasceram. A tendência é que estejam com o fone nos ouvidos a todo instante, ao mesmo tempo em que estão teclando em um celular, realizando outras atividades e assistindo TV. Rápidos e ágeis com os computadores, a geração z tem mostrado dificuldades com as estruturas escolares tradicionais.

Resultados da Pesquisa PapagaioPipa, realizada pela MultiFocus (2013) [9] com 1840 crianças e adolescentes de todas as classes sociais, entre 0 e 17 anos de idade, nas 12 principais capitais brasileiras, trazem, entre outras, uma constatação importante: 71% das crianças brasileiras costumam acessar a internet, seja via computador, celular ou *tablet*, e isso não é privilégio apenas daqueles que dispõem de mais recursos. Os dados comprovam que mesmo entre o público das classes D e E, o contato com a rede faz parte do cotidiano de mais da metade das crianças. Os índices de acesso são de 85% nas classes A e B, 72% na classe C e 52% nas classes D e E.

É esse contexto que justifica a escolha da proposta metodológica aqui apresentada, construída em um ambiente virtual de aprendizagem. O programa proposto encontra-se disponível no seguinte endereço eletrônico:

`http://especificadematematica.com.br/Aula.aspx?a=3`

e a página eletrônica foi programada exclusivamente para que atenda às particularidades do método de aprendizagem sugerido neste Trabalho de Conclusão de Curso.

Por ser um protótipo, decidiu-se desenvolver apenas um tema: frações. A escolha é justificada pela situação dramática descrita por Rabelo (2013), e comentada na introdução deste trabalho, evidenciando que, apesar de ser um tema básico de conhecimentos matemáticos, apenas 12,5% dos alunos brasileiros que concluem o ensino fundamental demonstram tê-lo apreendido. Os conceitos relacionados às frações também estão presentes em vários outros assuntos do ensino médio, como, por exemplo, porcentagem, probabilidade, semelhança, densidade, solubilidade, velocidade.

Com base em princípios da Abordagem Cognitivista, que afirma que toda nova assimilação é feita a partir do que já foi assimilado, gerando um novo patamar de interações, conexões, e assim continuamente, o programa de aprendizagem proposto se inicia com uma Avaliação Diagnóstica. O objetivo desta avaliação é verificar quais conteúdos o aluno domina ou não, dentro do tema escolhido. Após a conclusão da avaliação é gerado um *feedback* que contém as seguintes informações:

- Número de questões acertadas;
- Rendimento percentual obtido;
- Tempo de realização da avaliação;
- Indicações dos Objetos de Estudos que o aluno deverá realizar;
- Gabarito das questões propostas na avaliação;
- Respostas do aluno.

O apêndice A traz as questões propostas da Avaliação Diagnóstica, com seus respectivos gabaritos e um exemplo de *feedback* para o aluno.

Existe a possibilidade de inserir subquestões na Avaliação Diagnóstica, de modo que elas fiquem disponíveis apenas se o aluno errar a questão a que estão vinculadas. O objetivo dessas subquestões é separar em pequenas etapas os vários conceitos que uma mesma questão exige, para que o diagnóstico seja o mais preciso possível.

Como exemplo, tem-se a questão 4 ilustrada no anexo A, que envolve as quatro operações com frações. Caso o aluno responda corretamente, a avaliação é concluída; caso erre, ele é submetido a mais cinco subquestões, que exploram, cada uma, um conceito isoladamente.

De posse das informações do *feedback*, que é enviado para o e-mail cadastrado no início da avaliação, o aluno é orientado sobre quais conteúdos deve estudar. Tais conteúdos são apresentados no endereço eletrônico citado anteriormente na seção Objetos de Estudo.

Os Objetos de Estudo propostos para o tema de frações são:

1. Conceito de Fração;

2. Conceito de Fração - Problematização;
3. Comparação de Frações;
4. Comparação de Frações - Problematização;
5. Soma e Subtração de Frações;
6. Soma e Subtração de Frações - Problematização;
7. Multiplicação de Frações;
8. Multiplicação de Frações - Problematização;
9. Divisão de Frações;
10. Divisão de Frações - Problematização.

O método didático escolhido para o desenvolvimento da parte conceitual de cada conteúdo foi a Instrução Programada.

> Nessa estratégia, põem-se em relevo os objetivos, o ritmo próprio, a atenção e a concentração dos alunos em seus trabalhos, suas respostas e o *feedback* imediato. Com a instrução programada é possível promovermos a intensificação do estudo de partes do conteúdo em que os alunos tenham mostrado maiores dificuldades e a retirada dos aspectos onde demonstraram melhor desempenho. (CINEL, 2006, p. 34)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais — PCN — constituem um referencial de qualidade para a educação no ensino em todo o país. Os PCNs incluem orientações didáticas, que são subsídios à reflexão sobre como ensinar. Deles, destaca-se:

> O conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transferido para se tornar possível de ser ensinado, aprendido; ou seja, a obra e o pensamento do matemático teórico não são passíveis de comunicação direta aos alunos.(...) Esse processo de transformação do saber científico em saber escolar não passa apenas por mudanças de natureza epistemológica, mas é influenciado por condições de ordem social e cultural, que resultam na elaboração de saberes intermediários, como aproximações provisórias, necessárias e intelectualmente formadoras. É o que se pode chamar de contextualização do saber. (PCN apud FERNANDES, 2006)

O programa de aprendizagem propõe, após o estudo da parte teórica, a aplicação dos conceitos estudados por meio de problematizações. Para Fonseca apud Fernandes

(2006), com um ensino contextualizado, o aluno tem mais possibilidades de compreender os motivos pelos quais estuda determinado conteúdo.

Existem várias maneiras de contextualizar. Para Tufano apud Fernandes (2006), “a contextualização é um ato particular. Cada autor, escritor, pesquisador ou professor contextualiza de acordo com suas origens, com suas raízes, com seu modo de ver as coisas com muita prudência”.

Os exercícios contextualizados propostos no programa de aprendizagem estimulam o aluno a pensar, inferir e tomar decisões. A seguir, são apresentados alguns exemplos.

Exemplo 1: Contextualização que contempla problemas sociais

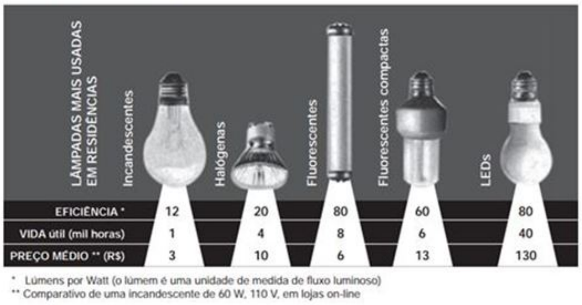
(Enem - Adaptado) O tabagismo (vício do fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que $\frac{9}{10}$ dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e $\frac{4}{5}$ dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1500 são casos diagnosticados de câncer, e 500 são casos diagnosticados de enfisema.

Com base nessas informações, determine o número estimado de fumantes desse grupo de 2000 pessoas.

Resposta: 1750

Exemplo 2: Contextualização que contempla uma tomada de decisão

(ENEM – adaptado) A figura apresenta a eficiência, a vida útil (mil horas) e o preço médio (R$) dos modelos de lâmpadas mais usados em residências.



Superinteressante. São Paulo: Abril, jul. 2011 (adaptado).

Considere que a relação custo/benefício de qualquer uma dessas lâmpadas é dada pela razão entre o preço médio (R$) e a vida útil (mil horas). Dos modelos de lâmpadas apresentados na figura, o que possui a maior relação custo/benefício é

A) LED.
B) halógena.
C) fluorescente.
D) incandescente.
E) fluorescente compacta.

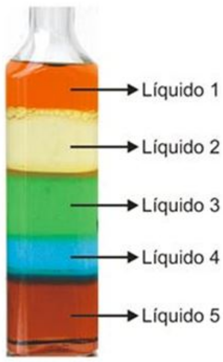
Exemplo 3: Contextualização que contempla a interdisciplinaridade

Torre de Líquidos

O segredo para montar uma torre de líquidos, como foi mostrado no vídeo, é usar líquidos de densidades diferentes, e que não sejam solúveis entre si. A densidade é uma propriedade da matéria que relaciona massa e volume. Em outras palavras, ela define a quantidade de massa de uma substância contida por unidade de volume.

$$\text{Densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}.$$

Se for colocado na torre de líquidos ao lado um pedaço de parafina e sabendo que essa substância tem densidade igual a 0,9 g/cm³, então entre quais líquidos ela irá parar? Justifique sua resposta.



Resposta:

Como já foi visto, as densidades dos líquidos são tais que: $\frac{4}{5} < \frac{41}{50} < \frac{23}{25} < 1 < \frac{13}{10}$.

Escrevendo as frações acima como frações equivalentes de denominadores iguais a 100, tem-se:

$\frac{80}{100} < \frac{82}{100} < \frac{92}{100} < \frac{100}{100} < \frac{130}{100}$

Como a parafina tem densidade igual a $0{,}9 = \frac{90}{100}$, então ela ficará entre os líquidos 2 e 3.

Exemplo 4: Contextualização que contempla uma justificativa

A figura abaixo é adaptada do site da Petrobras, considerando o valor da gasolina de R$ 3,10, praticada em alguns postos do Distrito Federal em abril de 2014.

http://www.petrobras.com.br/pt/produtos-e-servicos/composicao-de-precos/gasolina/
acesso em 11/04/2014

Os donos de postos de combustível justificam que o preço da gasolina do Brasil é muito alto, pois a carga tributária é elevada. De acordo com o gráfico acima, os impostos são os seguintes:

Na esfera Federal: CIDE – Contribuição de Intervenção no Domínio Econômico, PIS/PASEP – Programa de Integração Social e Programa de Formação do Patrimônio do Servidor Público, CONFINS – Contribuição para Financiamento da Seguridade Social. E na esfera Estadual: ICMS – Imposto sobre as Operações sobre a Circulação de Mercadorias e Serviços.

Que porcentagem representa a soma de todos impostos imbutidos no preço da gasolina? Os donos de postos tem razão em sua argumentação?

Resposta: **34% representa a porcentagem de impostos na composição do preço final da gasolina, que justifica sim a alegação dos donos de postos, já que esse valor é bem próximo do que a Petrobras arrecada.**

Exemplo 5: Contextualização que contempla a História da Matemática

Curiosidade Histórica

Desde muito tempo, aproximadamente 3000 a.C. quando foram construídas as pirâmides, os egípcios sabiam contar e medir com precisão e foram adquirindo um considerável conhecimento matemático aplicado ao dia-a-dia. Influenciados a melhor lidarem com as cheias do rio Nilo, começaram cedo a se interessarem por astronomia para melhor compreenderem o ciclo das águas e se prepararem para a convivência com as cheias. Usavam um sistema primitivo de numeração decimal, com símbolos diferentes, e a escrita hieroglífica, que eram escritos considerados sagrados. Apesar da fragilidade dos papiros, papel primitivo feito à base de folhas de uma erva originária das margens do Nilo, muitos resistiram ao tempo até serem encontrados e traduzidos pelas civilizações modernas.

Há aproximadamente 3600 anos, vivia no Egito um escriba chamado Aah – Mesu, cujo nome significa filho da lua, pouco importante na época. Contudo, nos dias atuais, é bem mais famoso que muitos soberanos do Egito. Conhecido nos meios científicos como Ahmes, ele é o autor de uma das mais antigas obras de matemática que se noticia: O papiro de Ahmes, que está guardado no museu Britânico e possui 5,5 metros de comprimento por 32 centímetros de largura e contém um legado de oitenta problemas, todos resolvidos.

No antigo Egito, além dos problemas aritméticos, há outros que não necessariamente se enquadram nesta classe, que serão designados posteriormente de algébricos. "Pedem o que equivale à solução de equações lineares da forma x + ax = b ou x + ax + bx = c, em que a, b, c, são conhecidos e x é desconhecido". (BOYER, 1985, p.11). A maior parte destes problemas refere-se a assuntos do dia-a-dia dos antigos egípcios. Alguns, no entanto, eram do tipo "Determinar um número tal que ...", ou seja, não se referiam a coisas concretas, mas aos próprios números, sendo representados sempre pela palavra montão.

Assim, vislumbrando uma melhor compreensão, destacamos um exemplo desses problemas encontrado em Guelli – "*Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Diga-me qual é a quantidade?*" (2001, p. 8). Hoje podemos traduzir esse problema para a álgebra e resolvê-lo facilmente. Contudo, os egípcios resolviam problemas deste tipo usando uma regra conhecida por "Regra do Falso". Para facilitar a compreensão do leitor desta regra, iremos resolver o exemplo citado acima.

Inicialmente, atribuiremos a montão um valor falso, esse valor não tem um pré-requisito, assim quem está resolvendo o problema é quem determina o valor. Nessa situação escolheremos, por exemplo, o valor falso 6. Daí, temos:

$$6+\frac{1}{2}\cdot 6+\frac{2}{3}\cdot 6 = 6+3+4 = 13.$$

Assim, os valores falsos (6 e 13) eram, então, usados para montar uma regra de três simples com os elementos do problema.

$$\begin{array}{ccc} \text{Valor Falso} & & \text{Valor Verdadeiro} \\ \dfrac{6}{13} & = & \dfrac{\text{Montão}}{26} \end{array} \quad \Rightarrow \text{Montão} = 12$$

Os matemáticos de várias partes do mundo adotaram a regra do falso dos egípcios.

fontes: http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/72_1716_ID.pdf
e http://pt.scribd.com/doc/102151201/2/INTRODUCAO
acesso em 19/04/2014

Regra do Falso

Considere o problema: "A metade de um montão, seus dois terços, seus três quartos, todos juntos, são 69. Diga, qual é a quantidade?".

Utilizando a Regra do Falso, e considerando montão igual a 1, determine o valor verdadeiro de montão.

Resposta: **36**

Fossa apud Fernandes (2006) relata que a história da Matemática é uma das formas de se contextualizar o ensino desta como possibilidades de situar o conhecimento no tempo e no espaço, assim como motivar os alunos para um despertar para a aprendizagem dessa área.

Ao fim de cada Objeto de Estudo que trabalha a problematização, apresenta-se um texto constando uma curiosidade histórica. Sempre em concordância com o que está sendo estudado, o texto procura mostrar a origem dos conceitos aprendidos ao longo da história da Matemática.

O apêndice B traz parte dos Objetos de Estudo propostos no programa de aprendizagem. Suprimiu-se do apêndice apenas os quadros que possuem perguntas aos alunos e respectivos espaços em branco para as resposta. A página eletrônica foi programada para, após o aluno responder o que lhe foi perguntado, substituir o quadro que possui a lacuna por outro que possui o mesmo conteúdo, porém respondido. Houve a preocupação em mostrar no apêndice apenas os quadros já respondidos.

A ferramenta apresentada possui uma característica peculiar: o aluno informa, após cada resposta fornecida, se acertou ou errou o que lhe foi perguntado. Também, ao final de seu estudo, é sugerido um questionário no qual ele avalia a aula, expõe sua opinião e propõe mudanças.

Existe, portanto, uma coparticipação do estudante na melhoria da exposição, da sequência e da aplicação dos conteúdos, propondo mudanças em quadros ou nos exemplos contextualizados escolhidos. Assim, o programa oferece uma oportunidade para que o aluno tome uma posição ativa no seu processo de aprendizagem, pois, ao sugerir mudanças, ele é instigado a fazer uma autoavaliação do que realmente foi aprendido.

Após a realização de todas as atividades propostas nos Objetos de Estudo indicados no e-mail pela Avaliação Diagnóstica, o aluno deve concluir o tema com uma Avaliação de Conclusão. O seu resultado também é enviado por e-mail e possui as seguintes informações:

- Número de questões acertadas;
- Rendimento percentual obtido;
- Tempo de realização da avaliação;

- Classificação do aluno, tendo como base para o ranqueamento um banco de dados contendo todos que realizaram a avaliação. Em caso de empate, o mais bem colocado é quem realizou o teste por último;
- Gabarito das questões propostas na avaliação;
- Respostas do aluno.

O apêndice C traz as questões propostas na Avaliação de Conclusão com seus respectivos gabaritos e um exemplo de *feedback*.

A eficácia do programa de aprendizagem pode ser mensurada por alguns parâmetros:

- a porcentagem de acertos de cada pergunta feita ao longo da instrução programada, já que o aluno informa ao sistema se acertou ou não a resposta;
- as opiniões e críticas sugeridas pelos alunos ao final de cada objeto de estudo, através de um questionário;
- e o resultado da Avaliação de Conclusão.

O resultado da Avaliação de Conclusão, quando comparado com o da Avaliação Diagnóstica, pode dar uma ideia da evolução do aluno nos temas propostos.

Capítulo 4

A Pesquisa e a Análise de Conteúdos

4.1 Considerações iniciais

Como última parte deste trabalho, objetiva-se uma pesquisa de campo que seja capaz de avaliar a eficácia do programa de aprendizagem, por meio de metodologias de análises qualitativas e quantitativas.

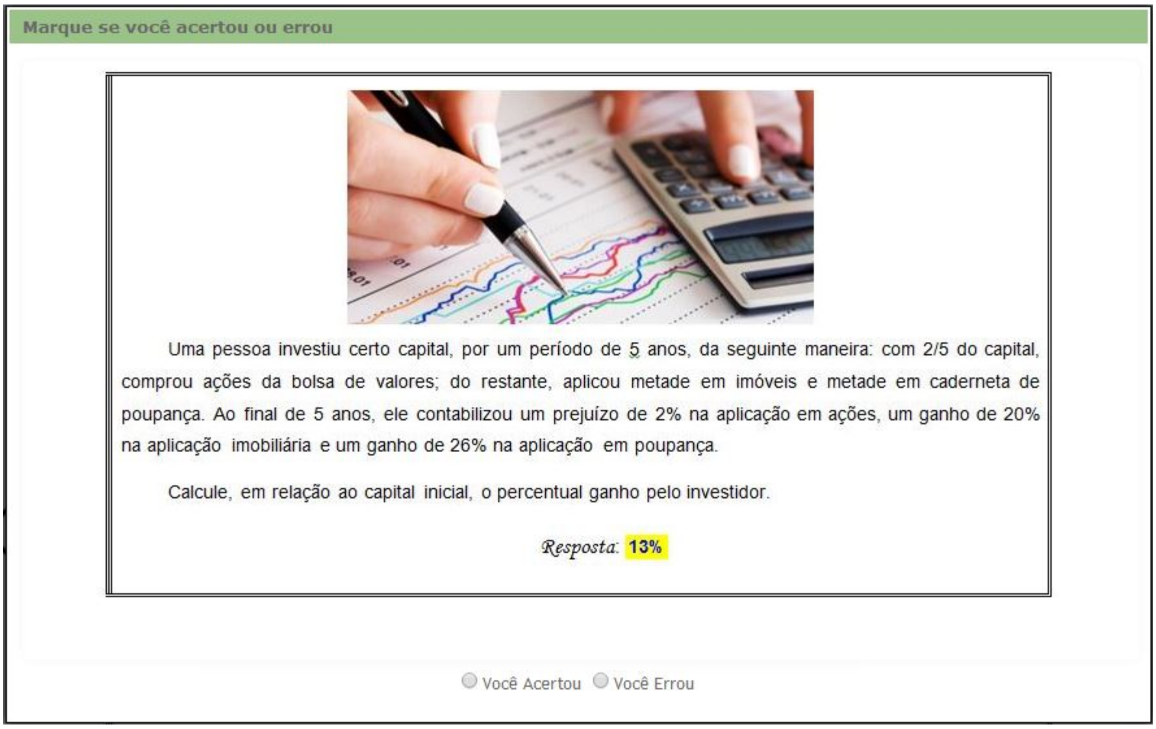
A população convidada para a realização da pesquisa de campo foi de alunos do último ano do ensino médio da escola particular de Brasília onde leciono. A amostra estudada é composta pelos alunos que realizaram a Avaliação Diagnóstica, a partir do dia primeiro de maio de 2014, e que concluíram os Objetos de Estudo indicados por e-mail, até o dia 31 de maio de 2014. Ao todo, foram contabilizadas mais de 120 pessoas que fizeram a Avaliação Diagnóstica, porém até o dia 31 de maio, somente 11 haviam realizado a Avaliação de Conclusão.

Os dados para as análises foram coletados, pela página eletrônica, em quatro situações distintas: na Avaliação Diagnóstica; após as respostas dadas nos Objetos de Estudo; ao concluir cada Objeto de Estudo; e na Avaliação de Conclusão.

Os rendimentos dos alunos na Avaliação Diagnóstica e na Avaliação de Conclusão foram coletados no início e no final do programa de aprendizagem, respectivamente. Para a análise quantitativa desses dados, contou-se com os resultados de onze alunos que concluíram as duas avaliações. Importante ressaltar que a Avaliação de Conclusão não é obrigatória. Fez-se uma comparação dos rendimentos percentuais das duas avaliações, com o objetivo de se obter informações a respeito da evolução do discente após seus estudos por meio do programa.

A página eletrônica também foi programada para que, após as respostas dadas aos quadros presentes nos Objetos de Estudo, o estudante informe ao sistema se acertou ou não o que lhe foi perguntado. Assim, com esses dados, é possível fazer uma análise quantitativa a respeito do percentual de acertos e erros de cada quadro proposto. Importante ressaltar que o aluno é o responsável por essas informações. A figura 4.1 ilustra um exemplo da página na qual esses dados são coletados.

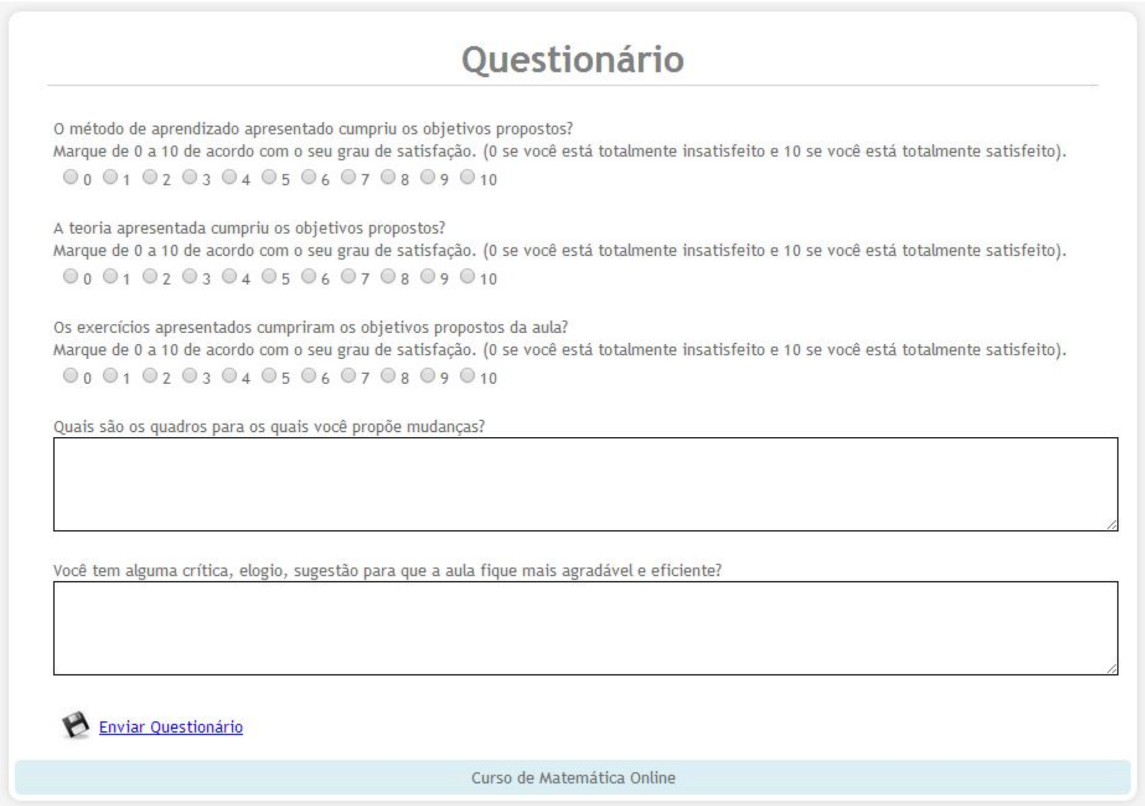
Figura 4.1: Exemplo de coleta de dados após as respostas dadas aos Objetos de Estudo



Após a conclusão de cada Objeto de Estudo, é sugerido aos estudantes um questionário com três perguntas de múltipla escolha e duas perguntas abertas. Aqui, as repostas também são facultativas. A figura 4.2 ilustra a sequência de perguntas.

Para as três primeiras perguntas, utilizou-se, na a análise dos dados, a abordagem quantitativa, levando em consideração o grau de satisfação do aluno quanto ao método

Figura 4.2: Questionário



de aprendizagem, à teoria apresentada e aos exercícios propostos. A escala varia de zero a dez, em que o valor zero corresponde a totalmente insatisfeito e o valor dez, totalmente satisfeito.

Por fim, para as duas últimas perguntas dos questionários aplicados, utiliza-se a abordagem qualitativa e a técnica da Análise de Conteúdo (BARDIN, 1977), a fim de descrever e interpretar o conteúdo das respostas, pois esta se apresenta como uma metodologia sistemática para alcançar o objetivo de avaliar a eficácia do programa de aprendizagem.

A análise de conteúdo, segundo Moraes (1999), tem sua origem no final do século passado. Suas características e diferentes abordagens, entretanto, foram desenvolvidas, especialmente, ao longo dos últimos cinquenta anos. Na sua evolução, a análise de conteúdo tem oscilado entre o rigor da suposta objetividade dos números e a fecundidade sempre questionada da subjetividade. Entretanto, ao longo do tempo, têm sido cada vez mais valorizadas as abordagens qualitativas, utilizando, especialmente, a indução e a intuição como estratégias para atingir níveis de compreensão mais aprofundados dos fenômenos que se propõe a investigar.

> A análise de Conteúdo se apresenta como um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 1977, p. 16).

Bardin (1977) também acrescenta que o propósito da análise de conteúdo é "oferecer ao leitor o máximo de informações (aspecto quantitativo) com o máximo de pertinência (aspecto qualitativo)" (p. 45).

4.2 Descrição e interpretação dos dados

4.2.1 Das Avaliações Diagnóstica e de Conclusão

Para a análise comparativa entre os rendimentos da Avaliação Diagnóstica e os da Avaliação de Conclusão, contou-se com 11 alunos, que concluíram as duas avaliações, e serão designados, doravante, de A_i, com $1 \leq i \leq 11$.

Para cada avaliação, determinou-se o rendimento percentual dos alunos, dividindo a quantidade de acertos pelo número total de questões propostas em cada avaliação. A Avaliação Diagnóstica possui quatro exercícios e a Avaliação de Conclusão, cinco. As avaliações se encontram nos apêndices A e C, e os rendimentos dos alunos, em porcentagem, estão mostrados na figura 4.3.

A tabela 4.1 informa a data e o horário de término das avaliações por aluno. O ano de referência é o de 2014.

Pela análise das diferenças entre os horários de término da Avaliação de Conclusão e da Avaliação Diagnóstica, conclui-se que os alunos A_1, A_4, A_6, A_9 e A_{11} não seguiram as orientações presentes no e-mail e, portanto, não realizaram os Objetos de Estudo diagnosticados. Por essa razão, a análise dos dados foi reduzida somente aos alunos A_2, A_3, A_5, A_7, A_8 e A_{10}. Os rendimentos desses alunos, em porcentagem, estão mostrados

Figura 4.3:

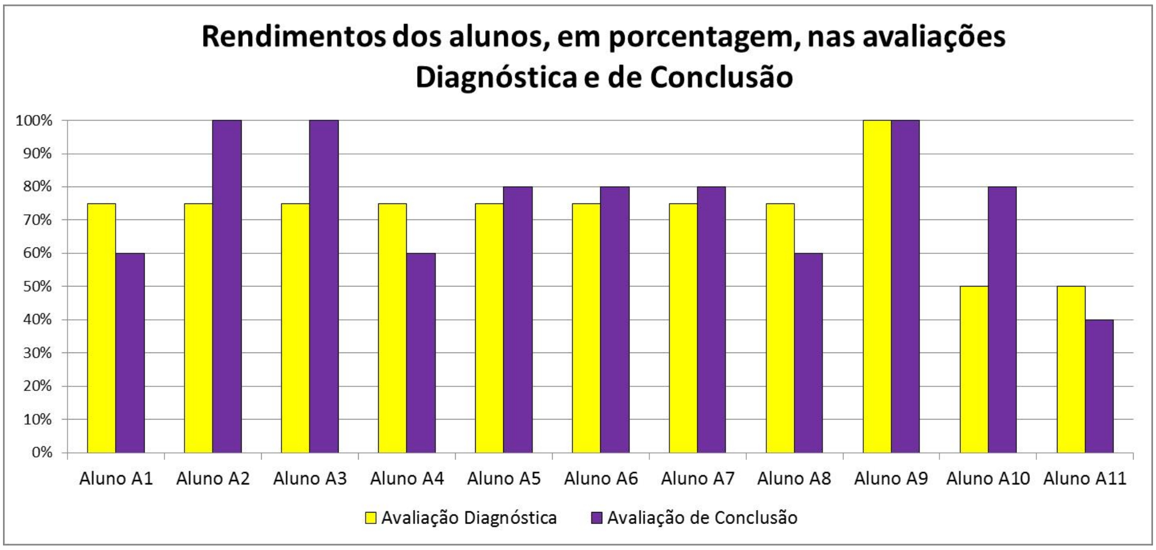


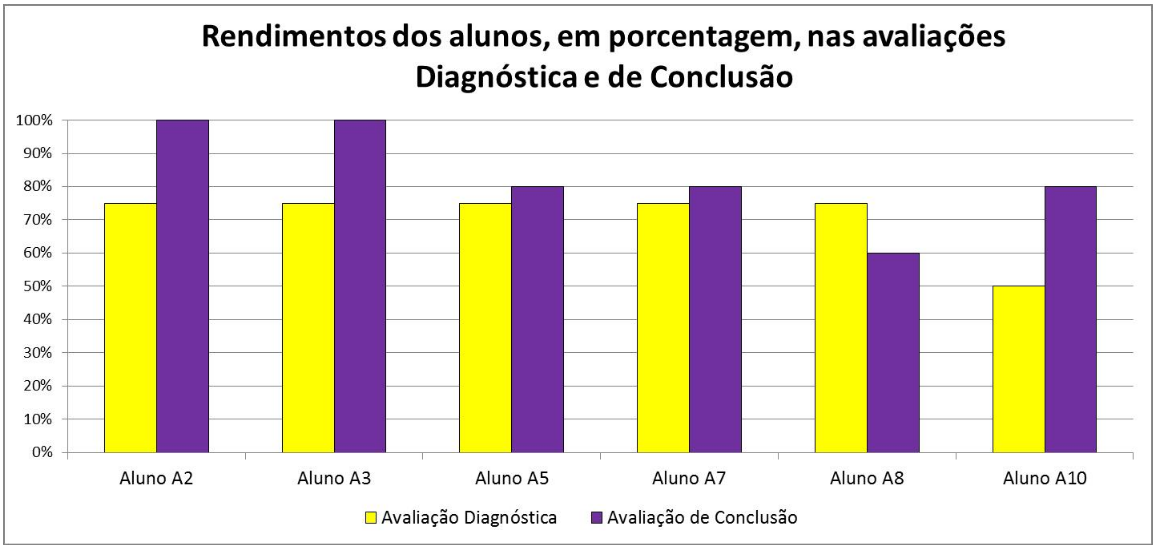
Tabela 4.1: Data e hora do término das avaliações por aluno

Aluno	**Avaliação Diagnóstica**	**Avaliação de Conclusão**
Aluno A_1	12/05 as 16h42	12/05 as 16h56
Aluno A_2	10/05 as 18h58	12/05 as 19h36
Aluno A_3	05/05 as 20h04	09/05 as 13h56
Aluno A_4	08/05 as 18h25	08/05 as 18h58
Aluno A_5	08/05 as 15h07	18/05 as 16h46
Aluno A_6	07/05 as 16h25	07/05 as 16h33
Aluno A_7	06/05 as 19h17	06/05 as 21h02
Aluno A_8	06/05 as 10h37	06/05 as 12h43
Aluno A_9	05/05 as 21h57	05/05 as 22h05
Aluno A_{10}	05/05 as 20h57	06/05 as 20h47
Aluno A_{11}	05/05 as 19h22	05/05 as 19h58

na figura 4.4.

Deve-se, futuramente, automatizar o programa de aprendizagem para que o aluno entre na página eletrônica com um *login* e senha. Assim, o sistema é capaz de reconhecer quais são os Objetos de Estudo recomendados a cada estudante, de acordo com o *feedback* da Avaliação Diagnóstica, e, somente após os estudos sugeridos, a Avaliação de Conclusão torna-se disponível.

Figura 4.4:



À exceção do aluno A_8, todos os demais tiveram seu rendimento aumentado após a realização do programa de aprendizagem. Os alunos A_2 e A_3 obtiveram um rendimento de 100% na Avaliação de Conclusão, e os alunos A_5, A_7 e A_{10} erraram a questão 5, que também foi respondida incorretamente pelo aluno A_8.

O período destinado à pesquisa de campo não favoreceu a coleta dos dados, pois coincidiu com as provas finais do segundo bimestre da escola. Portanto, os alunos com maiores dificuldades estavam concentrando seus esforços para realizarem as últimas provas antes do recesso escolar do primeiro semestre, antecipados por causa da Copa do Mundo de Futebol de 2014. Por isso, percebem-se notas altas da Avaliação Diagnóstica, que, possivelmente, não refletem a realidade da população alvo da pesquisa.

Portanto, as análises quantitativas das repostas aos quadros dos Objetos de Estudo e das duas primeiras perguntas do questionário não serão realizadas. As análises ficaram comprometidas, pois não há quantidade mínima de dados que garanta uma conclusão válida.

4.2.2 Das respostas ao questionário

O método de análise de conteúdos, segundo Bardin (1977), tem como uma de suas primeiras etapas definir as unidades de registro. Também denominada "unidade de análise" ou "unidade de significado", a unidade de registro é o elemento unitário de conteúdo a ser submetido posteriormente à classificação. É importante salientar que neste processo de fragmentação de um texto se perde, necessariamente, parte da informação do material analisado. Assim, deve-se também definir as unidades de contexto.

De modo geral, a unidade de contexto é mais ampla do que a de análise, e serve de referência a esta, fixando limites contextuais para interpretá-la. Cada unidade de contexto, geralmente, contém diversas unidades de registro.

As tabelas 4.2 e 4.3 mostram as unidades de contexto e de registro extraídas das respostas dos alunos à segunda pergunta aberta do questionário: "Você tem alguma crítica, elogio, sugestão para que a aula fique mais agradável e eficiente?".

As unidades de contexto estão representadas pelo texto original dos alunos A_2, A_6,

Tabela 4.2: **Unidades de Contexto**

Codificação	**Unidades de Contexto**
UC_2	Luiz, adorei o site e conclui que realmente ele é eficiente, seria de muita ajuda para os alunos se esse projeto se concretizasse. Um abraço, espero ter ajudado :)
UC_6	Achei a aula muito boa, o método muito bom de entender!!!
UC_8	Fiz o estudo e foi bastante útil. Me fez perceber os erros e relembrar a matéria.
UC_{10}	Gostei muito das aulas! Me ajudaram bastante! Eu tentei achar algo lá para eu avaliar, mas não achei. A única observação que tenho a fazer, é que tem uma questão que está com a resposta errada. Até mesmo da sua resolução em vídeo. Acho que na aula 5 ou 6. Mas fora isso, continue com seu projeto que irá ajudar muitos de nós, estudantes. Desde já, obrigada.

A_8 e A_{10}. Elas foram codificadas por UC_i, em que UC_i indica a unidade de contexto escrita pelo aluno A_i.

O processo de isolar as unidades de registro exige que estas sejam reescritas ou reelaboradas, de modo que possam ser compreendidas fora do contexto original em que se encontravam. As unidades de registro foram codificadas por $UR_{i.j}$, que representa a j-ésima unidade de registro da unidade de contexto UC_i.

Uma vez identificadas e codificadas todas as unidades de análise, deve-se definir a categorização. A categorização é um procedimento de agrupar dados considerando a parte comum existente entre eles. De acordo com Bardin (1977), as categorias devem ser válidas, exaustivas e homogêneas. A classificação de qualquer elemento do conteúdo deve ser mutuamente exclusiva. Finalmente, uma classificação deve ser consistente.

Tabela 4.3: **Unidades de Registro**

Codificação	**Unidades de Registro**	
UC_1	$UR_{2.1}$	O site foi adorado.
	$UR_{2.2}$	O site é realmente eficiente.
	$UR_{2.3}$	O projeto deve ser concretizado.
UC_6	$UR_{6.1}$	A aula, achei muito boa.
	$UR_{6.2}$	O método é muito bom de entender.
UC_8	$UR_{8.1}$	O estudo foi bastante útil.
	$UR_{8.2}$	O estudo me fez perceber erros.
	$UR_{8.3}$	O estudo me fez relembrar a matéria.
UC_{10}	$UR_{10.1}$	Das aulas, gostei muito!
	$UR_{10.2}$	As aulas me ajudaram bastante!
	$UR_{10.3}$	O projeto irá ajudar muitos de nós, estudantes.
	$UR_{10.4}$	Uma questão está com a resposta errada.

Inicialmente, pensou-se em três categorias: crítica ao programa de aprendizagem, elogio ao programa de aprendizagem e sugestão ao programa de aprendizagem. Entretanto, após a leitura flutuante dos textos, e influenciado pela pequena quantidade de unidades de registro, optei por determinar apenas uma categorização: grau de satisfação a respeito do programa de aprendizagem.

Foi escolhida, para a análise às respostas do questionário, a técnica da análise de asserção avaliativa, elaborada por Osgood.

> A análise de asserção avaliativa [...] tem por finalidade medir as *atitudes* do locutor quanto aos objetos de que ele fala. A concepção da linguagem em que esta análise se fundamenta é chamada representacional, isto é, considera-se que a linguagem representa e reflete diretamente aquele que a utiliza.
> [...]
> Uma *atitude* é uma pré-disposição, relativamente estável e organizada, para reagir sob forma de opiniões (nível verbal), ou de atos (nível comportamental), em presença de objetos (pessoas, ideias, acontecimentos, coisas, etc.) de maneira determinada. Correntemente falando, nós temos opiniões sobre as coisas, os seres, os fenômenos, e manifestamo-las por juízo de valor (BARDIN, 1977, p. 155-156).

As atitudes são caracterizadas pela sua intensidade e direção.

> A direção é o sentido da opinião segundo um par bipolar. Pode-se ser a favor ou contra, favorável ou desfavorável. A opinião pode ser positiva ou negativa, amigável ou hostil, aprovadora ou desaprovadora, optimista ou pessimista, pode-se julgar uma coisa como boa ou má, etc. Entre os dois pólos nitidamente orientados, existe eventualmente um estado intermediário: a neutralidade, (de quando esta está difusa), a ambivalência.
> A intensidade demarca a força ou o grau de convicção expressa: uma adesão pode ser fria ou apaixonada, uma oposição pode ser ligeira ou veemente (BARDIN, 1977, p. 156).

A tabela 4.4 traz a codificação das unidades de registro. "A Codificação consiste em imprimir uma direção (positiva ou negativa) a cada conector verbal (c) e a cada qualificador (cm). Além disso, esta direção é avaliada em intensidade numa escala de sete pontos (-3 a $+3$)" (BARDIN, 1977, p. 159).

Tabela 4.4: **Codificação das unidades de registro**

Unidades de Contexto

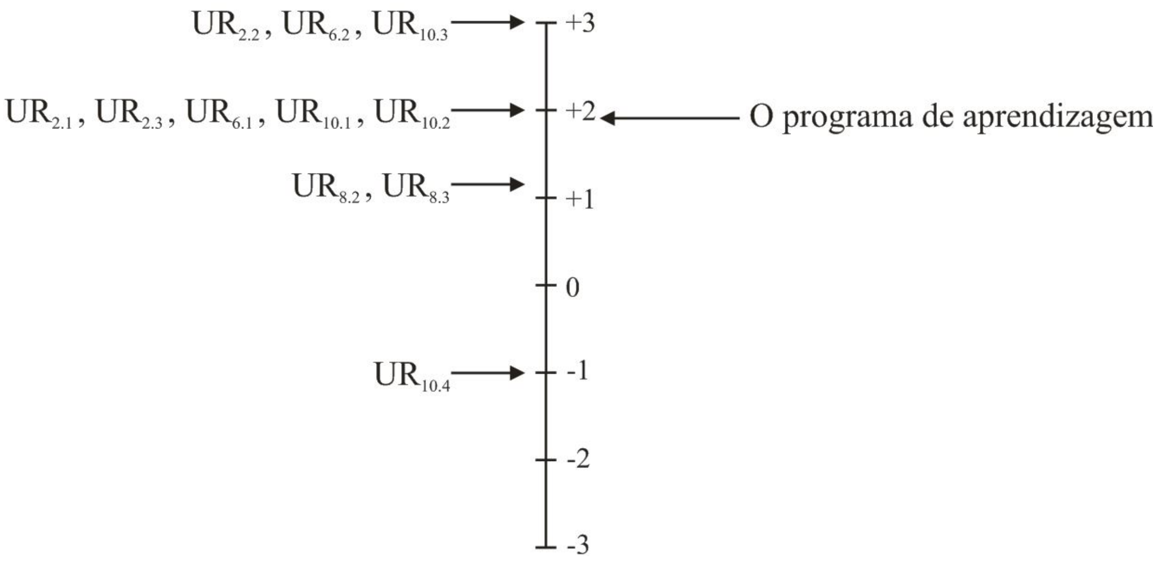
Código	AO	c	valor de c	cm	valor de cm	produto
$UR_{2.1}$	O site	foi	2	adorado.	3	6
$UR_{2.2}$	O site	é	3	realmente eficiente.	3	9
$UR_{2.3}$	O projeto	deve ser	3	concretizado.	2	6
$UR_{6.1}$	A aula,	achei	2	muito boa.	3	6
$UR_{6.2}$	O método	é	3	muito bom de entender.	3	9
$UR_{8.1}$	O estudo	foi	2	bastante útil.	3	6
$UR_{8.2}$	O estudo	me fez	2	perceber erros.	2	4
$UR_{8.3}$	O estudo	me fez	2	relembrar a matéria.	2	4
$UR_{10.1}$	Das aulas,	gostei	2	muito!	3	6
$UR_{10.2}$	As aulas	me ajudaram	2	bastante!	3	6
$UR_{10.3}$	O projeto	irá ajudar	3	muitos de nós, estudantes.	3	9
$UR_{10.4}$	O projeto	irá ajudar	3	muitos de nós, estudantes.	3	9

Para a codificação, normalizam-se os enunciados a fim de se obter formas afirmativas segundo a combinação sintática mais elementar (ator-ação-complemento), ou seja: Objeto de atitude avaliado (AO) / conector verbal (c) / material avaliativo (cm).

A nota dos objetos de atitude mostrados na tabela 4.4 é igual a 71 e o resultado médio é igual a 1,89. Calcula-se a nota dos objetos de atitude pela soma das multiplicações das notas atribuídas aos qualificadores e aos conectores por cada objeto. O resultado médio é obtido dividindo-se a soma pelo número de unidades de registro, que, neste caso foi 11, multiplicado por 3, que é a amplitude da escala.

O nível de favoritismo/desfavoritismo de cada Objeto de Atitude, analisados na tabela 4.4, estão sintetizados na figura 4.5.

Figura 4.5: **Nível de favoritismo/desfavoritismo de cada Objeto de Atitude analisado**



4.3 Considerações Finais

A programação da página eletrônica deve passar por revisões, pois apenas seis dos onze alunos que concluíram as duas avaliações, como se pôde concluir da tabela 4.1, seguiram o programa de aprendizagem da maneira idealizada. As indicações dos Objetos de Estudo por e-mail e as instruções colocadas no início do tema não foram suficientes para elucidar os passos que os alunos deveriam seguir em seus estudos. Para tentar corrigir este problema, sugere-se que as instruções iniciais também possam ser consultadas em vídeo, pois há uma resistência por parte dos internautas à leitura de textos explicativos longos nas páginas *online*, e espera-se uma melhor automatização na sequência de estudo. O aluno inicia o programa de aprendizagem com um *login* e senha. Dessa forma, o sistema será capaz de reconhecer quais são os Objetos de Estudo recomendados a cada estudante, de acordo com o *feedback* da Avaliação Diagnóstica, e, assim, personalizar a sequência dos estudos sugeridos. A Avaliação de Conclusão torna-se disponível somente para quem realizou o programa de aprendizagem.

A coparticipação do aluno na eficácia e melhorias da ferramenta fica evidenciada pelo aluno A_{10}, em seu texto codificado por UC_{10}: "A única observação que tenho a fazer, é que tem uma questão que está com a resposta errada. Até mesmo da sua resolução em vídeo. Acho que na aula 5 ou 6." (ALUNO A_{10}). Ao fazer uma revisão em todos os vídeos e gabaritos das aulas 5 e 6, constatou-se um erro de gabarito, porém a resolução em vídeo está correta. O erro já foi devidamente corrigido.

Constatou-se pequeno número de alunos que concluíram o programa de aprendizagem no prazo determinado para a coleta dos dados da pesquisa. Quem o finalizou, possuía dúvidas pontuais. Confirma-se esta inferência pelo resultado da Avaliação Diagnóstica mostrada na figura 4.4. O menor rendimento alcançado pelos alunos foi de 50%. Aqueles com maiores dificuldades não fizeram o programa de aprendizagem na íntegra e as possíveis razões já foram aqui expostas. Com o objetivo de dar nova oportunidade aos discentes, para que possam revisar os conceito de fração e tirar suas prováveis dúvidas, programou-se para a primeira semana de retorno do recesso escolar a realização da Avaliação Diagnóstica em sala de aula. Os professores de matemática da escola, de posse dos *feedbacks* gerados pelo sistema, irão acompanhar a evolução dos estudos de seus alunos, por meio do programa de aprendizagem desenvolvido. Apenas como incentivo, o rendimento na Avaliação de Conclusão irá compor parte da nota em Matemática do terceiro bimestre.

A exceção do aluno A_8, todos os demais tiveram maior rendimento na Avaliação de Conclusão, que foi realizada após o programa de aprendizagem, do que na Avaliação

Diagnóstica. Possivelmente, o aluno A_8 errou a questão 1 por alguma dúvida de interpretação, e não no conceito matemático, pois este conceito, frações equivalentes, foi também cobrado na questão 2 que ele acertou.

Após uma investigação cuidadosa, constatou-se uma falha na confecção da Avaliação Diagnóstica. A questão 5, que trabalha, entre outros conceitos, a hierarquia entre as operações, foi errada por todos os alunos que não obtiveram rendimento de 100% na Avaliação de Conclusão. O programa de aprendizagem trabalha esse conceito no Objeto de Estudo 07 - Multiplicação de Fração. Porém, nenhum destes alunos estudou esse tópico, pois foi diagnosticado que o conceito de multiplicação de fração não precisava de revisão. Propõem-se mudanças na Avaliação Diagnóstica, com o acréscimo de um exercício que verifique o conceito das hierarquias das operações e correção nas indicações dos Objetos de Estudo.

Mesmo apresentando algumas falhas, pode-se afirmar, com os dados coletados até então, que o programa de aprendizagem desenvolvido é eficaz. Os fatos que corroboram para esta afirmação são: o aumento no rendimento nas avaliações em mais de 80% dos alunos mostrados na figura 4.4 e a nota média de 1,89 para os objetos de atitude, obtida pela metodologia de análise de conteúdos de Bardin (1977). Fica evidente o bom grau de satisfação dos alunos diante do programa de aprendizagem pela figura 4.5.

Por fim, merece um destaque especial o aluno A_{10}. Foi o que apresentou o menor rendimento da Avaliação Diagnóstica, entretanto, foi o que apresentou o maior crescimento percentual após o estudo proposto pelo programa de aprendizagem. Destaca-se de UC_{10}: "... continue com seu projeto que irá ajudar muitos de nós, estudantes. Desde já, obrigada." (ALUNO A_{10}).

Capítulo 5

Considerações Finais

O presente trabalho teve o propósito de desenvolver um programa de aprendizagem, fundamentado em uma mescla de metodologias pedagógicas tradicionais e modernas, que pudesse auxiliar os estudantes do ensino médio, em relação à defasagem de conhecimentos que estes acumulam ao longo da formação.

O programa de aprendizagem propriamente dito está disponível, com livre acesso, no endereço eletrônico <http://especificadematematica.com.br/Aula.aspx?a=3>.

O estudo teórico feito para subsidiar a proposta aqui apresentada mostrou que as práticas educativas vinculam-se a uma pedagogia, ou seja, a uma teoria da educação, que os professores deveriam conhecer para poderem vivenciar as propostas pedagógicas com clareza de propósito. Pude concluir que, apesar de tantos anos de experiência como professor da educação básica, não tinha consciência dos detalhes das concepções teóricas que dão suporte a minha prática, considerando aspectos cognitivos, emocionais, comportamentais, técnicos e socioculturais do contexto escolar em que atuo. Isso me levou a especular que a formação nas licenciaturas em matemática precisa capacitar melhor os futuros professores para que tenham clareza quando precisarem fazer escolhas entre utilizar uma ou outra metodologia de ensino.

O método aqui desenvolvido foi feito com o propósito de favorecer a participação ativa e a aprendizagem gradual, além de permitir que cada aluno evolua no ritmo que melhor lhe convier. A ferramenta foi construída buscando-se um equilíbrio entre as partes teórica e prática do conteúdo, combinando exercícios procedimentais, os quais auxiliam na construção dos conceitos e da linguagem, com questões contextualizadas, que ajudam na fixação do conhecimento e na formação de um cidadão crítico.

É importante ressaltar que o protótipo de programa desenvolvido não objetiva substituir o professor ou os métodos de aprendizagem por uma *máquina de ensinar*. Ao contrário, firmou-se como uma opção didática complementar, no que diz respeito a retomar conhecimentos matemáticos de uma etapa anterior de escolaridade, sem comprometer a dinâmica de desenvolvimento dos conteúdos estabelecida pela coordenação pedagógica da escola e sem sobrecarregar, ainda mais, os compromissos diários dos docentes.

Apesar de ter aplicado o programa para poucos estudantes, o resultado do desempenho e a opinião deles serviram de base para fazer interpretações e tirar algumas conclusões, quanto à eficácia do programa de aprendizagem desenvolvido. Apesar de ser um protótipo, o qual, certamente, passará por mudanças de *layout* e de estruturas, como a automatização dos passos que cada aluno deve seguir em seus estudos, o trabalho apontou bons resultados, tanto quantitativa quanto qualitativamente. De modo geral, o método agradou a todos os alunos que se manifestaram na pesquisa.

Futuramente, pretende-se desenvolver outros temas relevantes e novas ferramentas, para que a página eletrônica atinja uma excelência no suporte ao estudo da matemática básica. Criada em 2012, com o objetivo inicial de reunir provas de vestibulares e suas resoluções, a página online começa a se manifestar como uma fonte de estudo aos alunos que desejam revisar e aprofundar conhecimentos matemáticos. Um fato que corrobora tal afirmação é que, neste último trimestre, ela contou com cerca de mil acessos mensais.

Enfim, pode-se afirmar que foi cumprido o objetivo principal do trabalho, que consistia em desenvolver, apresentar e avaliar a eficácia do protótipo de um programa de aprendizagem, estruturado em meio virtual, criado para auxiliar os estudantes do ensino médio a superarem dificuldades individuais, no que diz respeito a determinados conhecimentos e habilidades presentes nos Parâmetros Curriculares do Ensino Fundamental, a fim de fortalecer suas bases conceituais para prosseguirem com êxito no estudo de temas da matemática abordados no ensino médio.

Os resultados revelam que vale a pena investir tempo para criar novos módulos para a exploração de outros conteúdos nos quais os estudantes brasileiros demonstram ter dificuldades, conforme revelam as avaliações educacionais em larga escala aplicadas ao longo dos últimos 15 anos, como o SAEB e a Prova Brasil.

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, Wellington Alves, **As equações: do escriba Ahmes a Niels Henrik Abel**. In: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. 20-23 julho. 2013. Curitiba - Paraná.

[2] ARIENTE, Marina et al, **O processo evolutivo entre as gerações X, Y e Baby Boomers**, XIV SemeAD - Seminário em Administração, Limeira outubro 2011.

[3] BARDIN, Laurence, **Análise de Conteúdos**. Edições 70, 1977.

[4] CAMPOS, Claudinei José Gomes, **Método de análise de conteúdo: ferramenta para a análise de dados qualitativos no campo da saúde**, Revista Brasileira de Enfermagem n.57, p. 611-614, Brasília setembro/outubro 2004. Disponível em: <`http://www.scielo.br/pdf/reben/v57n5/a19v57n5.pdf`>. Acesso em: 16 de abril. 2014.

[5] CINEL, Nora Cecília Bocaccio, **A contextualização no ensino de matemática um estudo com alunos e professores do ensino fundamental da rede particular de ensino do Distrito Federal**, Revista do Professor n.22, p.32-36, Porto Alegre outubro/dezembro 2006. Disponível em: <`http://www.educacao.salvador.ba.gov.br/site/documentos/espaco-virtual/espaco-praxis-pedagogicas/BANCO%20DE%20SUGEST%C3%95ES%20DE%20ATIVIDADES/instrucao%20programada.pdf`>. Acesso em: 17 de janeiro. 2014.

[6] FARIA, A.A.; SALVADORI, A., **A educação a distância e seu movimento histórico no Brasil**, Revista das Faculdades Santa Cruz v. 8, n. 1, p. 15-22, Paraná janeiro/junho. 2010.

[7] FERNANDES, Susana da Silva, **Instrução Programada - Estratégia para facilitar a aprendizagem quanto ao uso do dicionário**. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22006/SusanadaSilvaFernandes.pdf>. Acesso em: 29 de abril. 2014.

[8] FERREIRA, M.L.B.M.G, **Comprovação da eficácia da instrução programada no ensino de "medidas de tedência central"em nível superior**. 1973. 223f. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1973.

[9] FÓRUM REVISTA EDUCAÇÃO, **O que pensam e querem as crianças e os adolescentes: contrastes entre desejos e visões de alunos do fundamental 1 e do ensino médio**. Disponível em: <http://www.revistassegmento.com.br/educacao/Apresentacao-Multifocus.pdf>. Acesso em: 20 de dez. 2013.

[10] HOFFMANN, Jussara, Avaliar para promover: as setas do caminho. Porto Alegre, RS: Mediação, 2006.

[11] LIMA, Eduardo Henrique de M., **Tendências pedagógicas**. Disponível em: <http://www.didaticaeducacional.com.br/tendenciapedagogicas.pdf>. Acesso em: 01 de março. 2014.

[12] LUCKESI, C., **Avaliação da aprendizagem escolar**. São Paulo: Cortez, 2006.

[13] MAIO, W.; CHIUMMO, A., **Didática da Matemática**. LTC, 2012.

[14] MALACRIDA, V. A.; BARROS, H. F., **A ação docente no século XXI: novos desafios**. In: Colloquium Humanarum, vol. 8, n. Especial, jul-dez, 2011.

[15] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar (GESTAR II) - Matemática**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13056&Itemid=811. Acesso em 15 nov. 2013.

[16] MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti, **Ensino: As abordagens do processo**. Disponível em: <http://www.aedi.ufpa.br/parfor/letras/images/documentos/ativ1_2014/abaetetuba/tomeacu2011/ensino_as%20abordagens%20do%20processo.pdf>. Acesso em: 01 de março, 2014.

[17] MORAES, Roque, **Análise de conteúdo**, Revista Educação v.22, n.37, p. 7-32, Porto Alegre 1999. Disponível em: <http://cliente.argo.com.br/~mgos/analise_de_conteudo_moraes.html>. Acesso em: 01 de maio. 2014.

[18] MURARO, I.L.T., **Formação Técnica em Instrução Programada**. Rio de Janeiro: Vozes, 1971.

[19] NETO, Elydio dos Santos; FRANCO, Edgar Silveira, **Os professores e os desafios pedagógicos diante das novas gerações: considerações sobre o presente e o futuro**, Revista de Educação do Cogeime Ano 19 n.36 janeiro/junho 2010. Disponível em: <http://www.cogeime.org.br/revista/36Artigo01.pdf>. Acesso em 23 dez. 2013.

[20] NÓVOA, A., **Pedagogia: a terceira margem do rio**. In: Que currículo para o século XXI. Colóquios e Conferências Parlamentares. 7 jun. 2010. Assembleia da República: Portugal.

[21] PARRA, N., **Ensino Individualizado**. São Paulo: Ática, 1978.

[22] RABELO, Mauro Luiz, **Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro**. SBM, 2013.

[23] SANTOS, Maria José Costa dos, **Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas: desafio para a formação inicial**. 134 f. Tese (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, 2007.

[24] SANTOS, Roberto Vatan, **Abordagens do processo de ensino e aprendizagem**. Revista Integração, ano XI, n. 40, jan./fev./mar. 2005. Disponível em:<ftp://www.usjt.br/pub/revint/19_40.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2010.

[25] TAVARES, Rosilene Horta, **Didática geral**. Editora UFMG, 2011.

[26] TEIXEIRA, Carlos Honorato, **Os desafios da educação para as novas gerações: Entendendo a geração y**, Sumaré: Revista de Acadêmica Eletrônica. Disponível em: <http://www.sumare.edu.br/Arquivos/1/raes/05/raesed05_artigo05.pdf>. Acesso em 09 nov. 2013.

[27] UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, **Instituto de Física**. Disponível em: www.if.ufrgs.br/fis/sumulas/keller/kelmain2.htm. Acesso em 15 nov. 2013.

Apêndice A

Avaliação Diagnóstica

A.1 Questões da avaliação diagnóstica

Questão 01

(Prova Brasil) Em qual das figuras abaixo o número de bolinhas pintadas representa $\frac{2}{3}$ do total de bolinhas?

(A) ●●○○○○

(B) ●●●○○○

(C) ●●●●○○

(D) ●●●●●○

Assinale a única alternativa correta.

○ a ○ b ○ c ○ d

Questão 02

Três amigos, Adamastor, Benedito e Ceciliano, realizaram um teste de frações. Verificou-se que Adamastor conseguiu acertar $\frac{3}{8}$ do teste, Benedito acertou $\frac{2}{5}$ e Ceciliano $\frac{3}{10}$. Qual alternativa abaixo indica a classificação dos amigos da maior nota para a menor?

a) Adamastor, Benedito e Ceciliano.
b) Benedito, Adamastor e Ceciliano.
c) Benedito, Ceciliano e Adamastor.
d) Ceciliano, Benedito e Adamastor.
e) Adamastor, Ceciliano e Benedito.

Assinale a única alternativa correta.

○ a ○ b ○ c ○ d ○ e

Questão 03

Pedro gostaria de comprar um videogame e verificou que possuía apenas metade do dinheiro necessário. Conversou com seus pais e sua mãe resolveu contribuir com $\frac{1}{4}$ do dinheiro e seu pai com mais $\frac{1}{5}$. Que parte do dinheiro ainda falta a Pedro para que ele consiga comprar seu videogame?

a) $\frac{1}{20}$

b) $\frac{19}{20}$

c) $\frac{9}{20}$

d) $\frac{11}{20}$

e) $\frac{1}{4}$

Assinale a única alternativa correta.

○ a ○ b ○ c ○ d ○ e

Questão 04

O valor da expressão $\dfrac{\frac{1}{9}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}+\frac{4}{9}}$ é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{3}{2}$

Assinale a única alternativa correta.

○ a ○ b ○ c ○ d ○ e

Questão 4.1

Simplificando a fração $\frac{60}{72}$, encontramos:

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{15}{2}$

c) $\frac{10}{3}$

d) $\frac{5}{6}$

e) 30

Assinale a única alternativa correta.

○ a ○ b ○ c ○ d ○ e

Questão 4.2

Qual é a maior dentre as frações $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{10}$:

a) $\frac{5}{16}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{3}{10}$

Assinale a única alternativa correta.

○ a ○ b ○ c X d ○ e

Questão 4.3

O valor da expressão $\frac{1}{2}-\left[\frac{4}{5}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]$ é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{7}{15}$

e) $\frac{8}{15}$

Assinale a única alternativa correta.

○ a ○ b ○ c ○ d X e

Questão 4.4

O valor da expressão $\left(\frac{-4}{9}\right)\cdot\left(\frac{18}{8}\right)$ é:

a) – 1

b) $-\frac{1}{2}$

c) $-\frac{1}{6}$

d) 1

e) $\frac{1}{6}$

Assinale a única alternativa correta.

X a ○ b ○ c ○ d ○ e

Questão 4.5

A expressão $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{9}}{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}$, é igual a:

a) 1

b) $-\frac{5}{12}$

c) $-\frac{12}{5}$

d) $\frac{12}{13}$

e) $\frac{13}{12}$

Assinale a única alternativa correta.

○ a ○ b X c ○ d ○ e

A.2 Feedback da avaliação diagnóstica

Especifica de Matemática

Boletim de Desempenho da Avaliação Diagnóstica - Fração

Nome do Aluno: Fulano de Tal
Turma: Outra
Email do Aluno: lfc_professor@yahoo.com.br

Pontuação:

Acertou 2 de 4 Questões.
Rendimento: 50,0%

Tempo: 00:11:32

Comentários e Sugestões do Professor:

Questão 3: Para solidificar seus conhecimentos, sugiro que faça as aulas "05. Soma e Subtração de Frações" e "06. Soma e Subtração de Frações - Problematização" que se encontram em "Objetos de Estudo".
Questão 4.2: Para solidificar seus conhecimentos, sugiro que faça as aulas "03. Comparação de Frações" e "04. Comparação de Frações - Problematização" que se encontram em "Objetos de Estudo".
Questão 4.4: Para solidificar seus conhecimentos, sugiro que faça as aulas "07. Multiplicação de Frações" e "08. Multiplicação de Frações - Problematização" que se encontram em "Objetos de Estudo".

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 4.1	Questão 4.2	Questão 4.3	Questão 4.4	Questão 4.5
Gabarito Oficial	c	b	a	a	d	c	e	a	c
Gabarito do Aluno	c	b	b	b	d	b	e	b	c

Figura A.1: Exemplo do boletim de desempenho da Avaliação Diagnóstica

Apêndice B

Objetos de Estudo

B.1 Conceito de Fração

Vídeo 01 - Introdução

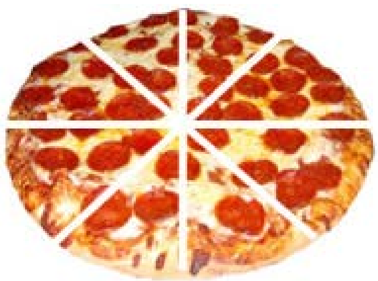
https://www.youtube.com/watch?v=gLNnTdeWHxw&index=2

Definição

Após o vídeo de introdução, em que vimos alguns exemplos contextualizados do uso de fração, podemos passar para a definição formal. Tome nota.

Fração é um **<u>número</u>** escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $\mathbf{b \neq 0}$, que pode representar uma **<u>parte</u>** de inteiros ou uma **<u>razão</u>** entre duas grandezas.

Considere uma pizza grande dividida igualmente como ilustra na figura abaixo:



Em quantos pedaços ela foi <u>fracionada</u>, dividida?

Resposta: **8 pedaços**

Após o garçom servir a primeira rodada, a pizza ficou como ilustra a figura abaixo:

Quantos pedaços foram servidos pelo garçom?

Resposta: **3 pedaços**

Assim a fração $\frac{3}{8}$ representa a **parte** da pizza que foi servida pelo garçom.

Nesse exemplo, a fração $\frac{3}{8}$ representa uma **parte** de um inteiro.

Considere que uma receita de brigadeiro sugira que para cada lata de leite condensado, deva-se adicionar quatro colheres de chocolate em pó.

Assim, a **razão** entre a quantidade de latas de leite condensado e a quantidade de colheres de chocolate em pó, nesta ordem, usadas na receita de brigadeiro, pode ser representada pela fração $\frac{1}{4}$.

Nesse exemplo, a fração $\frac{1}{4}$ representa uma **razão** entre duas grandezas.

Nomenclatura

É importante que se dê nome aos elementos, pois assim fica mais fácil de conversarmos. Tome nota.

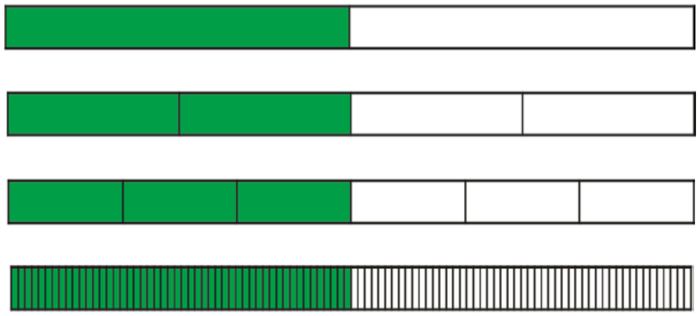
Denominador é o número que fica na parte inferior da fração.

$$\frac{a}{b} \begin{array}{l} \nearrow \text{numerador} \\ \searrow \text{denominador} \end{array}$$

E como condição de existência, o **denominador** “b” sempre é um número diferente de ___________.

E como condição de existência, o **denominador** “b” sempre é um número diferente de **zero**.

Toda fração pode ser reescrita de diversas formas diferentes, sem que seu valor seja alterado. Considere as frações abaixo que representam a metade.



$\frac{1}{2}$

ou ainda $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$

ou ainda $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$

ou ainda $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 50}{2 \times 50} = \frac{50}{100}$

Devemos perceber que parte da barra que está pintada representa o numerador da fração e o denominador é a quantidade de partes que cada barra foi dividida ao todo.

Portanto, se **MULTIPLICARMOS** o numerador e o **denominador** de uma fração pelo mesmo número, a fração não altera seu valor.

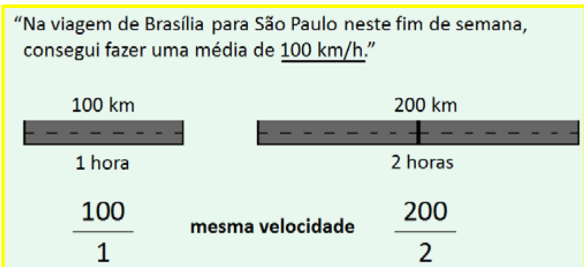
Exemplo:

$$\frac{1}{2} \overset{\times 5}{=} \frac{5}{10}$$

As frações que representam a mesma quantidade são chamadas de frações **EQUIVALENTES**.

Assim, as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{50}{100}$, que representam a metade, são chamadas de frações **equivalentes**.

Voltando a um dos exemplo do vídeo 1.



Neste exemplo, as frações $\frac{100}{1}$ e $\frac{200}{2}$ são frações **equivalentes**, pois representam a mesma velocidade do carro.

De maneira análoga, o conceito vale para a divisão. Se **DIVIDIRMOS** o **numerador** e o denominador de uma fração pelo mesmo número, encontramos uma fração **equivalente**.

Exemplo:

$$\frac{1}{2} \underset{\div 5}{\overset{\div 5}{=}} \frac{5}{10}$$

Exemplo

$$\frac{84}{150} = \frac{84 \div 2}{150 \div 2} = \mathbf{\frac{42}{75}}$$

Porém, ainda pode-se dividir o numerador e o denominador da fração $\frac{42}{75}$ por um mesmo número. Neste caso dizemos que a fração $\frac{42}{75}$ pode ser **SIMPLIFICADA**.

$$\frac{42}{75} = \frac{42 \div 3}{75 \div 3} = \mathbf{\frac{14}{25}}$$

Já a fração $\frac{14}{25}$ não pode mais ser **simplificada**, ou seja, não existe um número que divida o numerador e o denominador ao mesmo tempo. Neste caso dizemos que $\frac{14}{25}$ é uma fração **IRREDUTÍVEL**.

REVISANDO OS CONCEITOS

Fração é um número que pode representar uma **parte** de inteiros ou uma **razão** entre duas grandezas.

Duas frações que representam **a mesma quantidade** são chamadas de frações **equivalentes**.

Podemos encontrar **frações equivalentes** se **multiplicarmos** ou **dividirmos** o numerador e o denominador da fração pelo mesmo número.

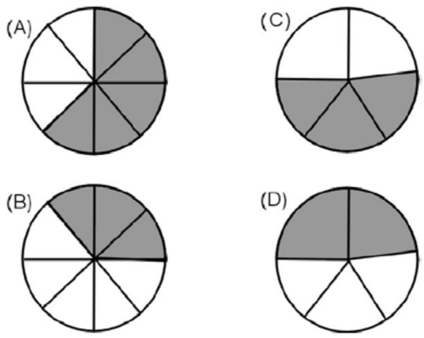
Quando não é possível mais **simplificar** a fração, isto é, dividir o numerador e o denominador pelo mesmo número, então dizemos que a fração é **irredutível**.

Iniciaremos agora os Exercícios Finais de *"Conceito de Fração"*, portanto, antes de prosseguir, estude e **revise** os conceitos vistos até aqui. Caso haja alguma dúvida com os Exercícios Finais a seguir, assista ao seu vídeo de resolução.

Exercícios Finais

(Prova Brasil) Nas figuras abaixo, as áreas escuras são partes tiradas do inteiro.

A parte escura que equivale aos $\frac{3}{5}$ tirados do inteiro é



letra C

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=xLICDNLK2KQ

Escreva as frações a seguir na forma irredutível.

a) $\frac{10}{12} = \mathbf{\frac{5}{6}}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=uFUfGMF5pJk

b) $\frac{12}{18} = \mathbf{\frac{2}{3}}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=eCsjD3XB9CA

c) $\frac{120}{150} = \mathbf{\frac{4}{5}}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=ZFRmF1o9DRQ

d) $\frac{84}{126} = \mathbf{\frac{2}{3}}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=rWhraNBxPx0

(Prova Brasil) Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro $\frac{9}{12}$; Ana, $\frac{3}{8}$ e Maria $\frac{4}{6}$.

Os amigos que se encontram no mesmo ponto do caminho são

(A) João e Pedro.
(B) João e Ana.
(C) Ana e Maria.
(D) Pedro e Ana.

letra A

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=EG7d3VpsQBA

(Prova Brasil) Em qual das figuras abaixo o número de bolinhas pintadas representa $\frac{2}{3}$ do total de bolinhas?

(A) ●●○○○○

(B) ●●●○○○

(C) ●●●●○○

(D) ●●●●●○

letra C

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=wiqNgimDaLI

Agora vamos aprender como podemos escrever a fração $\frac{4}{25}$ numa fração equivalente de denominador igual a 100.

$$\boxed{\frac{4}{25} = \frac{?}{100}}$$

Primeiro faça a operação $100 \div 25 = \mathbf{4}$.

Quatro é o número que devemos multiplicar o numerador e o denominador para que encontremos uma outra fração equivalente a $\frac{4}{25}$ com denominador igual a 100. Assim:

$$\frac{4}{25} = \frac{4 \times 4}{25 \times 4} = \mathbf{\frac{16}{100}}$$

Escreva as frações abaixo em frações equivalentes com denominadores iguais a 100.

a) $\frac{3}{2} = \frac{150}{100}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=HdmsfqIJIak

b) $\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=Uy1wEOk-uO0

c) $\frac{6}{25} = \frac{24}{100}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=k3R8xUv4Bbw

d) $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=endKIA-IZmE

e) $\frac{13}{50} = \frac{26}{100}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=M7xvfw7bQH4

Dica: Neste caso, tente primeiro simplificar a fração.

f) $\frac{24}{75} = \frac{32}{100}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=phHivWeSELo

Vídeo 02 - Conjunto dos Números Racioanais
https://www.youtube.com/watch?v=gU8uxZEm3R0

Parabéns!!! Você acaba de concluir a unidade.

No próximo quadro, segue um resumo da aula *"Conceito de Fração*". Imprima o arquivo e guarde-o para futuras consultas, estudos ou revisões.

Abraços e bons estudos.

Professor Luiz Fernando. 

B.2 Conceito de Fração - Problematização

A empresa Panini lança o álbum de figurinhas da copa. As 32 seleções mundiais com suas 19 figurinhas cada e os parceiros promocionais com suas nove figuras institucionais, além das figurinhas de estádio, mascote, bola oficial da competição e troféu, formam o álbum oficial da Copa do Mundo da Fifa Brasil 2014.

A Panini ressaltou que "o álbum não estará completo sem qualquer uma das 649 figurinhas e isso justifica a inclusão de todas as figurinhas no envelope de forma uniforme". As figurinhas vêm separadas em pacotes que contêm 5 cromos ao custo de R$ 1,00 cada pacote. Para a maioria dos colecionadores, a versão do álbum em capa dura, novidade na edição de 2014, agradou.

Qual fração representa a quantidade de figurinhas referentes às seleções mundiais presentes no álbum?

Resposta: $\mathbf{\frac{608}{619}}$

Vídeo de Resolução

https://www.youtube.com/watch?v=mFUYCZG-aWQ

Atsoc Ziul, que coleciona o álbum desde 1998, está empolgado com mais um para a sua coleção. Ele verificou que, em média, cada pacote possui 2 figurinhas repetidas dentre aquelas que ele já possui. Deste modo, escreva a fração que representa a quantidade de figurinhas não repetidas que Atsoc Ziul comprou.

Resposta: $\mathbf{\frac{3}{5}}$

Vídeo de Resolução

https://www.youtube.com/watch?v=5iw6oK_jLrc

Considere que a média de 2 figurinhas repetidas em cada pacote se mantenha até que Atsoc Ziul complete seu álbum. Se ele já colou 349 figurinhas, então quanto ele ainda vai gastar, em reais, até completar seu álbum?

Resposta: **100 reais.**

DICA? (veja abaixo)

1º passo: Determine a quantidade de figurinhas qua ainda falta para o álbum ficar completo.

2º passo: Como a média de figurinhas repetidas se mantém, devemos então encontrar uma fração equivalente a $\frac{3}{5}$, que representa a razão entre o número de figurinhas não repetidas e o de figurinhas compradas, com numerador igual a quantidade de figurinhas qua ainda falta para o álbum ficar completo.

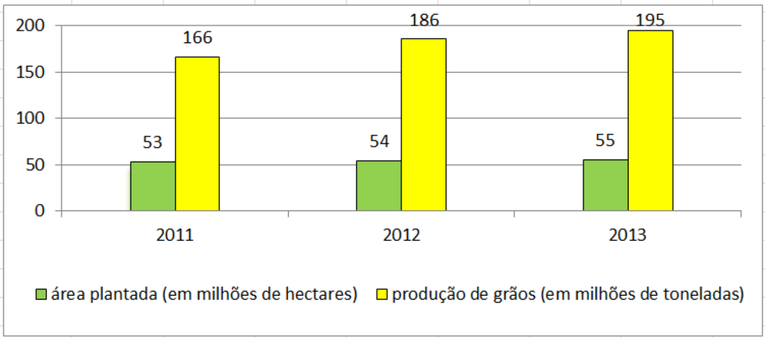
3º passo: Com o passo 2, fica determinado o número de figurinhas que deverão ser compradas. Utilizando o fato de que cada pacote com 5 figurinhas custa 1 real, encontramos a resposta pedida.

Vídeo de Resolução

https://www.youtube.com/watch?v=02uTN8_zbOA

(UnB - adaptada) Estima-se que 1.350 m^2 de terra sejam necessários para fornecer alimento para uma pessoa. Admite-se, também, que há 30 x 1350 bilhões de m^2 de terra arável no mundo e que, portanto, uma população máxima de 30 bilhões de pessoas pode ser sustentada, se não forem exploradas outras fontes de alimento. Porém, avanços tecnológicos, principalmente na engenharia de alimentos e na mecanização da colheita, estão contribuindo para uma maior produtividade e, portanto, para um aumento na população máxima de pessoas que pode ser sustentada.

Produtividade do setor agrícola, em particular da produção de grãos, é indicada pelo rendimento do fator terra. A produtividade pode ser mensurada por uma fração, ou seja, pela razão entre a produção de grãos e a área plantada. O gráfico abaixo ilustra a evolução da produção de grãos e da área plantada no Brasil.



Fonte: http://www.conab.gov.br/
acesso em 11/04/2014

Com base no gráfico, determine a fração irredutível que representa a produtividade, em toneladas por hectare, no ano de 2013.

Resposta: $\mathbf{\dfrac{39}{11}}$

Vídeo de Resolução
https://www.youtube.com/watch?v=5gQhgE1M37g

Com base no gráfico, determine a fração irredutível que representa a produtividade no ano de 2012.

Resposta: $\mathbf{\dfrac{31}{9}}$

Vídeo de Resolução
https://www.youtube.com/watch?v=9c3KSAsv0lo

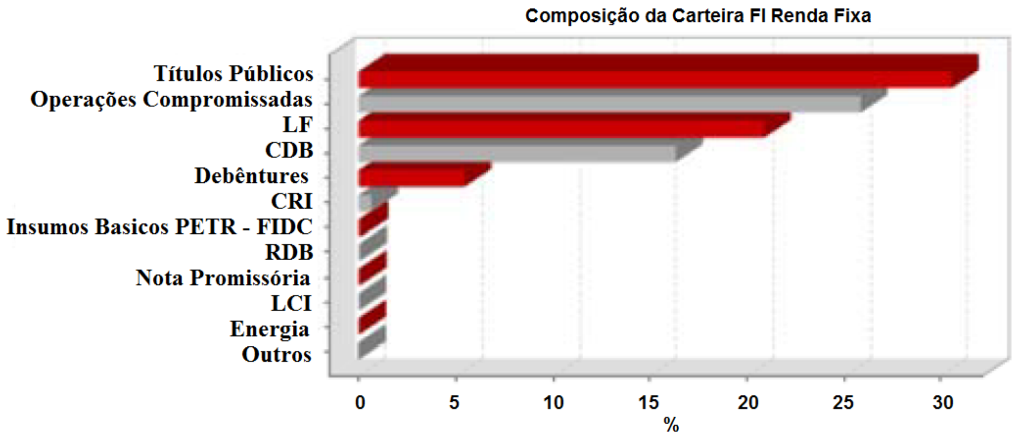
Atentando que uma fração representa uma divisão do numerador pelo denominador, então podemos determinar, em número decimal, a produtividade nos anos de 2013 e 2012. Comparando esses resultados, é possível inferir que o Brasil, durante o biênio 2012/2013, tornou sua produção de grãos mais eficiente? Justifique.

Resposta: **Sim, pois a produtividade de 2013, que é dada por $\dfrac{39}{11} \cong$ 3,5 ton/ha, é maior que a produtividade de 2012, que é dada por $\dfrac{31}{9} \cong$ 3,4 ton/ha.**

Vídeo de Resolução
https://www.youtube.com/watch?v=FF0UPDoB7ow

Na matemática, Física e Química, utilizamos com frequência a escrita de uma fração com denominador igual a 100. Ela indica uma parte de inteiros em **porcentagem**. Então, quando falamos que um piloto de Fórmula 1 acaba de completar 80% de um circuito, indica que o piloto completou, do total da prova, $80\% = \frac{80}{100}$.  Circuito de Interlagos – São Paulo Ao simplificar a fração $\frac{80}{100}$, obtemos qual fração irredutível? Resposta: $\frac{4}{5}$
Vídeo de Resolução https://www.youtube.com/watch?v=HHoCZDrnZOU

Atsoc Ziul está interessado em aplicar uma certa quantia de dinheiro em fundos de investimentos. Fez uma pesquisa em bancos e encontrou um que possuía a composição da carteira como ilustra o gráfico abaixo.



De acordo com os dados do gráfico, responda às perguntas a seguir.

a) Que porcentagem do dinheiro é aplicada em Títulos Públicos, Operações Compromissadas e LF?

Resposta: **75%**

Vídeo de Resolução
https://www.youtube.com/watch?v=sEK7vHxatXM

b) Que fração irredutível representa a parte do dinheiro aplicado em Títulos Públicos, Operações Compromissadas e LF?

Resposta: $\frac{3}{4}$

Vídeo de Resolução
https://www.youtube.com/watch?v=u5E8Xb0WcT4

c) Já que Títulos Públicos, Operações Compromissadas e LF representam 75% do dinheiro na composição da carteira do fundo FI Renda Fixa, então os outros nove itens listados representam que porcentagem do dinheiro investido?

Resposta: **25%**

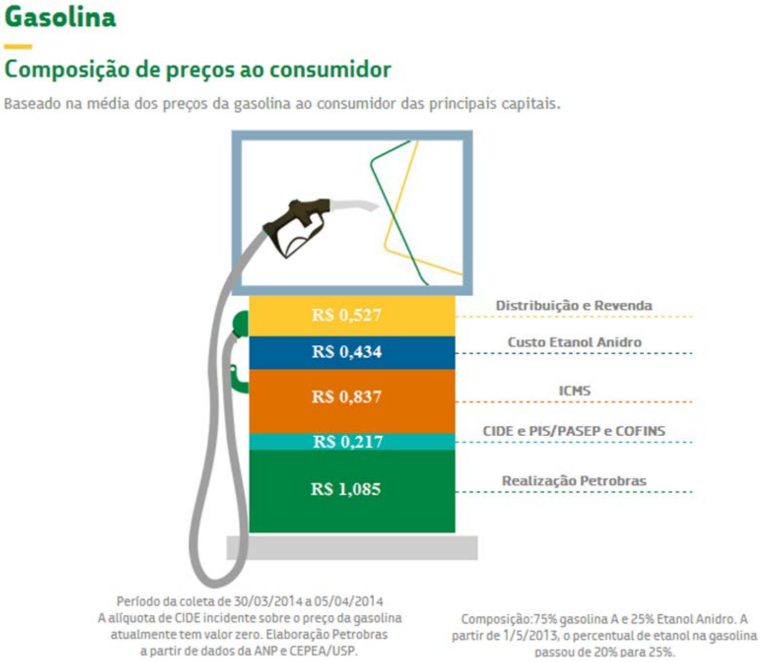
Vídeo de Resolução
https://www.youtube.com/watch?v=2HAN8V21iFg

d) Que fração irredutível representa a parte do dinheiro aplicado aos outros itens excetuando Títulos Públicos, Operações Compromissadas e LF?

Resposta: $\frac{1}{4}$

Vídeo de Resolução
https://www.youtube.com/watch?v=Q6rVIC4PVgA

A figura abaixo é adaptada do site da Petrobras, considerando o valor da gasolina de R$ 3,10, praticada em alguns postos do Distrito Federal em abril de 2014.



http://www.petrobras.com.br/pt/produtos-e-servicos/composicao-de-precos/gasolina/

acesso em 11/04/2014

Percebe-se que o maior valor pago pelo consumidor nas bombas dos postos de combustível é destinado a própria Petrobras, o que é nada mais justo, pois nossa grande empresa estatal prospecta, transporta, pesquisa, refina e distribui todo combustível. Que porcentagem este valor representa?

Resposta: **35%**

Vídeo de Resolução

https://www.youtube.com/watch?v=bsnnAj-IMYQ

Os 35%, referentes a parte da Petrobras, pode ser representado por que fração irredutível?

Resposta: $\frac{7}{20}$

Vídeo de Resolução

https://www.youtube.com/watch?v=_pSVYPL9Xvg

Os donos de postos de combustível justificam que o preço da gasolina do Brasil é muito alto, pois a carga tributária é elevada. De acordo com o gráfico acima, os impostos são os seguintes:

Na esfera Federal: CIDE – Contribuição de Intervenção no Domínio Econômico, PIS/PASEP – Programa de Integração Social e Programa de Formação do Patrimônio do Servidor Público, CONFINS – Contribuição para Financiamento da Seguridade Social. E na esfera Estadual: ICMS – Imposto sobre as Operações sobre a Circulação de Mercadorias e Serviços.

Que porcentagem representa a soma de todos impostos imbutidos no preço da gasolina? Os donos de postos tem razão em sua argumentação?

Resposta: **34% representa a porcentagem de impostos na composição do preço final da gasolina, que justifica sim a alegação dos donos de postos, já que esse valor é bem próximo do que a Petrobras arrecada.**

Vídeo de Resolução

https://www.youtube.com/watch?v=M3E_5ev9x0I

Caso você deseje saber uma pouco mais sobre o porquê do preço da gasolina ser tão cara no Brasil, aconselho que assita ao vídeo que está no seguinte link:

http://moneyou.com.br/sem-mascaras/o-porque-da-gasolina-ser-tao-cara-no-brasil-nao-entendeu.html

Ele é um pouco antigo, assim os preços e as porcentagens estão desatualizadas, mas o que vale são as explicações. Divirta-se!

Curiosidade Histórica

As antigas civilizações necessitavam da expressão numérica de medição, pois as terras que margeavam os rios, relevantes para a sobrevivência daqueles povos, eram propriedades do Estado que, para ajudar as famílias, arrendava áreas e cobrava desta forma impostos proporcionais. Quando os rios enchiam, no entanto, as famílias perdiam parte de suas áreas de terra, e continuavam a pagar pela área inicial. Assim, foi sentida a necessidade de criar uma medida que superasse a impossibilidade de números inteiros e desta maneira o homem cria outro instrumento numérico, institui os números fracionários, e, desta forma, consegue medir uma grandeza tomando a unidade e as frações desta unidade.

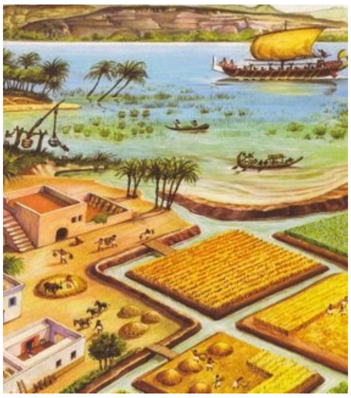


imagem de: http://profludfuzzisocial.blogspot.com.br/2011/01/comunidade-e-sociedade-uma-reflexao.html
acesso em 11/04/14

Historicamente, podemos acentuar que isso ocorreu por volta de 3.000 a.C. com as civilizações Egípcia e Mesopotâmica. Foram essas civilizações que desenvolveram uma notação especial para alguns tipos de frações com a necessidade de se medir grandezas, que eram maiores e menores do que o todo, pois como já expresso, os números inteiros não eram suficientes para responder a pergunta "Quanto mede?".

texto extraído de : http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/6617/1/2007_DIS_MJCSANTOS.pdf.
acesso em 11/04/14

Parabéns!!! Você acaba de concluir a unidade.

A seguir, peço que você responda a um pequeno e rápido questionário sobre a aula *"Conceito de Fração*". Esta é uma oportunidade para que você ajude a tornar esta aula mais produtiva e eficiente. Conto com a sua colaboração.

Abraços e muito obrigado pela sua opnião.

Professor Luiz Fernando. 

B.3 Comparação de Frações

Comparando Frações

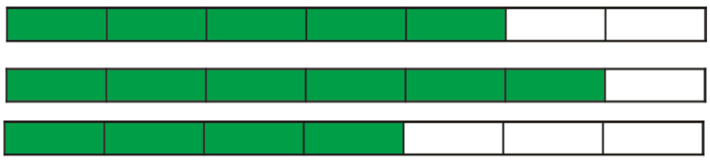
Para compararmos duas ou mais frações, isto é, para definirmos qual fração é maior ou menor, devemos escrevê-las com o mesmo denominador.

Entre $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ e $\frac{4}{7}$, que possuem denominadores iguais, qual é a **maior** fração?

$\frac{5}{7}$

$\frac{6}{7}$

$\frac{4}{7}$



Resposta: $\frac{6}{7}$

Assim, quando as frações possuem denominadores iguais, a **maior** fração é aquela que possui o **maior numerador**.

Portanto, um dos métodos para compararmos frações é, inicialmente, reduzi-las a um **denominador comum**.

Um possível **denominador comum** pode ser encontrado calculando o **MMC** entre os denominadores.

EXERCÍCIO

Calcule o MMC dos números 15 e 50.

MMC (15, 50) = 150

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=fQeXD8pX1Eg

EXERCÍCIO

Calcule o MMC dos números 20, 35 e 60.

MMC (20, 35, 60) = **420**

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=ATWa4ucNPsQ

Entre $\frac{8}{15}$ e $\frac{26}{50}$, qual delas é a maior fração?

Foi calculado, dois quadros atrás, que o **MMC** entre os denominadores 15 e 50 é igual a **150**. Assim, devemos escrever as frações equivalentes a $\frac{8}{15}$ e $\frac{26}{50}$ com denominadores iguais a 150.

$$\boxed{\frac{8}{15} = \frac{?}{150}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{26}{50} = \frac{?}{150}}$$

Considerando a sentença $\boxed{\frac{8}{15} = \frac{?}{150}}$.

Inicialmente, devemos dividir 150 pelo denominador 15.

$$150 \div 15 = \mathbf{10}$$

Depois devemos multiplicar o numerador e o denominador pelo número encontrado.

$$\frac{8 \times 10}{15 \times 10} = \frac{\mathbf{80}}{\mathbf{150}}$$

Considerando agora a outra sentença $\boxed{\frac{26}{50} = \frac{?}{150}}$.

Escreva a fração equivalente a $\frac{26}{50}$ com denominador 150.

$$\frac{26}{50} = \frac{\mathbf{78}}{\mathbf{150}}$$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=-zd6ciaVZlc

Entre $\frac{80}{150}$ e $\frac{78}{150}$, qual é a maior fração?

Resposta: $\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{150}}$

Logo, a maior fração entre $\frac{8}{15}$ e $\frac{26}{50}$ é aquela que é equivalente a $\frac{80}{150}$.

Assim, qual a maior fração entre $\frac{8}{15}$ e $\frac{26}{50}$?

Resposta: $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{15}}$

REVISANDO OS CONCEITOS

Para compararmos duas frações devemos calcular o **MMC** entre os denominadores.

REVISANDO OS CONCEITOS

Com o auxílio do **MMC**, podemos escrever as frações com os mesmos **denominadores**, encontrando frações **equivalentes**.

Exercícios

Usando os sinais de **>** (maior) ou **<** (menor), compare as frações.

a) $\frac{7}{8} > \frac{5}{8}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=TmDAzkxoakk

Exercícios

Usando os sinais de **>** (maior) ou **<** (menor), compare as frações.

b) $\frac{5}{8} < \frac{5}{6}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=_5hT6Wu__QQ

Exercícios

Usando os sinais de **>** (maior) ou **<** (menor), compare as frações.

c) $\frac{7}{12} > \frac{3}{8}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=0FpgW0_3qeg

Exercícios

Usando os sinais de **>** (maior) ou **<** (menor), compare as frações.

d) $\frac{3}{7} < \frac{1}{2}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=eYNX-0RgrJ8

Não se esqueça

Um bom método para julgar qual é a maior ou menor fração é escrevê-las com **denominadores iguais**.

Iniciaremos agora os Exercícios Finais de *"Operações com Fração – Comparação"*, portanto, antes de prosseguir, estude e **revise** os conceitos vistos até aqui. Caso haja alguma dúvida com os Exercícios Finais a seguir, assista ao seu vídeo de resolução.

Exercícios Finais

As frações $\frac{15}{8}$ e $\frac{120}{x}$ são equivalentes. Então o valor de x é igual a

(A) 15
(B) 8
(C) 225
(D) 64
(E) 40

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=qJRBezQumLw

Exercícios Finais

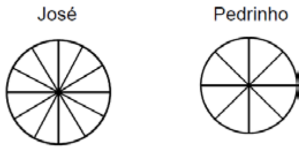
Três amigos, Adamastor, Benedito e Ceciliano, realizaram um teste de frações. Verificou-se que Adamastor conseguiu acertar $\frac{3}{8}$ do teste, Benedito acertou $\frac{2}{5}$ e Ceciliano $\frac{3}{10}$. Qual alternativa abaixo indica a classificação dos amigos da maior nota para a menor?

(A) Adamastor, Benedito e Ceciliano.
(B) Benedito, Adamastor e Ceciliano.
(C) Benedito, Ceciliano e Adamastor.
(D) Ceciliano, Benedito e Adamastor.
(E) Adamastor, Ceciliano e Benedito.

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=6Bjx00mvqJY

Exercícios Finais

(Prova Brasil) Observe as figuras:



Pedrinho e José fizeram uma aposta para ver quem comia mais pedaços de pizza. Pediram duas pizzas de igual tamanho.
Pedrinho dividiu a sua em oito pedaços iguais e comeu seis; José dividiu a sua em doze pedaços iguais e comeu nove. Então,

(A) Pedrinho e José comeram a mesma quantidade de pizza.
(B) José comeu o dobro do que Pedrinho comeu.
(C) Pedrinho comeu o dobro do que José comeu.
(D) José comeu a metade do que Pedrinho comeu.

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=74y1qgaslH4

Parabéns!!! Você acaba de concluir a aula.

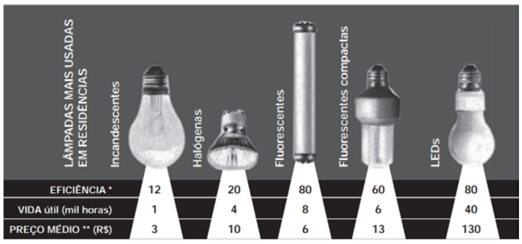
No próximo quadro, segue um resumo da aula *"Operações com Fração – Comparação"*. Imprima o arquivo e guarde-o para futuras consultas, estudos ou revisões.

Abraços e bons estudos.

Professor Luiz Fernando. 

B.4 Comparação de Frações - Problematização

(ENEM – adaptado) A figura apresenta a eficiência, a vida útil (mil horas) e o preço médio (R$) dos modelos de lâmpadas mais usados em residências.



* Lúmens por Watt (o lúmem é uma unidade de medida de fluxo luminoso)
** Comparativo de uma incandescente de 60 W, 110 V, em lojas on-line

Superinteressante. São Paulo: Abril, jul. 2011 (adaptado).

Considere que a relação custo/benefício de qualquer uma dessas lâmpadas é dada pela razão entre o preço médio (R$) e a vida útil (mil horas). Dos modelos de lâmpadas apresentados na figura, o que possui a maior relação custo/benefício é

A) LED.
B) halógena.
C) fluorescente.
D) incandescente.
E) fluorescente compacta.

Vídeo de Resolução
https://www.youtube.com/watch?v=3Euy-uPvFCA

Para que a lâmpada de LEDs tenha a mesma relação custo/benefício que a melhor relação apresentada na figura, o seu preço médio deve baixar para quantos reais?

Resposta: **R$ 30,00.**

Vídeo de Resolução
https://www.youtube.com/watch?v=5mC1L7v36Ms

Cuidado com vazamentos

Devemos nos atentar que a água é um bem natural precioso e seu tratamento é caro e trabalhoso. Se o alto consumo de água potável no planeta continuar nos níveis atuais, considerando seu grande desperdício, futuramente poderemos enfrentar sérios problemas de falta de água. Além de colaborar com o meio ambiente, as práticas de economia resultam em uma excelente redução na conta no final de cada mês.

- Uma torneira gotejando chega a desperdiçar 46 litros de água por dia, o que representa 1.380 litros por mês;
- Um filete de mais ou menos dois milímetros desperdiça 4.140 litros de água por mês;
- Um filete de quatro milímetros, 13.260 litros de água por mês;

fonte: http://www.sabesp.com.br/, acesso em 16/04/2014

Ops! Sua torneira não para de pingar? A solução, na maioria das vezes, não custa mais que R$ 3,00. Basta trocar a carrepata, peça arrendodada responsável pela vedação, como ilustra a figura abaixo. É uma operação simples e rápida, se você tiver disponível um um alicate, uma chave de fenda e uma fita veda rosca.

As carrapetas disponíveis no mercado são vendidas em dois tamanhos, três quartos $\left(\frac{3}{4}\right)$ ou meia $\left(\frac{1}{2}\right)$ polegada. De acordo com a figura abaixo qual é a numeração de cada carrapeta destacada?

Resposta: **A carrapeta 1 é a de medida $\frac{3}{4}$ e carrapeta 2 é a de medida $\frac{1}{2}$.**

Vídeo de Resolução

https://www.youtube.com/watch?v=mQy20Iwg4Ls

Cuidado com vazamentos

• Um furo de dois milímetros no encanamento, para uma pressão de 15 m de coluna de água, desperdiça, aproximadamente, 3.200 litros por dia.

fonte: http://www.sabesp.com.br/, acesso em 16/04/2014

Quando um cano estoura, temos um problemão a resolver. As vezes a parede estufa, como ilustra a figura ao lado, porém, de vez em quando, este tipo de vazamento é silencioso e invisível.

Hoje em dia, existem empresas especializadas no serviços de caça vazamento de água. Utilizando aparelho eletrônico, faz a detecção em canos estourados que estão ocultos e, sem a necessidade de quebra quebra de pisos ou paredes, localizam os vazamentos no ponto exato! Depois disso, basta fazer o reparo. Se for cano de cobre, uma solda resolve, mas se for de PVC, deve-se serrar a parte estourada e, com remendo e cola apropriados, substituir a parte retirada por outro pedaço de cano de PVC de mesma medida.

Os tubos de plastico PVC são encontrados no comércio em varas de 6 metros e 3 metros de comprimento, e de raio, em polegada, com diversas medidas: $1, 2, \frac{5}{8}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$, por exemplo.

Os canos mais finos, de raios menores que ou iguais a 1 polegada, são utilizados para a distribuição da água e os maios grossos, de raios maiores que 1 polegada, para o escoamento do esgoto. Colocando esses valores em ordem crescente, quais deles são usados para a distribuição da água?

Resposta: **Colocando em oredem crescente temos: $\frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4} < 1 < \frac{5}{4} < 2$.**

Assim, os canos usados para a distribuição da água são $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}$ e 1 polegadas.

Vídeo de Resolução

https://www.youtube.com/watch?v=XW_HMQN_weA

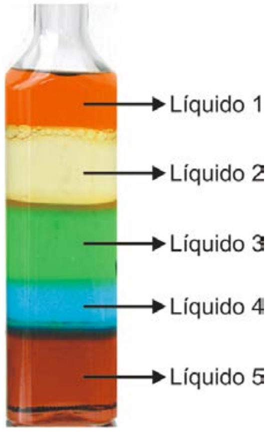
Vídeo 01 – Representação de ordem na areta real.

http://www.youtube.com/watch?v=JRY-_wmMNIY

Vídeo 02 – Conceitos usados na Torre de Líquidos

http://www.youtube.com/watch?v=6JCxDhOVKcM

Torre de Líquidos



O segredo para montar uma torre de líquidos, como foi mostrado no vídeo, é usar líquidos de densidades diferentes, e que não sejam solúveis entre si. A densidade é uma propriedade da matéria que relaciona massa e volume. Em outras palavras, ela define a quantidade de massa de uma substância contida por unidade de volume.

$$\text{Densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}.$$

A figura ao lado representa uma torre com 5 líquídos imiscíveis com densidades iguais a $\frac{13}{10}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{41}{50}$ e 1 g/cm^3. Assim, qual é a densidade de cada um dos líquidos ilustrados?

Resposta: **Colocando as densidades em ordem crescente temos: $\frac{4}{5} < \frac{41}{50} < \frac{23}{25} < 1 < \frac{13}{10}$.**

Assim, as densidades dos líquidos são:

líquido 1: $\frac{4}{5}$ g/cm^3, **líquido 2: $\frac{41}{50}$ g/cm^3,** **líquido 3: $\frac{23}{25}$ g/cm^3,**

líquido 4: 1 g/cm^3, **líquido 5: $\frac{13}{10}$ g/cm^3.**

Vídeo de Resolução

https://www.youtube.com/watch?v=rjtOYYajxMg

Se for colocado na torre de líquidos ao lado um pedaço de parafina e sabendo que essa substância tem densidade igual a 0,9 g/cm^3, então entre quais líquidos ela irá parar? Justifique sua resposta.

Resposta:

Como já foi visto, as densidades dos líquidos são tais que: $\frac{4}{5} < \frac{41}{50} < \frac{23}{25} < 1 < \frac{13}{10}$.

Escrevendo as frações acima como frações equivalentes de denominadores iguais a 100, tem-se:

$$\frac{80}{100} < \frac{82}{100} < \frac{92}{100} < \frac{100}{100} < \frac{130}{100}$$

Como a parafina tem densidade igual a 0,9 = $\frac{90}{100}$, então ela ficará entre os líquidos 2 e 3.

Vídeo de Resolução

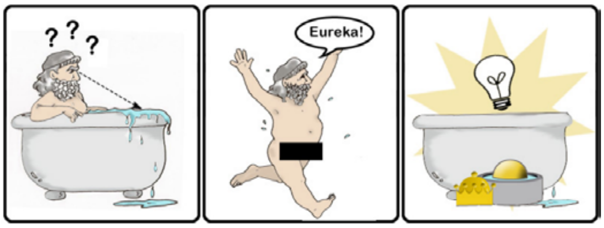
https://www.youtube.com/watch?v=Ok7oKqSp0rI

Curiosidade Histórica

Arquimedes foi talvez o maior matemático da antiguidade, tendo nascido e vivido na cidade de Siracusa por volta dos anos 287 a 212 a.C. Naquela época, o rei da cidade era Heron. Acredita-se que Arquimedes tenha sido seu parente.

Conta-se que o rei Heron mandou fazer uma coroa e, para isso, entregou ao ourives um quilograma de ouro. O ourives fez a coroa, que tinha massa exatamente igual a um quilograma, mas o rei teve motivos para desconfiar que o ouro tivesse sido misturado com algum outro metal, menos nobre. O rei, então, ordenou a Arquimedes que solucionasse o problema, porém não queria que a coroa fosse desmanchada. O prazo dado a Arquimedes estava se esgotando e, segundo a história, ele acabou encontrando a solução deste problema por acaso, durante o banho. Naquela época, não se tinha água encanada em abundância, como atualmente, e os banhos eram mais raros, tomados em banheiras em casas de banho!

Ao entrar na banheira, Arquimedes percebeu que o seu corpo deslocava certo volume de água, fazendo a água transbordar, e deduziu que o volume da água deslocada deveria ser igual ao volume do seu corpo. Assim, ele imaginou que o volume de água deslocado pela coroa, se essa fosse feita de ouro puro, deveria ser diferente do volume deslocado pela mesma coroa feita com uma mistura de ouro e outro metal. Isso pode ser traduzido como: uma determinada massa de ouro terá volume menor do que a mesma massa de outro metal, como a prata. Dizem que Arquimedes ficou tão contente com a descoberta que saiu nu pelas ruas de Siracusa gritando "Eureca, eureca!", que significa "Descobri, descobri!".



A história conta que Arquimedes empregou o conceito de densidade a partir da observação do volume de água que transbordava da banheira quando ele mergulhava. Da mesma maneira, concluiu que poderia usar a relação massa/volume para descobrir se o material da coroa era ouro puro.

Na verdade, Arquimedes descobriu, a partir das densidades da coroa e do ouro, que a coroa não era de ouro puro, mas sim misturada com prata ou outro metal. Arquimedes percebeu que massas iguais de diferentes metais deslocavam diferentes volumes de água. Para tanto, comparou a quantidade de água deslocada pela coroa com a quantidade de água deslocada pela mesma massa de ouro e de prata. A coroa deslocava maior quantidade de água do que a mesma massa em ouro, porém menor do que a mesma massa de prata. Isso mostra que a coroa não era feita somente de ouro. Ela tinha alguma quantidade de prata em sua composição. Essa descoberta confirmou a fraude!

texto extraído de : http://web.ccead.puc-rio.br/condigital/mvsl/Sala%20de%20Leitura/conteudos/SL_densidade.pdf

acesso em 17/04/14

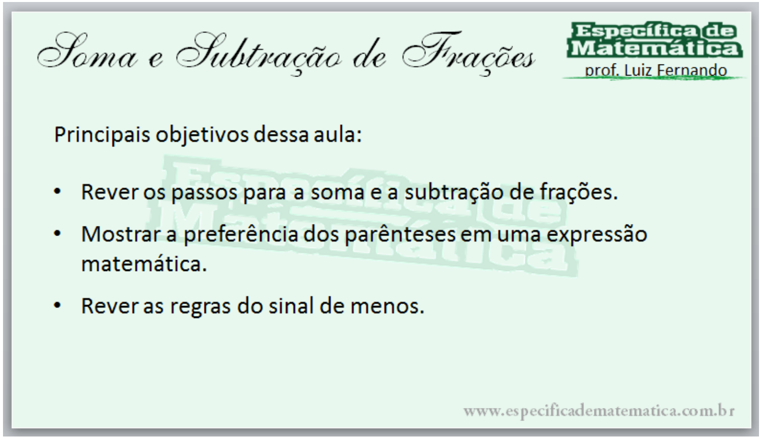
Parabéns!!! Você acaba de concluir a unidade.

A seguir, peço que você responda a um pequeno e rápido questionário sobre a aula *"Comparação de Frações*". Esta é uma oportunidade para que você ajude a tornar esta aula mais produtiva e eficiente. Conto com a sua colaboração.

Abraços e muito obrigado pela sua opnião.

Professor Luiz Fernando. 

B.5 Soma e Subtração de Frações



Vídeo 01

https://www.youtube.com/watch?v=_Ui294tPCb4&index=2

Adição e Subtração de Frações com os Denominadores Iguais

A regra é: **conserva-se** o denominador e some, ou subtraia, os numeradores. Assim:

$$\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{2+4}{9}=\mathbf{\frac{6}{9}}$$

Simplificando: $\mathbf{\frac{6\div 3}{9\div 3}=\frac{2}{3}}$.

Resolva:

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{2}{8}-\frac{7}{8}=\frac{1+3+2-7}{8}=-\mathbf{\frac{1}{8}}$$

Exercícios

a) $\frac{5}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

Exercícios

b) $\frac{4}{12}-\frac{3}{12}+\frac{7}{12}=\mathbf{\frac{2}{3}}$

A importância dos parênteses

Os parênteses, em uma expressão matemática, indicam qual operação deve ser feita **primeira**. Compare a operação feita no quadro anterior com a seguinte:

$$\frac{4}{12}-\left(\frac{3}{12}+\frac{7}{12}\right)$$

Nessa expressão devemos começar pela operação dos parênteses, ou seja, pela operação:

$$\frac{3}{12}+\frac{7}{12}=\mathbf{\frac{10}{12}}$$

É interessante não simplificar a fração, pois isso facilitará a próxima operação.

Então: $\frac{4}{12}-\left(\frac{3}{12}+\frac{7}{12}\right)=\frac{4}{12}-\frac{10}{12}=-\frac{1}{2}$

Tome o cuidado para que a sua resposta final sempre fique simplificada.

Adição e Subtração de Frações com os Denominadores Diferentes

A soma $\frac{7}{60}+\frac{3}{40}$ deve ser feita transformando as frações $\frac{7}{60}$ e $\frac{3}{40}$ em equivalentes e com o mesmo denominador. De preferência, escreva os denominadores iguais ao **MMC**.

Determine o MMC (60, 40).

Resposta: **120**

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=Dk2mDzFVdQM

$$\frac{7}{60}=\frac{?}{120} \quad \text{e} \quad \frac{3}{40}=\frac{?}{120}$$

Divida o MMC encontrado por cada um dos **denominadores**.

$$120 \div 60 = \mathbf{2} \quad \text{e} \quad 120 \div 40 = \mathbf{3}$$

Multiplique o numerador e denominador de cada fração transformando-as em **frações equivalentes** de mesmo denominador. Portanto:

$$\frac{7}{60}+\frac{3}{40}=\frac{7\times 2}{60\times 2}+\frac{3\times 3}{40\times 3}=\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{120}}+\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{120}}=\frac{\mathbf{23}}{\mathbf{120}}$$

Para somarmos, ou subtrairmos, duas frações de denominadores diferentes, devemos inicialmente calcular o **MMC** entre os denominadores.

Depois, temos que transformar as frações dadas em frações **equivalentes** de **denominadores iguais** ao MMC. Assim, devemos **dividir** o MMC pelo denominador de cada fração.

O resultado da divisão do MMC pelo denominador é o número que devemos **multiplicar** o numerador e o denominador, para encontrarmos a fração equivalente.

Vídeo quadro 15

https://www.youtube.com/watch?v=K6qcNEJZsGk

Iniciaremos agora os Exercícios Finais de *"Operações com Fração – Soma e Subtração*", portanto, antes de prosseguir, estude e **revise** os conceitos vistos até aqui. Caso haja alguma dúvida com os Exercícios Finais a seguir, assista ao seu vídeo de resolução.

Exercícios Finais

a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{12}}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=b1kXx7X6WF4

b) $\frac{1}{2}-\frac{5}{4}+\frac{4}{3}=$ $\mathbf{\frac{7}{12}}$
Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=2uMMq-g0YFQ
c) $\frac{1}{2}-\left(\frac{5}{4}+\frac{4}{3}\right)=$ $\mathbf{-\frac{25}{12}}$
Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=DjKAsc3iWZY
Obs: $\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$ ou ainda $\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$. Vale a regra do sinal: na divisão, uma quantidade **ímpar** de sinais negativos resulta em um número **negativo**.
Obs: Já no caso do numerador e denominador negativos: $\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$. Também vale a regra do sinal: na divisão, uma quantidade **par** de sinais negativos resulta em um número **positivo**.
d) $\left(\frac{7}{9}\right)-\left(\frac{-1}{18}\right)=$ $\mathbf{\frac{5}{6}}$
Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=xc96_Rc5i7U
e) $\left(\frac{-7}{16}\right)-\left(\frac{-3}{8}\right)=$ $\mathbf{-\frac{1}{16}}$
Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=YWRVOfwmlmU
f) $\frac{1}{5}-2+\frac{1}{7}=$ $\mathbf{-\frac{58}{35}}$
Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=O_R8chZjmp4
g) $\frac{1}{2}-\left[\frac{4}{5}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]=$ $\mathbf{\frac{8}{15}}$
Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=zUCZ--xwkoE

Pedro gostaria de comprar um videogame e verificou que possuía apenas metade do dinheiro necessário. Conversou com seus pais e sua mãe resolveu contribuir com $\frac{1}{4}$ do dinheiro e seu pai com mais $\frac{1}{5}$. Que parte do dinheiro ainda falta a Pedro para que ele consiga comprar seu videogame?

Resposta: $\frac{1}{20}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=q4Vb3G4Iul8

Vídeo quadro 27 – Por quê reduzir as frações a um mesmo denominador?

https://www.youtube.com/watch?v=PYA5YBogPz8

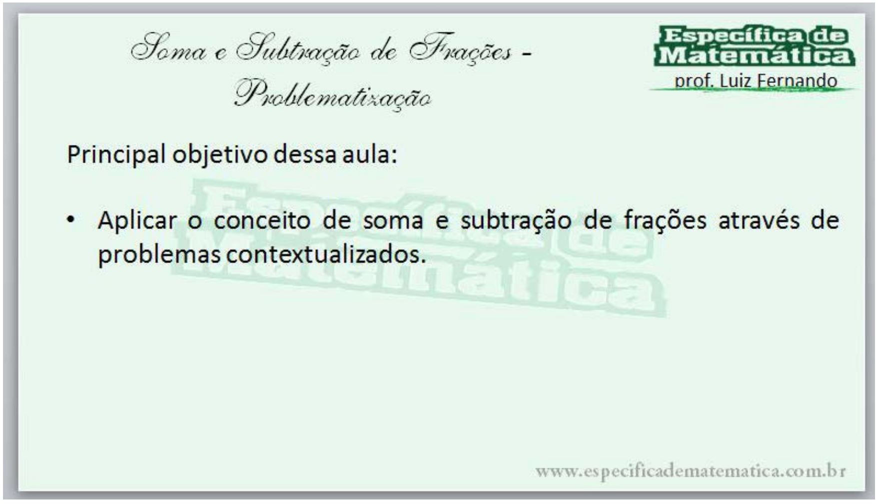
Parabéns!!! Você acaba de concluir a aula.

No próximo quadro, segue um resumo da aula *"Operações com Fração – Soma e Subtração"*. Imprima o arquivo e guarde-o para futuras consultas, estudos ou revisões.

Abraços e bons estudos.

Professor Luiz Fernando. 

B.6 Soma e Subtração de Frações - Problematização



Sete Pães

Três viajantes sentaram-se juntos para comer. Um deles trazia 3 pães e outro, 4. Reunindo os pães, dividiram-nos, igualmente, entre si.

O terceiro viajante, que não trazia alimentos, tinha 7 moedas de bronze, que entregou aos 2 primeiros para que dividissem de modo equivalente entre si.

Que fração corresponde à quantidade de pães que cada viajante recebeu, após a partilha?

Resposta: $\frac{7}{3}$

Que fração de pão cada um dos dois primeiros viajantes deu ao terceiro viajante?

Resposta: **1º viajante deu $\frac{2}{3}$ e o 2º, $\frac{5}{3}$.**

Quantas moedas, de direito, cada viajante deve receber, devido aos pães que doaram ao terceiro?

Resposta: **O 1º viajante deve receber 2 moedas e o 2º, 5.**

Vídeo – Problema dos 35 camelos
https://www.youtube.com/watch?v=M4CvnsO5YD4

Desvendando o problema dos 35 camelos

Retirando apenas a parte matemática da estória vista no vídeo, tem-se:

"E, voltando-se para o mais velho, Beremiz falou: – Deverias receber, meu amigo, metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás metade de 36 e, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro saíste lucrando com essa divisão! E tu, Hamed Namir, deverias receber 1/3 de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber 1/3 de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação. E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber 1/9 de 35, isto é, três e tanto. Vais receber 1/9 de 36, isto é, 4. O seu lucro foi igualmente notável! Ora, como 18 + 12 + 4 = 34, então dos 36 camelos, restam 2. Um, já sabemos que é meu. O outro camelo que resta, por direito também será meu, pois vocês haverão de concordar que eu fiz uma partilha justa!"

Fonte: O Homem que Calculava, Malba Tahan, pág. 22.

Considerando os 35 camelos iniciais, qual a fração que corresponde à quantidade de camelos devida a cada filho, de acordo com a herança?

Resposta: **O filho mais velho deve recebe $\frac{35}{2}$ camelos, Hamed $\frac{35}{3}$ camelos e Harim $\frac{35}{9}$.**

Somando as três partes das heranças devidas aos filhos, $\frac{35}{2}+\frac{35}{3}+\frac{35}{9}$, obtemos que quantidade de camelos?

Resposta: $\frac{595}{18}$

A soma $\frac{595}{18}$ é maior ou menor que os 35 camelos deixados pelo pai na herança?

Resposta: **Menor. Por isso Beremiz também recebeu parte da herança. Agora, por que ele ficou com 1 camelo de lucro?**

Como $\frac{595}{18}$ é menor que os 35 camelos deixados pelo pai na herança, então nem tudo que foi deixado de herança é dividido aos filhos, ou seja, existe uma parte que não foi distribuída. Que parte sobraria da herança se os 35 camelos fossem divididos?

Resposta: $\frac{35}{18}$

Que fração falta ao filho mais velho para que sua parte, que é de $\frac{35}{2}$ camelos, fique igual a 18 camelos? *Resposta:* **$\frac{1}{2}$ camelo**
Que fração falta ao filho Hamed para que sua parte, que é de $\frac{35}{3}$ camelos, fique igual a 12 camelos? E que fração falta ao filho Harim para que sua parte da herança, que é de $\frac{35}{9}$ camelos, fique igual a 4 camelos? *Resposta:* **Hamed $\frac{1}{3}$ camelo e Harim $\frac{1}{9}$.**
Somando as partes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ que faltam a cada filho para que eles recebam a quantia que Beremiz sugeriu, encontramos que quantidade de camelos? *Resposta:* **$\frac{17}{18}$ camelo**
Enfim, o que sobrou para Beremiz foi o resultado da operação $\frac{35}{18}-\frac{17}{18}$, ou seja, a diferença entre a quantidade de camelos que não foi dividida de acordo com o testamento e o que falta para que os filhos recebam quantidades inteiras de camelos. Quantos camelos Beremiz lucrou? *Resposta:* **1 camelo.** **Obs: O próximo vídeo faz uma explicação geral sobre o problema.**

Ideia inicial de probabilidade

A previsão do futuro é algo que muitas pessoas almejam. Prever se vai ou não acontecer um acidente, se é possível ou não ganhar um jogo, se o atleta vai ou não quebrar um recorde, são alguns exemplo dessa intrigante façanha. Infelizmente, a maioria dos eventos ocorre de forma aleatória, ou seja, os resultados são imprevisíveis. O que é possível de se fazer é tentar chegar a uma conclusão sobre as chances de que certos eventos aleatórios possam ou não ocorrer. Para isso, temos a probabilidade.

Quando afirmamos que a probabilidade de sair cara, ao se jogar uma moeda aleatoriamente, é igual a $\frac{1}{2}$, significa dizer que existe uma chance em duas possíveis do resultado do lançamento ser cara. Assim, a probabilidade de ocorrer certo evento aleatório está associada a uma fração, ou melhor, a uma razão definida por:

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Considere que o serviço meteorológico de uma cidade tenha levantado em seus arquivos que nos últimos 50 anos, em quinze deles choveram no dia 30 de dezembro. Baseado apenas nessa informação, qual é a fração irredutível que indica a probabilidade de chover no próximo dia 30 de dezembro?

Resposta: $\frac{3}{10}$

Vídeo – "Ou" não indica soma

O serviço meteorológico informa que, para o final de semana, a probabilidade de chover é de $\frac{3}{5}$, a de fazer frio é de $\frac{7}{10}$ e a de chover e fazer frio é de $\frac{1}{2}$.

a) Calcular a probabilidade de que, no final de semana, chova ou faça frio.

Resposta: $\frac{4}{5}$

b) Calcular, em porcentagem, a probabilidade de que, no final de semana, não chova e não faça frio.

Resposta: **20%**

Curiosidade Histórica

Os seres humanos apostam nos jogos de azar a milênios. A probabilidade, a chance ou a possibilidade de um evento acontecer, entrou para a matemática no século XVII e foi no contexto dos jogos de azar. Embora Gerolamo Cardano tenha escrito sobre jogos de azar em 1520, "*Libar de ludo aleal*", ou seja, "*Livros sobre jogos de azar*", seu trabalho não foi publicado até 1633. Assim, Fermat e Pascal, por correspondência, começaram a discutir sobre a probabilidade, passando a frente de Cardano. Em uma série de cartas, Fermat e Pascal discutiam um problema proposto por um jogador, o Chevalier de Méré:

> *"Dois jogadores estão fazendo um jogo de azar perfeito no qual cada um apostou 32 moedas. O primeiro a vencer três vezes ganha tudo. No entanto, o jogo é interrompido após apenas três jogadas. O jogador A ganhou duas vezes e o jogador B ganhou uma vez. Como eles podem dividir o prêmio de forma justa?"*

Tanto Fermat quanto Pascal chegaram a distribuição do prêmio na razão de 3 para 1 a favor do jogador A, embora eles tenham chegado à solução através de métodos diferentes. Você seria capaz de chegar à mesma conclusão?

Em 1713, o suíço Jakob Bernoulli, publicou um tratado ao qual chamou de "*Golden Theorem*", ou seja, "*Teorema de Ouro*", mas hoje ele é conhecido como a Lei dos Grandes Números. Os cassinos dependem dela; embora um jogador individual possa ter um golpe de grande sorte, com o tempo o cassino pode esperar reter 5,3% de todo o dinheiro que passou pela roleta.

O tratamento matemático dado por Laplace às probabilidades não só deu precisão às conclusões de astronomia, mas encontrou aplicação semelhante em muitos campos. Sua "*Teoria Analítica das Probabilidades"* marcou época do assunto. Diz ele no preâmbulo:

> *"As questões mais importantes da vida giram quase sempre em torno de problemas de probabilidade. A rigor, podemos mesmo dizer que quase toda a nossa ciência é problemática; e entre o pequeno número de coisas que podemos conhecer com certeza, mesmo nas próprias ciências matemáticas, a indução e a analogia, os principais meios de descobrir a verdade, baseiam-se em probabilidades, de modo que todo o sistema dos conhecimentos humanos está relacionado com essa teoria. É notável que uma ciência que começou pela consideração dos jogos de azar, se tenha tornado o mais importante objeto de conhecimento humano. No fundo, a teoria das probabilidades nada mais é do que o senso comum reduzido ao cálculo; ela nos permite avaliar com exatidão aquilo que os espíritos argutos sentem por uma espécie de instinto que eles próprios são amiúde incapazes de explicar."*

Fontes : Rooney, Anne, A História da Matemática, 2012, pág. 172
e http://www.mat.ibilce.unesp.br/personal/hermes/apostila_hist_mat.pdf

Parabéns!!! Você acaba de concluir a unidade.

A seguir, peço que você responda a um pequeno e rápido questionário sobre a aula *"Soma e Subtração de Frações*". Esta é uma oportunidade para que você ajude a tornar esta aula mais produtiva e eficiente. Conto com a sua colaboração.

Abraços e muito obrigado pela sua opinião.

Professor Luiz Fernando. 

B.7 Multiplicação de Frações

Multiplicação de Frações

A multiplicação de frações é feita multiplicando-se numerador com numerador e denominador com denominador. Exemplo:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4\times 2}{5\times 9}=\mathbf{\frac{8}{45}}$$

No caso do exemplo $\left(\frac{-1}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)$, podemos inicialmente pensar no **sinal**. O resultado da multiplicação é **positivo** ou **negativo**?

Resposta: **negativo**

Assim: $\left(\frac{-1}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1\times 3}{5\times 4}=-\mathbf{\frac{3}{20}}$

Exercícios

a) $\left(\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)=-\mathbf{\frac{1}{20}}$

Exercícios

b) $\left(\frac{-4}{5}\right)\cdot\left(\frac{-7}{3}\right)=\mathbf{\frac{28}{15}}$

Exercícios

c) $\left(\frac{-3}{7}\right)\cdot(-2)=\mathbf{\frac{6}{7}}$

Exercícios

d) $\left(\frac{5}{8}\right)\cdot\left(\frac{-4}{3}\right)=-\mathbf{\frac{5}{6}}$

Na multiplicação de frações podemos, antes de multiplicar, **simplificar** algum numerador com algum denominador.

Exemplo

Considere a operação $\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}$. Antes de efetua-la, podemos simplificar as frações dividindo o numerador 4 e o denominador 8 por 4.

$$\frac{{}^{1}\cancel{4}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{8}_{2}}=\frac{1\times 7}{5\times 2}=\boxed{\frac{7}{10}}$$

Em uma expressão numérica, entre as operações de **soma, subtração e multiplicação**, devemos fazer primeiro a **multiplicação**.

No caso da operação $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}$, devemos começar pela **multiplicação**.

Assim: $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{5}=\frac{2}{5}$

$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$

Agora na operação $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}$ devemos começar pelos **parênteses**.

$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$

$\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}=\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{3}{5}=-\frac{1}{10}$

Relembrando

Na multiplicação, podemos inicialmente pensar na regra do **sinal**. E antes de multiplicar, verifique se é possível **simplificar** algum numerador com algum denominador.

Iniciaremos agora os Exercícios Finais de *"Operações com Fração – Multiplicação"*, portanto, antes de prosseguir, estude e **revise** os conceitos vistos até aqui. Caso haja alguma dúvida com os Exercícios Finais a seguir, assista ao seu vídeo de resolução.

Exercícios Finais

Calcule o valor das expressões e procure simplificar as multiplicações antes de efetuar a operação.

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{10}{20}\right)=-\frac{1}{5}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=zJgrHrre6ms&index=2

Exercícios Finais

Calcule o valor das expressões e procure simplificar as multiplicações antes de efetuar a operação.

b) $\left(\frac{-4}{9}\right)\cdot\left(\frac{18}{8}\right)=-1$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=8dHjsenIObg

Exercícios Finais

Calcule o valor das expressões e procure simplificar as multiplicações antes de efetuar a operação.

c) $\left(\frac{-3}{8}+\frac{4}{16}+3\right)\cdot\frac{1}{2}=$ $\mathbf{\frac{23}{16}}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=PLOw8GK5fIs

Exercícios Finais

Calcule o valor das expressões e procure simplificar as multiplicações antes de efetuar a operação.

d) $\left(\frac{-3}{4}\cdot\frac{16}{81}+\frac{3}{10}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=$ $\mathbf{-\frac{41}{360}}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=s961HjqxUlQ

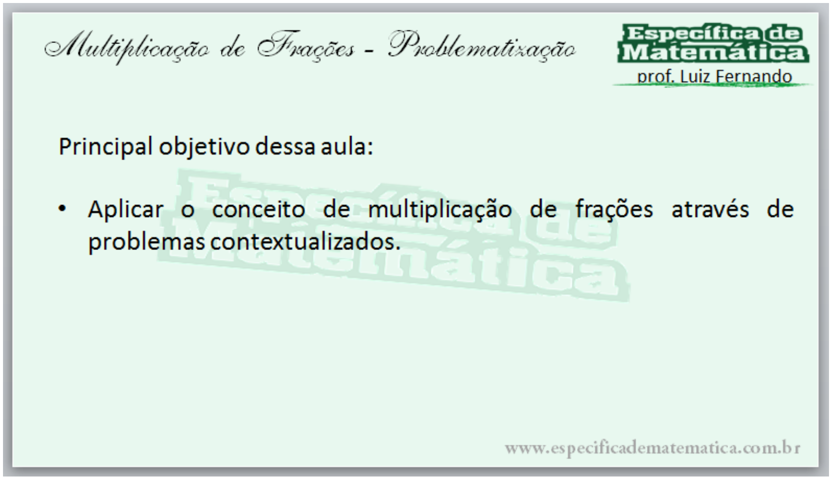
Parabéns!!! Você acaba de concluir a aula.

No próximo quadro, segue um resumo da aula *"Operações com Fração – Multiplicação"*. Imprima o arquivo e guarde-o para futuras consultas, estudos ou revisões.

Abraços e continue seus estudos.

Professor Luiz Fernando. 

B.8 Multiplicação de Frações - Problematização



A figura ao lado mostra um soro glicosado a 5%. Esta informação indica que 5% do líquido presente na bolsa, que tem capacidade de 500 ml, correspondem à glicose.

Para se determinar, então, a quantidade de glicose, deve-se calcular 5% de 500 ml, ou seja, multiplicar a fração $\frac{5}{100}$ por 500.

Qual a quantidade de glicose presente na bolsa de soro mostrada na figura?

Resposta: **25 ml**

Vídeo de resolução
http://www.youtube.com/watch?v=FCPUdwObOwg

(Enem - Adaptado) O tabagismo (vício do fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que $\frac{9}{10}$ dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e $\frac{4}{5}$ dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1500 são casos diagnosticados de câncer, e 500 são casos diagnosticados de enfisema.

Com base nessas informações, determine o número estimado de fumantes desse grupo de 2000 pessoas.

Resposta: **1750**

Vídeo de resolução
http://www.youtube.com/watch?v=H3wqncCW8lU

(Enem adaptado) A eficiência de anúncios num painel eletrônico localizado em uma certa avenida movimentada foi avaliada por uma empresa. Os resultados mostraram que, em média:

- passam, por dia, 30.000 motoristas em frente ao painel eletrônico;
- $\frac{2}{5}$ dos motoristas que passam observam o painel;
- um mesmo motorista passa três vezes por semana pelo local.

Segundo os dados acima, se um anúncio de um produto ficar exposto durante sete dias nesse painel, qual é o número mínimo esperado de motoristas diferentes que terão observado o painel?

Resposta: **28.000**

Vídeo de resolução

http://www.youtube.com/watch?v=Rs5bS_axBiw

Uma pessoa investiu certo capital, por um período de 5 anos, da seguinte maneira: com 2/5 do capital, comprou ações da bolsa de valores; do restante, aplicou metade em imóveis e metade em caderneta de poupança. Ao final de 5 anos, ele contabilizou um prejuízo de 2% na aplicação em ações, um ganho de 20% na aplicação imobiliária e um ganho de 26% na aplicação em poupança.

Calcule, em relação ao capital inicial, o percentual ganho pelo investidor.

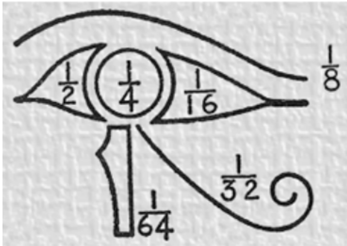
Resposta: **13%**

Vídeo de resolução

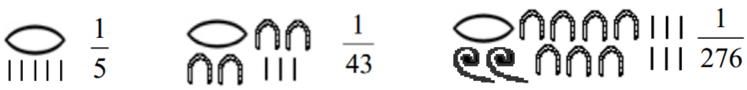
http://www.youtube.com/watch?v=b5B7AyWXBZ8

Curiosidade Histórica

Os egípcios usavam uma forma única e confusa de frações por volta de 1000 a.C. Eles tinham caracteres especiais para meio, $\frac{1}{2} =$ , e um quarto, $\frac{1}{4} =$ . Outras frações de denominador potência de 2, encontram-se representadas no olho do deus Horo, que combina o udjat (olho humano) com as manchas coloridas que envolvem o olho de um falcão.



Com exceção de $\frac{2}{3}$, que era representado por  os egípcios usavam apenas frações unitárias ou seja, aquelas com numerador igual a 1. Uma fração era indicada pelo caractere , escrito acima ou ao lado do denominador, que era mostrada usando símbolos egípcios para números. A seguir, segue alguns exemplos.



Na escrita egípcia de fração não havia uma maneira de mostrar um numerador. Assim, era impossível escrever $\frac{2}{5}$ ou $\frac{3}{2}$. Para complicar ainda mais as coisas, não era permitido repetir uma fração, portanto $\frac{2}{5}$ não podia ser escrito como $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$. Em vez disso, era necessário encontrar uma maneira de fazer $\frac{2}{5}$ a partir de frações unitárias, como, por exemplo:

$$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{5}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}.$$

Os gregos seguiram o exemplo dos egípcios 500 anos mais tarde. Na Índia, matemáticos escreveram as operações com frações por volta de 150 a.C. A forma moderna de escrever frações com uma barra ou vínculos dividindo numerador e denominador vem do método hindu de escrever um numeral sobre outro, usada por volta de 620 d.C.. Os matemáticos árabes acrescentaram a barra para separar os dois números. O primeiro matemático europeu a usar a barra de frações da forma que ela é usada hoje foi Fibonacci (1170-1250).

texto extraído de : Rooney, Anne, A História da Matemática, 2012, pág. 32
e de http://www.mat.ibilce.unesp.br/personal/hermes/apostila_hist_mat.pdf

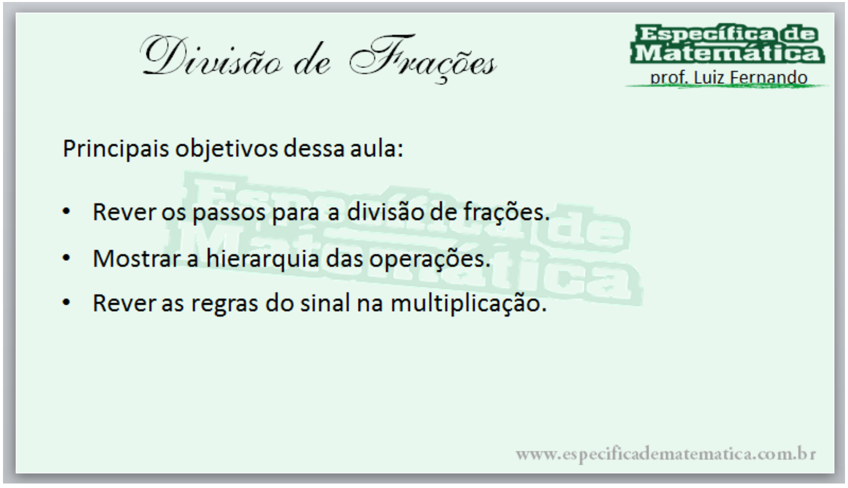
Parabéns!!! Você acaba de concluir a unidade.

A seguir, peço que você responda a um pequeno e rápido questionário sobre a aula *“Multiplicação de Frações*”. Esta é uma oportunidade para que você ajude a tornar esta aula mais produtiva e eficiente. Conto com a sua colaboração.

Abraços e muito obrigado pela sua opinião.

Professor Luiz Fernando. 

B.9 Divisão de Frações



Divisão de Frações Devemos fazer a divisão de frações, **conservando** a primeira fração e **multiplicando** pelo **inverso** da segunda.
Já o inverso de um número é encontrado invertendo de posição o numerador e o denominador. Qual é o inverso do número 2? *Resposta:* $\frac{1}{2}$
Qual é o inverso de $-\frac{3}{4}$? *Resposta:* $-\frac{4}{3}$
Para efetuarmos a operação $\left(\frac{-5}{11}\right):\left(\frac{3}{4}\right)$ devemos **conservar** a fração $\left(\frac{-5}{11}\right)$ e multiplicar pelo **inverso** da fração $\left(\frac{3}{4}\right)$.
Assim: $\left(\frac{-5}{11}\right):\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{-5}{11}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{20}{33}$
Exercícios Efetue as divisões. a) $\left(\frac{7}{6}\right):\left(\frac{-1}{7}\right)=-\frac{49}{6}$
Exercícios Efetue as divisões. b) $\left(\frac{-3}{5}\right):\left(\frac{-9}{15}\right)=1$

Exercícios Efetue as divisões. c) $\left(\frac{-4}{9}\right):\left(\frac{16}{81}\right) = -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$
Exercícios Efetue as divisões. d) $\left(\frac{-4}{3}\right):(-2) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$
Relembrando Na multiplicação, podemos inicialmente pensar na regra do **sinal**. E antes de multiplicar, verifique se é possível **simplificar** algum numerador com algum denominador.
Considere a expressão $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{9}}{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}$. Para facilitar a resolução, podemos separar as operações que aparecem no numerador e no denominador. Comecemos pela operação do numerador: $\frac{2}{3}+\frac{3}{9} = 1$
Considerando a expressão $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{9}}{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}$, façamos agora a operação do denominador. $\frac{1}{3}-\frac{3}{4} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$
Portanto: $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{9}}{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{-\frac{5}{12}} = 1:\left(-\frac{5}{12}\right) = -\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}$
Iniciaremos agora os Exercícios Finais de *"Operações com Fração – Divisão"*, portanto, antes de prosseguir, estude e **revise** os conceitos vistos até aqui. Caso haja alguma dúvida com os Exercícios Finais a seguir, assista ao seu vídeo de resolução.
Exercícios Faça as operações abaixo, simplificando quando necessário. a) $\dfrac{-3+\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}} = -\frac{\mathbf{51}}{\mathbf{4}}$
Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=zzGINcxjaAA&index=2

b) $\dfrac{-10}{2-\dfrac{3}{2}} = -20$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=sKiBJEJV4dI

c) $\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}}{-1-\dfrac{2}{3}} = -\dfrac{3}{8}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=XKAPlpgN5l8

d) $\dfrac{\dfrac{5}{8}\cdot\left(-\dfrac{8}{3}\right)+\dfrac{1}{6}}{4-\dfrac{5}{2}} = -1$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=HzzAVk6ZGOQ

e) $\dfrac{\left(2-\dfrac{1}{5}\right)\cdot\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{6}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{9}{10}}\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right) = -\dfrac{81}{44}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=3HNu-9jLJw8

f) $\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{8}{3}}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2}}} = -\dfrac{1}{40}$

Vídeo de resolução: https://www.youtube.com/watch?v=za8l0kyLtuc

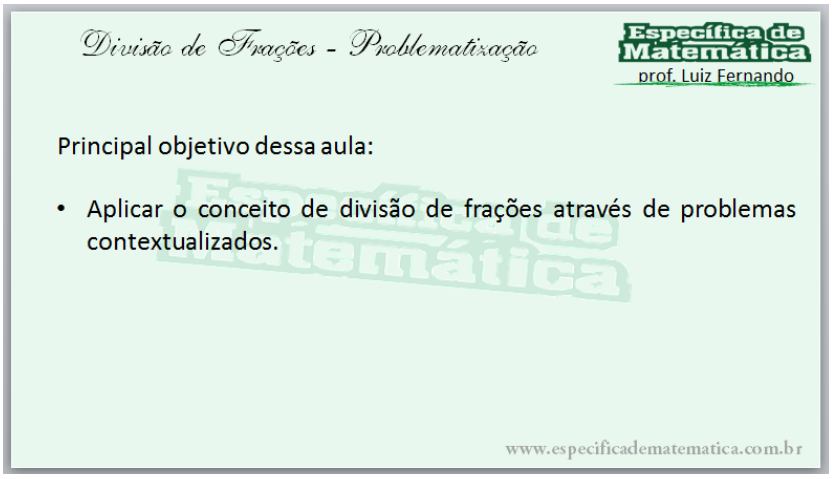
Parabéns!!! Você acaba de concluir esta aula.

No próximo quadro, segue um resumo da aula *"Operações com Fração – Divisão"*. Imprima o arquivo e guarde-o para futuras consultas, estudos ou revisões.

Abraços e bons estudos!

Professor Luiz Fernando. 

B.10 Divisão de Frações - Problematização



(UnB) Encontrar soluções inteiras para uma equação linear pode ser necessário quando se trata de aplicações que envolvem variáveis que não podem ser fracionárias, como, por exemplo, o número de habitantes de um país. Nesse sentido, deseja-se encontrar uma solução da equação

$$\text{(I) } 52x - 127y = 1,$$

de modo que x e y sejam números inteiros positivos e, para tanto, considera-se a seguinte fração contínua finita:

$$\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}$$

a) Determine a fração irredutível $q = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3+1}}$.

Resposta: $\frac{22}{9}$

b) Escreva $q - \frac{127}{52}$ como uma fração irredutível e determine o seu numerador.

Resposta: $\frac{1}{468}$. **Portanto, o numerador é igual a 1.**

c) Escrevendo $q - \frac{127}{52}$ como uma fração irredutível, encontre a solução (x, y) da equação I e calcule o valor de x + y.

Resposta: **$x = 22$ e $y = 9$. Assim, $x + y = 31$.**

Curiosidade Histórica

Desde muito tempo, aproximadamente 3000 a.C. quando foram construídas as pirâmides, os egípcios sabiam contar e medir com precisão e foram adquirindo um considerável conhecimento matemático aplicado ao dia-a-dia. Influenciados a melhor lidarem com as cheias do rio Nilo, começaram cedo a se interessarem por astronomia para melhor compreenderem o ciclo das águas e se prepararem para a convivência com as cheias. Usavam um sistema primitivo de numeração decimal, com símbolos diferentes, e a escrita hieroglífica, que eram escritos considerados sagrados. Apesar da fragilidade dos papiros, papel primitivo feito à base de folhas de uma erva originária das margens do Nilo, muitos resistiram ao tempo até serem encontrados e traduzidos pelas civilizações modernas.

Há aproximadamente 3600 anos, vivia no Egito um escriba chamado Aah – Mesu, cujo nome significa filho da lua, pouco importante na época. Contudo, nos dias atuais, é bem mais famoso que muitos soberanos do Egito. Conhecido nos meios científicos como Ahmes, ele é o autor de uma das mais antigas obras de matemática que se noticia: O papiro de Ahmes, que está guardado no museu Britânico e possui 5,5 metros de comprimento por 32 centímetros de largura e contém um legado de oitenta problemas, todos resolvidos.

No antigo Egito, além dos problemas aritméticos, há outros que não necessariamente se enquadram nesta classe, que serão designados posteriormente de algébricos. “Pedem o que equivale à solução de equações lineares da forma x + ax = b ou x + ax + bx = c, em que a, b, c, são conhecidos e x é desconhecido”. (BOYER, 1985, p.11). A maior parte destes problemas refere-se a assuntos do dia-a-dia dos antigos egípcios. Alguns, no entanto, eram do tipo “Determinar um número tal que ...”, ou seja, não se referiam a coisas concretas, mas aos próprios números, sendo representados sempre pela palavra montão.

Assim, vislumbrando uma melhor compreensão, destacamos um exemplo desses problemas encontrado em Guelli – “*Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Diga-me qual é a quantidade?*” (2001, p. 8). Hoje podemos traduzir esse problema para a álgebra e resolvê-lo facilmente. Contudo, os egípcios resolviam problemas deste tipo usando uma regra conhecida por “Regra do Falso”. Para facilitar a compreensão do leitor desta regra, iremos resolver o exemplo citado acima.

Inicialmente, atribuiremos a montão um valor falso, esse valor não tem um pré-requisito, assim quem está resolvendo o problema é quem determina o valor. Nessa situação escolheremos, por exemplo, o valor falso 6. Daí, temos:

$$6+\frac{1}{2}\cdot 6+\frac{2}{3}\cdot 6=6+3+4=13\,.$$

Assim, os valores falsos (6 e 13) eram, então, usados para montar uma regra de três simples com os elementos do problema.

$$\begin{array}{ccc} \text{Valor Falso} & & \text{Valor Verdadeiro} \\ \dfrac{6}{13} & = & \dfrac{\text{Montão}}{26} \end{array} \quad \Rightarrow \text{Montão} = 12$$

Os matemáticos de várias partes do mundo adotaram a regra do falso dos egípcios.

fontes: http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/72_1716_ID.pdf
e http://pt.scribd.com/doc/102151201/2/INTRODUCAO
acesso em 19/04/2014

Regra do Falso

Considere o problema: “Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos, são 26. Diga, qual é a quantidade?”. Com a Regra do Falso, a solução inicia-se estimando um valor inicial para o montão.

Com a Regra do Falso, a solução inicia-se estimando um valor inicial para o montão. Monte a expressão matemática que corresponde a “*Um montão, sua metade, seus dois terços*” para o montão igual a 1.

Resposta: $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$

Assim, para o montão igual a 1, encontramos $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$. Qual o valor dessa expressão?

Resposta: $\frac{13}{6}$

Montão igual a 1 gera resposta falsa $\frac{13}{6}$. Pela “Regra do Falso”, montamos a regra de três:

Valor Falso		Valor Verdadeiro
$\dfrac{1}{\frac{13}{6}}$	=	$\dfrac{\text{montão}}{26}$

Qual o valor de $\dfrac{1}{\frac{13}{6}}$?

Resposta: $\frac{6}{13}$

Assim,

Valor Falso		Valor Verdadeiro		Valor Falso		Valor Verdadeiro
$\dfrac{1}{\frac{13}{6}}$	=	$\dfrac{\text{montão}}{26}$	$\Rightarrow$	$\dfrac{6}{13}$	=	$\dfrac{\text{montão}}{26}$

Utilizando o conceito de frações equivalentes, qual o valor verdadeiro do montão?

Resposta: 12

Regra do Falso

Considere o problema: “A metade de um montão, seus dois terços, seus três quartos, todos juntos, são 69. Diga, qual é a quantidade?”.

Utilizando a Regra do Falso, e considerando montão igual a 1, determine o valor verdadeiro de montão.

Resposta: **36**

O epitáfio de Diofante

Diofante foi um matemático grego muito importante que viveu 200 anos a.C.. Seu epitáfio, bastante curioso, é o seguinte:

"Eis o túmulo que encerra Diofante – maravilha de contemplar. Com um artificio aritmético a pedra ensina sua idade. Deus concedeu-lhe passar a sexta parte de sua vida na juventude; um duodécimo na adolescência; um sétimo em seguida, foi passado num casamento estéril. Decorreram mais cinco anos, depois do que lhe nasceu um filho. Mas este filho desgraçado e, no entanto, bem amado! – apenas tinha atingido a metade da idade que viveu seu pai, morreu. Quatro anos ainda, mitigando sua própria dor com o estudo da ciência dos números, passou os Diofante, antes de chegar ao término sua existência".

Fonte: O Homem que Calculava, Malba Tahan, pág. 184.

Supondo que Diofante tenha vivido a sua idade, e utilizando a Regra do Falso, determine a idade de Diofante.

Resposta: **84 anos**

Parabéns!!! Você acaba de concluir a unidade.

A seguir, peço que você responda a um pequeno e rápido questionário sobre a aula *“Divisão de Frações*”. Esta é uma oportunidade para que você ajude a tornar esta aula mais produtiva e eficiente. Conto com a sua colaboração.

Abraços e muito obrigado pela sua opinião.

Professor Luiz Fernando. 

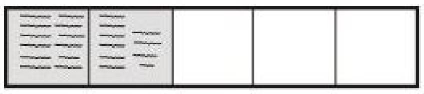
Apêndice C

Avaliação de Conclusão

C.1 Questões da Avaliação de Conclusão

Questão 01

Em uma de suas aulas, o professor Atsoc Ziul preencheu seu quadro com conteúdos e exercícios de acordo com o ilustrado na figura abaixo.



Uma fração equivalente à parte do quadro que foi preenchida pelo professor é:

a) $\frac{20}{100}$

b) $\frac{25}{100}$

c) $\frac{30}{100}$

d) $\frac{35}{100}$

e) $\frac{40}{100}$

Assinale a única alternativa correta.

a b c d e

Questão 02

Carlos, João e Maria estão colecionando o álbum de figurinhas da Copa do Mundo da FIFA. Em certo momento, Carlos possuía $\frac{2}{3}$ do total de figurinhas coladas em seu álbum, João possuía $\frac{3}{5}$ e Maria $\frac{5}{7}$. Podemos afirmar que:

a) Carlos era quem possuía a maior quantidade de figurinhas coladas em seu álbum.

b) João era quem possuía a maior quantidade de figurinhas coladas em seu álbum.

c) Maria era quem possuía a maior quantidade de figurinhas coladas em seu álbum.

d) Carlos e João possuíam a mesma quantidade de figurinhas coladas em seu álbum.

e) João e Maria possuíam a mesma quantidade de figurinhas coladas em seu álbum.

Assinale a única alternativa correta.

○ a ○ b X c ○ d ○ e

Questão 03

(Prova Brasil) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Uma fração que corresponde à terceira etapa é

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{12}{5}$

d) $\frac{7}{12}$

e) $\frac{12}{7}$

Assinale a única alternativa correta.

○ a ○ b ○ c X d ○ e

Questão 04

A expressão $2-\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)$, é igual a:

a) 1

b) $-\frac{7}{3}$

c) $\frac{7}{3}$

d) $-\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{6}$

Assinale a única alternativa correta.

a b c d X e

Questão 05

A expressão $\frac{2}{3}+\frac{4}{25}\cdot\frac{10}{8}$, é igual a:

a) $\frac{7}{15}$

b) $\frac{13}{15}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{31}{30}$

e) 2

Assinale a única alternativa correta.

a X b c d e

C.2 Feedback da Avaliação de Conclusão

Especifica de Matemática

Boletim de Desempenho da Avaliação de Conclusão da Unidade - Fração

Nome do Aluno: Fulano de Tal
Turma:
Email do Aluno:

Pontuação:

Acertou 5 de 5 Questões.
Rendimento: 100,0%

Tempo: 00:06:57

Classificação: Você foi o 1º de 85 que já fizeram esta avaliação.

Comentários e Sugestões do Professor:

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
Gabarito Oficial	e	c	d	e	b
Gabarito do Aluno	e	c	d	e	b

Figura C.1: Exemplo do boletim de desempenho da Avaliação de Conclusão