UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ - UNIFAP

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

TONI DE SOUZA RIBEIRO

MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO E CONCURSOS PÚBLICOS

Dissertação da Pós-Graduação Stricto sensu apresentado à Universidade Federal do Amapá-UINIFAP, como requisito avaliativo parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Erasmo Senger.

MACAPÁ-AP

2014

TONI DE SOUZA RIBEIRO

MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO E CONCURSOS PÚBLICOS

Dissertação da Pós-Graduação Stricto sensu apresentado à Universidade Federal do Amapá-UINIFAP, como requisito avaliativo parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Erasmo Senger, Doutor em Matemática, Professor Orientador.

____

João Carlos Alves dos Santos, Mestre em Matemática - UFPA

____.

José Walter Cardenas Sotil Doutor em Matemática – UNIFAP

____.

Guzman Eulalio Isla Chamilco Doutor em Matemática - UNIFAP

Macapá– AP, 09 de abril de 2014

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pois sem ele, nada seria possível e não estaríamos aqui, reunidos, juntos desfrutando destes momentos que nos são tão importantes.

À minha esposa Luciana Queiroz, por compreender minha ausência durante a realização deste trabalho e pelo apoio nesta importante etapa da minha vida.

Em especial aos meus pais, avós Creuzolita e Pedro, e filhos, pelo esforço, dedicação e compreensão, em todos os momentos desta e de outras caminhadas, e aos meus irmãos pela amizade e apoio.

Agradecimentos

A Deus por sua indubitável ajuda e bênçãos constantes em nossas vidas.

Aos professores, pelo incentivo e motivação tendendo ao infinito;

Aos amigos do mestrado pela inconteste amizade.

Aos meus avós, que tanto amei.

“O educando deve manter vivo em si o gosto da rebeldia aguçando sua curiosidade e estimulando sua capacidade de arriscar-se, tornando-se capaz de ir além de seus condicionantes.”

Paulo Freire

Lista de Quadros

Lista de Figuras

Lista de Gráficos

Resumo

Esta pesquisa trata sobre a matemática financeira. O tipo de pesquisa é de cunho bibliográfico e temo por objetivo aplicar os conhecimentos de Matemática Financeira nas resoluções de questões de concursos públicos. Tal pesquisa tem por base autores renomados com Iezzi (2004), Sobrinho (2000), Hazzan (2007) e Crespo (2009). Tal pesquisa aborda sobre juros e descontos nos regimes de capitalização simples e composta, além dos sistemas de amortização constante e o de amortização francês.

Palavras Chave: Matemática financeira. Resoluções. Juros. Descontos. Amortização.

Abstract

This research deals with the financial mathematics. The type of research is a bibliographic nature and fear aimed at applying knowledge of Financial Mathematics at resolutions of issues of public procurement. Such research is based on renowned authors Iezzi (2004), Nephew (2000), Hazzan (2007) and Crespo (2009). This research focuses on interest and discounts on single and composite funded schemes, in addition to the constant depreciation and amortization French systems.

Keywords: Financial mathematics. Resolutions. Interest. Discounts. Amortization.

Sumário

INTRODUÇÃO

Com o advento da revolução industrial, o mundo adotou o sistema econômico capitalista. O mesmo é dividido em três fases, o mercantil, industrial e o capitalismo financeiro ou tecnológico (http://www.infoescola.com/historia/capitalismo/). Esta última fase se consolidou após a 2ª guerra mundial, pois houve um aumento significativo das exportações e importações dos meios de produção em virtude da grande concorrência e o crescimento industrial. As bolsas de valores começaram a ter mais destaques no comércio internacional, e com isso houve maior necessidade de uma matemática aplicada ao sistema financeiro. Diante deste cenário que a Matemática Financeira ganhou destaque.

E esta pesquisa aborda a matemática financeira voltada para o ensino Médio e para provas de concursos públicos. Tal pesquisa foi elaborada mediante uma pesquisa bibliográfica e numa linguagem acessível. Os temas aqui estudados são os juros e os descontos nos regimes simples e compostos, além dos sistemas de amortização constante-SAC e o sistema de amortização francês-SAF.

Tal pesquisa está estruturada em quatro capítulos, sendo que o primeiro faz uma análise da história do dinheiro, desde a época do escambo até a forma atual das cédulas e das moedas. Também neste capítulo, é analisado os planos econômicos brasileiros do fim da ditadura até o plano real.

O segundo capítulo envolve os juros e os descontos, tanto no regime simples como no regime composto. O mesmo trata dos conceitos de juros e descontos, suas formulas, além das taxas de juros e descontos, as proporcionais e as equivalentes.

No terceiro capítulo, a pesquisa aborda os sistemas de amortizações, em especial o sistema de amortização constante e o sistema de amortização francês. Neste capítulo, são apresentados as fórmulas, os conceitos, além de uma exemplificação de um empréstimo em ambas as modalidades.

E o quarto capítulo é destinado a resolução de algumas questões de matemática financeira que vieram em provas de concursos públicos. As questões são expostas conforme a prova em que veio, além de serem mostradas suas resoluções passo a passo.

Este trabalho para se ter um melhor direcionamento em sua elaboração e entendimento, foi estabelecido o seguinte **problema**: Qual a contribuição da matemática financeira para o ensino Médio e concursos públicos no âmbito econômico e financeiro? Como **hipótese**, acredita-se que a matemática financeira contribuição significativamente para os processos de ensino e aprendizagem dos problemas envolvendo o sistema financeiro no Ensino Médio e em provas de concursos públicos.

Esta dissertação tem como **objetivo geral**: Aplicar os conhecimentos de matemática financeira nas resoluções de questões de concursos públicos. Quanto aos **objetivos específicos**, temos:

- Verificar conceitos sobre história do dinheiro, juros, descontos e sistemas de amortizações;
- Exemplificar os temas da matemática financeira no cotidiano;
- Resolver questões de matemática financeira que vieram em concursos públicos.

2 HISTÓRICO DO DINHEIRO

Hoje é comum as pessoas realizarem transações comerciais. Mas, para a sociedade chegar neste ponto, como a sociedade evoluiu? Quais os mecanismos utilizados no primórdio da humanidade? Buscaram-se respostas para tais questionamentos. A fonte principal de pesquisa para as respostas foram o site da Casa da Moeda do Brasil e o Portal Economia.

2.1 HISTÓRIA DA MOEDA:

Segundo a Casa da Moeda do Brasil, o homem primitivo buscava sobreviver em situações desfavoráveis, principalmente da fome e do frio. Ele conseguia tal feito por meio da pesca, da caça, da coleta de frutas em seu meio, além de morar em cavernas. No decorrer dos anos o homem melhorava suas técnicas de sobrevivência. Foi ficando mais inteligente, com isso o homem buscava mais conforto e segurança. Com isso surgiu à necessidade de troca de mercadorias.

Esta troca é denominada de escambo. Por exemplo, se uma pessoa pescasse mais do que o suficiente, o mesmo trocava com outra pessoa o que havia plantado e colhido trigo mais do que precisava. E este procedimento até hoje é praticado em povos com economia primitiva e alguns interiores da Amazônia.

Figura 1: A prática do escambo
Fonte: www.portaleconomia.com.br

A maior dificuldade no escambo é o valor, pois não existe medida entre os elementos de troca. Mas pelo fato de algumas mercadorias serem mais utilizadas que outras estas assumiram o papel de moeda, servindo de valor. Eram as moedas-mercadorias (http://portaleconomia.com.br/moedas/dinheironomundo.shtml).

Ainda segundo o Portal da Economia, alguns exemplos de moeda-mercadoria foi o gado, pois era útil no transporte e na prestação de serviços, apesar do risco de doença e morte. O sal também passou a exercer este papel, pois, além da dificuldade em consegui-lo, servia para conservar alimentos.

> Ambas deixaram marca de sua função como instrumento de troca em nosso vocabulário, pois, até hoje, empregamos palavras como *pecúnia* (dinheiro) e *pecúlio* (dinheiro acumulado) derivadas da palavra latina *pecus* (gado). A palavra *capital* (patrimônio) vem do latim *capita* (cabeça). Da mesma forma, a palavra *salário* (remuneração, normalmente em dinheiro, devida pelo empregador em face do serviço do empregado) tem como origem a utilização do sal, em Roma, para o pagamento de serviços prestados (http://portaleconomia.com.br/moedas/dinheironomundo.shtml).

Com a descoberta do metal, passou-se a fabricar armas e utensílios, substituindo a pedra, tornando-se o principal padrão de valor. A princípio, o mesmo era comercializado na forma natural, posteriormente passou a ter forma definida, peso, marca que indicava seu valor, além de quem a emitiu. Por exemplo, na Grécia e no Chipre a moeda utilizada era o talento, feito de cobre ou bronze que parecia uma pele de animal. No Oriente existiam as moedas facas e chave

Figura 2: A moeda Talento.
Fonte: www.portaleconomia.com.br

Figura 3: As moedas Faca e chave.
Fonte: www.portaleconomia.com.br

As primeiras moedas parecidas com as atuais aparecem apenas no sétimo século a.c. Essas moedas, de prata, são identificas na Grécia. Na Lídia as moedas são uma liga metálica composta por ouro e prata, denominado de eletro. Elas eram elaboradas manualmente, por isso que suas bordas eram irregulares.

> As moedas refletem a mentalidade de um povo e de sua época. Nelas podem ser observados aspectos políticos, econômicos, tecnológicos e culturais. É pelas impressões encontradas nas moedas que conhecemos, hoje, a efígie de personalidades que viveram há muitos séculos. Provavelmente, a primeira figura histórica a ter sua efígie registrada numa moeda foi Alexandre, o Grande, da Macedônia, por volta do ano 330 a.C. (http://www.bcb.gov.br/?ORIGEMOEDA).

Figura 4: As moedas da Grécia e da Lídia, respectivamente.
Fonte: www.bcb.gov.br

Inicialmente as moedas eram cunhadas por ouro e prata, pois além de seu valor e raridade, tinha os costumes religiosos. Por exemplo, os sacerdotes babilônicos criam na ligação do sol com o ouro e a lua com a prata. Essas moedas eram garantidas pelo seu valor intrínseco, ou seja, se uma moeda tinha 15g de prata ela era trocada por mercadorias de mesmo valor. Este sistema se manteve até o final do século XIX, quando surgiram novas ligas metálicas, sendo que as moedas passaram a circular pelo valor extrínseco, ou seja, valor gravado na moeda, independentemente do metal da moeda.

Com o advento do papel-moeda, as moedas de metal foram se restringindo. O papel-moeda se deu pelo costume de guardarem seus valore eu um ourive, o mesmo emitia um recibo. Posteriormente os mesmos eram utilizados para efetuar pagamentos. Em decorrência disso, os governos começaram a emitir cédulas, controlando a falsificação além de garantir o poder de pagamento.

2.2 PLANOS ECONÔMICOS NO BRASIL

Na década de 80 e início da década de 90 do século passado, o Brasil viveu um período de hiperinflação, consequentemente, os governos dos presidentes José Sarney, Fernando Collor e Itamar Franco implementaram vários planos econômicos até chegar no plano Real. Um deles foi o plano Cruzado:

> Como medida de combate à inflação, o governo Sarney adota em 1986 novo padrão monetário, o ***cruzado***, equivalente a mil vezes a moeda anterior, o cruzeiro, e representado por Cz$. A exemplo dos procedimentos anteriores, as cédulas do antigo padrão recebem um carimbo com indicação do valor correspondente em cruzados (www.bb.com.br).

Posteriormente foi criado outro plano econômico, o Cruzado Novo, onde:

> No ano de 1989, verifica-se nova desvalorização de três decimais no padrão monetário, que passou a denominar-se cruzado novo, representado por NCz$, procedendo-se à carimbagem das cédulas de 10.000, 5.000 e 1.000 cruzados, que passaram a valer 10, 5 e 1 cruzados novos (www.bb.com.br).

Em 1990, o Brasil voltou para o plano Cruzeiro, pois:

> [...] nova reforma monetária modificou a unidade do sistema, que volta a denominar-se ***cruzeiro***, sem que houvesse entretanto alteração dos valores. As cédulas de 500, 200, 100 e 50 cruzados novos receberam carimbos apenas para corrigir a designação da moeda. Houve, em seguida, a emissão das cédulas definitivas naqueles valores, salvo das notas de 50 cruzeiros, que foram substituídas por moedas. A inflação desenfreada exigiu a emissão de cédulas de valores mais elevados (www.bb.com.br).

Após o afastamento do presidente Fernando Collor, já na gestão do Presidente Itamar Franco:

> [...] a moeda é novamente desvalorizada em três decimais: o cruzeiro passa a chamar-se ***cruzeiro real***, representado por CR$, com as duas letras

> grafadas em maiúsculas para diferenciá-lo do Cr$ da unidade anterior. As cédulas de 500.000, 100.000 e 50.000 cruzeiros recebem um carimbo, passando a representar 500, 100 e 50 cruzeiros reais (www.bb.com.br).

Em março de 1993, novamente o presidente Itamar Franco implementou:

> [...] um indexador único da economia, designado Unidade Real de Valor (URV), para estabelecer uma proporção entre salários e preços, que se transformaria em nova moeda quando todos os preços, em tese, estivessem estáveis em termos de URV. Essa estabilidade pressuposta ocorreu a 1° de julho de 1994, quando a URV, equivalendo a 2.700 cruzeiros reais, passou a valer 1 **real**, representado pelo símbolo R$ (www.bb.com.br).

O plano Real foi implementado reduziu a inflação sensivelmente. Sendo que em 1º de julho de 2014 este plano fará 20 anos no Brasil, e o mesmo tem se mostrado eficiente, chegando a deixar a economia brasileira sempre entre as 10 maiores economias, sendo que o melhor resultado foi a 6ª colocação. A inflação brasileira normalmente fica abaixo de 10% anuais.

-

3 JUROS E DESCONTOS

3.1 PORCENTAGEM

Segundo a Revista Escola, porcentagem ou percentagem[1] tem o mesmo significado.

> Relatos históricos datam que o surgimento dos cálculos percentuais aconteceu por volta do século I a.C., na cidade de Roma. Nesse período, o imperador romano decretou inúmeros impostos a serem cobrados, de acordo com a mercadoria negociada. Um dos impostos criados pelos chefes romanos era denominado centésimo rerum venalium, e obrigava o comerciante a pagar um centésimo pela venda das mercadorias no mercado. Naquela época, o comércio de escravos era intenso e sobre as vendas era cobrado um imposto de 1/25 (um vinte e cinco avos) (http://www.brasilescola.com/matematica/historia-das-porcentagens.htm)

Frequentemente encontramo-nos envolto de percentagem. Segundo Crespo (2002), o termo refere-se a uma razão cujo denominador vale 100, denominada de razão centesimal. Por exemplo, num grupo de 20 pessoas onde 15 torcem pelo time B, a razão entre os torcedores do time B e o total de torcedores é:

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{75}{100}$$

A razão centesimal também pode ser representada pelo símbolo % (lê-se: por cento), nada mais é a substituição do número 100. No exemplo acima podemos representar a razão $75/100$ com o percentual, ou seja:

$$\frac{75}{100} = 75\%\,,$$

onde lemos: 75 por cento. O numeral 75% é dito taxa percentual, ou centesimal, ou taxa de percentagem. Observa-se que a porcentagem é uma fração onde o inteiro é dividido em 100 partes iguais e 75 partes foram tomadas.

[1] O vocábulo "percentagem" foi adaptado do termo inglês *percentage*. Este, por sua vez, teria sido originado de *per cent*, derivado do latim *per centum*. Segundo o *Dicionário Houaiss*, o termo percentagem, o mais antigo, teria sido adotado na Língua Portuguesa ainda no século 19, a partir de 1858. "Porcentagem", por sua vez, é considerado um abrasileiramento surgido da locução "por cento", de uso corrente na língua portuguesa. Apesar de possivelmente ter sido cunhada no Brasil, a palavra também é utilizada em Portugal, por influência do termo *pourcentage*, do idioma francês.

No que tange à porcentagem, precisa-se salientar alguns conceitos importantes. Primeiro é a *taxa percentual*, que de acordo com Crespo (2002, p.53) “é o valor que representa a quantidade de unidades tomadas em cada 100”. “*Percentagem* é o valor que representa a quantidade tomada de outra, proporcionalmente a uma taxa”. E o “*principal* é o valor da grandeza da qual se calcula a percentagem” (CRESPO, 2002, p.54).

A porcentagem também pode ser representada na forma de *taxa unitária*, ou seja, a razão $75/100$ pode ser representada por 0,75.

3.1.1 Exemplos de Percentagem

a) Uma fábrica vende seu produto por $190,00. Sabe-se que a mesma tem um lucro de 12% sobre o preço de venda. Quanto à fábrica ganha em cada produto?

Solução:

Considerando que $190,00 corresponde a 100% e que 12% é a parte do todo que são tomadas como lucro, basta montar uma regra de três simples, assim:

$$\begin{array}{ccc} \$190 & \underline{\qquad\qquad} & 100\% \\ x & \underline{\qquad\qquad} & 12\% \end{array}$$

Temos que:

$$\$190.12\% = x.100\%$$

$$x = \frac{\$190.12\%}{100\%} = \$22,80$$

Com isso, a fábrica tem $ 22,80 de lucro em cada produto que vende.

b) (CRESPO, 2002, p. 59) Em uma cidade, 35% da população é constituída de homens e 40% de mulheres. Qual a população da cidade, se o número de crianças é de 8000?

Solução:

Considerando que o total da população é 100%, e que a porcentagem dos homens (35%) somada com a porcentagem das mulheres (40%), tem-se que um total de 75% da população é constituída por homens e mulheres, então 100% da população subtraída os 75% que compõem as mulheres e homens, sobram os 25% que constitui o número de crianças. Assim podemos fazer regra de três simples:

$$100\% \underline{\qquad\qquad} x$$
$$25\% \underline{\qquad\qquad} 8000$$

Teremos então:

$$25.x = 100.8000$$

$$\therefore x = 32000hab.$$

3.2 JUROS SIMPLES:

O homem por ser um ser social, observou-se a necessidade de haver troca de serviços ou mercadorias, esta troca passou a ser denominado de escambo. Ao longo deste processo surgiu à moeda, com isso o preço passou a ser um indicador de medida para o valor dos bens ou serviços e a moeda um meio de acumular valor e riqueza ou capital. Com isso, os bens poderiam ser consumidos ou guardados para o futuro. Este estoque poderia também servir como gerador de novos bens/riquezas através do processo produtivo.

O fato é que a maioria das pessoas prefere consumir seus bens agora, e não no futuro. Se há esta preferência, as pessoas querem uma compensação pela abstinência. Esta recompensa é denominada de juro.

> O juro também pode ser entendido como sendo o custo do crédito ou a remuneração do capital aplicado. Isto é, o juro é o pagamento pelo uso de poder aquisitivo por um determinado período de tempo. Associa-se então o juro à preferência temporal das pessoas, que é o desejo de efetuar o consumo o mais cedo possível. Nestas condições, a taxa de juros mede o custo da unidade de capital no período a que se refere a taxa (MATHIAS & GOMES, 1993, p. 19).

A taxa de juros, representada por *i*, é fixada no mercado de capitais, e a mesma é dada pela divisão entre os juros recebidos ao final de um certo período de tempo e o capital inicialmente aplicado. Lembrando que capital *C* é qualquer valor expresso em moeda e disponível numa determinada época (SOBRINHO, 2000). Por exemplo, uma pessoa empresta R$1000,00 de um banco qualquer, após um determinado tempo, esta pessoa paga a instituição bancária um valor de R$1200,00. Qual a taxa de juros cobrada nesta transação? Para determinarmos a taxa de juros basta dividirmos o juros de R$200,00 pelo valor emprestado, ou seja,

$$i = \frac{R\$200,00}{R\$1000,00} = 0,2 = 20\%$$

Nota-se que a taxa de juro é $i = \frac{j}{C}$, se isolarmos o juros teremos $j = C.i$. Tomemos como exemplo uma aplicação de R$100,00, sob uma taxa de juros de 3%, o juro gerado num período de 5 meses é dado no quadro abaixo:

Quadro 1: Formação do juros simples

Mês	i	Cálculo	Valor dos juros
1º	3%=0,03	0,03.R$100,00	$j_1 = R\$3,00$
2º	3%=0,03	0,03.R$100,00	$j_2 = R\$3,00$
3º	3%=0,03	0,03.R$100,00	$j_3 = R\$3,00$
4º	3%=0,03	0,03.R$100,00	$j_4 = R\$3,00$
5º	3%=0,03	0,03.R$100,00	$j_5 = R\$3,00$
Total de juros devido no final			**R$ 15,00**

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com o quadro, observa-se que o valor dos juros do 1º mês é igual dos demais meses, ou seja, o valor do juros cobrado não é acrescentado no mês subsequente, o valor é fixo a cada mês da aplicação. Isto que caracteriza o juros simples, e o mesmo é dado pelo produto do capital inicial *C*, a taxa de juros *i* e o tempo de aplicação *t* e é expresso por:

$$j = \frac{c.i.t}{100}$$

A divisão por 100 é em razão da taxa de juros ser expressa na base unitária, conforme o quadro acima. Assim, o exemplo acima pode ser desenvolvido da seguinte forma:

$$j = \frac{R\$100{,}00.3\%.5meses}{100} = R\$15{,}00$$

Sendo que o juros de R$15,00 corresponde ao acréscimo gerado durante o período da aplicação, se o mesmo for somado ao capital inicial, tem-se um valor total de R$115,00. Este valor total é denominado de Montante e é representado por *M*. Como o montante é a soma do capital com o juros simples, temos que:

$$M = C + j$$

Se substituirmos o juros na relação do montante teremos

$$M = C + \frac{C.i.t}{100}$$

$$M = C.\left(1 + \frac{i.t}{100}\right)$$

Do exemplo supracitado, podemos determinar o montante do investimento direto pela fórmula acima, assim teríamos:

$$M = R\$100{,}00.\left(1 + \frac{3\%.5meses}{100}\right)$$

$$M = R\$100{,}00.(1{,}15) = R\$115{,}00$$

3.3 DESCONTO SIMPLES

Numa operação financeira entre dois agentes econômicos, normalmente documentados por um título de crédito comercial, devendo conter todos os elementos básicos da operação financeira. Esses títulos serão utilizados em operações de desconto. Os títulos mais utilizados pelos agentes econômicos são: a Nota Promissória e a Duplicata Mercantil e de Serviços.

A questão do desconto surge quando o detentor de um título de crédito precisa transformá-lo em dinheiro antes da data do vencimento, nesse caso, ele negocia com um agente financeiro, o qual lhe antecipará um valor inferior ao valor nominal. Esta diferença, do valor nominal do título e o valor pago por ele, numa certa data, antes da data do vencimento, que é denominado desconto (MATHIAS & GOMES, 1993). Matematicamente pode ser expresso por:

$$d = N - A$$

Onde,

d é o desconto;

N o valor nominal, o valor que se deve pagar no vencimento do título de crédito;

A é o valor atual, o valor de resgate do título antes de seu vencimento.

Segundo Crespo (2002), o desconto pode ser atribuído em relação ao valor nominal, onde é denominado de desconto comercial, ou no valor atual, dito de desconto racional. "Chamamos de desconto comercial, bancário ou por fora o equivalente ao juro simples, produzido pelo valor nominal do título no período de tempo correspondente, e a taxa fixada" (CRESPO, 2002, p.99). A mesma é dada pela expressão matemática abaixo:

$$d_c = \frac{N.i.t}{100}$$

Onde,

d_c corresponde ao desconto comercial;

N é o valor nominal;

i é a taxa de desconto;

t o tempo

Sabe-se que o desconto é dado por $d = N - A$, isolando o valor atual teremos $A = N - d$. Substituindo o desconto comercial na fórmula do valor atual, tem-se:

$$A = N - \frac{N.i.t}{100}$$

$$A = N.\left(1 - \frac{i.t}{100}\right)$$

Esta é a fórmula do valor atual comercial, ou valor descontado comercial. Tomemos a seguinte situação, uma pessoa deseja resgatar uma promissória de R$ 100,00 que vencerá daqui a um ano. Esta pessoa consegue resgatar com 4 meses de antecedência. Sabendo que a taxa de desconto é de 2% a.m., o valor do desconto comercial é dado por:

$$d_c = \frac{R\$100{,}00.2\%.4meses}{100} = R\$8{,}00$$

Com isso, o valor atual comercial será:

$$A = R\$100{,}00 - R\$8{,}00 = R\$92{,}00$$

Este tipo de desconto tem uma limitação, só pode ser utilizado em prazos curtos, pois em longos prazos o valor do desconto poderá ser maior que o valor nominal do título. Por exemplo, se na situação anterior a promissória vencesse daqui a 5 anos, e a pessoa conseguisse resgatá-la 52 meses antes do vencimento, qual seria o valor do desconto mantendo o mesmo percentual de 2%a.m.? Utilizarmos a fórmula, temos:

$$d_c = \frac{R\$100{,}00.2\%.52meses}{100} = R\$104{,}00$$

Observa-se que o valor do desconto é maior do que o valor nominal da promissória. Isso evidencia que o uso do desconto comercial deve ser empregado apenas em operações de curto prazo.

De acordo com Crespo (2009), o desconto racional é equivalente ao juro gerado em relação ao valor atual do título, tendo uma taxa fixada e durante o período correspondente. Sua expressão é dada por:

$$d_r = \frac{A_r.i.t}{100}$$

E o valor atual racional é:

$$A_r = N - d_r$$

Onde,

d_r corresponde ao desconto racional;

N vem ser o valor nominal do título;

i a taxa de desconto;

t o tempo;

A_r é o valor atual racional

Substituindo A_r em d_r, temos:

$$d_r = \frac{(N - d_r).i.t}{100}$$

$$d_r = \frac{N.i.t}{100} - \frac{d_r.i.t}{100}$$

$$d_r + \frac{d_r.i.t}{100} = \frac{N.i.t}{100}$$

$$\frac{100.d_r + d_r.i.t}{100} = \frac{N.i.t}{100}$$

$$100.d_r + d_r.i.t = N.i.t$$

$$d_r.(100 + i.t) = N.i.t$$

$$d_r = \frac{N.i.t}{100 + i.t}$$

Também podemos substituir d_r em A_r, assim:

$$A_r = N - \frac{N.i.t}{100 + i.t}$$

$$A_r = \frac{N.(100 + i.t) - N.i.t}{100 + i.t}$$

$$A_r = \frac{110N + N.i.t - N.i.t}{100 + i.t}$$

$$A_r = \frac{100N}{\left(100 + \frac{i.t}{100}\right)}$$

$$A_r = \frac{N}{\left(1 + \frac{i.t}{100}\right)}$$

Tomemos a seguinte situação: Uma pessoa desconta um título de R$100,00, sob uma taxa de 2% a.m e faltando 4 meses para seu vencimento, determinemos o desconto racional e o valor atual racional. Primeiramente utiliza-se a fórmula do desconto racional, tendo a seguinte disposição:

$$d_r = \frac{R\$100{,}00.2\%.4meses}{100 + 2\%.4meses}$$

$$d_r = \frac{800}{108} \cong R\$7{,}41$$

Concernente ao valor atual racional, tem-se:

$$A_r = N - d_r$$

$$A_r = R\$100{,}00 - R\$7{,}41 = R\$92{,}59$$

Se resolvermos direto na fórmula do valor atual racional, teremos:

$$A_r = \frac{N}{\left(1 + \frac{i.t}{100}\right)}$$

$$A_r = \frac{R\$100{,}00}{\left(1 + \frac{2\%.4meses}{100}\right)} = \frac{R\$100{,}00}{1{,}08} = R\$92{,}59$$

Comparando as fórmulas do desconto comercial $d_c = \frac{N.i.t}{100}$ com a do desconto racional $d_r = \frac{N.i.t}{100 + i.t}$, verifica-se que o desconto racional será menor, pois o denominador do desconto racional sempre será maior que 100, o denominador do desconto comercial. Isto ficou evidenciado nos exemplos aqui citados, observa-se que os valores do título, da taxa e do tempo são iguais, contudo, o valor do desconto comercial é maior que o valor do desconto racional, consequentemente, o valor atual racional é maior que o valor atual comercial (SOBRINHO, 2000).

3.4 JURO COMPOSTO

O juro no regime de capitalização simples é gerado a partir do capital inicial, e permanece constante, não tendo importância o montante do período anterior. Já no regime de capitalização composta, o juro é gerado a partir do montante do período anterior. Como exemplo, tomemos R$100,00 sob uma taxa de 3% a.m durante 5 meses.

Quadro 2: Desenvolvimento do Juro composto

Mês	Taxa i	capital inicial	Cálculo	Valor dos juros
1º	3%=0,03	R$ 100,00	0,03.R$100,00	R$ 3,00
2º	3%=0,03	R$ 103,00	0,03.R$103,00	R$ 3,09
3º	3%=0,03	R$ 106,09	0,03.R$106,09	R$ 3,18
4º	3%=0,03	R$ 109,27	0,03.R$109,27	R$ 3,28
5º	3%=0,03	R$ 112,55	0,03.R$112,55	R$ 3,38
Total de juros devido no final				**R$ 15,93**

Fonte: Fictícia

De acordo com o quadro, verifica-se que o juro gerado no 1º mês compõe o capital inicial para o segundo mês, logo o juro gerado no segundo mês será maior que no mês anterior, e assim por diante. Comparando este exemplo com o já citado em juros simples, nota-se que os valores como o capital inicial, a taxa de juros e o tempo são os mesmos. O que muda é o regime de capitalização em que se encontra a aplicação. Após 5 meses de investimento, ficou evidente que o regime composto gerou mais juro que o regime simples. Por isso que o mercado financeiro utiliza o regime composto. É nas cobranças, na poupança, nas bolsas de valores e outros investimentos. O juro composto também é dito de juros sobre juros (PILÃO & HUMMEL, 2003).

De acordo com a demonstração a seguir de Hazzan (2007) um capital *C* aplicado a juros compostos, sob uma taxa *i* por período e durante *t* períodos de tempo é:

Montante após 1 período:

$$M_1 = C + C.i = C.(1+i)$$

Montante após 2 períodos:

$$M_2 = M_1 + M_1.i$$

$$M_2 = M_1.(1+i) = C.(1+i).(1+i) = C.(1+i)^2$$

Montante após 3 períodos:

$$M_3 = M_2 + M_2.i$$

$$M_3 = M_2.(1+i) = C.(1+i)^2.(1+i) = C.(1+i)^3$$

Fica claro, portanto, perceber, por generalização, que, após t períodos, o montante será dado por:

$$M_t = M_{t-1} + M_{t-1}.i$$

$$M_t = M_{t-1}.(1+i) = C.(1+i)^{t-1}.(1+i) = C.(1+i)^t$$

Como a taxa de juros tem de ser expressa na base unitária, teremos,

$$M = C.\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$$

Utilizando esta fórmula para o exemplo exposto no quadro 2, teremos o seguinte montante:

$$M = R\$100{,}00.\left(1+\frac{3}{100}\right)^5 = R\$100{,}00.(1{,}03)^5$$

Empregando a função potência na calculadora científica, temos que:

$$M = R\$100{,}00.1{,}15927407 = R\$115{,}93$$

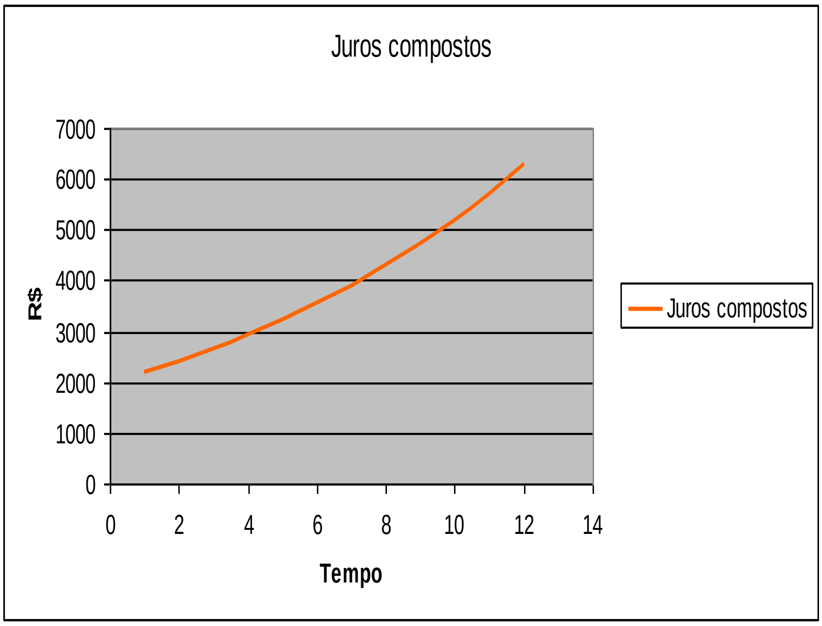
Logo o juro produzido por este capital durante 5 meses é de:

$$J = M - C$$

$$J = R\$115{,}93 - R\$100{,}00 = R\$15{,}93$$

O gráfico a seguir mostra o crescimento dos juros em regime de capitalização composta ao longo do tempo de um capital de R$ 2000,00 aplicado por 12 meses a uma taxa de 10% ao mês que acumula um montante de R$ 6276,00 no final do período.

Gráfico 1: Gráfico dos Juros Compostos.

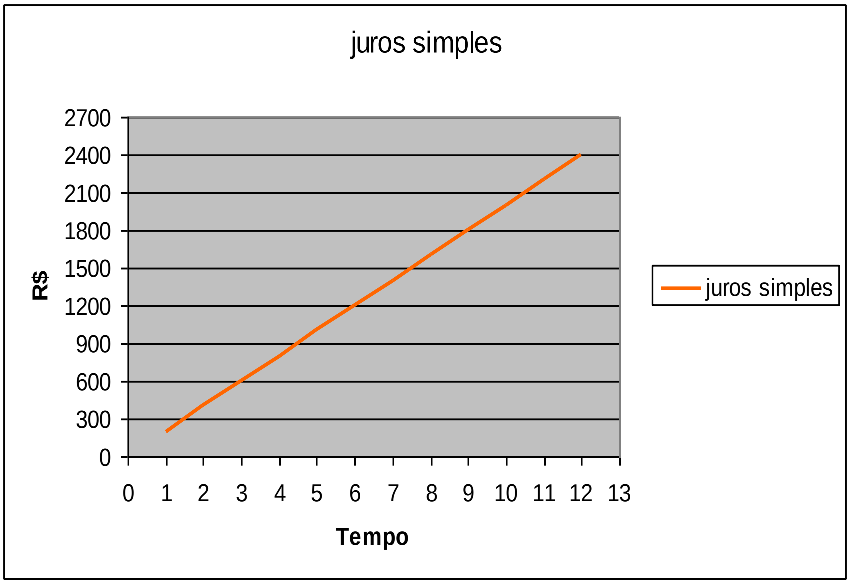


Fonte: Fictícia

3.4.1 Juros Simples X Juros Compostos

O gráfico abaixo mostra que os juros simples crescem em forma de função linear do tipo $f(x) = K.x$. Considerando o produto $C.i$ como constante K e t a variável x, teremos como gráfico uma reta. Por exemplo, dado um capital de R$ 200,00 à taxa de 10% ao mês num de período de 12 meses, o gráfico 2 mostra o crescimento linear dos juros em função do tempo.

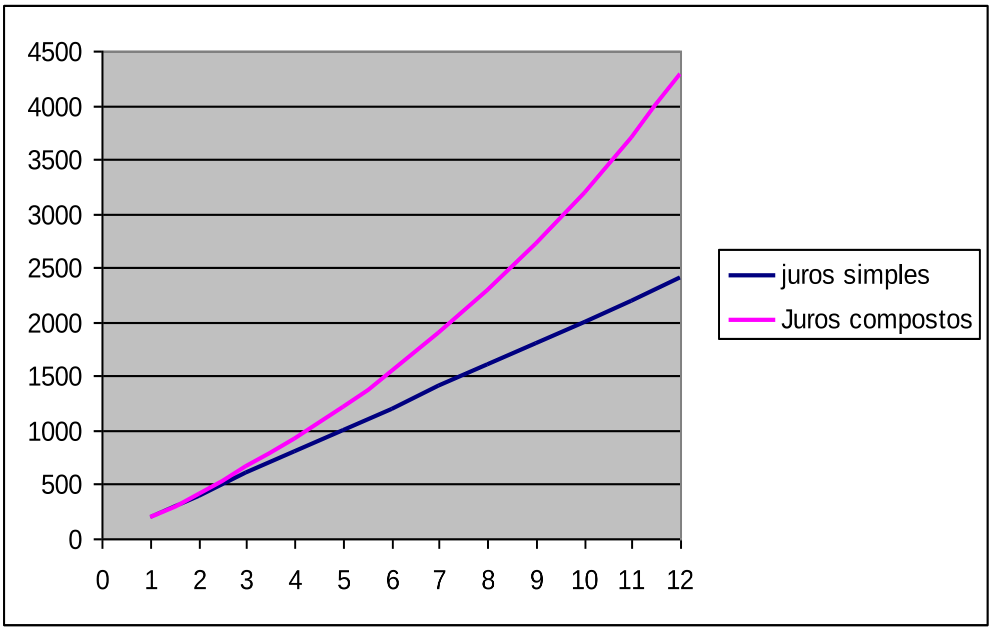
Gráfico 2: O gráfico dos Juros Simples é uma reta



Fonte: Fictícia

Concernente ao juro composto, o gráfico 1 retrata bem uma função exponencial, onde todas as propriedades das exponenciais podem ser empregadas no regime composto. Para visualizarmos melhor este comportamento, tomemos como exemplo um capital de R$ 200,00 sob uma taxa de 10% ao mês. Verifica-se que os juros serão coincidentes para o primeiro período, porém, a partir do segundo período nota-se a diferença no crescimento dos juros composto em relação ao simples. Enquanto a curva que representa o crescimento dos juros composto assume a forma de uma função exponencial a reta demonstra o crescimento linear dos juros simples.

Gráfico 3: Diferença gráfica do juros simples para o composto



Fonte: Fictícia

3.5 DESCONTO COMPOSTO

Para Crespo (2009) o conceito de desconto composto é o mesmo de desconto simples, ou seja, o abatimento que se recebe pela quitação adiantada de um título. No desconto comercial a taxa de desconto incide, no primeiro período, sobre o valor futuro do título, o segundo período, sobre valor futuro do título menos o valor do desconto correspondente ao primeiro período, e assim sucessivamente os períodos seguintes.

Conforme Mathias e Gomes (1993) Considerando que o desconto comercial praticamente não é usado entre nós, nos restringiremos ao estudo do desconto composto racional.

Conceituando valor atual, em regime de juros composto o valor atual de um valor nominal N, disponível no fim de t períodos, à taxa i relativa a esse período, é aquele que aplicado juros compostos durante t períodos, à taxa i produz o montante N. Assim temos:

$$N = A.\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t}$$

$$A = \frac{N}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t}}$$

$$A = N.\left(1+\frac{i}{100}\right)^{-t}$$

O fator $\left(1+\frac{i}{100}\right)^{-t}$ é denominado, conforme Hazzan (2007), de fator de descapitalização. Tomemos a seguinte situação, uma pessoa que tenha uma dívida de R$ 5000,00 vencível daqui a 4 meses, recebe uma proposta para saldá-la, considerando uma taxa de desconto de 1,5% ao mês, sob regime composto, qual o valor atual da dívida? O valor nominal dessa dívida é R$ 5000,00 a taxa de desconto é de 1,5% ao mês e o período é de 4 meses, como $A = N.\left(1+\frac{i}{100}\right)^{-t}$, tem-se:

$$A = 5000.\left(1+\frac{1,5}{100}\right)^{-4}$$

Logo o valor atual da dívida é de:

$$A = R\$4710,92$$

Pela definição de valor atual, utilizando R$ 4710,92 e aplicando a juros compostos à taxa de 1,5% ao mês durante 4 meses deve-se ter o valor nominal do título, ou seja, R$ 5000,00. Empregando a fórmula do montante $M = C.\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$ com C igual ao valor nominal N, o montante será igual a:

$$M = 4710{,}92.\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)^4$$

logo depois de realizada corretamente as operações e arredondando os valores decimais o montante equivalerá a R$ 5000,00, o que confirma a definição.

3.6 TAXAS PROPORCIONAIS E EQUIVALENTES

3.6.1 Taxas Proporcionais no Regime de Capitalização Simples:

Duas taxas são proporcionais quando guardam entre si as mesmas proporções que os prazos, segundo Crespo (2009) dadas às taxas *i* relativa ao tempo *t* e *i'* relativa ao tempo *t'*, referidos a mesma unidade, temos:

$$\frac{i}{i'} = \frac{n}{n'}$$

Tomando, por exemplo, uma aplicação, no regime simples, de R$ 100,00 por durante 12 meses sob taxa de juro a 18% ao ano, qual o valor dos juros? Observa-se que a unidade do tempo de aplicação é diferente da unidade de tempo da taxa de juro, com isso, faz-se necessário transformar os dois para a mesma unidade de tempo. Para isso, vamos transformar a taxa de juro, que está em ano, para mês. Como um ano tem 12 meses, basta dividirmos a taxa de juros anual por 12, logo tem-se a taxa de juros ao mês. Então:

$$i' = \frac{i_{ano}}{t_{meses}} = \frac{18}{12} = 1{,}5\% a.m.$$

Verificando a proporcionalidade, temos:

$$\frac{i}{i'} = \frac{t}{t'} \rightarrow \frac{18}{1{,}5} = \frac{12}{1} \, ou \, \frac{0{,}18}{0{,}015} = \frac{12}{1}$$

Determinando os juros gerado nesta aplicação, temos:

$$j = \frac{R\$100{,}00.1{,}5.12}{100} = R\$18{,}00$$

Portanto, a conversão da taxa de juros proporcional não requer mais do que uma divisão ou multiplicação. Quando pede-se para calcular a taxa mensal proporcional a 30% ao ano, basta lembrar que 1 ano equivale a 12 meses, e portanto, 30 divido por 12 é igual a 2,5% ao mês. Quando quer se transformar a taxa anual para bimestral, basta dividirmos 30% por 6 bimestres do ano, cuja taxa será de 5% ao bimestre. Assim se dá para trimestre, quadrimestre, semanal e diária.

3.6.2 Taxas Equivalentes Regime de Capitalização Simples:

Hazzan (2007) define taxas equivalentes a juros simples como sendo aquelas que aplicadas em um mesmo capital pelo mesmo prazo gere os mesmos juros. Assim, em juros simples as taxas proporcionais são equivalentes. Por exemplo, um capital de R$ 2000,00 a taxa de 9% ao trimestre, durante 2 trimestres, encontra-se

$$j = \frac{R\$200{,}00.9.2 trimestres}{100} = R\$36{,}00$$

de juros, o que equivale aplicar o mesmo capital a taxa de 3% ao mês durante 6 meses, ou seja, dividindo a taxa de 9% ao trimestre por 3 meses (tempo de 1 trimestre) encontra-se a taxa equivalente a 3% ao mês. Como o tempo de aplicação são de 2 trimestres que corresponde a 6 meses, então temos:

$$j = \frac{R\$200{,}00.3.6 meses}{100} = R\$36{,}00$$

Se j_1 e j_2 são os juros simples gerados pela aplicação de um capital *C* tomado as taxas equivalente acima durante um ano, facilmente perceberemos que $j_1 = j_2$. Portanto, a igualdade dos juros mostra-nos que as taxas acima são realmente equivalentes.

3.6.3 Taxas Proporcionais no Regime de Capitalização Composta:

O que acontece se empregarmos o conceito de taxa proporcional no regime de capitalização composta? Tomemos a seguinte situação: Um capital de R$100,00 é aplicado em regime composto sob uma taxa de 18% ao ano, durante 12 meses. Os juros gerados considerando os 12 meses como um ano, teremos:

$$M = R\$100{,}00.\left(1+\frac{18}{100}\right)^{1} = R\$118{,}00$$

Agora, se considerarmos a taxa de 1,5% ao mês como uma taxa proporcional a taxa anual de 18% e o período de investimento em meses, tem-se:

$$M = R\$100{,}00.\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)^{12} = R\$119{,}56$$

Comparando os valores em ambas situações, os mesmos deveriam dar os mesmos valores, contudo os juros foram diferentes. Isso evidencia que as taxas proporcionais não funcionam para o regime compostos (PILÂO & HUMMEL, 2003). Então, como resolver este tipo de situação? Para isso, vejamos as taxas equivalentes.

3.6.4 Taxas Equivalentes no regime de capitalização composta.

Segundo HAZZAN (2007) taxas equivalentes são aquelas em que se convertendo uma taxa de um período, em outra de um outro período, de tal forma que ambas formem o mesmo montante, ou seja, em regime de capitalização composta, duas taxas são equivalentes quando se referindo a períodos de tempos de diferentes, fazem um capital produzir um mesmo montante num mesmo tempo. Utilizando o mesmo exemplo acima, um capital de R$100,00 é aplicado em regime composto sob uma taxa de 18% ao ano, durante 12 meses, qual o juro produzido por este capital? Na resolução deste problema utilizando taxas proporcionais, verificou-se que não vale para o regime composto. Para que funcione, faz-se necessário que os montantes sejam iguais, para isso temos que:

$$M_{1ano} = M_{12meses}$$

$$C.\left(1+\frac{i_{ano}}{100}\right)^{1} = C.\left(1+\frac{i_{mês}}{100}\right)^{12}$$

$$\left(1+\frac{i_{ano}}{100}\right)^{1} = \left(1+\frac{i_{mês}}{100}\right)^{12}$$

Aplicando esta relação no problema supracitado, temos:

$$\left(1+\frac{18}{100}\right)^{1}=\left(1+\frac{i_{mês}}{100}\right)^{12}$$

$$1{,}18=\left(1+\frac{i_{mês}}{100}\right)^{12}$$

$$\sqrt[12]{1{,}18}=\sqrt[12]{\left(1+\frac{i_{mês}}{100}\right)^{12}}$$

$$1{,}013888=1+\frac{i_{mês}}{100}$$

$$1{,}013888-1=\frac{i_{mês}}{100}$$

$$100.0{,}013888=i_{mês}$$

$$i_{mês}=1{,}3888\%$$

Agora vamos confirmar se os montantes serão iguais. Primeiro com a taxa de 18% ao ano, durante um ano:

$$M=R\$100{,}00.\left(1+\frac{18}{100}\right)^{1}=R\$118{,}00$$

Considerando a taxa $i_{mês}=1{,}3888\%$, durante 12 meses, temos:

$$M=R\$100{,}00.\left(1+\frac{1{,}3888}{100}\right)^{12}=R\$100{,}00.1{,}17999$$

$$M=R\$117{,}999\approx R\$118{,}00$$

Observa-se que a taxa equivalente gerou o mesmo montante quando trata-se do regime composto. Isto evidencia que neste regime o que prevalece são as taxas equivalentes e não as taxas proporcionais (CRESPO, 2009). O raciocínio é análogo para outras unidades de tempo das taxas, ou seja, a relação entre elas é a seguinte:

$$\left(1+\frac{i_{ano}}{100}\right)^{1}=\left(1+\frac{i_{mês}}{100}\right)^{12}=\left(1+\frac{i_{bimestral}}{100}\right)^{6}=\left(1+\frac{i_{semestral}}{100}\right)^{2}=\left(1+\frac{i_{trimestral}}{100}\right)^{4}=\left(1+\frac{i_{quadrimestral}}{100}\right)^{3}$$

3.6.5 Taxa real, de inflação e aparente.

Segundo Antônio Crespo (Saraiva 1999), denomina-se taxa aparente aquela que vigora nas operações correntes. Quando não há inflação, a taxa aparente é igual à taxa real; porém, quando há inflação, a taxa aparente é formada por dois componentes; um correspondente à inflação e outro correspondente ao juro real.

Sendo:

- **C** o capital (principal) inicial;
- **i_r** a taxa real;
- **i_a** a taxa aparente;
- **I** a taxa de inflação.

Podemos acontecer os seguintes casos:

1- Com uma inflação igual a zero e uma taxa de juros i_r, o capital inicial se transformará, ao final de um período, em: C.(1 + i_r).

2- Com uma taxa de inflação I, o capital inicial, ao final de um período, equivalerá a; C.(1 + I).

3- Com uma taxa de juros i_r e uma taxa de inflação I, simultaneamente, o capital inicial equivalerá a: C. (1 + i_r).(1 + I).

4- Com uma taxa aparente i_a, o capital inicial se transformará, ao final de um período, em: C. (1 + i_a).

Como 3 e 4 são expressões equivalentes, já que ambos traduzem o valor efetivamente recebido, temos:

$$\mathrm{C.}\,(1+\mathrm{i_a}) = \mathrm{C.}\,(1+\mathrm{i_r}).(1+\mathrm{I})$$

$$(1+i_a) = (1+I).(1+i_r)$$

Seja uma economia, com inflação mensal de 10 % a.m. Imagine que um investidor aplique R$ 1.000,00 à taxa mensal efetiva de 15% a.m. Neste caso, ao final de 1 mês de aplicação, podemos fazer a seguinte análise:

Capital inicial investido:1.000

Capital inicial corrigido pelo índice da inflação: 1.100

Montante da aplicação ao final do período: 1.150

Ganho aparente (nominal) do investidor: 150

Ganho real do investidor: 50

A taxa real de juros do período: I_r=50/1.100 = 0,0455 a.m.= 4,55% a.m.

4 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO

Amortização é o abatimento de uma dívida em mais de uma parcela, ou seja, a extinção de uma dívida em pagamentos periódicos (SOBRINHO, 2000). Este capítulo abordará dois tipos de amortização, os mais praticados no mercado financeiro, o sistema de amortização constante e o sistema de amortização francês.

4.1 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

Atualmente muitos brasileiros tem feito financiamento da casa própria. E neste tipo de financiamento é praticado a agência financiadora adota o sistema de amortização constante-SAC. Suas características são a prestação que não é fixa e é decrescente, os juros são decrescentes, saldo devedor decrescente e a amortização é constante, por isso a denominação deste sistema (IEZZI & HAZZAN, 2004).

A forma de determinar as prestações são dadas pelas fórmulas abaixo:

$$A = \frac{C}{t}$$

Onde A corresponde ao valor da amortização, C é o valor do capital e t corresponde ao número de prestações que se pretende pagar. Posteriormente, tem-se:

$$P = A + J$$

Sendo que P é o valor da prestação e J o valor do juro. Por fim, temos:

$$J = \frac{SD_0 . i}{100}$$

Onde SD_0 é o saldo devedor anterior e i a taxa de juros (MATHIAS & GOMES, 1993). Tomemos a seguinte situação, uma pessoa solicitou junto a uma entidade bancária um empréstimo no valor de R$20.000,00 para ser paga em 5 prestações mensais iguais e consecutivas, sendo que o vencimento da primeira prestação será de 30 dias após a assinatura do contrato. Sabe-se que a taxa de juro praticado é de 10% ao mês, com isso qual o valor da prestação, os juros e a cota de amortização de cada mês considerando o SAC. Primeiro determinemos a cota da amortização, para isso basta calcular A, ou seja,

$$A = \frac{R\$20.000,00}{5}$$

$$A = R\$4.000,00$$

O saldo devedor é descontado apenas o valor da amortização, ou seja,

1ª parcela: $R\$20.000,00 - R\$4.000,00 = R\$16.000,00$

2ª parcela: $R\$16.000,00 - R\$4.000,00 = R\$12.000,00$

3ª parcela: $R\$12.000,00 - R\$4.000,00 = R\$8.000,00$

4ª parcela: $R\$8.000,00 - R\$4.000,00 = R\$4.000,00$

5ª parcela: $R\$4.000,00 - R\$4.000,00 = R\$0,00$

Calculemos o valor do juro a ser cobrado na 1ª parcela. Assim,

$$J_1 = \frac{SD_0.i}{100} = \frac{R\$20000,00.10}{100} = R\$2.000,00$$

Agora determinando o valor da 1ª parcela:

$$P_1 = A + J_1 = R\$4.000,00 + R\$2.000,00$$

$$P_1 = R\$6.000,00$$

Organizando em um quadro, temos:

Quadro3: Sistema de Amortização Constante

t	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	-R$ 20.000,00
1	R$ 6.000,00	R$ 2.000,00	R$ 4.000,00	-R$ 16.000,00
2			R$ 4.000,00	-R$ 12.000,00
3			R$ 4.000,00	-R$ 8.000,00
4			R$ 4.000,00	-R$ 4.000,00
5			R$ 4.000,00	-

Seguindo este raciocínio podemos calcular os juros de cada parcela, haja vista que o mesmo depende do saldo devedor após o pagamento da parcela. Então:

$$J_2 = \frac{R\$16000,00.10}{100} = R\$1.600,00$$

$$J_3 = \frac{R\$12000,00.10}{100} = R\$1.200,00$$

$$J_4 = \frac{R\$8000,00.10}{100} = R\$800,00$$

$$J_5 = \frac{R\$4000,00.10}{100} = R\$400,00$$

Com os valores dos juros definidos, podemos determinar o valor de cada parcela, basta somar o juro de um dado mês com a parcela correspondente a ele.

$P_2 = R\$4.000,00 + R\$1.600,00 = R\$5.600,00$

$P_3 = R\$4.000,00 + R\$1.200,00 = R\$5.200,00$

$P_4 = R\$4.000,00 + R\$800,00 = R\$4.800,00$

$P_5 = R\$4.000,00 + R\$400,00 = R\$4.400,00$

O quadro abaixo representa o desenvolvimento do SAC.

Quadro 4: Desenvolvimento do SAC

t	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	-R$ 20.000,00
1	R$ 6.000,00	R$ 2.000,00	R$ 4.000,00	-R$ 16.000,00
2	R$ 5.600,00	R$ 1.600,00	R$ 4.000,00	-R$ 12.000,00
3	R$ 5.200,00	R$ 1.200,00	R$ 4.000,00	-R$ 8.000,00
4	R$ 4.800,00	R$ 800,00	R$ 4.000,00	-R$ 4.000,00
5	R$ 4.400,00	R$ 400,00	R$ 4.000,00	-

Observa-se que o valor da amortização é constante, os juros e as prestações são decrescentes.

4.2 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS-SAF (TABELA PRICE)

Antes de abordarmos a referida temática, precisa-se de abordar séries de pagamento. No juros composto, num empréstimo ou numa compra, os mesmos eram feitos para serem pagos num único pagamento. Em série de pagamento, será feito em mais de uma parcela. O cliente fará vários depósitos por vários meses até chegarmos a um montante.

As séries de pagamento são divididas em dois tipos, a postecipada e a antecipada. A série de pagamento postecipada é a que não existe uma entrada ou um depósito inicial e é bastante utilizada em empréstimos e financiamentos. Já a série de pagamento antecipada exige um depósito inicial ou uma entrada, e é bastante utilizada em investimentos. Faz-se necessário que o valor da entrada ou depósito inicial seja igual das outras prestações (SOBRINHO, 2000).

O sistema de amortização francês-SAF tem alguma características básicas, são elas: as parcelas são fixas, os juros são decrescentes, a amortização é crescente e o saldo devedor é decrescente (CRESPO, 2009). Para desenvolver este sistema em série postecipada, são utilizadas as seguintes fórmulas:

$$P = C.\left[\frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t}.\frac{i}{100}}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t}-1}\right]$$

Ou

$$P = M.\left[\frac{\frac{i}{100}}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t}-1}\right]$$

Já nas séries antecipadas, o cálculo das prestações são regidas pelas seguintes fórmulas:

$$P = \frac{C}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}.\left[\frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t}.\frac{i}{100}}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t}-1}\right]$$

Ou

$$P = \frac{M}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}.\left[\frac{\frac{i}{100}}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t}-1}\right]$$

O significado das letras nas fórmulas acima são: P corresponde ao valor da prestação, i a taxa de juro, t o prazo, M o montante e C o valor do capital (entrada, aplicação inicial). Lembrando que a prestação de qualquer uma das séries é formada por duas partes, a soma da amortização com o juros (HAZZAN, 2007). Para ilustrar melhor a utilização do SAF, vejamos a seguinte situação. Uma pessoa solicitou junto ao banco um empréstimo de R$20.000,00 para ser pago em 5 parcelas iguais e consecutivas, onde a 1ª parcela vencerá após 30 dias da efetivação do contrato de empréstimo, sob uma taxa de 10% ao mês. Nessas condições, qual o valor das prestações, dos juros e as cotas de amortização de cada mês? Verificamos que o pagamento da 1ª parcela ocorrerá 1 mês após a data da contratação, logo estamos diante uma série postecipada. Os dados que temos no problema são:

$C = R\$20.000,00$

$i = 10\% a.m.$

$t = 5 meses$

Para desenvolvermos precisamos de usar a 1ª fórmula da série postecipada, logo:

$$P = C.\left[\frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^t.\frac{i}{100}}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^t - 1}\right]$$

$$P = R\$20000,00.\left[\frac{\left(1+\frac{10}{100}\right)^5.\frac{10}{100}}{\left(1+\frac{10}{100}\right)^5 - 1}\right] = R\$20000,00.\left[\frac{(1,1)^5.0,1}{(1,1)^5 - 1}\right]$$

$$P = R\$20000,00.\left(\frac{1,61051.0,1}{1,61051 - 1}\right)$$

$$P = R\$20000,00.\frac{0,161051}{0,61051} = R\$20000,00.0,263797481$$

$$P = R\$5.275,95$$

Agora sabemos que o valor de cada prestação está no valor de R$5.275,95 e que o juro da parcela t é cobrado em cima do saldo devedor depois do pagamento da parcela (t-1), ou seja, o juros da 2ª prestação é cobrado em cima do saldo devedor após o pagamento da 1ª prestação, e assim sucessivamente. Também sabemos que o valor da prestação é a soma dos juros com a amortização, ou seja,

$$P = J + A$$

Onde P corresponde a parcela, o J corresponde aos juros e A é a amortização. Também temos de lembrar que é somente a amortização que diminui o saldo devedor, o juro não reduz tal saldo. Diante desses pontos podemos verificar neste exemplo que o juro da 1ª parcela é dado por

$$J_1 = \frac{i.SD_0}{100}$$

Sendo que SD_0 é o saldo devedor, i a taxa de juro e J corresponde aos juros, logo,

$$J_1 = \frac{10.R\$20000,00}{100} = R\$2.000,00$$

Calculando a amortização da 1ª prestação, temos:

$$P = J + A$$

$$A_1 = P - J_1$$

$$A_1 = R\$5.275,95 - R\$2.000,00 = R\$3.275,95$$

Quanto ao novo saldo devedor, temos:

$$SD_1 = SD_0 - A_1$$

$$SD_1 = R\$20.000,00 - R\$3.275,95 = R\$16.724,05$$

Novamente faremos este processo para a 2ª parcela.

$$J_2 = \frac{i.SD_1}{100} = \frac{10.R\$16724,95}{100} = R\$1.672,49$$

Determinando a amortização da 2ª prestação, teremos:

$$A_2 = P - J_2 = R\$5.275{,}95 - R\$1.672{,}49 = R\$3.603{,}46$$

O saldo devedor é:

$$SD_2 = SD_1 - A_2 = R\$16.724{,}05 - R\$3.603{,}46 = R\$13.120{,}59$$

Efetuando o cálculo para a 3ª parcela:

$$J_3 = \frac{i.SD_2}{100} = \frac{10.R\$13120{,}59}{100} = R\$1.312{,}06$$

A amortização correspondente à 3ª prestação:

$$A_3 = P - J_3 = R\$5.275{,}95 - R\$1.312{,}06 = R\$3.963{,}89$$

E o saldo devedor é de:

$$SD_3 = SD_2 - A_3 = R\$13.120{,}59 - R\$3.963{,}89 = R\$9.156{,}70$$

Analisando o cálculo para a 4ª prestação, temos:

$$J_4 = \frac{i.SD_3}{100} = \frac{10.R\$9156{,}70}{100} = R\$915{,}67$$

Quanto à amortização:

$$A_4 = P - J_4 = R\$5.275{,}95 - R\$915{,}67 = R\$4.360{,}28$$

E o saldo devedor:

$$SD_4 = SD_3 - A_4 = R\$9.156{,}70 - R\$4.360{,}28 = R\$4.796{,}42$$

Para a última parcela, temos:

$$J_5 = \frac{i.SD_4}{100} = \frac{10.R\$4796{,}42}{100} = R\$479{,}64$$

$$A_5 = P - J_5 = R\$5.275{,}95 - R\$479{,}64 = R\$4.796{,}31$$

$$SD_5 = SD_4 - A_5 = R\$4.796{,}42 - R\$4.796{,}31 = R\$0{,}11$$

Expondo esses valores em uma tabela, temos a chamada tabela price:

Quadro 5: Sistema de Amortização Francês (Tabela Price)

t	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	R$ 20.000,00
1	R$ 5.275,95	R$ 2.000,00	R$ 3.275,95	R$ 16.724,05
2	R$ 5.275,95	R$ 1.672,49	R$ 3.603,46	R$ 13.120,59
3	R$ 5.275,95	R$ 1.312,06	R$ 3.963,89	R$ 9.156,70
4	R$ 5.275,95	R$ 915,67	R$ 4.360,28	R$ 4.796,42
5	R$ 5.275,95	R$ 479,64	R$ 4.796,31	R$ 0,11

Fonte: Fictícia

Observa-se que após o pagamento da 5ª parcela ficou um valor de R$0,11 isto se deu em virtude do erro de arredondamento, principalmente no cálculo do valor da parcela, pois ao final sempre se tem um saldo devedor nulo. Nos sistemas informatizados das instituições bancárias, os softwares utilizados trabalham com milhares de casas decimais, enquanto que neste exemplo utilizou-se apenas 9 casas decimais.

3 PROBLEMAS DE CONCURSOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Neste capítulo, será abordado algumas questões de matemática financeira que vieram em concursos públicos. As mesmas são identificadas de que provas se originam, e é exposta pelo menos uma forma de se resolver o problema.

A *1ª questão* é da Prova aplicada em janeiro de 2014 para o concurso do Tribunal Regional Federal da 3ª Região, na área de atuação jurídica, organizada pela Fundação Carlos Chagas-FCC, para o cargo de Analista Judiciário-Contadoria, nível superior, área de formação: Administração. A mesma é intitulada:

> Dois capitais, apresentando uma soma igual a R$ 40.000,00, são aplicados sob o regime de capitalização simples. O primeiro capital é aplicado, durante 9 meses, a uma taxa de 12,0% ao ano. O segundo capital é aplicado, durante 10 meses, a uma taxa de 14,4% ao ano. Se, no final dos respectivos prazos de aplicação, o valor do montante da segunda aplicação supera o valor do montante da primeira aplicação em R$ 11.650,00, então a soma dos valores dos juros correspondentes das duas aplicações é, em R$, igual a:

Este problema envolve o regime de capitalização simples, onde os dados são:

$C_1 + C_2 = R\$40.000,00$

$M_2 = M_1 + R\$11.650,00$

Para o 1º capital temos:

$C_1 = ?$

$t_1 = 9 meses$

$i_1 = 12\% a.a.$

Para o 2º capital temos:

$C_{21} = ?$

$t_2 = 10 meses$

$i_2 = 14,4\% a.a.$

O questionamento é:

$j_1 + j_2 = ?$

Sabemos que a fórmula do montante é:

$$M = C.\left(1 + \frac{i.t}{100}\right)$$

Quanto as taxas, consideraremos as taxas proporcionais, pois no regime de capitalização simples, as mesmas valem (CRESPO, 2009), ou seja, a 1ª taxa de 12% ao ano é proporcional a 1% ao mês, e a 2ª taxa de 14,4% ao ano é proporcional a 1,2 % ao mês. Bastou dividir ambas as taxas por 12 meses, assim determina-se o valor da taxa ao mês. Então, determinando o 1º montante, temos:

$$M_1 = C_1.\left(1+\frac{i_1.t_1}{100}\right) = C_1.\left(1+\frac{1.9meses}{100}\right) = C_1.1{,}09$$

Para o 2º montante:

$$M_2 = C_2.\left(1+\frac{i_2.t_2}{100}\right) = C_2.\left(1+\frac{1{,}2.10meses}{100}\right) = C_2.1{,}12$$

Substituindo M_1 e M_2 na equação $M_2 = M_1 + R\$11.650{,}00$, teremos:

$$1{,}12.C_2 = 1{,}09.C_1 + R\$11650{,}00$$

Isolando C_1 na equação $C_1 + C_2 = R\$40.000{,}00$ temos:

$$C_1 = R\$40.000{,}00 - C_2$$

E substituindo na expressão $1{,}12.C_2 = 1{,}09.C_1 + R\$11650{,}00$, tem-se:

$$1{,}12.C_2 = 1{,}09.(40000 - C_2) + R\$11650{,}00$$

$$1{,}12.C_2 + 1{,}09.C_2 = 11650{,}00 + 43600$$

$$2{,}21.C_2 = 55250$$

$$C_2 = R\$25.000{,}00$$

Como $C_1 + C_2 = R\$40.000{,}00$ teremos que:

$$C_1 + R\$25.000{,}00 = R\$40.000{,}00$$

$$\therefore C_1 = R\$15.000{,}00$$

Sabendo os valores de cada capital aplicado, agora temos condições de determinarmos os valores dos juros em cada aplicação. Assim,

$$j_1 = \frac{C_1.i_1.t_1}{100} = \frac{R\$15000,00.9meses.1}{100} = R\$1.350,00$$

E o juro da 2ª aplicação é:

$$j_2 = \frac{C_2.i_2.t_2}{100} = \frac{R\$25000,00.10meses.1,2}{100} = R\$3.000,00$$

E por fim, respondendo o problema, temos que a soma dos juros das aplicações é:

$$j_1 + j_2 = R\$1.350,00 + R\$3.000,00 = R\$4.350,00$$

Um *2º problema* foi extraído da prova do concurso público do Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES), em 2013, para cargo de economista, tendo como banca avaliadora a CESGRANRIO. A questão reza:

> Uma empresa toma emprestado R$ 1 milhão de um banco. Compromete-se a pagar o empréstimo em 10 prestações iguais consecutivas, começando no período seguinte ao do empréstimo. Para calcular o valor das prestações, é usado o Sistema de Amortização Constante com a taxa de juros compostos de x% por período. Se a segunda prestação devida for de R$ 109.000,00, conclui-se que a taxa de juros x, em % por período, é de

Este problema envolve o sistema SAC e extraindo os dados da questão, temos:

$$C = R\$1.000.000,00$$
$$t = 10\,parcelas$$
$$p_2 = R\$109.000,00$$

Para se determinar o valor da amortização, basta dividir o valor emprestado pelo número de parcelas, ou seja,

$$A = \frac{C}{t} = \frac{R\$1.000.000,00}{10}$$

$$A = R\$100.000,00$$

Sabe-se que o saldo devedor para a 2ª parcela é:

$$SD_1 = SD_0 - A = R\$1.000.000,00 - R\$100.000,00$$

$$SD_1 = R\$900.000,00$$

Como a 2ª parcela é a soma da amortização com os juros, logo temos:

$$P_2 = A + j_2$$

$$R\$109.000,00 = R\$100.000,00 + j_2$$

$$\therefore j_2 = R\$9.000,00$$

Utilizando a fórmula dos juros, temos:

$$j_2 = \frac{SD_1.i}{100}$$

$$R\$9.000,00 = \frac{R\$900000,00.i}{100}$$

$$\therefore i = 1\%$$

Um 3º *problema* foi extraído da prova do concurso público da Caixa Econômica Federal, em 2013, para cargo de Técnico bancário, tendo como banca avaliadora a CESPE. A questão reza:

> Com relação a taxas de juros, julgue os itens seguintes.
>
> I - No regime de juros simples, taxas de juros equivalentes e taxas de juros proporcionais são consideradas equivalentes.
>
> II - No regime de juros compostos, se a taxa de juros relativa a um mês for igual a i, então a taxa de juros relativa a N meses será igual a j, expressa por $j = e^{N.\ln(1+i)} - 1$
>
> III - Considerando 1,125 como valor aproximado para $1{,}04^3$, é correto afirmar que a taxa efetiva semestral de 24% ao semestre, com capitalização mensal, é inferior a 26%.
>
> IV - Na aplicação de um capital à taxa de juros de 9% ao ano, com capitalização mensal, a taxa de 9% corresponde à taxa nominal — o que significa que o capital está aplicado à taxa de juros de 0,75% ao mês.
>
> V - Se, em determinado mês, a taxa de inflação tiver sido de 25% e um capital for investido à taxa de 30% ao mês, então, nesse caso, o percentual de 30% corresponderá à taxa de juros aparente, e o de 5%, à taxa real.
>
> Estão certos apenas os itens
>
> A I, II e III.
>
> B I, II e IV.
>
> C I, III e V.
>
> D II, IV e V.
>
> E III, IV e V.

Este problema envolve o juros simples e composto, taxas proporcional, equivalente, real e aparente, temos:

O item I, temos como verdadeiro, pois no juros simples as taxas equivalentes e proporcionais são iguais (equivalentes).

O item II, temos a equação $j = e^{N.\ln(1+i)} - 1$ que é verdadeira, pois temos:

$$e^{N.\ln(1+i)} = e^{\ln(1+i)^N} = (1+i)^N ,$$

Logo temos: $j = (1+i)^N - 1$, que é um capital C = 1= 100%, em

$$j = M - C \rightarrow j = C(1+i)^N - C = C\left((1+i)^N - 1\right) \rightarrow j = (1+i)^N - 1$$

O item III, é falso pois, taxa de 24 % ao semestre, com capitalização mensal, temos então que esta taxa é proporcionalmente 24 : 6 = 4% ao mês = 0,04 a.m;

Logo:

$$(1+i_s)^{1semestre} = (1+0{,}04)^6 = \left((1{,}04)^3\right)^2 = (1{,}125)^2 = 1{,}265625 \rightarrow i_s = 26{,}562\%$$

O item IV está correto, pois, a taxa de 9% a.a., com capitalização mensal, temos a proporcional de 9 : 12 = 0,75% a.m.

O item V, não esta correto, pois, a inflação sendo 25%, o novo montante corrigido será de 125%; E se o investimento ganhou (aparente) 30%, temos 130%, tendo um ganho real de 5% sobre os 125% (100%), temos:

$\frac{5}{125} = 0{,}04 = 4\%$, que é a taxa real.

Portanto o item correto é o B.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante dos fatos mencionados, verificou-se nesta pesquisa as fases em que o sistema capitalista é dividido, o mercantil, o industrial e o financeiro. Vivemos nesta terceira fase, e precisamos mais do nunca de entender como funciona, haja vista que todo o modo de vida social do ser humano gira em torno do sistema econômico. Nosso salário, bolsas, pensões, duplicatas a pagar, promissórias, contas, taxas e qualquer tipo de movimentação financeira, as instituições bancárias estão envolvidas e faz-se necessário entendermos como funciona tal sistema.

Observamos que neste estudo, tal abordagem foi feita, envolveu-se sobre a porcentagem, o juro o desconto e a amortização. Nesta dissertação, mostrou-se como a matemática financeira pode contribui no Ensino Médio e na resolução de questões de concursos públicos. Com isso o questionamento feito quanto a contribuição da matemática financeira para o ensino Médio e concursos públicos no âmbito econômico e financeiro, confirma a hipótese, onde acredito que a matemática financeira contribuição significativamente para os processos de ensino e aprendizagem dos problemas envolvendo o sistema financeiro no Ensino Médio e em provas de concursos públicos.

Em relação aos objetivos, os mesmo foram alcançados, pois foi feito a verificação de conceitos sobre juros, descontos, percentagem e amortização, em sites como do Banco do Brasil, casa da moeda do brasil e portal da economia, além de livros de autores renomados em nível nacional e até internacional, são os casos de Crespo, Hazzan, Iezzi, Sobrinho e outros como Stieler na utilização da planilha eletrônica excel. E quanto ao terceiro objetivo específico, o mesmo foi contemplado no quarto capítulo desta pesquisa, na resolução de problemas de concursos públicos.

Espero que esta pesquisa de cunho bibliográfico, seja fonte de pesquisa para professores do Ensino Médio e cursos de graduação envolvendo a disciplina de matemática financeira, pois na fase do capitalismo financeiro, é indispensável o estudo da matemática financeira.

REFERÊNCIAS

APPOLINÁRIO, Fábio. **Dicionário de metodologia científica: um guia para produção do conhecimento científico.** São Paulo: Atlas, 2004.

CRESPO, Antônio Arnot. **Matemática Financeira Fácil**. 14ª ed. Atual – São Paulo: Saraiva, 2009.

CRESPO, Antônio Arnot. **Matemática Financeira Fácil**. 13ª ed. Atual – São Paulo: Saraiva, 2002.

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. **Matemática Financeira.** 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

http://portaleconomia.com.br/moedas/dinheironomundo.shtml em 13/08/2013

http://www.casadamoeda.gov.br/portalCMB/menu/cmb/sobreCMB/origem-dinheiro.jsp em 10/09/2013

http://www.bcb.gov.br/?HISTDINBR as 20h de 20/08/2013

http://revistaescola.abril.com.br/lingua-portuguesa/fundamentos/qual-diferenca-porcentagem-percentagem-502947.shtml em 02/09/2013

http://www.brasilescola.com/matematica/historia-das-porcentagens.htm em 01/09/2013

http://www.infoescola.com/historia/capitalismo/ em 12/10/2013

IEZZI, Gelson, HAZZAN, Samuel, DEGENSZAJN, David, **Fundamentos de matemática elementar, volume 11,** 1ª edição, São Paulo: Atual, 2004.

MATHIAS, Washington Franco. GOMES, José Maria. Matemática Financeira. São Paulo: Atlas, 1993. ISBN 85-224-0812-2.

PILÂO, NivaldoElias. HUMMEL, Paulo Roberto Vampré. Matemática Financeira e Engenharia Econômica. A Teoria e a Prática da Análise de Projetos de Investimentos. São Pauo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

SOBRINHO, José Dutra Vieira. Matemática Financeira. 7ª Edição. São Paulo. Editora Atlas. 2000.

STIELER, Eugênio Carlos. FERREIRA, Márcio Violante (2006). **Um Estudo da Aplicação da Planilha do Excel no Ensino de Matemática Financeira**. Disponível em: http://www.limc.ufrj.br/htem4/papers/71.pdf> em 10/10/2013