Universidade Estadual de Santa Cruz

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNÓLGICAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Reflexões sobre o ensino da Trigonometria utilizando um teodolito caseiro

por

José Macêdo Leôncio[†]

Mestrado Profissionalizante em Matemática - Ilhéus - BA

Orientador: Francisco Bruno Souza Oliveira

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes obtido através da SBM.

José Macêdo Leôncio

Reflexões sobre o ensino da Trigonometria utilizando um teodolito caseiro

Ilhéus
2013

José Macêdo Leôncio

Reflexões sobre o ensino da Trigonometria utilizando um teodolito caseiro

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira

Universidade Estadual de Santa Cruz

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Ilhéus
2013

L582 Leôncio, José Macêdo.
Reflexões sobre o ensino da trigonometria utilizando um teodolito caseiro / José Macêdo Leôncio . – Ilhéus, BA: UESC, 2013.
xii, 123f. : il.

Orientador: Francisco Bruno Souza Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências e apêndice.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Trigonometria. 3. Teodolitos. 4. Aprendizagem. I. Título.

CDD 510.07

José Macêdo Leôncio

Reflexões sobre o ensino da Trigonometria utilizando um teodolito caseiro

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 01 de março de 2013:

Prof. Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira – Orientador

Prof. Dr. Enio Galinkin Jelihovschi

Prof. Dra. Célia Barros Nunes

Ilhéus - 2013

DEDICATÓRIA

"Herança do Senhor são os filhos; o fruto do ventre, seu galardão. Como flecha na mão do guerreiro, assim os filhos da mocidade. Feliz o homem que enche deles a sua aljava;" Louvo a Ti Senhor por todas as bênçãos recebidas, pelos meus filhos e filhas a quem dedico esta dissertação, para que lhes sirva de exemplo de que, com fé e com trabalho se conquista os sonhos a qualquer tempo.

AGRADECIMENTOS

Glorias Te dou Senhor!

Pois tuas mãos poderosas protegeram-me num acidente e suas bençãos me tem livrado dos perigos desta estrada ao longo destes dois anos de trabalho.
Desejo também estender meu sinceros agradecimentos a todos que participaram direta ou indiretamente desta extensa jornada. Á Minha Mãe, incansável encorajadoura dos meus desafios, herdeiro que sou de sua facilidade para com as letras teço merecidas homenagens.
A meus filhos Rafael e Gabriel e a minha esposa Ezenete, nem sempre paciente, que persistentemente suportaram meus momentos de exaustão e afastamento, peço desculpas e ofereço promessas de dias melhores após a conclusão deste desafio.
Às minhas filhas Fernanda e Nádia pelo apoio incondicional em todas as minhas batalhas. Agradeço hoje e sempre em todas as minhas orações.
Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Francisco Bruno Souza Oliveira pelo apoio e competência com que atuou, objetivo e dedicado, pois sua contribuição foi muito importante na realização deste trabalho.
Ao meu coordenador e amigo Professor Doutor Sérgio Motta Alves, representando todos os demais professores do PROFMAT deixo um abraço sincero pois sem a dedicação e o profissionalismo de vocês este curso não seria o sucesso que foi, e o nosso sucesso não teria o mesmo brilho.
A todos os colegas do mestrado, muitos para aqui enumerar, agradeço o apoio mútuo, os momentos agradáveis de estudo e a amizade que brotou ao longo destes dois anos; que Deus ilumine e acompanhe os passos de todos vocês, trazendo sucesso e prosperidade. Às minhas irmãs, irmão e amigos que incentivaram e acreditaram sempre nas minhas potencialidades agradeço e oro por eles.

Ao Senhor Nosso Deus eu peço, em nome de Jesus, que abençoe e proteja a todos vós.

RESUMO

O ensino da Trigonometria vem perdendo espaço no ensino médio regular para outros conteúdos de maior aplicabilidade no contexto do mundo moderno, como as funções e a estatística. A retomada da educação profissional técnica a nível federal e em especial na Bahia suscita dúvidas e propõe discussões sobre a importância desse conteúdo no Ensino Médio Profissional. A Lei de Diretrizes e Base da Educação, (LDB) [4], não reflete esta preocupação com a formação técnica, os livros didáticos se estruturam de forma a sacrificar o ensino deste conteúdo, refletindo na formação técnica do aprendiz. O presente trabalho, fundamentado nas teorias de Ausubel sobre a aprendizagem significativa, apresenta um PROJETO de alteração da sequencia didática iniciando o 1^o ano pelo ensino da trigonometria, tendo como objeto de estudo direto o ensino das razões trigonométricas, no Ensino Profissional Técnico. O PROJETO visa recuperar o conteúdo de trigonometria do 9^o ano do Ensino Fundamental, retrabalhando-se conceitos matemáticos envolvidos no uso das razões trigonométricas, exercitando o aluno em experimentos práticos de medida de comprimento com um teodolito caseiro e um transferidor de ângulos. A sequência didática é apresentada na exposição do conteúdo sugerido e na sequência de atividades, planos de aulas, propostas de pesquisas na Internet, controles de estudo e roteiros de experimentos. Finalizando, são apresentados os instrumentos de medidas utilizados, os procedimentos de montagem do teodolito caseiro e do transferidor de ângulos bem como seus procedimentos de uso. A proposta do trabalho é a revalorização da Matemática como um instrumento fundamental para o aprendizado das Ciências Naturais, levando-se em consideração a necessidade do estudante, já no primeiro ano, ser capaz de entender um vetor e estar capacitado à realizar sua decomposição segundo os eixos ortogonais.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Aprendizagem Significativa. Prática Docente. Trigonometria. Teodolito Caseiro.

ABSTRACT

The teaching of trigonometry has been losing ground in the regular high school for other content more applicable in the context of computerized world, as the functions and statistics. The resumption of professional technical education at the federal level and in particular in Bahia sucita questions and proposes discussions on the importance of content in professional school. The Brasilian Law of Guidelines and Bases of Education (LDB) does not reflect this worry with technical training, textbooks are structured so as to sacrifice the education of this content, reflecting the technical training of the apprentice. This paper, based on the theories of Ausubel about meaningful learning, presents a PROJECT change the starting sequence for teaching the 1^o year for teaching trigonometry, with the object of direct study of the teaching trigonometric ratios in Technical Professional Education. The PROJECT aims to recover the contents of the trigonometry ninth year of elementary school, reworking if mathematical concepts involved in the use of trigonometric ratios, exercising the student in practical experiments to measure length with a theodolite and a homemade protractor angles The didactic sequence is presented in the exhibition of suggested content and following activities, lesson plans, research proposals on the Internet, study controls and tours of experiments. Finally, we present the measurement instruments used, the procedures for mounting the theodolite and homemade angles protractor as well as procedures for their use. The purpose of this study is to upgrade mathematics as a fundamental tool for learning natural science, taking into account the need of the student, in the first year, being able to understand a vector and be able to perform its decomposition according to the orthogonal axes.

Keywords: Teaching Math. Meaningful learning. Teaching practice. Trigonometry. Theo-

dolite domesticated.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Objeto de estudo, motivação e definição do tema

A Trigonometria é um dos ramos da matemática que mais assusta o estudante. Com seu emaranhado de fórmulas, sempre prontas a tornar um problema difícil num problema fácil, deixa o estudante com a eterna sensação de que para aprendê-la é preciso decorar todas as fórmulas. O ensino racional da Trigonometria tem sido comprometido, em muito, pelo precário ensino da Geometria Plana. Em particular, o estudo dos triângulos e suas propriedades, pela carência das noções de semelhança, teorema de Thales. Não é raro acontecer do próprio professor de matemática evitar aprofundar o assunto por receio das fórmulas e das armadilhas que as perguntas dos alunos podem promover. No entanto, esse ramo da matemática tem uma importância profunda para os estudantes que pretendem prosseguir seus estudos nas áreas técnicas.

É de se notar que a grande relação existente entre a Trigonometria e a Geometira faz com que o aluno com dificuldade em um desses ramos possa vir a ter dificuldade no outro e aquele que tem facilidade em um venha a ter facilidade no outro. Uma forma de superar as dificuldades do estudante em Trigonometria estará sempre associada a se começar revendo conceitos geométricos, trabalhar de forma prática, seja com régua e compasso ou com outro artifício qualquer, de modo que o estudante possa concretizar e absorver o conhecimento, partindo de construções sólidas capazes de perdurar ao longo de seu aprendizado escolar.

1.2 Justificativa do tema

A longa atuação e experiência na Educação Básica de nível médio me permite registrar diversas abordagens do conteúdo da Trigonometria. Ora trabalhando no modelo tradicional, ora iniciando pelo trabalho com régua, compasso e esquadros, ora trabalhando circulo trigonométrico, foram anos de trabalho empírico, sem a característica do trabalho científico, motivado pela atração pessoal pela Geometria e Trigonometria, mas que somam grande esforço ao desafio de tornar este conteúdo mais agradável e mais compreensível ao aluno do nível médio.

Acresce ao fato acima citado a transformação da Unidade Escolar (U.E.) do ensino regular de formação básica para ensino profissional técnico e também o início do trabalho de discente em formação superior de engenharia em instituições privadas de ensino. Estas experiências têm demonstrado claramente que nas áreas mais técnicas a falta de domínio e compreensão dos conceitos de Trigonometria levam o estudante a trabalhar os conteúdos da Física como um amontoado de fórmulas sem sentido, cujo objetivo passa a representar um obstáculo entre ele a conclusão do seu curso, aparece sempre a famosa frase "para que preciso disto", ou "se estes cálculos são feitos por computador não vejo a necessidade de saber estas fórmulas".

Por esta razão assumi o desafio de repensar o estudo e a aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio tendo como universo a educação profissional técnica e como proposta um trabalho centrado na Aprendizagem Significativa associado à resolução de problemas.

1.3 Estrutura e organização do trabalho

Este trabalho apresenta um PROJETO de alteração da sequência didática iniciando o 1^o ano pelo ensino da Trigonometria, tendo como objeto de estudo direto o ensino das razões trigonométricas, no Ensino Profissional Técnico. Discute-se aqui uma proposta de aprendizagem significativa baseada em sequência de atividades apoiada no uso do teodolito caseiro como recursos didático.

Além da presente introdução, os capítulos deste trabalho encontram-se assim estruturados:

O capítulo 2 tem por objetivo refletir sobre o caráter, a especificidade e as dificuldades apresentadas no ensino da Trigonometria. Nele, debate-se a questão da transformação do Ensino Médio com a nova política de Ensino Profissional no Estado da Bahia, e sugere-se a necessidade de uma revisão mais profunda da Lei de Diretrizes e Base da Educação(LDB). Este capítulo também apresenta a fundamentação teórica do PROJETO, baseada nas teorias de David Ausubel (1918-2008), sobre a Aprendizagem Significativa.

O capítulo 3 busca rever a história da Trigonometria e analisar seu ensino, através dos conteúdos dos livros didáticos. No discorrer da história do uso da trigonometria pretende-se revelar sua grande importância para o conhecimento do homem ocidental.

O capítulo 4 apresenta os conteúdos, componentes da grade curricular das últimas série do Ensino Fundamental, considerados básicos ao ensino da Trigonometria, considerando que serão trabalhado na primeira unidade escolar de acordo com a proposta de alteração da sequência didática.

A metodologia do trabalho é abordada no capítulo 5, que apresenta a abordagem do PROJETO, detalhando o modelo de um teste diagnóstico, a sequência didática e o planejamento de ensino e demais instrumentos pedagógicos como modelos de fichas orientadoras de pesquisa, modelos de questionários e de avaliação de aulas.

A construção do teodolito é detalhada no capítulo 6. O aparelho deverá ser elaborado pelo aluno com material reciclado e de baixo custo. O professor disporá de um aparelho melhorado, um transferidor de ângulos, construído de forma acessível às U.E.'s. Este capítulo apresenta todo o material necessário à construção bem como os procedimentos de montagem.

No capítulo 7 são estabelecidos os procedimentos de campo e todos os cuidados a serem observados na medição, incluindo modelos de formulário para dirigir o experimento. O instrumental a ser utilizado é detalhado no capítulo 8.

O capítulo 9 apresenta as conclusões e recomendações geradas a partir das reflexões deste PROJETO. As perspectivas de aplicação no Centro Territorial de Educação Profissional (CETEP) de Teixeira de Freitas, bem como a possibilidade de avaliação de resultados a partir de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e dos Vestibulares.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No desenvolvimento deste trabalho revelou-se necessária: uma apreciação do novo panorama da educação de Ensino Médio com a inserção dos cursos de Educação Profissional no Estado da Bahia; bem como uma rápida investigação e pesquisa dos conceitos da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel.

2.1 A Educação Profissional na Bahia

O Governo do Estado da Bahia, ha quatro anos atrás, implementou uma nova política pública de investimento na Rede de Educação Profissional da Bahia, dividindo o Estado em Territórios de atuação e criando em cada um deles uma base, ao que chamou de Centros Territoriais de Educação Profissional, para implementação desta nova política educacional.

Ao longo deste período vem a Superintendência de Educação Profissional (SUPROF), da Secretaria da Educação do Estado da Bahia, enfrentando as dificuldades oriundas da implementação de cursos profissionalizantes em paralelo com o desenvolvimento de uma nova Orientação Pedagógica para os mesmos, lembrando que, ao se preservar as autonomias regionais e locais de cada U.E. e implementar projetos pedagógicos específicos, existem questões de caráter geral, com decisões centralizadas pela SUPROF, como a compatibilização de programas e a base comum para cada curso específico, que impuseram e impõem um grande esforço de elaboração coletiva aos técnicos desta Superintendência.

Muitas questões aguardam por soluções para garantir a qualidade da nova educação profissional no Estado da Bahia e entre elas a reformulação da grade escolar para o ensino profissional. A necessidade da manutenção de uma pretensa compatibilidade com o ensino médio regular tem sido um enorme complicador pois, estende a carga horária dos cursos técnicos mas, preserva-se toda a base nacional em detrimento das disciplinas técnicas.

As bases da educação profissional técnica repousam em uma formação geral associada a uma base técnica de qualidade que permita o jovem iniciar no mercado de trabalho com preparo e competência atendendo às exigências do mesmo. Isto posto, nas áreas técnicas e tecnológicas muitas disciplinas como a Física, Química, Biologia, Matemática tornam-se pré-requisitos imediatos à sua formação e, não mais uma mera etapa intermediária para enriquecimento da cidadania ou para continuação de estudos universitários.

O Ensino Médio, segundo a Lei de Diretrizes e Base da Educação(LDB), é considerado como etapa final da Educação Básica [4], o que concorre para a construção da identidade do estudante. As alterações à LDB introduzidas pela Lei 11.741/08 especificam a qualificação para o trabalho como fim e tentam tratar a educação profissional técnica no mesmo rol da educação regular, conforme o que diz a Lei:

> *Os diplomas de cursos de educação profissional técnica de nível médio, quando registrados, terão validade nacional e habilitarão ao prosseguimento de estudos na educação superior.*
> *Parágrafo único. Os cursos de educação profissional técnica de nível médio, nas formas articuladas concomitante e subseqüente, quando estruturados e organizados em etapas com terminalidade, possibilitarão a obtenção de certificados de qualificação para o trabalho após a conclusão, com aproveitamento, de cada etapa que caracterize uma qualificação para o trabalho.(Art. 36-D) [5]*

Contudo pode-se notar que a característica de terminalidade é acentuada por políticas profissionalizante na educação profissional técnica, para a qual a inserção do aprendiz no mercado de trabalho passa a ter importância ressaltada pela exigência do estágio profissional. [27]

A formação técnica e tecnológica é um desafio para todos os países no mundo de hoje, em face da rapidez da evolução tecnológica. Na formulação de sua Política Educacional o Brasil, mais uma vez, está atrasado visto que nem a LDB nem o nosso Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) acompanham a nova dinâmica implementada nos mais variados cursos das áreas técnicas. No Parecer CEB nº 15/98 do PCN o Conselho Nacional de Educação deixa transparecer que, cabe aos Artigos 35 e 36 da LDB estabelecer as finalidades da Educação Básica e traçar diretrizes para a organização curricular ao definir o perfil de saída do educando. [25]. Contudo, a seção IV, Do Ensino Médio, no Art.35, que fala das finalidades, não aborda especificamente a formação técnica estabelecendo uma aparente contradição, onde a formação profissional técnica passa a ser um apêndice do ensino médio.

A visão apresentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM-1999), para os saberes das três áreas curriculares, está centrada na formação geral, sem levar em conta os novos requisitos da educação profissional técnica, haja visto que, não cita como necessidade da formação do educando habilitá-lo a agir e atuar, de forma prática e profissional, com perfeita compreensão da relação teoria e prática que envolvem a vida e o desempenho profissional na área técnica.

> *Na área das CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA incluem-se as competências relacionadas à apropriação de conhecimentos de Física, da Química e da Biologia e suas interações ou desdobramentos como formas indispensáveis de entender e significar o mundo de modo organizado e racional e também de participar do encantamento que os mistérios da natureza exercem sobre o espírito que aprende a ser curioso, a indagar e descobrir. [25]*

De forma prática percebe-se que o aluno de um curso técnico em Eletricidade ou Mecânica deva ter uma boa formação em Física desde o primeiro ano de sua formação e que, para isto, lhe seja fornecida uma boa base matemática para amparar e possibilitar o domínio completo das ciências físicas ou correlatas.

Sendo engenheiro e também professor com licenciatura plena em matemática, atualmente com atuação nos níveis técnico e superior de ensino profissional, tenho constatado grande dificuldade dos estudantes na compreensão dos fenômenos e das leis da Física por conta da precária formação matemática. Um dos conteúdos que mais incomodam o estudante tanto no nível técnico como no nível universitário, envolve vetores, devido ao precário domínio da Geometria e da Trigonometria.

Todas estas razões serviram de argumentos para a proposta de alteração do programa tradicional de ensino da matemática colocando a trigonometria no triângulo retângulo como primeiro tópico do currículo de matemática para o primeiro ano dos cursos técnicos.

2.2 Teoria da Aprendizagem Significativa

> *"Es decir, es imposible establecer la consistencia lógica de una teoría formalizada*

que contenga la aritmética. La certeza de la no contradicción jamás será alcanzada.(KURT GÖDEL)" [18]

Em todo sistema formal há sempre afirmações não demonstráveis nem refutáveis dentro do próprio sistema. É o que aprendemos com o teorema de Kurt Godel, de 1931. Como nos diz Valadares [28], em consequência, todo o corpo teórico que queiramos construir terá sempre de assentar em princípios cuja validade é aceita, à priori, sob pena da teoria perder consistência. Pretende-se neste trabalho estabelecer suas bases sobre a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel [1] e assim sendo pode-se considerar assente em princípios sólidos e susceptíveis de ampla consensualidade [20]. Seu primeiro princípio, fundamental e historicamente aceito é o seguinte: O fator mais importante de que depende a aprendizagem do aluno é a sua estrutura cognitiva em cada momento da aprendizagem. O ensino deve ser encarado em conformidade com essa estrutura. Em suas palavras:

"... o fator mais importante que influi na aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe. Isto deve ser averiguado e o ensino deve depender desse dado" (Ausubel, Novak e Hanesian, 1978) [2]

Este autor define a aprendizagem como uma integração entre o conhecimento novo e os já existentes, dito de outra forma, o efetivo aprendizado deve estar ancorado em conceitos prévios do aluno. Este talvez seja o grande problema para ensinar Trigonometria falando de triângulos retângulos para estudantes que não dominam o conceito de perpendicularidade, ângulos, vértices, etc. A estes conceitos que ancoram o novo conhecimento dá-se o nome de subsunçores e sua existência classifica este tipo de aprendizagem como significativa.

"...os subsunçores não devem ser vistos apenas como conceitos suportes de nova informação e sim como conceitos claros e com estabilidade, que proporciona a integração entre o novo e o antigo conhecimento, facilitando a aprendizagem."(BRIGHENTI 2003) [3]

Para Ausubel [1](apund Moreira 2000), o conteúdo deve ser significativo para quem aprende, gerando assim predisposição e curiosidade por parte do estudante. Caso não tenha

[1]Ausubel, D.(1968). Educational psycology:A cognitive view. N.Y.:Holt, Rinehart and Windson.

[2]Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H.(1978). Educational psycology:A cognitive view. N.Y.:Holt, Rinehart and Windson.

[3]Brighenti, Maria José Lourenção (2003). Representações Gráficas: atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos. Bauru: EDUSC. citado por PEREIRA, Cicero S. e RÊGO R. M.

sido estabelecida uma conexão entre o novo assunto e o que o aluno já sabe (subsunçor), não há aprendizagem.

A ausência destas conexões não pode conduzir o professor a acomodação já que além de saber o que é aprendizagem significativa, ele deve conhecer princípios programáticos facilitadores como a diferenciação progressiva, a reconciliação integradora, a organização seqüencial e a consolidação (Ausubel et al. 1978, 1980, 1983, 2000) [4] ou algumas estratégias facilitadoras como os organizadores prévios, os mapas conceituais e os diagramas V (Novak e Gowin [5], 1984, 1988, 1996; Moreira e Buchweitz, 1993).

Outro aspecto fundamental da aprendizagem significativa, apresentado por Moreira [19], com base nas idéias de GOWIN, é que o aprendiz deve apresentar uma pré-disposição para aprender. Ou seja, para aprender significativamente, o aluno tem que manifestar uma disposição para relacionar, de maneira não arbitrária e não literal, à sua estrutura cognitiva, os significados que capta dos materiais educativos, potencialmente significativos, do currículo. Segundo Moreira, Ausubel ainda acrescenta que, os fatores essenciais para o aprendizado são:

1. disposição do aprendiz para aprender;

2. material potencialmente significativo;

3. existência de subsunçores na estrutura cognitiva do aprendiz.

Na busca de uma Aprendizagem Significativa, o caminho traçado para que ocorra requer, segundo Ausubel, a adoção de princípios programáticos facilitadores da aprendizagem. Marcos Antonio Moreira em seu trabalho Aprendizagem Significativa Crítica [19], apresenta princípios, idéias ou estratégias facilitadores, tendo como referência as propostas de Postman e Weingartner, que segundo ele:

> *"...Tudo que será proposto a seguir me parece viável de ser implementado em sala de aula e, ao mesmo tempo, crítico (subversivo) em relação ao que nela ocorre." [19]*

Neste PROJETO serão trabalhados os oito princípios facilitadores da aprendizagem significativa crítica, propostos poro Moreira, a saber:

[4]Ausubel atualizou esta obra em 2000: Ausubel, D. P. (2000). The Acquisition and retention of knowledge: A cognitive view. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. A tradução portuguesa está publicada pela Plátano Editora (2002).

[5]Novak, J.D., & Gowin, D. B.: Learning how to learn: Cambridge University Press - 1984: Tradução portuguesa da Editora Plátano, Lisboa 1998

a) Princípio da interação social e do questionamento. Ensinar/ aprender perguntas ao invés de respostas. A interação social é indispensável para a concretização de um episódio de ensino. Tal episódio ocorre quando professor e aluno compartilham significados em relação aos materiais educativos do currículo (Gowin, 1981 apaud Moreira). O compartilhar significados resulta da negociação de significados entre aluno e professor. Mas essa negociação deve envolver uma permanente troca de perguntas ao invés de respostas. Um ensino baseado em respostas transmitidas primeiro do professor para o aluno nas aulas e, depois, do aluno para o professor nas provas, não é crítico e tende a gerar aprendizagem não crítica, em geral mecânica. É também o que o Professor Reuven Feuerstein chama de mediação em seus trabalhos sobre Experiência de Aprendizagem Mediada.

b)Princípio da não centralidade do livro texto. O livro de texto simboliza aquela autoridade de onde "emana" o conhecimento. Professores e alunos se apóiam em demasia no livro de texto. Mas o aluno não desenvolveu ainda competências para estudar diretamente do livro texto. Torna-se assim necessário aprender a partir de diversos materiais como artigos científicos, contos, poesias, crônicas relatos, obras de arte e tantos outros materiais, e porque não a Internet e na história da matemática.;

c) Princípio do aprendiz como perceptor/representador. Na teoria da aprendizagem significativa argumenta-se que a aprendizagem receptiva, isto é, aquela em que o novo conhecimento é recebido pelo aprendiz, sem necessidade de descobri-lo, é o mecanismo humano por excelência para assimilar (reconstruir internamente)a informação (Ausubel et al., 1978, 1980, 1983; Ausubel, 2000), porém ela não implica passividade; ao contrário, é um processo dinâmico de interação, diferenciação e integração entre conhecimentos novos e pré-existentes.

d) Princípio do conhecimento como linguagem. A linguagem é o meio pelo qual percebemos e representamos a realidade.Uma "disciplina" é uma maneira de ver o mundo,um modo de conhecer, e tudo o que é conhecido nessa "disciplina" é inseparável dos símbolos (tipicamente palavras) em que é codificado o conhecimento nela produzido. Ensinar Biologia, Matemática, História, Física, Literatura ou qualquer outra "matéria" é, em última análise, ensinar uma linguagem, um jeito de falar e, conseqüentemente, um modo de ver o mundo. Claro está que aprender uma nova linguagem implica novas possibilidades de percepção. A tão propalada ciência é uma extensão, um refinamento, da habilidade humana de perceber o mundo. Aprendê-la implica aprender sua linguagem e, em conseqüência, falar e pensar diferentemente sobre o mundo.

e) Princípio da consciência semântica. O significado está nas pessoas, não nas palavras. Sejam quais forem os significados que tenham as palavras, eles foram atribuídos a elas pelas pessoas. Contudo, as pessoas não podem dar às palavras significados que estejam além de sua experiência. Observa-se aí, outra vez, a importância do conhecimento prévio, i.e., dos significados prévios na aquisição de novos significados. Quando o aprendiz não tem condições, ou não quer, atribuir significados às palavras, a aprendizagem é mecânica, não significativa.

f) Princípio da aprendizagem pelo erro. Aprendemos corrigindo erros. A idéia aqui é a de que o ser humano erra o tempo todo. É da natureza humana errar. O homem aprende corrigindo seus erros. Não há nada errado em errar. Errado é pensar que a certeza existe, que a verdade é absoluta, que o conhecimento é permanente.

g) Princípio da desaprendizagem. Selecionar e desaprender o que não é relevante. Nesse processo, como já foi dito, o novo conhecimento interage com o conhecimento prévio e, de certa forma, ancora-se nele. Através dessa interação o significado lógico dos materiais educativos se transforma em significado psicológico para o aprendiz. Tal mecanismo, que Ausubel chama de assimilação é o mecanismo humano, por excelência, para adquirir a vasta quantidade de informações que constitui qualquer corpo de conhecimento.

h) Princípio da incerteza do conhecimento. Perguntas são instrumentos de percepção, enquanto definições e metáforas são instrumentos para pensar. Definições, perguntas e metáforas são três dos mais potentes elementos com os quais a linguagem humana constrói uma visão de mundo (Postman, 1996, p. 175, apund Moreira) [24]. A aprendizagem significativa destes três elementos só será crítica, da maneira que estou chamando, quando o aprendiz perceber que as definições são invenções, ou criações, humanas, que tudo o que sabemos tem origem em perguntas e que todo nosso conhecimento é metafórico.

A compreensão da fundamentação teórica é um aspecto essencial na formação dos professores aplicadores, já que, irá determinar a sua postura diante do trabalho proposto, e que, poderá ser meramente mecânica de realização das tarefas ou crítica, de buscar interagir com os alunos estabelecendo muita perguntas e dúvidas durante o desenvolvimento das práticas.

CAPÍTULO 3

EPISTEMOLOGIA DA TRIGONOMETRIA

[1] O estudo histórico da construção de um conceito matemático ganha relevância no ensino desta disciplina, já que, sua evolução pode elucidar dúvidas e evitar erros. Para Lindegger [17], o maior conhecimento a respeito da evolução do conceito também pode enriquecer nossas aulas, colaborando para que, à luz da história, na elaboração da sequência de ensino, definamos atividades em etapas que, a nosso ver, contribuam melhor para a construção do conceito. Segundo Vergnaud(1994, p16 apud Lindegger):

> *É também o tipo de questão epistemológica que dirige a investigação do historiador quando ele tenta descobrir as circunstâncias históricas e sociais sob as quis as invenções matemática emergiram. Há muito o que ganhar a partir do estudo interativo do processo individual e histórico do desenvolvimento do conhecimento matemático. ...Mesmo que o conjunto de problemas que os estudantes proveitosamente venham a se deparar seja diferente do conjunto de problemas que os cientistas tenham encontrado no curso da história, é fundamental para a Psicologia da Educação Matemática considerar o relacionamento entre o conhecimento desses problemas. [29]*

[1]Epistemologia ou teoria do conhecimento é um ramo da filosofia que trata dos problemas filosóficos relacionados à crença e ao conhecimento (do grego"episteme- ciência, conhecimento; "logos- discurso)

De tal forma, o ensino da história da Matemática não deve ter como intenção reproduzir os fatos históricos e sim, basear-se neles para construção de uma sequência de ensino onde o conceito deixe de ser algo dogmático para se tornar mais compreensivo ao aluno, á medida que se associa ao mundo real.

3.1 Trigonometria - Um pouco de história

As noites de 1965 eram mais bonitas. Não se trata de saudosismo, mas de constatação, já que, o desenvolvimento trouxe o crescimento das cidades e espalhou a iluminação em todos os aglomerados urbanos e também em boa parte do campo provando, com isso, o ofuscamento da luz das estrelas. É preciso um "Black Out"geral ou quem sabe se esconder em um paraíso ecológico distante da civilização para que seja possível observar a grande beleza do céu noturno.

No passado o homem tinha prazer em olhar o céu. A milhares de anos atrás o homem para sua sobrevivência dependia da sua capacidade de observar a natureza e aprender a ler pequenos sinais em suas manifestações. Foi assim que a atenção do homem se voltou para o céu, para as estrelas, e ele começou a mapeá-las identificando repetições e alterações capazes de explicar e até predizer os fenômenos da natureza. Nossos antepassados observavam as estrelas e conseguiam predizer as chuvas e os ventos. Por quê? Porque as observavam todas as noites.

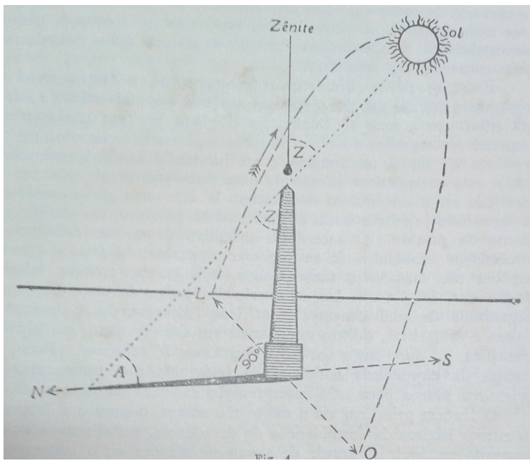


Figura 3.1: *Relógio do Sol - meio-dia nos equinócios*

A figura 3.1 apresenta o esquema de funcionamento do relógio do sol. Segundo Lancelot [15](pp-45), os Egípcios, antes de 4000 a.C, já haviam fixado a duração do ano em 365 dias, e o fizeram contando os dias transcorridos entre duas ocasiões sucessivas em que se via a estrela do cão, Sirus, nascer um pouco antes do arrebol. É por ai que se deve começar a investigação sobre as origens do grande conhecimento da matemática.

Após muitos e muitos anos de observação, o homem percebeu que o movimento estelar era cíclico. Se ao pôr-do-Sol uma estrela se tornava visível numa determinada hora, numa posição, isto poderia levá-lo a fazer previsões de um período de chuva, ou de seca, ou de frio, neve etc. Para esses estudos dos astros, o homem teve que desenvolver além de instrumentos de observação, uma matemática apropriada, suas ferramenta para a Astronomia. Junto com os recursos e conhecimentos matemáticos utilizados, foi surgindo o que posteriormente vir-se-ia a chamar de geometria e trigonometria esférica. Segundo Boyer (1996, p-213, apud Lindegger). [17]

> *A identificação desses recursos pelo nome "trigonometria" só veio a acontecer em 1595 quando, Bartholomeus Pitiscus (1561-1613), usou este vocábulo como título de uma exposição, que foi publicada nessa época, como suplemento a um livro sobre esféricas e novamente, em separado, em 1600, 1606 e 1612.* [3]

Vem da Babilônia e do Egito os primeiros registros do uso de conhecimentos matemáticos para fins práticos em construções e parcelamento do solo. Parece haver uma relação entre o conhecimento matemático dos egípcios e dos babilônicos. Estes últimos tinham grande interesse pela astronomia, pelo que mostra o seu legado, na construção do calendário astrológico e na tábua de eclipses lunares. Inclusive credita-se aos babilônicos a percepção da facilidade da divisão da circunferência em seis partes iguais usando o raio como corda do circulo, fato que os teria levado a escolherem um sistemas numérico múltiplos de seis, o sexagesimal. Este sistema viria a influenciar a determinação do grau na circunferência, a determinação da multiplicidade dos segundos, minutos e horas.

Os povos da Antiguidade não dissociavam a trigonometria da geometria estes conhecimentos formavam um todo com a finalidade pratica de tornar as ações humanas mais fáceis e mais precisas. Ao longo da história esta coesão perdurou mesmo com o surgimento das escolas na Idade Média e posteriormente na criação das universidades. Então, estudar Geometria é estudar Trigonometria e vice-versa.

O estudo etimológico do vernáculo trigonometria nos leva à seguinte significação dos vocábulos: "tri" significa três, "gonos" significa ângulos e metria é medida. Isto nos leva a crer que Trigonometria tem a ver com "resolução de triângulos", ou "medida dos triângulos".

O triângulo é uma figura geométrica "sui genere", um polígono de três lados e três ângulos, fisicamente único polígono rígido, para a qual, o conhecimento de alguns elementos leva ao conhecimento de todos os demais, e a definição de uma figura única. Mas o estudo da trigonometria não começa pelo triângulo muito menos pelo ângulo. Seu estudo começa pelo circulo e pelo estudo dos arcos e das cordas dos arcos do círculo, é uma trigonometria esférica.

Figura 3.2: *Nivelamento de uma construção moderna*

Na construção de prédios, a Engenharia Moderna, vide figura 3.2, toma-se muito cuidado com os trabalhos de nivelamento e marcação das fundações e seus pilares, são utilizados teodolitos sofisticados com precisão de centésimos/milésimos do grau para estes levantamentos. A história nos mostra contudo que os egípcio construíram as pirâmides com instrumentos rudimentares obtendo precisões admiráveis graças ao seu conhecimento da Trigonometria. Na figura 3.3 pode-se observar detalhes do esquema construtivo da Pirâmide de Quéops. As fa-

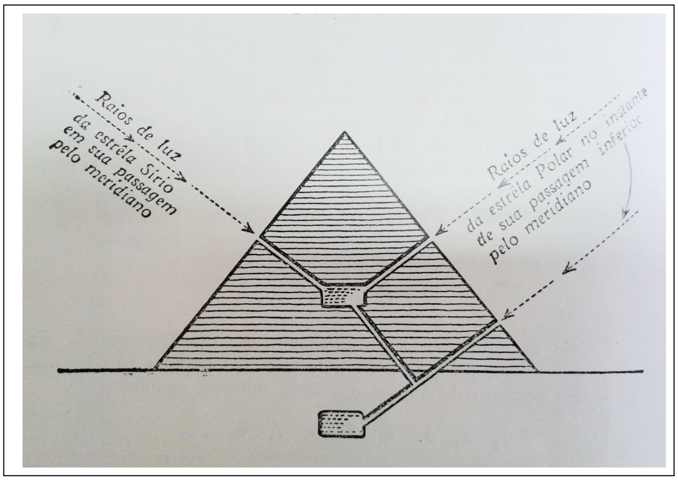


Figura 3.3: *Orientação astronômica da Pirâmide de Quéopes*

ces dos lados desta pirâmide estão voltados para os quatro pontos cardeais da terra, e a razão do seu perímetro da base esta para a altura mantém a mesma proporção da circunferência para o raio de um círculo, isto é 2x$3\frac{1}{7}$, ou 2π.

A quadradura e o nivelamento da base são brilhantemente exatos, sendo o êrro médio em igualdade, quadradura e nivelamento, inferiores a dez milésimos do comprimento do lado.(Flinders Petrie)[2]

Ao cortar o meridiano ,figura 3.4, os raios de Sírio, a estrela do cão, cujo nascer helíaco anunciava o começo do ano egípcio e a enchente do rio Nilo que trazia prosperidade aos agricultores, eram perpendiculares à face sul da Grande Pirâmide e penetravam na câmara real por intermédio do canal de ventilação, indo iluminar a cabeça da esquife do faraó. A abertura principal dava passagem à luz da estrela Polar, então estrela α da constelação do Dragão, quando ela seguia o seu curso inferior, 3^o abaixo do polo celeste real. [3]

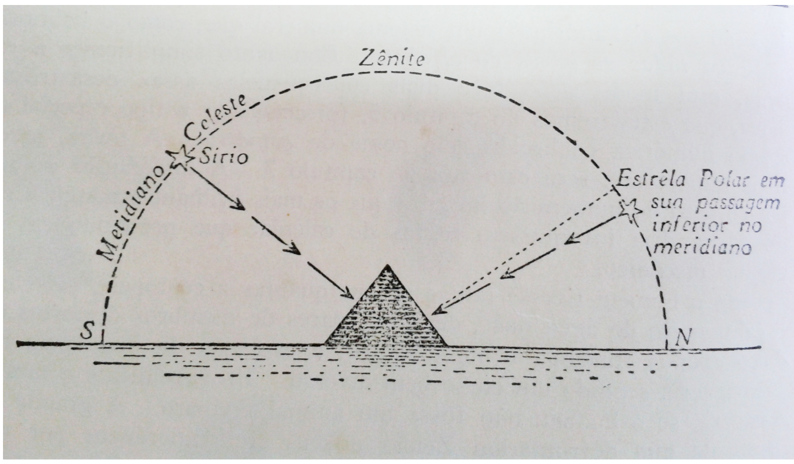


Figura 3.4: *Orientação da Pirâmide segundo o Meridiano Celeste*

A precisão na construção destes canais é espantosa devendo-se a séculos e séculos de observações e registros que influenciam até hoje os métodos de observação e a medição de ângulos.

Uma informação que todos manipulam e poucos explicam é a origem da contagem das estações do ano, que iniciam no dia 21 dos trimestres começando no mês de janeiro. Sua origem está na determinação do equinócio, coisa que qualquer um pode fazer em casa. Observe a figura 3.5 nela estão representados o resultado da observação do sol poente no

[2]Imagens do Livro MARAVILHAS DA MATEMÁTICA [15], pág.53

[3]A escolha do meridiano norte-sul, foi inspirada naturalmente pela posição assumida pela sombra solar quando mais curta ao meio dia. Esta sombra, além de indicar o primeiro meridiano, assinala também o ponto do céu em torno do qual giram as estrelas durante a noite. Na época em que construíram as pirâmides, uma belíssima estrela, da constelação do Dragão, descrevia um circulo minúsculo(de apenas 3 graus) em torno deste ponto celeste. [15]

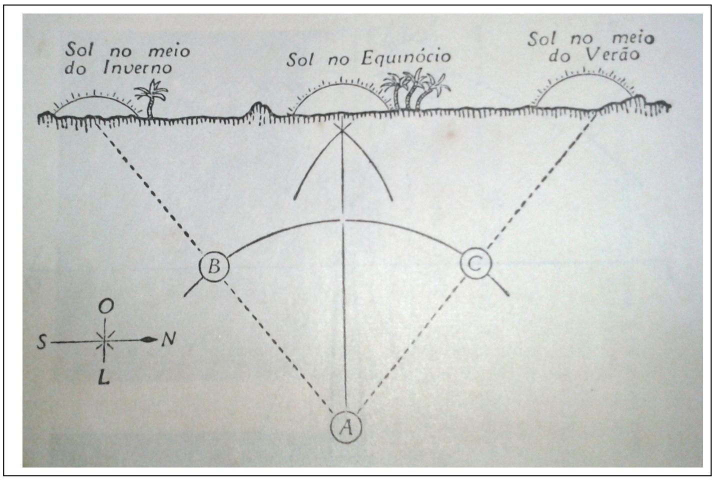


Figura 3.5: *Determinação do Equinócio*

inverno e no verão, cabe lembrar que estas posições relativas trocam no hemisfério sul, sem alterar a filosofia de determinação do equinócio. Em casa, tendo uma boa vista do sol poente ou do sol nascente, pode-se escolher um ponto fixo para a observação diária do sol, fixe um transferidor e registre o ângulo todo dia e você verá que o ângulo maior à esquerda coincidirá com o dia 21 de dezembro, início do verão, da mesma forma o maior ângulo à direita coincidirá com o dia 21 de junho, início do inverno. Se você conhecer a direção $\bar{AB}$ e a direção $\bar{AC}$ será fácil conhecer o sol do equinócio ou a direção Oeste dos pontos cardinais usando simples triangulação. Faça este experimento e conheça os pontos cardinais de sua casa.

3.2 A topografia e seus instrumentos de medida

Para realizar medições duas noções prévias são básicas: primeiro, com que vamos medir, segundo, em que unidade vamos medir. A altura de um caderno pode ser a referência para medir-se a sala. Registra-se em uma corda diversas marcas correspondendo a altura do caderno e um destes segmentos pode-se dividir em duas, quatro, oito, dezesseis e trinta e duas partes da altura do caderno. Desta forma a sala de aula pode ser medida em x,xx cadernos, com isto cria-se uma nova unidade de medida e um novo instrumento de medição. O aluno deve notar a importância de se conhecer um pouco mais da história e da evolução das unidades de medidas e dos instrumentos de medição.

A arte de medir sempre esteve associada a instrumento de medida e, quando o homem começou a medir ângulos surgiram os primeiros instrumentos do que viria a ser a topografia. Topografia vem do grego $\tau\acute{o}\pi o\varsigma$, topos, que significa "lugar", "região", e $\gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega$, grapho, que significa "descrever", portanto, "descrição de um lugar". As bases da topografia repousam na Trigonometria. Vê-se mais uma vez que a Trigonometria está intimamente relacionada às arte do homem na Antiguidade em suas tarefas de medir distâncias, ângulos e áreas, seja para construção seja para divisão e ocupação do solo.

Figura 3.6: *Fio de prumo rudimentar*

O instrumento topográfico mais antigo talvez seja o **prumo**, a figura 3.6[4] fornece uma idéia de um fio-de-prumo rudimentar, utilizado para identificar qualquer declinação com relação a vertical. Os fios-de-prumo mais atigos eram em pedra e a sua forma frequentemente oval, era neste tempo, um detalhe irrelevante. Sabe-se que os egípcios adaptaram este princípio a práticas de construção cerca de 2600 anos a.C., tendo desde então sido concebidos os princípios dos primeiros instrumentos de posicionamento e nivelamento de estruturas rudimentares, como sendo o esquadro, e as cruzetas em chumbo e madeira.

Por volta do ano de 560 a.C. não se tem referência a existência e construção de nova instrumentação até que Anaximandro de Mileto, introduzisse o **Gnomon**, (figura **??**), que é um relógio de sol que lança a sombra. Gnomon, $(\gamma\upsilon\acute{\omega}\mu\omega\upsilon)$, é um antigo grego da palavra que significa indicador, aquele que discerne, ou o que revela. Acredita-se que este se baseou em alguma referência dos babilônios ou dos egípcios. Entre os primeiros usuários deste novo instrumento encontramos Metón, que determinou a direção do Norte e Eratóstenes que calculou a circunferência da Terra.

Os romanos foram os portadores dos conhecimentos gregos para a Europa, usaram a **groma**, que consta de una cruz excêntrica, (figura 3.8), com prumadas em seus extremos, fixada a una barra vertical, que tinha de uma espécie de alidade. Vitruvio faz referencia aos carros

[4]Imagem obtida no artigo "A evolução da topografia através dos tempos", *http//www.planortogonal.com/index.php?option = com_content&view = article&id = 37 : a − evolucao − da − topografia − atraves − dos − tempos&catid = 1 : topografia&Itemid = 41*

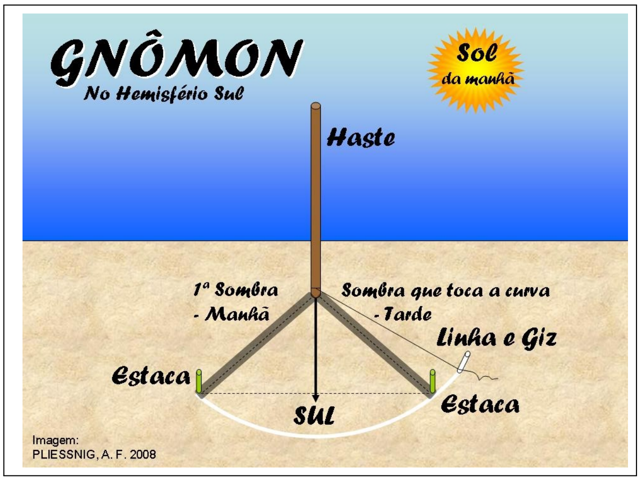


Figura 3.7: *Esquema de orientação do Gnomon*

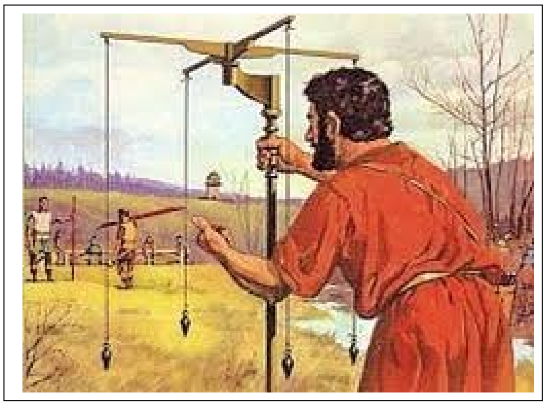


Figura 3.8: *Detalhe de orientação do Groma*

medidores de distâncias por meio de contadores de voltas, embora as medidas de precisão fossem obtidas a passos mediante contadores de passos. Além das descrições de Vitruvio, se encontraram em Pompéia distintos instrumentos no laboratório de um Agrimensor. Também Vitruvio foi o construtor do primeiro esquadro aplicando o fundamento do triângulo retângulo de Pitágoras (lados de 3-4-5 metros)[5] .

Mais tarde, os Árabes apoiando-se nos conhecimentos dos gregos e romanos, usaram astrolábios divididos em 5 minutos de arco. No ano de 1300, segundo dados de Levi Ben Gerson, se conhece um mecanismo para a medida indireta da distância, mediante o movimento de una barra perpendicular (balestilha) a outra principal graduada, que proporcionava assim os ângulos paraláticos.

A **bússola** é um dos instrumentos mais importantes na história da medição, foi

[5]http://www.ufrgs.br/museudetopografia/Artigos/Instrumentos_de_topografia.pdf, acesso em 15/01/2013 as 23:00

inventada provavelmente pelos Chineses durante a dinastia Qin (221-206 A.C.).[6] A agulha indicadora, constava de um dispositivo metálico em forma de colher constituído por um íman natural, que indicava sempre o Sul, desde sua invenção pelos chineses, até a referência em 1187 por Alexander Neckman, com as melhorias introduzidas por Leonardo Da Vinci e Schmalcalder , chegou a ser a precursora do teodolito.

Figura 3.9: *A bússola magnética*

Os *eclímetros* são instrumentos topográficos que são utilizados para medida de ângulos descritos num plano vertical, sejam ângulos de inclinação da linha de visada através de uma luneta ou pínulas, sejam declividades. Os eclímetros que registram ângulos verticais em graus recebem a nomenclatura de **clinômetros**. O Clinômetro de Gurlay, (figura 3.10), consta de

Figura 3.10: *Clinômetro*

uma régua que pode ser fixada por parafusos em uma posição horizontal e de uma segunda

[6] Os primeiros videntes chineses empregaram ímanes naturais (um minério composto de óxido de ferro que se alinha na direção norte - Sul) para construir as suas placas de leitura de sinus. Posteriormente, alguém se apercebeu que estes ímanes naturais eram de maior eficácia e utilidade na indicação de verdadeiras direções, fato que conduziu à manufaturarão das primeiras bússolas. [6]

régua, com nível de bolha e móvel em relação à régua horizontalizada, que gira no plano vertical.

Em 1610 aparece a cadeia ou *corrente de agrimessor*, atribuída a Aaron Rathbone, consiste de um conjunto de elos, denominados de *fuzis*, cada um com 20cm de extensão, e a cadeia de agrimensor compões-se de 100 fuzis de aço ou ferro galvanizado, tendo um comprimento total de 20m.

Durante os períodos coloniais, dos anos 1800, a grande maioria das tarefas relacionadas com a topografia da época foram executadas com a utilização de um transferidor artesanal ou uma bússola, e da corrente, similares aos instrumentos apresentados na figura 3.11.

Figura 3.11: *Topografia Colonial; Semi-transferidor e a corrente*

A corrente mais comum era de 66 pés de comprimento, composta de 100 elementos sendo 1 elemento igual à 1/100 de uma corrente ou 7.92 polegadas. Estas unidades da medida podem ainda ser encontradas em muitos registros antigos arquivados nos tribunais. As unidades de medição mais modernas em aço e fibra de vidro empregadas por topógrafos, ainda são mencionadas como os métodos mais adequados em procedimentos contemporâneos de medição.

Durante este período a bússola foi montada sobre um tripé ou associada a um bastão simples, (figura 3.12), tendo sido denominada de *consola de Jacob*. Estes instrumentos de topografia desta época não eram muito precisos, mas eram suficientemente válidos para aplicação num contexto em que os valores de terra eram irrisórios.

Figura 3.12: *Consola de Jacob*

Com a evolução dos tempos a utilização da bússola deu lugar ao transferidor graduado, e a corrente à fita em aço, (figura 3.13). Enquanto a bússola podia geralmente medir o azimute magnético próximo de um quarto de grau, um transferidor já pode medir os ângulos entre as linhas com menos de um minuto de arco de circunferência. A fita em aço, habitualmente de 100 ou 200 pés de comprimento graduadas em centésimos de um pé, providenciou uma precisão superior à *corrente de Gunter*.

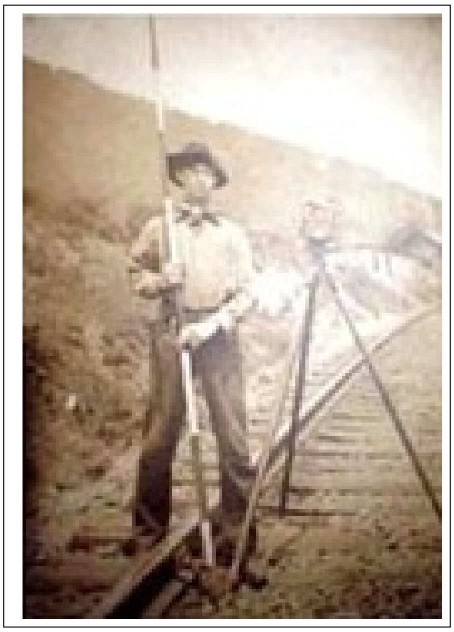


Figura 3.13: *Transferidor e a fita*

A *dioptra*, ($\delta\iota\acute{o}\pi\tau\rho\alpha$), ou plano horizontal, servia para a medida de ângulos, (figura 3.14), tinha seu princípio baseado em um tubo em forma de "U"com água, e que servia para nivelar uma plataforma, podendo ainda medir os ângulos horizontais e verticais. Sua origem remonta dos astrônomos gregos que a utilizavam para medir a posição das estrelas e foi posteriormente substituída pela esfera armilar. Adaptado para o levantamento, a dioptra reaparece na obra de Heron de Alexandria em uma obra do mesmo nome, **O Dioptra**, que o descreve como instrumento sofisticado, semelhante ao teodolito moderno[7].


Figura 3.14: *Dioptra*

Com o avançar da evolução tecnológica, os ângulos foram então medidos com a utilização de um transferidor graduado associado a uma ocular sendo as distâncias medidas através de métodos ópticos sobre uma régua padrão colocada na horizontal. Esta régua ou *estadia*, graduada em centésimos de um pé, e um conjunto de fios transversalmente horizontais aplicados ao telescópio do transferidor, chamados *fios de estadia*, foram colocados de modo a que, com base em princípios trigonométricos, e a uma distância de 100 pés a leitura dos fios corresponda exatamente a um pé sobre a estadia, estava inventado o teodolito.

A arte de medir também nos remete a um outro questionamento sobre unidades de medida e ao extenso universo que elas representam. Os primeiros padrões de medida foram baseados em medidas do corpo humano. Dobrada era a distância do cotovelo à extremidade de dedo, enquanto que as unidades de pé, palma e dedo são por si só unidades de referência evidentes.

Entre as primeiras unidades de medida institui-se o *Pé*, que muito naturalmente se alterou de região para região, produzindo duas dimensões diferenciadas. O primeiro conceito da medida *pé* fixou-se entre 246 e 252 milímetros baseados no pé descalço de um homem. O segundo conceito de "Pé" mede entre 330 à 335 milímetros sendo este baseado nas medidas da mão. Outras unidades derivam dos Romanos, Saxões, Anglos e Jutas que em determinados

[7] Isaac Moreno Gallo, Nuevos Elementos de Ingeniería Romana, 2006, http://www.traianvs.net/pdfs/2006_la_dioptra.pdf, acesso em 15/02/2013 as 21:15

períodos invadiram Inglaterra[8]. A Vara, a oitava parte da Milha e o Acre, são todos de origem Saxónica. A Milha instituída é o resultado de um compromisso entre a unidade Francesa, a velha milha britânica e do "Milliarius" romano.

É importante observar que a medida de um objeto pode ser realizada utilizando-se de unidade de medida diversas. As trenas atuais ainda apresentam escalas no sistema métrico e em pés e polegadas.

3.3 A Trigonometria no contexto da educação matemática no século XX

Antes que se proceda a análise dos livros didáticos de hoje, justo se faz conhecer, um pouco, como era, nos meados do séc.XX, a educação matemática. O primeiro congresso Nacional de professores secundários de matemática teve lugar em 1955 e analisou principalmente a distribuição de tópicos das matérias [8]. A Matemática Moderna atinge a educação brasileira em meados do século XX e em 1957, no segundo congresso o grande tema foi "Matemática tradicional ou Matemática moderna no nível secundário?". O quadro da nossa educação matemática, na época, pode ser assim expresso:

> *Em 1959 por volta do terceiro Congresso Nacional havíamos tomado conhecimento da situação do ensino de matemática no Brasil, e uma avaliação das condições da equipe de ensino revelou que estávamos completamente atrasados. [8]*

A Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional, de 1961, vigorou durante muitos anos estabelecendo ser, a preparação de professores secundários, uma atribuição das faculdades de filosofia, ciências e letras permitindo que a concessão de certificados fosse feita sem exigir preparação especializada.

Diante desta realidade muitos estados brasileiros optaram por reforçar a preparação de professores secundários através de treinamentos.

HoWard F. Fehr, no livro Educação Matemática nas Américas [9] retrata o treinamento do professor de matemática na Bahia ao dizer:

[8]Alguns registros arqueológicos mostram o uso de medidas padrão antes do ano 2000 AC. Um mural egípcio datado de 1400 AC mostra um grupo de trabalhadores medindo com uma linha atada em nós, semelhante a uma moderna corrente de agrimensor.

[9]Relatório da Segunda Conferência Interamericana sobre Educação Matemática, Lima Peru, 4-12 de dezembro, 1966

> *Na Bahia, os cursos de treinamento de professores de matemática, programados para 1958, só começaram em fevereiro de 1964 e ainda graças ao auxílio da Superintendência do Desenvolvimento do Nordeste (SUDENE). Estes cursos correspondem à programação estabelecida pelos professores secundários sob a direção do Instituto de Matemática e Física da Universidade Federal da Bahia.* [8]

O treinamento proposto, na época, abordava pelo menos quatro matérias ou estudos básicos a saber:

1. - Primeiro estágio - elementos de lógica simbólica, introdução à teoria dos conjuntos, estruturas algébricas fundamentais noções, aplicações práticas;
2. - Segundo estágio - álgebra moderna, geometria linear e plana;
3. - Terceiro estágio - geometria espacial e estudo de matrizes;
4. - Quarto estágio - elementos de topologia, cálculo integral e diferencial.

Cada estágio deveria ter duração mínima de um mês com 64 aulas teórico-práticas e igual número de estudo dirigido. O autor ainda relata que:

> *Face às condições antiquadas de preparação do instrutor na Bahia, o primeiro estágio já foi realizado cinco vezes. Os professores são examinados e só são matriculados no estágio seguinte mediante aprovação no anterior* [8]

O que deseja-se apresentar aqui é um dado significativo para a compreensão da reforma educacional brasileira e a necessidade de simplificação da grade curricular partindo da necessidade de adequá-la à realidade da formação dos professores.

Ao folhear os textos do Relatório da Segunda Conferência Interamericana sôbre Educação Matemática, percebe-se que a Trigonometria é raramente citada, aparece no "Pareceres e Conclusões"como o tópico 5 de um total de 28 tópicos. Na verdade em todo o relatório a trigonometria é diluída entre a geometria e o estudo das funções. O mais importante é atentarmos para as observações que devem ser mantidas na mente:

> *c) O programa atual é destinado a instituições geralmente denominadas ginásios e colégios, destinadas a preparar os futuros estudantes de universidades. Para escolas secundárias especiais (comerciais, industriais, de treinamento de professores etc.), alguns dos tópicos correspondentes ao intervalo de idade de 12 a 15 anos, são considerados necessários e de interesse comum à educação de todos os estudantes secundários.* [8]

Agora ciente do conflito entre a necessidade de dar uma boa formação e a capacidade do corpo docente das escolas públicas brasileiras, pode-se analisar a realidade do curso de trigonometria à época.

Avaliando o livro de Matemática, de Carlos Galante [9], adotado em 1956, na terceira série do ginásio, que corresponderia ao atual oitavo ano de formação básica, vê-se que o PROGRAMA curricular, centrado na Portaria 1045, de 14 de dezembro de 1951, estabelecia um currículo mais extenso em conteúdo e dividido em quatro unidades a saber:

1. - Razões e proporções; aplicações aritméticas;
2. - Figuras geométricas planas; retas e círculo;
3. - Linhas proporcionais; semelhanças de polígonos;
4. - Relações trigonométricas no triângulo retângulo. Tábuas naturais.

O livro todo tem 315 páginas de muito cálculo e poucas figuras e as 156 primeiras se dedicam-se ao exercício da aritmética passando por todas as médias indo até o cálculo financeiros de juros. O restante do livro concentra-se na geometria e suas relações, cálculos e demonstrações sem apresentar grande distinção dos conteúdos. O livro do mesmo autor para a quarta série do ginásio, ainda baseado na mesma Portaria 1045, estabelecia um currículo em três unidades à saber:

1. - Trinômio do segundo grau: equações e inequações do segundo grau com uma incógnitas;
2. - Relações métricas nos polígonos e no circulo; cálculo de Pi;
3. - Áreas das figuras planas;

Ao observarmos, com mais atenção, o conteúdo apresentado no livro, acima citado, vamos concluir que, muito do conteúdo que não aparece no currículo do ensino fundamental de hoje, foi suprimido na idéia de ser retomado nas séries seguintes, sendo que, também não está sendo contemplado no currículo do ensino médio.

3.4 Análise de livros didáticos da 8ª.série

Entendido que o professor também tem suas limitações e assim sendo irá adotar o livro didático que mais se adéque ao seu conhecimento, percebe-se a importância do livro didático, como um elemento de referência para o professor, já que ele orienta a abordagem dos conteúdos programáticos. Neste caso ressaltamos aqui a importância do professor aplicador considerar para análise não só o formulário sócio-econômico e o teste diagnóstico, mas, será importante considerar que o material didático adotado pelos professores das séries anteriores é de grande relevância, por isto mesmo, demonstramos sua influência através da análise de três destes materiais para exemplificar as diferenças.

Os livros analisados foram:

1. **A Conquista da Matemática**, José Rui Giovanni e Benedito Castrucci;
2. **PROMAT-Projeto Oficina de Matemática**, Maria Cecília Castro Grasseschi;
3. **MATEMÁTICA Uma aventura do pensamento**, Oscar Guelli.

3.4.1 A Conquista da Matemática

Este livro da editora FTD(1985) [11] apresenta para 8ª. Série (9º. Ano), uma proposta curricular tradicionalíssima, construída em 22 unidades. O autor faz uso de muita atividade mas com pouca valorização dos conceitos, sem recurso de imagens de apoio à elucidação. É monótono, cansativo, repetitivo. Não sugere a reflexão e contextualização. Já foi muito utilizado e pode ainda ser utilizado na formação de alunos para o nível técnico, mas, o rendimento da aprendizagem será certamente baixo.

3.4.2 PROMAT-Projeto Oficina de Matemática

Este outro livro também da editora FTD(1999) [12] tem a contribuição de várias autoras, e apresenta uma proposta curricular para 8ª. série (9º. Ano), construída com foco na contextualização fazendo uso intensivo de atividades interpretativas, gráficos, e propostas de atividades à serem desenvolvidas pelo aluno. É estruturado em oito capítulos não homogêneos. Os seis primeiros versam sobre a aritmética dos números e das funções e os dois últimos sobre a geometria e trigonometria. A proposta apresentada reforça a tendência vigente de afastar o aluno da leitura, da reflexão sobre o que foi lido, do processo de tentativa e erro na interpretação de textos matemáticos. A passagem de uma seção para a outra não apresenta continuidade e todo esse trabalho acaba recaindo sobre o professor, que deverá complementar o livro, apresentando e sugerindo leituras complementares. Nesta proposta o estudante que sai do Ensino Fundamental para o Médio sentirá grande dificuldade se estiver voltado para a área técnica.

3.4.3 MATEMÁTICA Uma aventura do pensamento

O último material analisado, de autoria de Oscar Guelli(2003) [14], apresenta uma proposta curricular para 8ª. série (9º. Ano)estruturada em seis capítulos, Os três primeiros versando sobre a aritmética dos números e das funções e os três últimos sobre a Geometria e Trigonometria. Uma proposta equilibrada mas, na prática, se levarmos em consideração que o ano letivo tem só quatro unidades, que o professor na maioria das vezes só consegue rendimento de um capítulo por unidade, veremos com isto, que o ensino da Trigonometria/Geometria fica comprometido no final do ano, na angústia da recuperação dos alunos mais fracos. Na análise do volume da 7ª. série vê-se que o autor mantém uma proporção similar entre a Aritmética e a Geometria, oferecendo um amplo tratamento à noções básicas de geometria plana. Este é um bom material para preparação do estudante do Ensino Fundamental para o ensino profissional técnico.

Vê-se assim que o diagnóstico de uma turma deve levar em consideração o material didático que os alunos utilizaram na formação da 8ª.série, atual 9º.ano.

3.5 Análise de livros didáticos do ensino médio

Para a análise da sequência didática vigente na educação pública de nível médio além do livro didático adotado no Centro Territorial de Educação Profissional de Teixeira de Freitas (CETEP TX) foram escolhido três obras conhecidas, aprovadas pelo MEC no PNLEM - Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio. As obras escolhidas foram:

1. - Matemática, de DANTE [7], código da coleção 29017, livro do professor;
2. - Matemática, de BIANCHINI [2], código da coleção 29005, livro do professor;
3. - Matemática, de Paiva [22], código da coleção 25117COLO02, manual do professor;
4. - Matemática, Novo Olhar de Joamir Souza [26], livro adotado no CETEP Tx.

3.5.1 Matemática, de DANTE

É uma obra de 320 páginas, (figura 3.15), com o Manual do Professor, um anexo de 135 páginas. O conteúdo é abordado em 10 capítulos a saber:

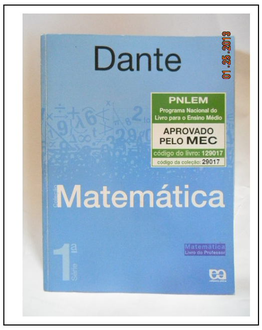


Figura 3.15: *DANTE - Matemática, Ensino Médio*

1. - Conjuntos;
2. - Conjuntos numéricos;
3. - Funções;
4. - Função afim;
5. - Função quadrática;
6. - Função modular;
7. - Noções de Geometria plana;
8. - Progressões;
9. - Matemática financeira;
10. - Trigonometria no triângulo retângulo.
11. - Questões do ENEM.

A trigonometria no triângulo retângulo é apresentada no capítulo 10, em oito páginas de conteúdo e doze de exercícios. O livro apresenta as razões trigonométricas utilizando o conceito de rampa percurso x altura. O capítulo se subdivide em:

a- Índice de subida;

b- A idéia de tangente;

c- A idéia de seno;

d- A idéia de cosseno;

e- O triângulo retângulo: definições;

f- Exercícios.

Em momento algum o livro estabelece relação do triângulo retângulo com o ângulo de 90^o, o autor tenta levar o estudante a perceber o ângulo reto através da contextualização exposta nos desenhos ilustrativos. O ângulo reto é materializado através da simbologia do pequeno quadrado no vértice. A experiência mostra, contudo, que o aluno pode chegar ao primeiro ano sem a noção de ângulo e sem conhecer o ângulo reto ou de 90^o. É comum na resolução de exercícios de Geometria a representação do ângulo reto em um ângulo agudo acrescido da simbologia no vértice, o que torna difícil a identificação dos parâmetros para solução da questão. O livro apresenta uma boa quantidade de exercícios práticos, mas não contextualizados visto que a execução de medidas não faz parte de realidade dos alunos, muitos desconhecem até o significado de unidade de medida. Os últimos exercícios propõem uma certa interdisciplinariedade com a Física ao apresentarem problemas daquela disciplina que fazem uso básico da Trigonometria.

3.5.2 Matemática, de BIANCHINI

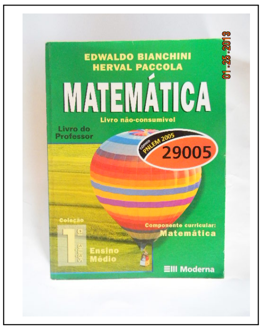


Figura 3.16: *BIANCHINI e PACOLLA - Matemática - Ensino Médio*

É uma obra de 248 páginas, (figura 3.16), trazendo como Suplemento, Orientações para o Professor, um anexo de 111 páginas. O Suplemento é pobre e não acrescenta muito ao professor. O conteúdo é abordado em 12 capítulos a saber:

1. - Conhecimentos básicos de aritmética e álgebra;
2. - Geometria plana;
3. - Conjuntos;
4. - Funções;
5. - Função polinomial do 1^o grau;

6. - Função polinomial do 2^o graus;
7. - Função modular;
8. - Função exponencial;
9. - Função logarítmica;
10. - Noções de matemática financeira;
11. - Sequências numéricas;
12. - Trigonometria no triângulo retângulo;
13. - Questões do ENEM.

A Trigonometria no triângulo retângulo é apresentada no capítulo 12, em oito páginas de conteúdo e sete de exercícios. O livro apresenta direto as razões trigonométricas utilizando conceito tradicional de razão entre lados. O capítulo se subdivide em:

a- Razões trigonométricas num triângulo retângulo;

b- Relações entre seno, cosseno e a tangente dos ângulos agudos;

c- Cálculo das razões trigonométricas;

d- Exercícios.

O livro inicia com definições utilizando relação de lados, mas, não conceitua o que seja hipotenusa, não cita como maior dos lados e portanto não tem preocupação de estabelecer um limite no valor do seno. No item b utiliza alternadamente o conceito de ângulos complementares e da soma de ângulos igual a 90^o, sem estabelecer relação entre os conceitos. Em momento algum o livro estabelece relação do triângulo retângulo com o ângulo de 90^o. Muito interessante é a apresentação do teodolito com a proposição da construção pelo aluno de um teodolito caseiro.

3.5.3 Matemática, de PAIVA

A obra apresenta um Suplemento com Orientações para o Professor muito rico, (figura 3.17), o qual estabelece como o primeiro objetivo da obra "Estabelecer ligações entre o estágio de aprendizado do Ensino Médio e os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental". Sua proposição de fichas de autoavaliação, para professor e alunos, é um material a ser considerado pelo professor aplicador deste PROJETO. A Trigonometria aparece nos dois

Figura 3.17: *MANOEL PAIVA - Matemática - Ensino Médio*

volumes iniciais. O volume 1 tem 256 páginas e um suplemento de 104 páginas. O conteúdo é abordado em 11 capítulos a saber:

1. - Uma introdução à linguagem dos conjuntos;
2. - Temas básicos da álgebra e matemática financeira;
3. - Geometria plana: triângulos e proporcionalidade;
4. - A linguagem das funções;
5. - Função real de variável real e inversão de funções;
6. - Função polinomial do 1^o grau ou função afim;
7. - Função polinomial do 2^o grau ou função quadrática;
8. - Função modular;
9. - Função exponencial;
10. - Função logarítmica;
11. - Sequências.

O volume 2 tem 312 páginas e um suplemento de 120 páginas. O conteúdo é abordado em 15 capítulos a saber:

1. - Geometria plana: circunferência, circulo e cálculo de áreas;
2. - Trigonometria no triângulo retângulo;
3. - Circunferência trigonométrica: seno e cosseno;

4. - Tangente e outras razões trigonométricas;
5. - Adição de arcos duplos;
6. - Funções trigonométricas e resolução de triângulos;
7. - Matrizes;
8. - Sistemas Lineares;
9. - Determinantes e aplicações;
10. - Os princípios da Análise combinatória;
11. - Agrupamentos e métodos de contagem;
12. - Geometria de posição e poliedros;
13. - Prismas e pirâmides;
14. - Corpos redondos;
15. - Probabilidade.

A geometria apresentada no capítulo 3 do volume 1 aborda em revisão os seguintes tópicos:

a- As origens da geometria;

b- Polígonos;

c- Triângulos;

d- Propriedades dos triângulos;

e- Teorema de Tales;

f- Semelhança de figuras planas;

g- Semelhança de triângulos;

h- Relações métricas no triângulo retângulo.

A trigonometria não aparece neste capítulo onde a tônica central é a geometria do triângulo retângulo, conteúdo muito bem apresentado e abordado na forma de exercícios. Apresentamos o volume 2 só para deixar claro que todo o conteúdo de trigonometria foi reservado ao segundo ano do ensino médio.

3.5.4 Coleção Novo Olhar

Figura 3.18: *JOELMIR SOUZA - Matemática - Ensino Médio*

No CETEP TX foi adotado em 2011, para uso em 2012 a Coleção Novo Olhar - MATEMÁTICA, de Joamir Souza, (figura 3.18). Sua proposta curricular, para o primeiro ano do ensino médio, é dividida em quatro unidades a saber:

1. - Conjuntos;
2. - Funções;
3. - Progressões;
4. - Trigonometria.

A unidade 1 só tem um capítulo, a unidade 2 tem seis capítulos e as unidade 3 e 4 mais um capítulo, cada uma. Na quarta unidade, o conteúdo de Trigonometria busca recuperar os conceitos básicos do Ensino Fundamental, a saber:

a- Teorema de Tales;

b- Teorema de Pitágoras;

c- Trigonometria no triângulo retângulo;

d- Trigonometria em um triângulo qualquer.

O conteúdo é trabalhado valorizando conceitos e demonstrações, os exercícios resolvidos após cada segmento são seguidos de aplicações práticas intercaladas a exercícios teóricos, tudo muito bem ilustrado, sem esquecer o contexto histórico de cada assunto tratado. A tabela trigonométrica é apresentada permitindo a exploração de ângulos diferentes dos notáveis. Este é o material que mais se adéqua a nossa visão do curso, contudo, nossa proposta ainda inverte a ordem das unidades iniciando a exposição dos conteúdos pela Trigonometria.

CAPÍTULO 4

UMA NOVA ABORDAGEM PARA O ENSINO DA TRIGONOMETRIA

Segundo Cicero [23] o ensino da Trigonometria sempre apresentou deficiências, entre as quais destacamos: a extensão do programa; o pouco ou quase nenhum domínio dos alunos de conhecimentos prévios e importantes como o estudo da circunferência e seus elementos, semelhança de triângulos e de simetria; a pouca afinidade dos professores com o conteúdo, sua história e sua aplicação em diversas áreas do conhecimento humano. Estes fatores levam a que se desenvolva o ensino de trigonometria baseado no estudo de fórmulas e regras, descontextualizado e sem significado para a maioria dos alunos, recorrendo à memorização de exercícios padrão, muitos dos quais sem aplicações no dia a dia.

Considerando as especificidades da formação Profissional Técnica, deve-se explorar o necessário pendor para as atividades práticas do estudante estimulando-o ao domínio e aprofundamento do conhecimentos básicos para tornar possível melhorar a compreensão das Ciências da Natureza. No estudo das relações trigonométricas, destaca-se aqui a importância da história da trigonometria, permitindo ao estudante observar e até reproduzir experimentos históricos, se apropriando da imensa contribuição desta teoria enquanto ferramenta do conhecimento humano. Paralelamente, o conteúdo é trabalhado através de atividades e situações problemas, tendo como referêncial a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel.

4.1 Razão e proporção no Teorema de Tales

Vamos começar a trigonometria pelos conceitos de semelhança e como o conceito de semelhança envolve razão e proporção de segmentos, nada melhor do que começar revendo o conhecido, Teorema de Tales.

Teorema 1. *TEOREMA DE TALES*
Um feixe de retas paralelas, cortado por duas transversais, forma sobre elas segmentos correspondentes proporcionais. [1]

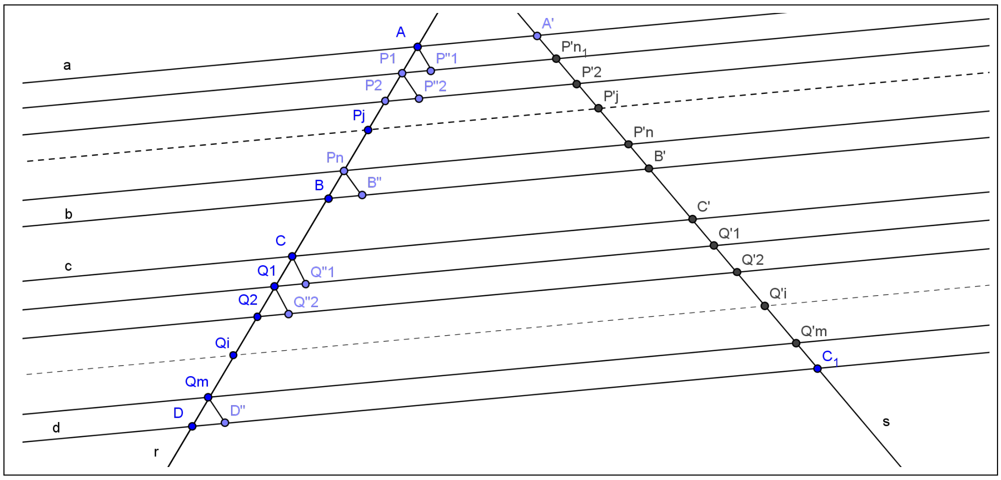


Figura 4.1: *Teorema de Tales sobre um feixe de retas paralelas*

*Seja um feixe de paralelas, (figura 4.1), a//b//c//d, cortado por duas transversais,*r *e* s. *Quer-se provar que,tomados dois segmentos quaisquer determinados pelo feixe sobre a reta* r, *por exemplo* $\bar{AB}$ *e* $\bar{CD}$, *seus correspondentes sobre* s, $\bar{A'B'}$ *e* $\bar{C'D'}$ *são tais que* $\frac{\bar{AB}}{\bar{CD}} = \frac{\bar{A'B'}}{\bar{C'D'}}$. *Suponhamos que os segmentos* $\bar{AB}$ *e* $\bar{CD}$ *tenham uma unidade de medida comum, isto é, exista uma unidade de medida, por menor que seja, que divida de forma exata os dois segmentos dando respectivamente como resultados m e n. Sejam* $P_1, P_2, ...P_n$, *pontos sobre* $\bar{AB}$ *que dividem o segmento em n partes iguais, e sejam* $Q_1, Q_2, ...Q_m$, *pontos sobre* $\bar{CD}$ *que dividem o segmento em m partes iguais. Pelos pontos* P_i *e* Q_i *tracemos paralelas e elas cortarão os segmentos* $\bar{A'B'}$ *e* $\bar{C'D'}$ *respectivamente nos pontos* $P'_1, P'_2, ...P'_n$ *e* $Q'_1, Q'_2, ...Q'_n$. *Nos pontos* A, $P_1, ...P_i$, C *e* $Q_1, ...Q_i$ *tracemos paralelas a reta* s *determinando os pontos* $P''_1, ..., P''_i$ *e* $Q'_1, ...Q''_i$ *respectivamente . Tais paralelas formarão os triângulos* $AP_1P''_1$, $P_1P_2P''_2$, ... *e*

[1]Demonstração apresentada no Livro C.Q.D.:explicações e demonstrações sobre conceitos teoremas e fórmulas essenciais da Geometria[10]

CQ_1Q_1'', $Q_1Q_2Q_2''$,.... todos congruentes entre si (ALA) já que os lados são congruentes por hipótese de construção e os ângulos são correspondentes. Por hipótese de construção também os segmentos $A\bar{P}''$ e $A'\bar{P}'$ são congruentes já que formam um paralelogramo e Teorema anterior da geometria plana nos diz que lados opostos de um paralelogramo são côngruos. Desta forma podemos provar a congruência entre todos os segmentos $P_i\bar{P}_{i+1}''$ e $P_i'\bar{P}_{i+1}'$ bem como $Q_i\bar{Q}_{i+1}''$ e $Q_i'\bar{Q}_{i+1}'$.

Uma observação importante de ser feita a respeito da prova deste importante teorema é que ela baseou-se na hipótese da existência de uma unidade de medida comum, ou seja, os segmentos são comensuráveis, já que quando a teoria das proporções começou a ser pesquisada por Pitágoras, por volta de 500 a.C., acreditava-se que a relação entre duas magnitudes quaisquer(segmentos) de mesma natureza pudesse sempre ser expressa pela relação entre dois números inteiros. A validade para magnitudes incomensuráveis foge ao escopo do ensino médio, mas a partir das idéias de "Corte no conjunto" de Richard Dedekind (1831-1916), pode-se adiantar que é valido.

Aprendendo a usar o par de esquadros - O par de esquadros é ideal para o traçado de retas paralelas, para começar posicione um esquadro na posição em que deseja traçar a primeira reta use o lado mais a direita do esquadro, encoste o segundo esquadro embaixo do primeiro e fixe-o bem com a mão esquerda apoiada sobre a mesa. Após riscar a primeira reta deslize o esquadro superior para baixo, segundo sua necessidade e vá traçando as retas paralelas à primeira. Você poderia explicar o que neste procedimento garante que as retas são paralelas? Resposta: A linha que une os dois esquadros funciona como uma transversal e o movimento do esquadro móvel sobre o esquadro fixo garante a congruência dos ângulos correspondentes o que afirma o paralelismo.

4.1.1 Aplicações:

Os exercícios a seguir, retirados do vol 1 da Coleção Novo Olhar [26][2] servem somente como ilustração para escolha do tipo de atividade a ser aplicada em sala, cada um, abordando o conteúdo do Teorema de Tales. Apresenta situações diferentes que requer do professor a revisão do conteúdo de razões e proporções, resolução de sistemas do 1^o grau, equações do 2^o grau e semelhança de triângulos.

==

1. Na figura 4.2, AB=3, BC=9 e DE=5. Determine o valor de EF, sabendo que as retas

[2]Atividades resolvidas, pág. 264 Unidade 4, capítulo 9

r,s e t são paralelas.

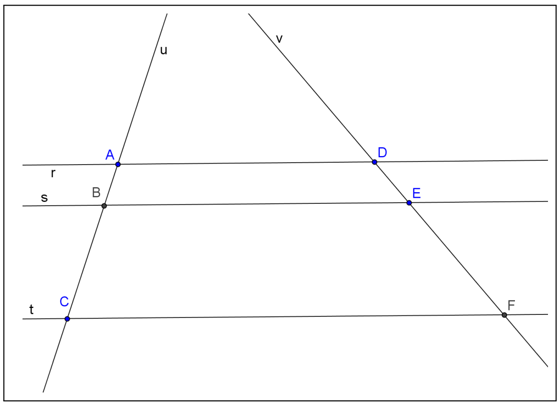


Figura 4.2: *Exercício 01*

Resolução

Pelo teorema de Tales tem-se $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \Longrightarrow \frac{3}{9} = \frac{5}{EF} \Longrightarrow EF = 15$

==

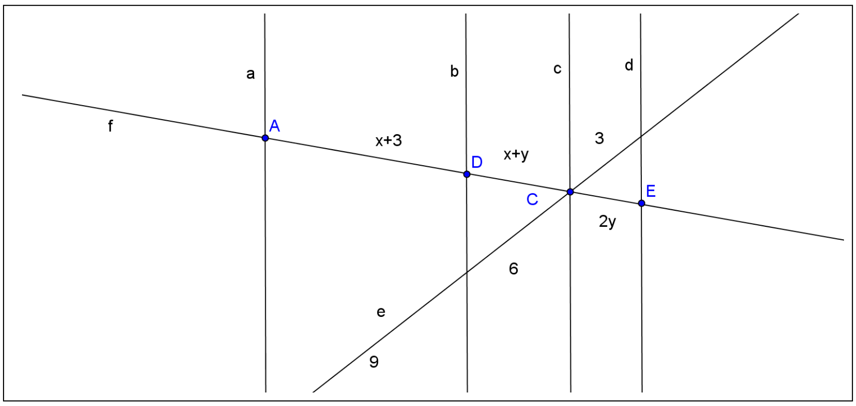


Figura 4.3: *Exercício 02*

2. Na figura 4.3, determine os valores de x e y, sabendo que a//b//c//d.

   Resolução

   Utilizando o Teorema de Tales, tem-se

   $\frac{3}{6} = \frac{2y}{x+y} \Longrightarrow 3x + 3y = 9y \Longrightarrow x = 3y$

   $\frac{6}{9} = \frac{x+y}{x+3} \Longrightarrow 6x + 18 = 9x + 9y \Longrightarrow 3x + 9y = 18$

   Subistituindo a primeira na segunda obtem-se

   $3x + 9y = 18 \Longrightarrow 3.(3x) + 9y = 18 \Longrightarrow 18y = 18 \Longrightarrow y = 1$

   Calculando x por substituição na expressão x=3y tem-se x=3

   ==

3. Calcule o valor de x, (figura 4.4), sabendo que r//s//t.

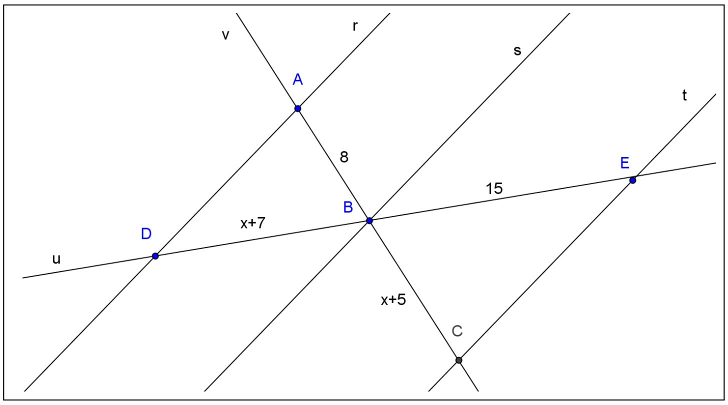


Figura 4.4: *Exercício 03*

Resolução

Note que $\bar{AB}$ e $\bar{BC}$ estão contidos na mesma reta v enquanto $\bar{DB}$ e $\bar{BE}$ estão contidos na reta u. De acordo com o Teorema de Tales:

$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BE} \Longrightarrow \frac{8}{x+5} = \frac{x+7}{15} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x^2 + 7x + 5x + 35 = 120 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x^2 + 12x - 85 = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x_1 = 5 \Longrightarrow x_2 = -17$ ∗(inválido)

4.2 Semelhança de polígonos e os critérios para triângulos.

Definição 4.2.1. Semelhança de figuras geométricas

Duas figuras são semelhantes se existir uma correspondência entre os todos seus pontos, $(a_1, a_2, ..., a_n) \longrightarrow (b_1, b_2, ..., b_n)$ de forma que entre dois pares quaisquer de pontos correspondentes existir a mesma proporção,

$$\frac{a_i a_j}{a_k a_l} = \frac{a_i b_j}{b_k b_l}$$

.

A figura 4.5 apresenta duas imagem de homem, em pé com braços e pernas abertas. Denomine-se de A e B as extremidades das mãos da imagem maior, denominemos de A' e B' as extremidades das mãos da imagem menor, estes pontos são correspondentes. Da mesma

Figura 4.5: *Figuras Semelhantes*

forma denomine-se de C e D as extremidades dos pés da imagem maior, denominemos de $C^{'}$ e $D^{'}$ as extremidades dos pés da imagem menor, estes pontos também são correspondentes. Segundo a definição acima se as figuras são semelhantes então

$$\frac{\bar{AB}}{\bar{CD}} = \frac{\bar{A'B'}}{\bar{C'D'}}$$

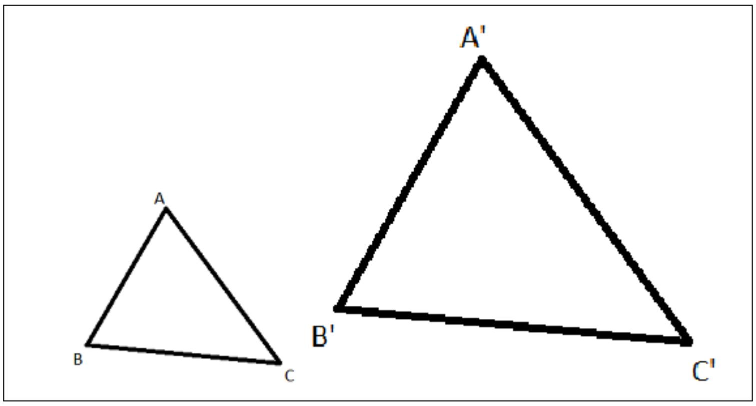


Figura 4.6: *Triângulos Semelhantes*

Os polígonos são figuras geométricas definidas por uma sequência de pontos e lados. O triângulo é o mais simples dos polígonos, pois possui três lados e três ângulos. O triângulo é sempre convexo já os demais polígonos podem ser concavos ou convexo. Observando a figura 4.6 e aplicando-se a definição de semelhança aos triângulos

$$\Delta ABC \sim \Delta A^{'}B^{'}C^{'}$$
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Pode-se então definir semelhança de triângulos da forma abaixo:

Definição 4.2.2. Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se existir uma correspondência entre seus lados, (a,b,c) $\longrightarrow$ (a',b',c'), para a qual os lados correspondentes mantenham a mesma proporção,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Muito cuidado deve-se ter ao tratar da semelhança entre polígonos com número de lados maior que três, pois não basta estabelecer que os lados correspondentes sejam proporcionais uma vez que polígonos com mais de três lados são deformáveis o que significa dizer que podem manter a mesma proporção entre os lado com formas diferentes. Sendo assim, para se estabelecer uma regra de semelhança entre polígonos deve-se garantir que os lados correspondentes tenham a mesma proporção e os ângulos correspondentes sejam côngruos.

4.2.1 Critérios de semelhança de triângulos

Pode-se dizer que as proposições a seguir são equivalentes a definição de semelhança de triângulos, desta forma a semelhança de triângulos pode ser identificada por três casos: considerando-se a definição como um caso-LLL os outros casos são apresentados a seguir:

Proposição 2. *Semelhança Caso-AAA*

Seja ΔABC um triângulo de ângulos (α, β, γ) e seja $\Delta A'B'C'$ um triângulo de ângulos $(\alpha', \beta', \gamma')$. Se $\alpha \cong \alpha'; \beta \cong \beta'; \gamma \cong \gamma'$) então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

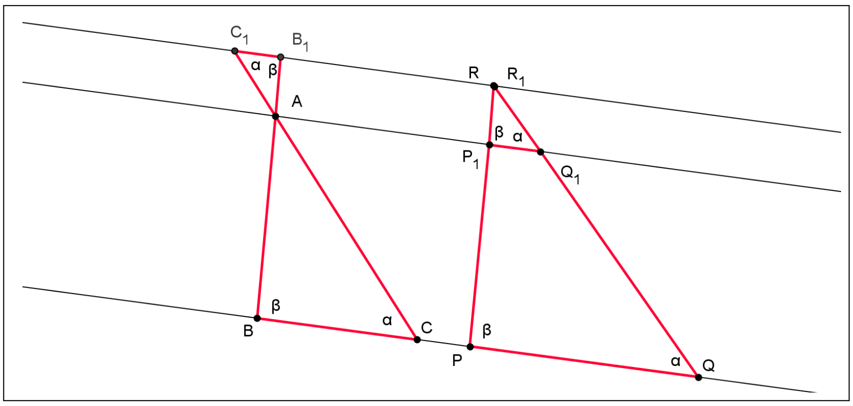


Figura 4.7: *Semelhança de Triângulos - caso AAA*

Se dois triângulos tem ângulos correspondentes congruentes então eles são semelhantes. Esta conclusão resulta do Teorema de Tales, lembrando-se que, dois triângulos com dois ângulos correspondentes congruentes necessariamente tem os terceiros ângulos côngruos. Assim, simplificando a proposição tem-se que, para ser semelhantes dois triângulos precisam ter dois ângulos correspondentes congruentes. A ordem dos ângulos dificulta a percepção da semelhança mas não altera a conclusão, (figura 4.7), só altera a disposição dos triângulos para se obter as três retas paralelas cortadas por duas transversais.

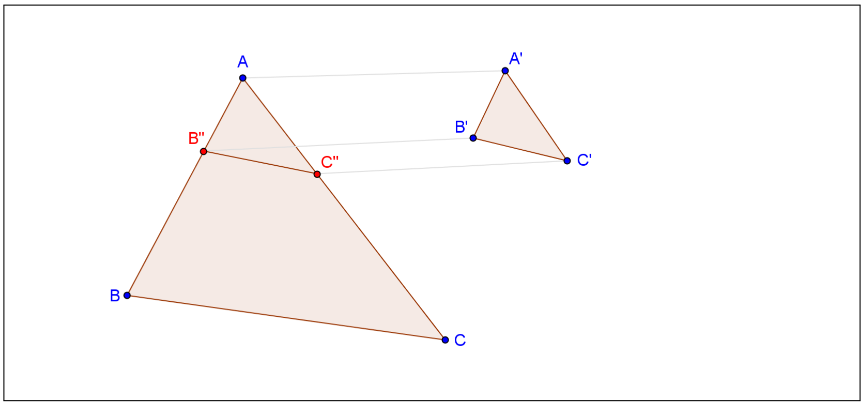


Figura 4.8: *Semelhança de Triângulos caso AAA - prova*

Prova

Dados dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ com ângulos correspondentes congruentes,(figura 4.8), é sempre possível escolher-se um dos ângulos do maior triângulo $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ e marcar sobre o lado maior $\bar{AC}$ um ponto C'' tal que o segmento $\bar{AC''}$ seja côngruo ao lado maior do triângulo menor $\bar{A'C'}$ e sobre o lado menor $\bar{AB}$ marcar um ponto B'' tal que o segmento $\bar{AB''}$ seja côngruo ao lado menor do triângulo menor $\bar{A'B'}$. Os triângulos ΔABC e $\Delta AB''C''$ tem ângulos correspondentes congruentes então $\bar{BC} \mathbin{//} \bar{B''C''}$ e então são semelhantes com base no Teorema de Tales. Os triângulos $\Delta A'B'C'$ e $\Delta AB''C''$ são congruentes por construção na razão de 1:1. Por transitividade tem-se que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Proposição 3. *Semelhança Caso-LAL*

Seja ΔABC um triângulo de lados a e b formando o ângulo γ e seja $\Delta A'B'C'$ um triângulo de lados a' e b' formando o ângulos γ'. Se $\gamma \cong \gamma'$ e $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Observando ainda a figura 4.7 pode-se verificar que a prova resulta da rearrumação dos triângulos e da aplicação do Teorema de Tales.

Prova

Nos triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ trace-se as alturas dos vértices A e A' respectivamente, (figura 4.9). Os triângulos retângulos ΔAPC e $\Delta A'P'C'$ são semelhantes pelo caso AAA. Então temos $\frac{AP}{A'P'} = \frac{PC}{P'C'} = \frac{AC}{A'C'}$. Mas como $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ ou $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ resulta que $\frac{AP}{A'P'} = \frac{PC}{P'C'} = \frac{BC}{B'C'}$. Das propriedades das proporções temos que se $\frac{BC}{B'C'} = \frac{PC}{P'C'} \longrightarrow \frac{BP}{B'P'}$. Como ΔABP e $\Delta A'B'P'$ são retângulos e $(AB)^2 = (AP)^2 + (BP)^2$ e $(A'B')^2 = (A'P')^2 + (B'P')^2$ concluímos que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$.

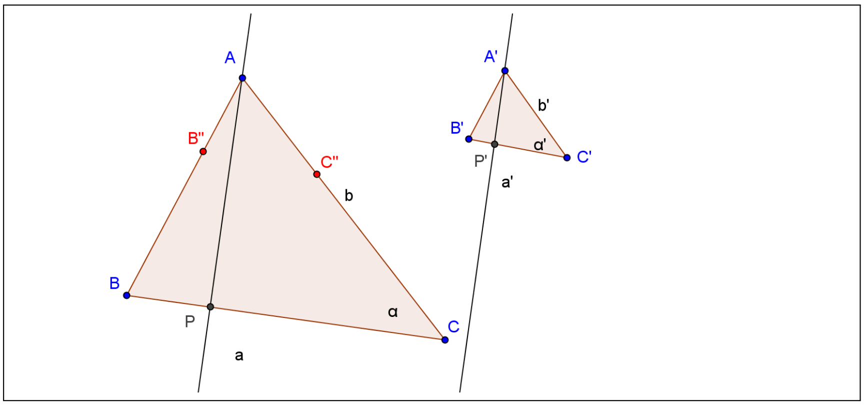


Figura 4.9: *Semelhança de Triângulos caso LAL - prova*

4.2.2 Semelhança em triângulos retângulos

Definição 4.2.3. Triângulo retângulo

Um triângulo é dito retângulo se um de seus ângulos for reto, isto é, medir 90^o.

Qualquer triângulo retângulo tem um ângulo reto e dois ângulos agudos complementares. No triângulo retângulo o lado maior é chamado de *hipotenusa*, e esta se opõe ao ângulo reto, os outros dois lados são chamados de catetos.

Teorema 4. *TEOREMA DE PITÁGORAS*

Em todo triângulo retângulo a hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Esta, talvez, seja a propriedade mais conhecida dos triângulos retângulos.

Proposição 5. *Semelhança entre triângulos retângulos*

Todo triângulo retângulo com um ângulo agudo congruente é semelhante

Esta proposição resulta diretamente do caso de semelhança AAA e estabelece que um ângulo agudo α determina todas as propriedades de semelhança de uma infinidade de triângulos retângulos de ângulo α

Todo triângulo retângulo de ângulo α, (figura 4.10) apresenta o mesmo valor para as razões entre lados correspondentes desta forma tem-se:

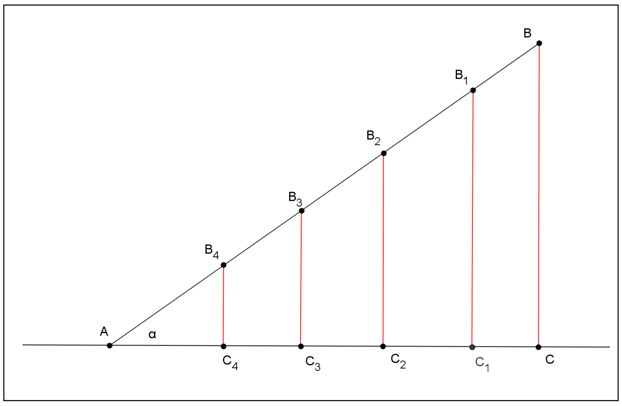


Figura 4.10: *Semelhança de Triângulos retângulos*

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AB_4}} \tag{4.2.1}$$
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{AC_4}}{\overline{AB_4}}$$
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AC_4}}$$

4.2.3 Aplicações:

Os livros didáticos trazem uma infinidade de exercícios fundamentados na semelhança de triângulos retângulos e aqui serão ressaltados três. O primeiro, pelo valor histórico, o segundo, para reforço da atividade extra sala e o terceiro, para expandir o aprendizado às relações métricas no triângulo retângulo.

==

Figura 4.11: *Pirâmide de Gizé-Egito*

Exercício 1 É conhecida a história de Tales, filósofo e matemático grego, que, em sua visita ao Egito teria sido desafiado a medir a altura da Pirâmide. As dimensões colossais da pirâmide (figura 4.11-a) deixa claro o grande problema do Filósofo. Como você resolveria este problema usando semelhança? [3].

Resolução Uma das versões conta que Tales ao perceber que a sombra de seu bastão tinha o comprimento do mesmo, procedeu a medição da sombra da pirâmide e determinou-lhe a altura. A explicação, (figura 4.11-b), é que Tales sabia que os raios do sol que atingem os obstáculos na terra são paralelos. Desta forma, pôde ele perceber dois triângulos formados pelas sombras do bastão e da pirâmide como triângulos retângulos semelhantes e assim chegar a conclusão que chegou.

$$\frac{altura \quad do \quad bastão}{sombra \quad do \quad bastão} = \frac{altura \quad da \quad pirãmide}{sombra \quad da \quad pirâmide}$$

==

Exercício 2 Se a sombra do menino, (figura 4.12), fosse 1,6m saber-se-ia de imediato a altura do poste, mas o menino mede 1,2m como calcular a altura do poste?

Resolução As alturas dos obstáculos e suas sombras formam um ângulo reto. Identificando-

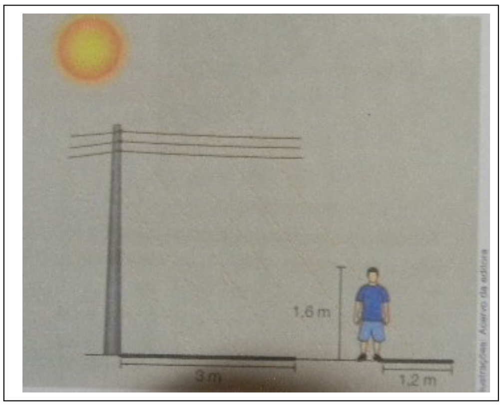


Figura 4.12: *Calculando altura por semelhança*

se que os raios solares formam com as sombras triângulos retângulos semelhantes onde as alturas e as sombras formam respectivamente catetos correspondentes, pode-se afirmar:

$$\frac{altura \quad do \quad poste}{sombra \quad do \quad poste} = \frac{altura \quad do \quad menino}{sombra \quad do \quad menino}$$

$$\frac{h}{3{,}0} = \frac{1{,}6}{1{,}2}$$

$$h = 4,0m$$

==

Exercício 3 Na figura 4.13 pode-se identificar três triângulos retângulos semelhantes $\Delta ABC \sim$

[3]fotos extraídas do Vol.1 da Coleção Novo Olhar [26]

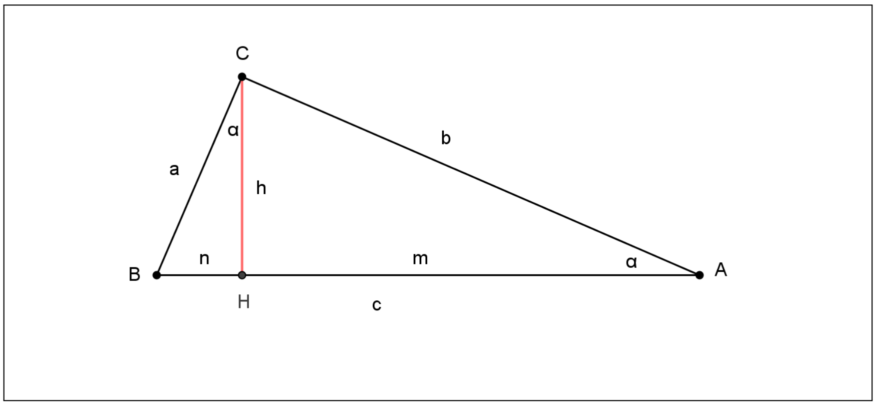


Figura 4.13: *Relações métricas no triângulo retângulo*

$\Delta CBH \sim \Delta ACH$. Partindo das relações de semelhança entre estes triângulos, deduza as relações abaixo:

- $h^2 = m.n$
- $h = n.\frac{b}{a}$
- $h = m.\frac{a}{b}$

4.3 Geometria do Círculo

Falar do círculo e da circunferência é sempre interessante ao professor, pois, o aluno identifica facilmente esta figura geométrica, é então um bom momento de exercitar a linguagem matemática oferecendo uma definição mais formal.

Antes de começar a falar das formas geométricas é interessante falar-se um pouco da idéias de *Lugar geométrico de pontos*. Todas as figuras geométricas são idealizações do ser humano. Ao se falar de um triângulo se forma automaticamente uma imagem no nosso cérebro que a diferencia da imagem de um círculo. Contudo, ao se discutir Geometria na Índia ou na China percebe-se que estas figuras são chamadas de forma diferente, que para nós não tem o menor sentido, mas as propriedades das figuras geométricas continuam válidas.

Desta forma, é importante perceber a independência do espaço e do plano geométrico formado por idéias e conceitos cuja materialização só é possível mediante restrições e aproximações, isto é, ao se desenhar um triângulo equilátero admiti-se que a figura desenhada tenha realmente lados do mesmo tamanho, embora seja sempre possível encontrar diferenças microscópicas no seu traçado.

Sendo assim, as formas geométricas puras não devem ser traçadas em um lugar físico devem ser idealizadas em um *lugar geométrico de pontos* incapaz de ser alterado pelo mundo físico e suas imprecisões. Esta é então a idéia do *lugar geométrico de pontos*, um ideal aonde as propriedades das figuras geométricas não podem ser alteradas pelo mundo físico real. As construções humanas são meras aproximações melhores ou piores destes ideais imaginários.

Ao estudar Geometria deve-se ter em mente que as figuras traçadas com lápis e papel não garantem as propriedades geométricas senão por aproximações. Estas propriedades só são garantidas se idealizamos as figuras em seu lugar geométrico de pontos.

Exercício
Idealize o ponto T de tangência de uma reta a um círculo de raio igual a 2cm, este ponto é comum à reta e ao círculo e é único. Agora desenhe este círculo e tente encontrar este ponto de tangência idealizado.

Definição 4.3.1. Circunferência
Circunferência[4] é o lugar geométrico dos pontos, em um plano α, que equidistam de um ponto O chamado *centro*.

Definição 4.3.2. Raio
O raio de uma circunferência expressa a magnitude do segmento que liga o centro O a qualquer ponto P da circunferência, $r = d(\bar{OP})$.

O conjunto $C(O, r)$ em um plano α determina uma única circunferência, de *centro* C e raio r. Estamos estudando a geometria plana e de agora em diante será omitida a especificação do plano α.
A interseção de uma reta com uma circunferência, (figura 4.14), pode ser: um conjunto vazio; um conjunto unitário; um conjunto de dois elementos.

1. Primeiro caso - a interseção da reta, w, com a circunferência, $C(O, r)$, é um conjunto vazio quando a reta é externa à circunferência, ou seja, a distância do ponto O à reta w é maior que o raio, $d(\bar{O,w}) > r$;

2. Segundo caso - a interseção da reta, t, com a circunferência, $C(O, r)$, é um conjunto unitário, $\{T\}$, então a reta é tangente à circunferência e T dito o ponto de tangência, ou seja, a distância do ponto O à reta t, é igual ao raio, $d(\bar{O,t}) = r$;

[4] conceitualmente o circulo é o conjunto união dos pontos internos com a linha da circunferência e se define após a definição de raio

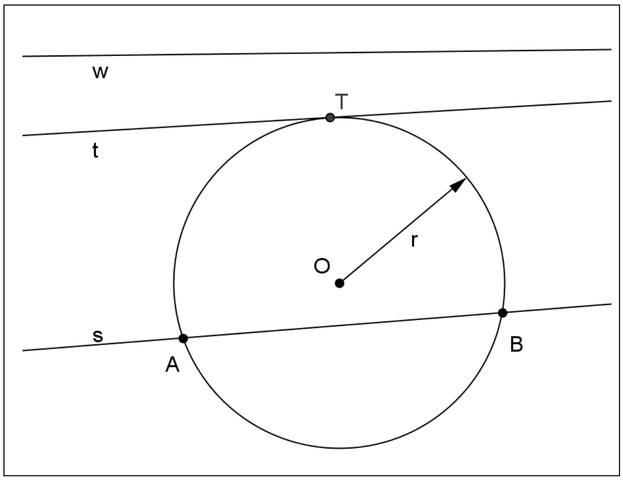


Figura 4.14: *Posição relativa entre retas e círculo*

3. Terceiro caso - a interseção da reta, s, com a circunferência, $C(O, r)$, é um conjunto de dois pontos, $\{A, B\}$ então a reta é secante à circunferência, isto é, ela corta a circunferência nos pontos A e B, e a distância do ponto O à reta s é menor que o raio, $d(\bar{O}, s) < r$.

4.3.1 Cordas e arcos

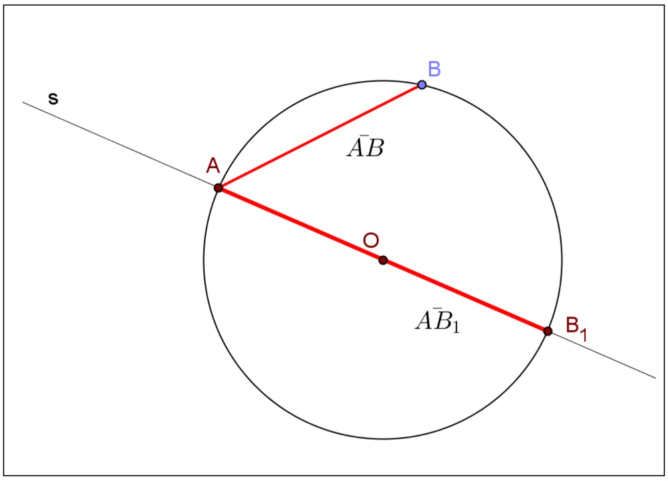


Figura 4.15: *Corda $\bar{AB}$ de um circulo*

Definição 4.3.3. Corda
Uma corda $\bar{AB}$ é o segmento que une dois pontos quaisquer, A e B pertencentes à circunferência $C(O, r)$.

O comprimento de uma corda $\bar{AB}$ é definido pela magnitude do comprimento do segmento $d(\bar{AB})$. A menor corda de uma circunferência mede zero, quando o ponto B tende ao ponto A. A maior corda de uma circunferência mede $d(\bar{AB_1}) = 2r$, ocorre sempre que os pontos A,O e B_1 estão alinhados, (figura 4.15), o segmento $\bar{AB_1}$ é chamado de diâmetro da circunferência.

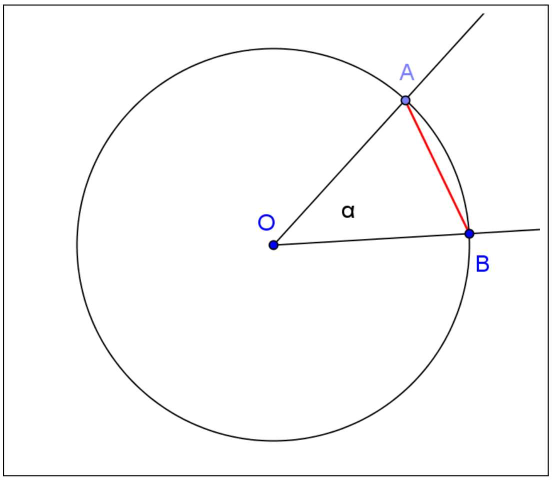


Figura 4.16: *Ângulo central da corda $\bar{AB}$*

Definição 4.3.4. Ângulo central

As semi-retas que ligam o centro O as extremidades da corda $\bar{AB}$, (figura 4.16), definem um ângulo α denominado como ângulo central, uma vez que seu vértice está sobre o centro da circunferência.

Consta que provavelmente os babilônicos sugeriram a divisão da circunferência em 360 partes iguais, deste fato resulta a unidade de medida de ângulos conhecida como *grau*

Definição 4.3.5. Grau(^{o})

O *grau* é um ângulo central que mede o equivalente a um trezentos e sesenta ávos da circunferência cheia.

Aprendendo a usar o compasso - Use o compasso para traçar um círculo de raio igual a 2cm. Observe a facilidade do instrumento para encontrar pontos distantes de 2cm. Agora trace uma reta e marque uma origem O sobre a reta encontre pontos espaçados de 2cm. Percebe que usando o compasso é mais fácil e mais preciso que a régua? O compasso é um instrumento para transporte de segmentos veja como é fácil, escolha uma direção qualquer, um ponto A de origem centre o compasso e marque o ponto B então $\bar{AB}$ mede 2cm.

Proposição 6. *Arcos $\widehat{AB}$*

Toda reta secante s a uma circunferência $\mathrm{C}(O, r)$ *determina uma corda $\bar{AB}$ que divide a circunferência em duas partes um arco maior $\widehat{AB}$ e um arco menor $\widehat{AB}$, (figura 4.17).*

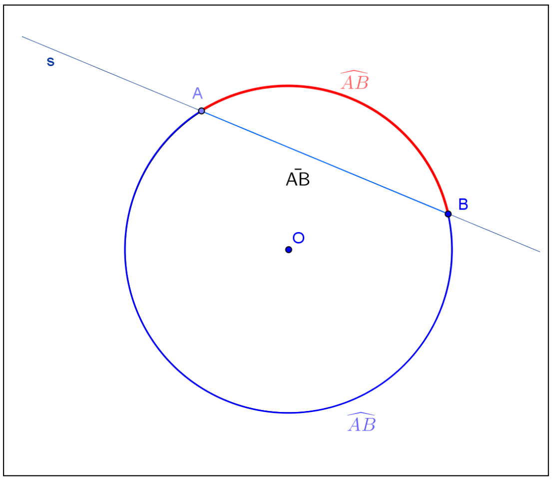


Figura 4.17: *arcos $\widehat{AB}$ de um círculo*

Um arco de circunferência pode ser medido em função do ângulo central ou em função do seu comprimento relativo. O comprimento de uma circunferência é dado por $2\pi.r$. O número π é um número irracional que representa a razão $(\frac{perímetro}{diâmetro})$ do circulo. Há muito tempo vem o homem tentando estabelecer uma razão exata entre o perímetro do circulo e o seu diâmetro, os trabalhos do matemático grego Arquimedes(287-212a.C) aparecem como a primeira tentativa de aproximação obtendo $\pi = 3,14$, ou a aproximação de $\pi = 3\frac{1}{7} \simeq 3,1428$.

A medida do comprimento relativo de um arco $\widehat{AB}$ pode então ser expressa pela razão entre o seu comprimento pelo raio do círculo. Uma circunferência cheia, de 360^o corresponde a um arco de 2π. Esta relação entre arcos e raio dá origem a uma nova unidade de medida para arcos e ângulos, o *radiano*.

Definição 4.3.6. Radiano(rad)
O radiano é o ângulo central, menor, do arco $\widehat{AB}$ que mede em comprimento o equivalente a um raio da circunferência.

Partindo da relação de igualdade do ângulo da circunferência cheia, medida em graus e medida em radiano pode-se estabelecer a conversão de ângulos de grau para radiano e vice-versa.

$$360^o = 2\pi(rad) \tag{4.3.1}$$

Exemplo 1 Converta o ângulo $\alpha = 30^o$ para radianos.

$$\frac{30^o}{360^o} = \frac{\alpha}{2\pi rad}$$
$$\alpha = 2\pi.\frac{30^o}{360^o}rad = \frac{\pi}{6}rad$$

Exemplo 2 Converta o ângulo $\beta = \frac{2\pi}{3} rad$ para graus

$$\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{\beta}{360^o}$$
$$\beta = 360^o.(\frac{2\pi}{3}.\frac{1}{2\pi}) = \frac{360^o}{3} = 120^o$$

4.4 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

O conhecimento de um ângulo, α, no triângulo retângulo permite conhecer o outro ângulo, β, já que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180^o. Temos então que:

$$90^o + \alpha + \beta = 180$$
$$\beta = 90^o - \alpha \Longrightarrow \alpha + \beta = 90^o$$

diz-se então que α e β são ângulos complementares.
Ao estudar a semelhança dos triângulos retângulos na seção 3.2.2 concluiu-se que, o conhecimento do ângulo α determina os valores de três razões entre os lados do triângulo retângulo, (Equações 4.2.1), que serão agora melhor detalhadas.

4.4.1 Seno

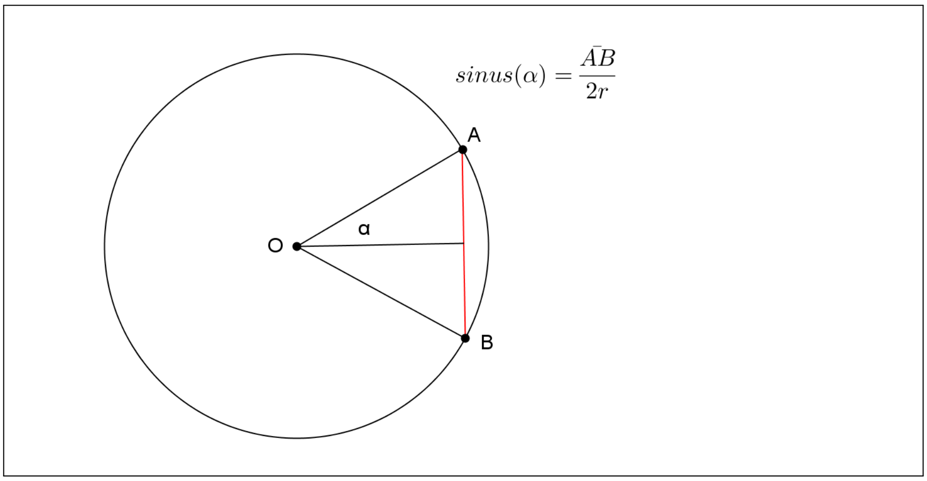


Figura 4.18: *Seno e a meia-corda*

A palavra seno vem do latim sinus que significa seio, volta, curva, cavidade. A palavra se adéqua muito bem a forma da curva mas, na verdade, sua origem vem da tradução da palavra árabe *jaib*. O primeiro aparecimento real do seno de um ângulo se deu no trabalho dos hindus. **Aryabhata**, por volta do ano 500, elaborou tabelas envolvendo metade de cordas, (figura 4.18) que realmente são tabelas de senos e usou o termo *jiva*. A palavra hindu *jiva* significa meia corda e foi traduzida para o árabe como sendo *jiba* uma palavra que tem o mesmo som. Na lingua árabe, como no hebraico, é comum omitir-se as vogais, acredita-se que vem dai a alteração da escrita de *jiba* para *jaib*, este erro provocou, na tradução para o latim, que a palavra *jiba*, que significa a corda de um arco, e assim deveria ser traduzida, foi alterada para *jaib* que traduzido para o latim deu origem a palavra sinus e significa seio.[5]

A mais antiga tábua de senos foi descoberta na Índia, onde essas tábuas, sem dúvida, se originaram. Seus inventores, desconhecidos, conheciam as idéias matemáticas gregas e babilônicas transmitidas como subprodutos de um florescente comércio romano com o sul da Índia, via Mar Vermelho e Oceano Índico.

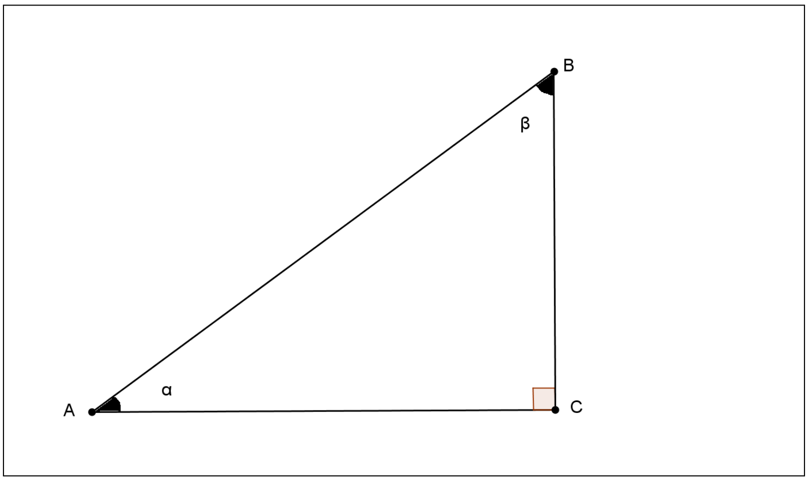


Figura 4.19: *Triângulo Retângulo*

Do estudo da semelhança em triângulos retângulos pode-se concluir que em todo triângulo retângulo para um determinado ângulo medindo α, (figura 4.19), a razão $\frac{\bar{B}C}{\bar{A}B}$ é sempre constante e pode ser reescrita como:

$$\frac{\bar{B}C}{\bar{A}B} = \frac{cateto.oposto}{hipotenusa}$$

esta razão recebeu o nome de seno, então temos:

$$sen(\alpha) = \frac{cateto.oposto}{hipotenusa} = \frac{\bar{B}C}{\bar{A}B}$$

[5]Página do site da Universidade de São Paulo - $http : //ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm$ acesso em 28/01/2013 às 23:45

4.4.2 Cosseno

A palavra cosseno surgiu no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. A razão $\frac{\bar{AC}}{\bar{AB}}$ também constante é o seno do ângulo β complemento de α, (figura 4.19), e pode ser reescrita como:

$$\frac{\bar{AC}}{\bar{AB}} = \frac{cateto.adjacente}{hipotenusa}$$

esta razão recebe o nome de cosseno, e seu significado já deixa claro que ela também corresponde ao seno do outro ângulo do triângulo, β, então temos:

$$sen(\beta) = \frac{\bar{AC}}{\bar{AB}}$$
$$cos(\alpha) = sen(\beta) = \frac{\bar{AC}}{\bar{AB}}$$
$$cos(\alpha) = \frac{cateto.adjacente}{hipotenusa}$$

4.4.3 Tangente

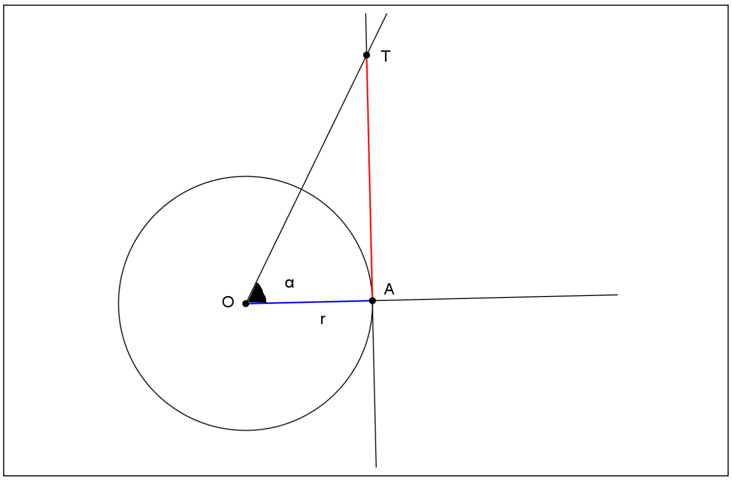


Figura 4.20: *Determinação geométrica da Tangente*

Finalmente a razão $\frac{\bar{BC}}{\bar{AC}}$ pode ser reescrita como:

$$\frac{\bar{BC}}{\bar{AC}} = \frac{cateto.oposto}{cateto.adjacente}$$

esta razão recebeu o nome de tangente, então temos:

$$tan(\alpha) = \frac{cateto.oposto}{cateto.adjacente} = \frac{\bar{BC}}{\bar{AC}}$$

Para entender melhor a tangente é interessante conhecê-la geometricamente. A reta tangente é uma reta que tem em comum com o círculo que tangencia um único ponto(T).

Pode-se encontrar geometricamente a tangente de qualquer ângulo, (figura 4.20), utilizando-se uma reta tangente ao circulo, assim a tangente de um ângulo $\alpha = A\hat{O}T$ é o comprimento relativo do segmento $\bar{AT}$, dado por:

$$\frac{\bar{AT}}{\bar{OA}}$$

4.5 Experimento

O experimento proposto no PROJETO idealizado divide-se em quatro medições, a saber:

- Determinação de distância com uma visada[6] à baliza;
- Determinação da altura conhecendo a distância e a visada;
- Determinação de distância com duas visada à baliza;
- Determinação de distância com recuo do ponto da mira.

4.5.1 1^o Experimento - ***Determinação de distância com visada à baliza***

No triângulo retângulo ΔA_1B_1C, (figura 4.21), a altura H é lida diretamente na baliza e a altura h da mira é conhecida então a tangente do ângulo α pode ajudar a calcular a distância d.

$$\begin{aligned} tan(\alpha) &= \frac{H-h}{d} \\ d &= \frac{H-h}{tan(\alpha})) \\ d &= (H-h).cotg(\alpha) \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

[6]Chama-se linha de visada a linha reta imaginária que liga o ponto do observador(A) ao ponto observado(C). A visada é determinada pelo ângulo que a linha de visada forma com a linha horizontal no ponto de observação.

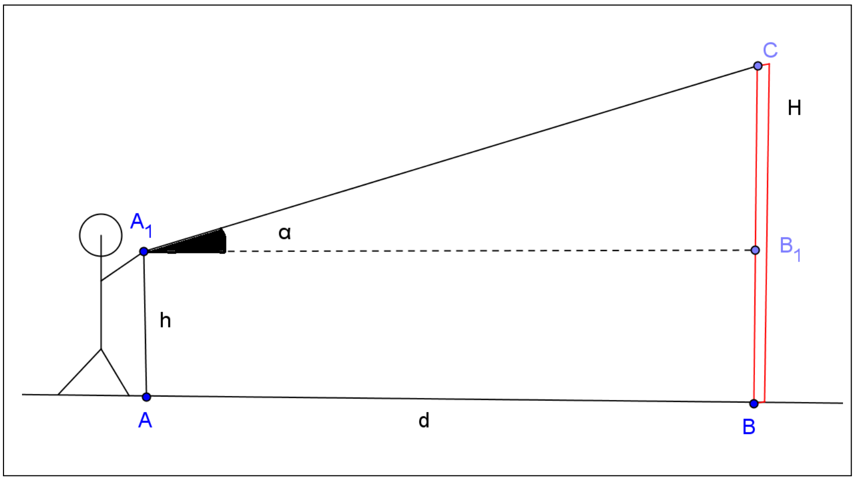


Figura 4.21: *Experimento-1*

4.5.2 2^o Experimento - *Determinação da altura com a distância e a visada*

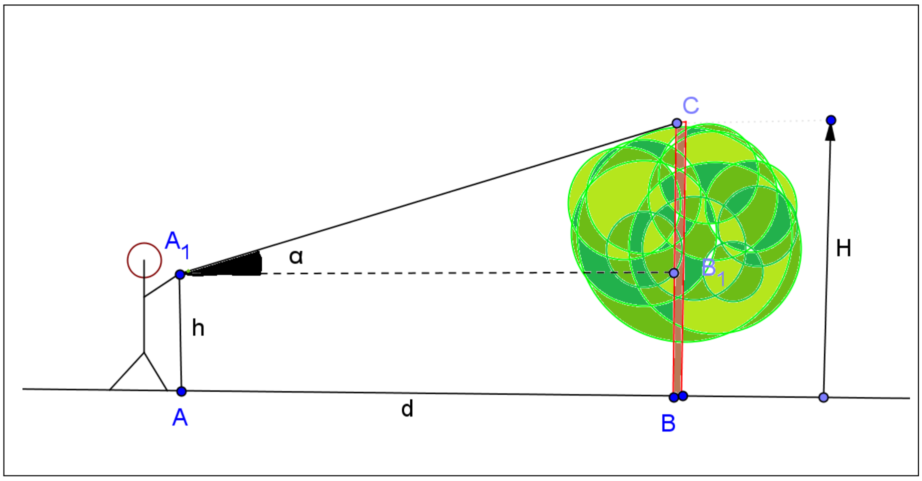


Figura 4.22: *Experimento-2*

A altura H, da árvore, não pode ser medida diretamente, mas o triângulo retângulo ΔA_1B_1C, (figura 4.22), pode ajudar no cálculo desta altura, conhecidas as medidas da distância d, a altura h da mira e a tangente do ângulo α.

$$
\begin{aligned}
tan(\alpha) &= \frac{H-h}{d} \\
H - h &= d.tan(\alpha) \\
H &= h + d.tan(\alpha) \qquad (4.5.2)
\end{aligned}
$$

4.5.3 3^o Experimento - *Determinação de distância com duas visada à baliza*

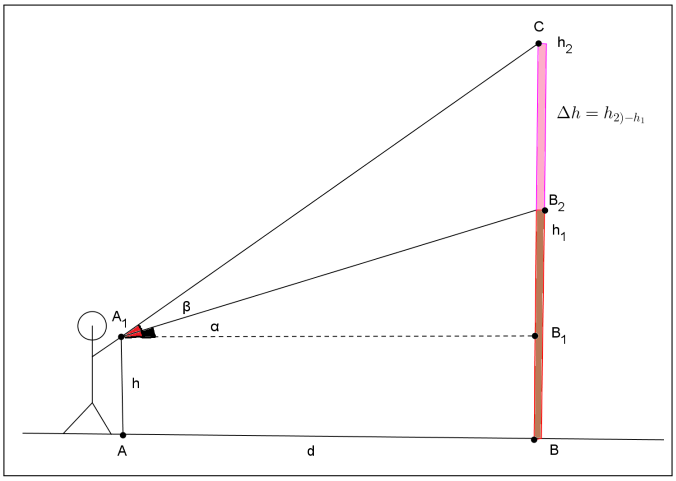


Figura 4.23: *Experimento-3*

Quando a linha do terreno é irregular não é possível obter-se a altura H sem ter que efetuar a determinação do ponto B_1. Outra forma de se encontrar a distância d é efetuar duas visadas a pontos diferentes da baliza, B_1 e B_2 de forma que através dos triângulos retângulos $\Delta A_1B_1B_2$ e ΔA_1B_1C se conheça a distância d.
Como $\bar{BC} = h_2$, $B\bar{B}_2 = h_1$ e $B\bar{B}_1 =$ h temos,

$$
\begin{aligned}
\Delta A_1B_1B_2 \longrightarrow tan(\alpha) &= \frac{h_1 - h}{d} \\
h_1 - h &= d.tan(\alpha) \\
\Delta A_1B_1C \longrightarrow tan(\beta) &= \frac{h_2 - h}{d} \\
h_2 - h &= d.tan(\beta) \\
h_2 - h - (h_1 - h) &= d.tan(\beta) - d.tan(\alpha) \\
h_2 - h - (h_1 - h) = h_2 - h - h_1 + h) &= \Delta h \\
\Delta h &= d.[tan(\beta) - tan(\alpha)] \\
d &= \frac{\Delta h}{tan(\beta) - tan(\alpha)} \qquad (4.5.3)
\end{aligned}
$$

4.5.4 4^o Experimento - *Determinação de distância com recuo do ponto da mira*

A altura H não pode ser obtida por medida direta, então serão utilizados os triângulos retângulos ΔA_1B_1C e ΔA_2B_1C para o cálculo de H, baseado no conhecimento de ΔH e nos valores da tangente dos ângulos α e β medidos nas visadas. Conhecida a altura H a distância d passa a ser automaticamente determinada utilizando-se qualquer uma das visadas[7].

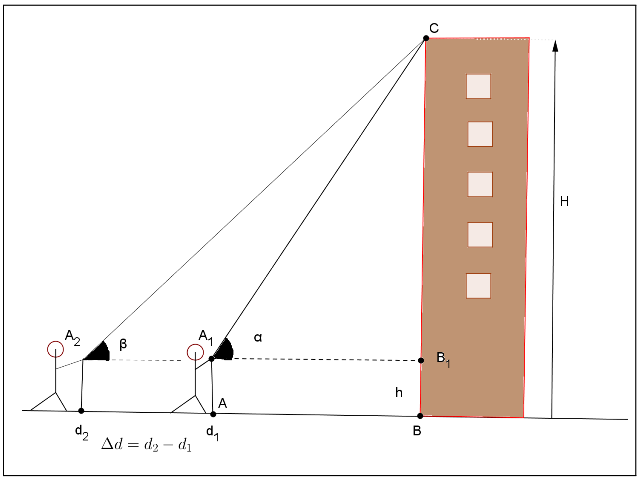


Figura 4.24: *Experimento-4*

$$\Delta A_1B_1C \longrightarrow tan(\alpha) = \frac{H-h}{d_1}$$
$$(H-h) = d_1.tan(\alpha) \longrightarrow d_1 = \frac{H-h}{tan(\alpha)}$$
$$\Delta A_2B_1C \longrightarrow tan(\beta) = \frac{H-h}{d_2}$$
$$(H-h) = d_2.tan(\beta) \longrightarrow d_2 = \frac{H-h}{tan(\beta)}$$

$$\Delta d = d_2 - d_1 = \frac{H-h}{tan(\beta)} - \frac{H-h}{tan(\alpha)}$$
$$\Delta d = \frac{(H-h).tan(\alpha) - (H-h).tan(\beta)}{tan(\alpha).tan(\beta)}$$
$$\Delta d.tan(\alpha).tan(\beta) = (H-h).(tan(\alpha) - tan(\beta))$$
$$H - h = \Delta d.\frac{tan(\alpha).tan(\beta)}{tan(\beta) - tan(\alpha)}$$
$$H = h + \Delta d.(\frac{tan(\alpha).tan(\beta)}{tan(\alpha) - tan(\beta)} \qquad (4.5.4)$$

4.6 Estudo da aproximação do modelo

Esta seção se destina a discussão do modelo matemático adotado no experimento e será realizada em duas etapas, partindo da modelagem ideal para a modelagem da situação

[7]Neste experimento sugere-se ao professor que proponha aos alunos a tarefa de deduzirem a expressão da altura H em função de Δd.

real, considerando-se os fatores que alteram a precisão da medida.

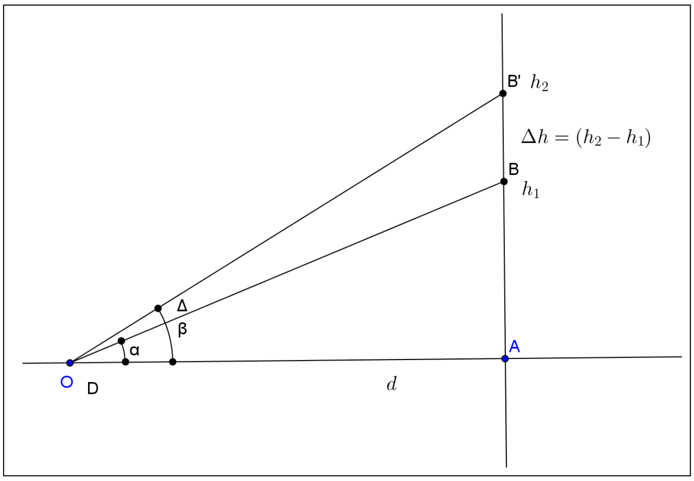


Figura 4.25: *Modelagem matemática para Δh conhecido*

Na situação ideal, (figura 4.25), o ponto O é comum as duas linha de visada.

4.6.1 Estudo da aproximação do modelo - Parte 1

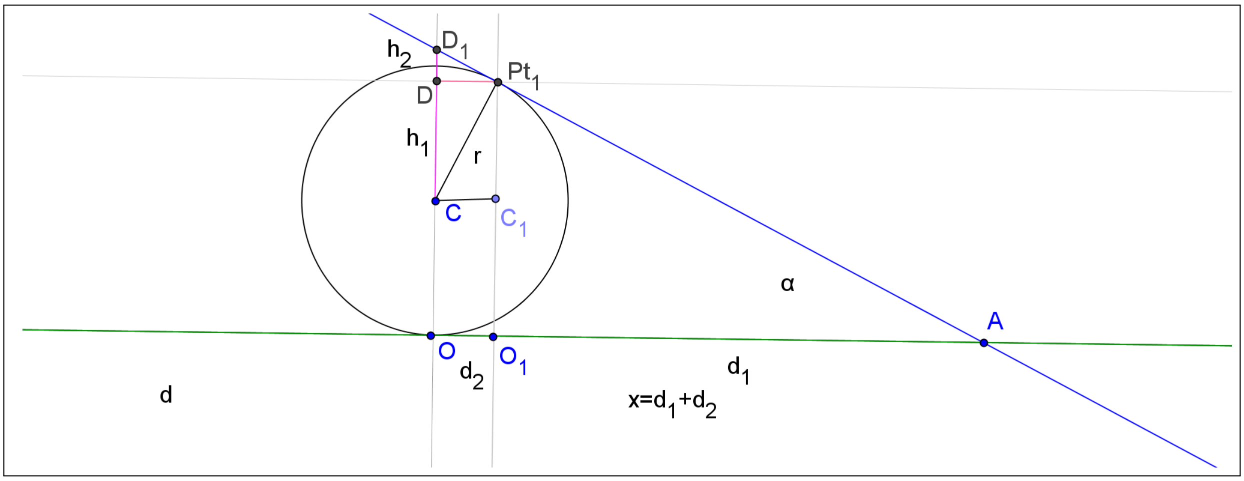


Figura 4.26: *Modelagem matemática da origem da visada*

Na montagem do experimento a visada é materializada pelo feixe do layser verde, que tangencia o disco do transferidor, (figura 4.26), representado por um circulo de centro C e raio r [8]. O segmento $A\bar{B}_1$ representa a visada que forma um ângulo α com a horizontal, e define os triângulos semelhantes $\Delta ABB_1 \sim \Delta AD_1O \sim \Delta APt_1O_1$. Pode-se identificar também outros triângulos semelhantes, no caso $\Delta ABB_1 \sim \Delta Pt_1DD_1 \sim \Delta Pt_1C_1C$.

[8]No transferidor de ângulos universal o diâmetro do circulo medido com paquímetro é de 73mm, logo $r \simeq 0,0365m$

Observa-se na aproximação do modelo à situação real que para ângulos pequenos o segmento $\bar{OA}$ representado no valor de x pode ser significativo em relação ao segmento $\bar{AB}$.

No modelo real o teodolito está estacionado no ponto O e a distância medida ao objeto estudado é dada por d, deseja-se pois determinar o valor de x para o ângulo α.

$$\Delta Pt_1DD_1 \sim \Delta AO_1Pt_1 \longrightarrow tan(\alpha) = \frac{D\bar{D}_1}{P\bar{t_1}D} = \frac{O_1\bar{P}t_1}{A\bar{O}_1}$$

$$tan(\alpha) = \frac{D\bar{D}_1}{P\bar{t_1}D} = \frac{h_2}{d_2} \longrightarrow h_2 = d_2.tan(\alpha)$$

$$d_2 = \frac{h_2}{tan(\alpha)} \tag{4.6.1}$$

Por outro lado,

$$tan(\alpha) = \frac{O_1\bar{P}t_1}{A\bar{O}_1} = \frac{r + h_1}{d_1} \longrightarrow r + h_1 = d_1.tan(\alpha)$$

$$d_1 = \frac{r + h_1}{tan(\alpha)}$$

$$\Delta Pt_1DC \longrightarrow h_1 = r.cos(\alpha)$$

Substituindo na equação anterior

$$d_1 = \frac{r[1 + cos(\alpha)]}{tan(\alpha)} \tag{4.6.2}$$

$$\Delta Pt_1C_1C \longrightarrow d_2 = r.sen(\alpha) \tag{4.6.3}$$

$$x = (d_2 + d_1)$$

Substituindo as Equações 4.6.2 e 4.6.3 na anterior tem-se

$$x = (d_2 + d_1) = r.sen(\alpha) + \frac{r[1 + cos(\alpha)]}{tan(\alpha)}$$

$$x = (d_2 + d_1) = r.sen(\alpha) + \frac{r[1 + cos(\alpha)].cos(\alpha)}{sen(\alpha)}$$

$$x = (d_2 + d_1) = \frac{r.sen^2(\alpha)}{sen(\alpha)} + \frac{r.cos(\alpha)}{sen(\alpha)} + \frac{r.cos^2(\alpha)}{sen(\alpha)}$$

$$x = (d_2 + d_1) = \frac{r.sen^2(\alpha)}{sen(\alpha)} + \frac{r.cos^2(\alpha)}{sen(\alpha)} + \frac{r.cos(\alpha)}{sen(\alpha)}$$

$$x = (d_2 + d_1) = \frac{r.[sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha)]}{sen(\alpha)} + \frac{r.cos(\alpha)}{sen(\alpha)}$$

$$x = (d_2 + d_1) = \frac{r}{sen(\alpha)} + \frac{r.cos(\alpha)}{sen(\alpha)}$$

$$x = (d_2 + d_1) = \frac{r[1 + cos(\alpha)]}{sen(\alpha)}$$

$$x = r.[\frac{1}{sen(\alpha)} + \frac{1}{tan(\alpha)}] \quad (4.6.4)$$

4.6.2 Estudo da aproximação do modelo - Parte 2

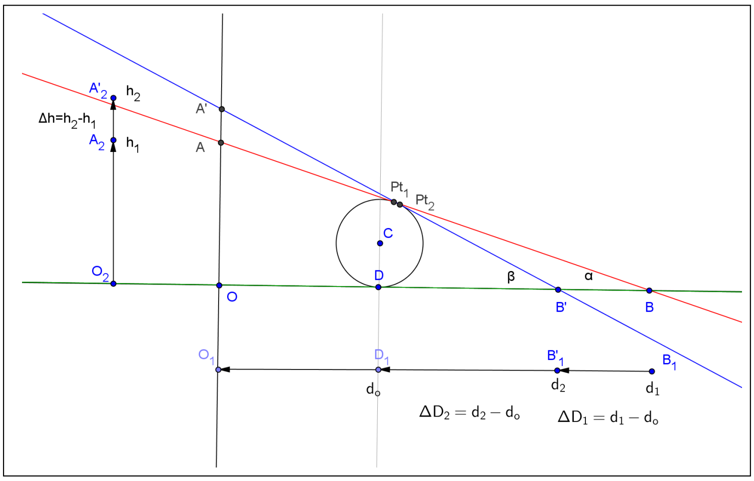


Figura 4.27: *Modelagem matemática do transferidor de ângulos*

Seja a circunferência graduada do transferidor de ângulos, (figura 4.27), representada pelo circulo de centro C e raio $\bar{OD}$, e as visadas à mira nos pontos A e A' representadas pelos segmentos $\bar{AB}$ e $A'\bar{B}'$ formando respectivamente os ângulos α e β com a horizontal. Observa-se no modelo real que o ponto B não coincide com B' dando origem a distâncias $\bar{OB}$ de magnitude diferente de $O\bar{B}'$. Também é possível perceber que quanto menor for o ângulo maior será o segmento $B\bar{B}'$.

Deseja-se pois calcular o grau de aproximação ou do modelo ideal, tendo as visadas uma origem comum, para o modelo real em que os pontos de tangência não coincidem e as visadas não têm a mesma origem.

Identifique-se primeiramente o triângulo que representa a primeira visada: No ΔAOB tem-se,

$$tan(\alpha) = \frac{\bar{AO}}{\bar{OB}} = \frac{h_1}{d_1} = \frac{h_1}{(d_o + \Delta D_1}$$
$$tan(\alpha).(d_o + \Delta D_1) = h_1$$

Da Equação 4.6.4 tem-se para $x_1 = \Delta D_1$

$$h_1 = tan(\alpha).(d_o + \Delta D_1) = tan(\alpha).(d_o + r[\frac{1}{sen(\alpha)} + \frac{1}{tan(\alpha)}])$$

No $\Delta A^{'}OB^{'}$ tem-se,

$$tan(\beta) = \frac{\bar{A'O}}{\bar{OB'}} = \frac{h_2}{d_2} = \frac{h_2}{(d_o + \Delta D_2)}$$
$$tan(\beta).(d_o + \Delta D_2) = h_2$$

para $x_2 = \Delta D_2$ ainda da Equação 4.6.4 tem-se

$$h_2 = tan(\alpha).(d_o + \Delta D_2) = tan(\beta).(d_o + r[\frac{1}{sen(\beta)} + \frac{1}{tan(\beta)}])$$

Então como $\Delta h = (h_2 - h_1)$ obtém-se

$$\Delta h = tan(\alpha).(d_o + \Delta D_2) - tan(\alpha).(d_o + \Delta D_1)$$
$$\Delta h = tan(\beta).(d_o + r[\frac{1}{sen(\beta)} + \frac{1}{tan(\beta)}]) - tan(\alpha).(d_o + r[\frac{1}{sen(\alpha)} + \frac{1}{tan(\alpha)}])$$
$$\Delta h = d_o.[tan(\beta) - tan(\alpha)] + r.[\frac{tan(\beta)}{sen(\beta)} - \frac{tan(\alpha)}{sen(\alpha)}] + r.[\frac{tan(\beta)}{tan(\beta)} - \frac{tan(\alpha)}{tan(\alpha)}]$$
$$\Delta h = d_o.[tan(\beta) - tan(\alpha)] + r.[\frac{tan(\beta)}{sen(\beta)} - \frac{tan(\alpha)}{sen(\alpha)}] = d_o.\Delta tan + r.[\frac{1}{cos(\beta)} - \frac{1}{cos(\alpha)}]$$
$$d_o.\Delta tan = \Delta h - r.[\frac{1}{cos(\beta)} - \frac{1}{cos(\alpha)}]$$
$$d_o = \frac{\Delta h}{\Delta tan} - \frac{r}{\Delta tan}.[\frac{1}{cos(\beta)} - \frac{1}{cos(\alpha)}]$$
$$d_o = \frac{\Delta h}{\Delta tan} - \frac{r}{\Delta tan}.\frac{cos(\alpha) - cos(\beta)}{cos(\alpha).cos(\beta)}$$
$$d_o = \frac{\Delta h}{\Delta tan} + \frac{r}{\Delta tan}.[\frac{\Delta cos}{cos(\alpha).cos(\beta)}]$$

Sabendo-se que

$$\Delta tan = tan(\beta) - tan(\alpha) = \frac{sen(\beta)}{cos(\beta)} - \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$
$$\Delta tan = \frac{sen(\alpha)cos(\beta) - sen(\beta)cos(\alpha)}{cos(\beta)cos(\alpha)} = \frac{cos(\beta - \alpha)}{cos(\beta)cos(\alpha)}$$

Finalmente

$$d_o = \frac{\Delta h}{\Delta tan} + r.\frac{\Delta cos}{cos(\beta - \alpha)} \tag{4.6.5}$$

$$\delta = r.\frac{\Delta cos}{cos(\beta - \alpha)} \tag{4.6.6}$$
$$d_o = \frac{\Delta h}{\Delta tan} + \delta$$

Consultando os valores do cosseno na tabela trigonométrica observa-se que ele é 1 em 0^o e tende a 0 quando o ângulo tende a 90^o, assim a diferença máxima entre os cossenos de dois ângulos agudos é de 1. Isto permite concluir que no intervalo de 0^o a 90^o o acréscimo,δ, dado pela equação 4.6.6, cresce quando Δcos aumenta, ou seja quando os ângulos β e α se distanciam.

Observando a fração do acréscimo, δ, percebe-se que quando β se aproxima de α, $\beta - \alpha$ se aproxima de zero e portanto o $\cos(\beta - \alpha)$ se aproxima de 1, para diferenças maiores o resultado será cada vez menor majorando o valor do acréscimo, δ.

Conclui-se assim da equação 4.6.6 que a precisão do modelo aumenta quando os ângulos de visada se aproximam e observando o gráfico da figura 4.28 verifica-se uma boa precisão pode ser obtida para leituras de ângulos inferiores a 45^o.

Outra forma mais direta de se chegar a esta conclusão é observar que para ângulos pequenos e próximos, (figura 4.27), quando se eleva a linha horizontal de referência, (linha que dá a altura do equipamento), até o ponto médio entre os pontos de tangência das visadas, o modelo real aproxima-se do ideal, onde as visadas partem do mesmo ponto.

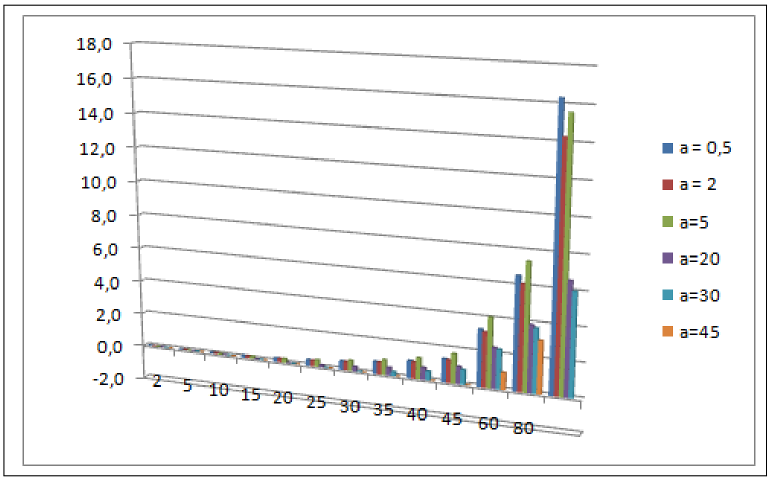


Figura 4.28: *Gráfico de linhas dos valores de δ encontrados*

Para conhecer a precisão do modelo pode-se avaliar a parcela de acréscimo, δ.

grau		acréssimo	radiano		r(mm)				
α	β	δ(cm)	α	β	34,0	cos β	cos α	Δcos	cos (β−α)
0,5	1	0,0	0,0087	0,0175	34,0	1,0000	0,9998	0,0001	1,0000
0,5	5	0,0	0,0087	0,0873	34,0	1,0000	0,9962	0,0038	0,9969
0,5	10	0,1	0,0087	0,1745	34,0	1,0000	0,9848	0,0152	0,9863
0,5	15	0,1	0,0087	0,2618	34,0	1,0000	0,9659	0,0340	0,9681
0,5	20	0,2	0,0087	0,3491	34,0	1,0000	0,9397	0,0603	0,9426
0,5	25	0,3	0,0087	0,4363	34,0	1,0000	0,9063	0,0937	0,9100
0,5	30	0,5	0,0087	0,5236	34,0	1,0000	0,8660	0,1339	0,8704
0,5	35	0,7	0,0087	0,6109	34,0	1,0000	0,8192	0,1808	0,8241
0,5	40	1,0	0,0087	0,6981	34,0	1,0000	0,7660	0,2339	0,7716
0,5	45	1,4	0,0087	0,7854	34,0	1,0000	0,7071	0,2929	0,7133
0,5	60	3,3	0,0087	1,0472	34,0	1,0000	0,5000	0,5000	0,5075
0,5	70	6,6	0,0087	1,2217	35,0	1,0000	0,3420	0,6579	0,3502
0,5	80	16,3	0,0087	1,3963	36,0	1,0000	0,1736	0,8263	0,1822
2	2	0,0	0,0349	0,0349	37,0	0,9994	0,9994	0,0000	1,0000
2	5	0,0	0,0349	0,0873	34,0	0,9994	0,9962	0,0032	0,9986
2	10	0,1	0,0349	0,1745	34,0	0,9994	0,9848	0,0146	0,9903
2	15	0,1	0,0349	0,2618	34,0	0,9994	0,9659	0,0335	0,9744
2	20	0,2	0,0349	0,3491	34,0	0,9994	0,9397	0,0597	0,9511
2	25	0,3	0,0349	0,4363	34,0	0,9994	0,9063	0,0931	0,9205
2	30	0,5	0,0349	0,5236	34,0	0,9994	0,8660	0,1334	0,8829
2	35	0,7	0,0349	0,6109	34,0	0,9994	0,8192	0,1802	0,8387
2	40	1,0	0,0349	0,6981	34,0	0,9994	0,7660	0,2333	0,7880
2	45	1,4	0,0349	0,7854	34,0	0,9994	0,7071	0,2923	0,7314
2	60	3,2	0,0349	1,0472	34,0	0,9994	0,5000	0,4994	0,5299
2	70	6,1	0,0349	1,2217	35,0	0,9994	0,3420	0,6574	0,3746
2	80	14,3	0,0349	1,3963	36,0	0,9994	0,1736	0,8257	0,2079
5	2	0,0	0,0873	0,0349	37,0	0,9962	0,9994	-0,0032	0,9986
5	5	0,0	0,0873	0,0873	38,0	0,9962	0,9962	0,0000	1,0000
5	10	0,0	0,0873	0,1745	39,0	0,9962	0,9848	0,0114	0,9962
5	15	0,1	0,0873	0,2618	40,0	0,9962	0,9659	0,0303	0,9848
5	20	0,2	0,0873	0,3491	41,0	0,9962	0,9397	0,0565	0,9659
5	25	0,4	0,0873	0,4363	42,0	0,9962	0,9063	0,0899	0,9397
5	30	0,6	0,0873	0,5236	43,0	0,9962	0,8660	0,1302	0,9063
5	35	0,9	0,0873	0,6109	44,0	0,9962	0,8192	0,1770	0,8660
5	40	1,3	0,0873	0,6981	45,0	0,9962	0,7660	0,2302	0,8192
5	45	1,7	0,0873	0,7854	46,0	0,9962	0,7071	0,2891	0,7660
5	60	4,1	0,0873	1,0472	47,0	0,9962	0,5000	0,4962	0,5736
5	70	7,4	0,0873	1,2217	48,0	0,9962	0,3420	0,6542	0,4226
5	80	15,6	0,0873	1,3963	49,0	0,9962	0,1736	0,8225	0,2588
20	2	0,0	0,3491	0,0349	50,0	0,9397	0,9994	-0,0597	0,9511
20	5	0,0	0,3491	0,0873	51,0	0,9397	0,9962	-0,0565	0,9659
20	10	0,0	0,3491	0,1745	52,0	0,9397	0,9848	-0,0451	0,9848
20	15	0,0	0,3491	0,2618	53,0	0,9397	0,9659	-0,0262	0,9962
20	20	0,0	0,3491	0,3491	54,0	0,9397	0,9397	0,0000	1,0000
20	25	0,1	0,3491	0,4363	36,0	0,9397	0,9063	0,0334	0,9962
20	30	0,3	0,3491	0,5236	37,0	0,9397	0,8660	0,0737	0,9848
20	35	0,5	0,3491	0,6109	38,0	0,9397	0,8192	0,1205	0,9659
20	40	0,7	0,3491	0,6981	39,0	0,9397	0,7660	0,1736	0,9397
20	45	1,0	0,3491	0,7854	40,0	0,9397	0,7071	0,2326	0,9063
20	60	2,4	0,3491	1,0472	41,0	0,9397	0,5000	0,4397	0,7660
20	70	3,9	0,3491	1,2217	42,0	0,9397	0,3420	0,5977	0,6428
20	80	6,6	0,3491	1,3963	43,0	0,9397	0,1736	0,7660	0,5000
30	2	0,0	0,5236	0,0349	44,0	0,8660	0,9994	-0,1334	0,8829
30	5	0,0	0,5236	0,0873	45,0	0,8660	0,9962	-0,1302	0,9063
30	10	0,0	0,5236	0,1745	46,0	0,8660	0,9848	-0,1188	0,9397
30	15	0,0	0,5236	0,2618	47,0	0,8660	0,9659	-0,0999	0,9659
30	20	0,0	0,5236	0,3491	48,0	0,8660	0,9397	-0,0737	0,9848
30	25	0,0	0,5236	0,4363	49,0	0,8660	0,9063	-0,0403	0,9962
30	30	0,0	0,5236	0,5236	50,0	0,8660	0,8660	0,0000	1,0000
30	35	0,2	0,5236	0,6109	51,0	0,8660	0,8192	0,0469	0,9962
30	40	0,5	0,5236	0,6981	52,0	0,8660	0,7660	0,1000	0,9848
30	60	2,3	0,5236	1,0472	54,0	0,8660	0,5000	0,3660	0,8660
30	70	3,8	0,5236	1,2217	55,0	0,8660	0,3420	0,5240	0,7660
30	80	6,0	0,5236	1,3963	56,0	0,8660	0,1736	0,6924	0,6428
45	2	0,0	0,7854	0,0349	57,0	0,7071	0,9994	-0,2923	0,7314
45	5	0,0	0,7854	0,0873	58,0	0,7071	0,9962	-0,2891	0,7660
45	10	0,0	0,7854	0,1745	59,0	0,7071	0,9848	-0,2777	0,8192
45	15	0,0	0,7854	0,2618	60,0	0,7071	0,9659	-0,2588	0,8660
45	20	0,0	0,7854	0,3491	61,0	0,7071	0,9397	-0,2326	0,9063
45	25	0,0	0,7854	0,4363	62,0	0,7071	0,9063	-0,1992	0,9397
45	30	0,0	0,7854	0,5236	63,0	0,7071	0,8660	-0,1589	0,9659
45	40	0,0	0,7854	0,6981	65,0	0,7071	0,7660	-0,0589	0,9962
45	60	1,0	0,7854	1,0472	46,0	0,7071	0,5000	0,2071	0,9659
45	80	3,1	0,7854	1,3963	47,0	0,7071	0,1736	0,5335	0,8192

Figura 4.29: *Cálculo do acréscimo δ utilizando o Excel*

A tabela da figura 4.29 apresenta os cálculos do acréscimo para ângulos variados e os resultados são apresentados no gráfico da figura 4.28 para melhor visualização dos dados que foram dispostos em linha diferentes, representando valores fixos para o ângulo α quando β varia de $0,5^o$ à 80^o,admitindo-se r=34mm. A análise da tabela e do gráfico permite concluir que para ângulos de até 60^o o acréscimo máximo esperado é inferior a 5 cm, que para medidas de distâncias acima de 10 m significa um erro inferior 0,5%. Conclui-se que a simplificação do modelo é aceitável já que este erro introduzido é inferior aos erros de medição esperados.

4.7 Tratamento de erro

Toda medida física tem erro. Medir é errar como já o dissemos, então o PROJETO idealizado registrará muitos erros. Uma turma de ensino médio no primeiro ano tem entre 30 e 40 estudantes, sendo o recomendável que cada um manusei o instrumento e realize as medidas. Isto irá gerar, para cada experimento uma quantidade de dados que se não tratado adequadamente dará ao estudante a falsa idéia de que o instrumental e o método são inúteis.

A primeira questão que os alunos devem levantar é qual a medida mais certa? Deve-se evitar a medida direta para efeito de confirmação ou aferição. O professor deverá dar um tratamento estatístico aos dados obtidos.

É um bom momento para explicar a importância do tratamento estatístico de dados. A estatística descritiva busca obter no conjunto de dados um valor que represente a tendência do conjunto e um valor que represente a margem de erro da medida.

Os conceitos abaixo devem ser apresentados e trabalhados:

- **Rol**- O primeiro procedimento a ser tomado com os dados será relacioná-los em ordem crescente;
- **Descarte**- Quando houverem dados com valores muito discrepântes dos demais estes resultados devem ser descartados na análise descritiva, considera-se que houve erro grosseiro de medida;
- **Amplitude**- Encontra-se a amplitude da variação A =(maior valor - menor valor);
- **Média**- Calcula-se a média dos dados, ou valor médio, soma-se todos os dados válidos e divide-se pelo total de dados válidos;
- **Moda**- O resultado que ocorrer mais;
- **Mediana**- O resultado que ocorrer no centro do rol;

4.7.1 Média

O *Rol* nada mais é que a ordenação de forma crescente dos dados obtidos com o experimento. Para sua determinação os estudantes receberão uma tabela quadrada de 36 células, 6 lin x 6 col, para preencherem com os dados obtidos.

Os dados obtidos e registrados na tabela devem ser pré-analisados de forma a descartar os erros grosseiros. Quando não ocorrem erros grosseiros, ainda assim deve-se descartar o maior e o menor dos dados.

Para cálculo do valor médio do experimento será necessário encontrar a Média dos dados apresentados no rol.

Definição 4.7.1. Média
Seja A um conjunto de n dados $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, a média é dada por

$$\bar{a} = \frac{\sum a_i}{n}, \qquad i \epsilon \mathrm{N}$$

e $\bar{a}$ é chamado de valor médio de A

Definição 4.7.2. Erro
Seja A conjunto de n dados $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, com valor médio $\bar{a}$. Seja a_i um dado qualquer de A o erro deste dado é dado por:

$$e_i = a_i - \bar{a}$$

e o erro quadrático é dado por :

$$|e_i|^2 = (a_i - \bar{a})^2$$

O erro pode ser positivo ou negativo caso o variável tenha valor superior ou inferior em relação a média, neste caso, o professor deve orientar o aluno a não inverter a subtração $a_i - \bar{a}$. Os estudantes receberão uma tabela quadrada de 36 células, 6 lin x 6 col, para preencherem com os valores dos erros das medidas, obtidos após o cálculo da média. Após o preenchimento da tabela o professor deve propor à turma que calcule a média do erro e explique o resultado obtido.

Na tabela que receberam os estudantes também preencherão um quadro de 36 células, 6 lin x 6 col, com os valores dos erros quadráticos das medidas, obtidos após o cálculo dos erros. Após o preenchimento da tabela o professor deve propor à turma que calcule a média do erro e explique o significado e a utildade do valor obtido. A raiz deste valor pode ter algum significado?

4.7.2 Moda

Definição 4.7.3. Moda
Seja A um conjunto de n dados discretos $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, a moda é representada pelo valor a_i que mais aparece no conjunto.

O professor deve perguntar ao aluno o que se pode fazer quando o conjunto não é formado por variável discreta[9] como o conjunto dos dados do experimento.

4.7.3 Mediana

Definição 4.7.4. Mediana
Seja A um conjunto de n dados $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, a mediana é dado que aparece no centro do rol, desta forma o número de dados maiores que a mediana será igual ao número de dados menores que a mediana.

Com a tabela em ordem crescente será fácil ao aluno determinar a mediana da distribuição. O professor deverá observar se os valores da média, moda e mediana estão próximos. O professor deve perguntar a turma, se são esperados valores próximos ou não e, se são, o que isto indica?

[9] uma variável é dita discreta quando pode assumir certos valores, em geral números inteiros: número de clientes de um restaurante, idade dos alunos, números de alunos por sala (coleção Novo Olhar, vol 3, pág15) [26]

CAPÍTULO 5

METODOLOGIA DO TRABALHO

A questão

Como atrair o interesse do jovem estudante do ensino médio para o estudo da trigonometria reforçando a aprendizagem significativa através de recursos práticos?

uma consideração importante: *na educação profissional esta disciplina ganha importância como pré-requesito para o aprendizado na área técnica.*

Este capítulo descreve a proposta de trabalho, seus objetivos pedagógicos, e apresenta o desenho geral do PROJETO, através das atividades propostas. A elaboração e definição dos instrumentos diagnósticos e da sequência de ensino foi inspirada na proposta de Lindegger [17] com alterações e ajustes tendo em vista que aquela proposta era voltada ao ensino da 8ª. série do Ensino Fundamental. É importante observar que os professores aplicadores tenham liberdade para debater, alterar e ajustar todos os instrumentos inclusive o diagnóstico à especificidade de suas turmas. O instrumento diagnóstico visa determinar a carência de subsunçores nos alunos e consequentemente dirigir os trabalhos seguintes de reforço e /ou apresentação deste conteúdo para dar prosseguimento ao conteúdo principal.

5.1 Proposta e objetivos

A proposta do PROJETO é retrabalhar conteúdos matemáticos importantes ao aprendizado da Física, da Trigonometria no circulo e das funções trigonométricas, de forma que o aluno participe ativamente da construção deste conhecimento, onde o professor aplicador tenha a função de orientar a aprendizagem. O PROJETO apresenta uma sequência de ensino que parte sempre de uma proposição de pesquisa orientada, exposição de conteúdo e situações-problemas, chamadas aqui de desafios, e que visam levar o estudante a refletir, sempre em grupo, trabalhando inicialmente a compreensão e explicação do problema na linguagem vulgar ou informal.

Entende-se que o objetivo da Educação Matemática seja dotar o nosso aluno da capacidade de compreender o mundo em que vive, superar os problemas da vida e enfrentar desafios do exercício técnico profissional, sabendo expressar-se na linguagem formal sendo este, contudo, um objetivo fim a ser atingido com o desenvolvimento do processo educativo que não se encerra neste capítulo da Matemática.

5.2 Procedimento metodológico

Como vimos na fundamentação teórica, cap. 2, para Ausubel, o conhecimento prévio chamado subsunçor, é fundamental, pois é a partir dele que o novo conhecimento se sustenta e se desenvolve. Neste aspecto, elencamos como subsunçores para o aprendizado de Trigonometria os seguintes tópicos: ângulo definição, classificação, representação e medição; circunferência: definição e seus elementos representação; triângulo definição, classificação, representação e medição; semelhança de triângulos; triângulo retângulo; teorema de Pitágoras; teorema de Thales e a relação de ângulos correspondentes, alternos externos e internos; simetria e por fim domínio sobre a álgebra para resolução de expressões algébricas do primeiro e do segundo graus. A partir deles este trabalho desenvolve e explora os conceitos de seno, cosseno e principalmente a tangente com suas aplicabilidades e finaliza com a curva destas funções no intervalo de 0 a 90 graus. A partir deles, será desenvolvido o trabalho de exploração das funções seno, cosseno e tangente, explorando situações problemas onde o aluno usará do instrumental teórico e do recurso prático do teodolíto caseiro para resolver os problemas.

O PROJETO proposto para primeira unidade das turmas de 1º ano do ensino profissional técnico, usando a trigonometria do triângulo retângulo como gancho, para revisão de diversos conteúdos do ensino fundamental pode ser apresentado da forma abaixo:

1. - O primeiro passo - entrevista com os professores aplicadores acerca do trabalho onde serão ouvidas, na visão dos mesmos, na ministração da disciplina e as dificuldades dos estudantes para obtenção de uma aprendizagem significativa, recomenda-se aqui a participação de professores de física;
2. - Aplicação de questionário para levantar o perfil socioeconômico do aluno, sua disponibilidade para bem realizar os estudos e a sua motivação na escolha do curso técnico, vale lembrar que por se tratar de série inicial estes alunos são muito imaturos e a escolha muitas vezes recai na vontade dos pais ou na disponibilidade dos cursos;
3. - Aplicação de pré-teste com objetivo de aferir o conhecimento dos alunos em relação aos subsunçores (circunferência, semelhança, simetria e expressões algébricas) estas atividade devem ter um caráter mais reflexivo do que de cálculo, podendo ser aplicada aos professores no processo de formação dos aplicadores, sempre que possível;
4. - Atividades para compreensão ou reforço dos subsunçores, são propostas algumas em cima da experiência das deficiências mais comumente encontradas;
5. - Atividades de construções geométricas, triângulos retângulos, para determinação das razões trigonométricas e compreensão das tábuas trigonométricas;
6. - Atividades de medições de distâncias e de ângulos;
7. - Atividade de medição com pés e polegadas - convertendo unidades;
8. - Determinação de valores mínimos, médios e máximos do experimento;
9. - Determinação de resultados significativos - média, moda, mediana e desvio padrão;
10. - Experimento de medidas com resolução de problemas.

5.3 Descrição do pré-teste

O teste diagnóstico tem por finalidade avaliar os conhecimentos anteriores do estudante a respeito da Trigonometria e dos seus conteúdos coligados, (subsunções). Vai servir também de parâmetro de avaliação do pós teste. Os professores aplicadores podem decidir livremente alterar esta relação de exercícios desde que analisem os novos exercício propostos especificando que informação esperam obter em cada atividade. De modo a manter este instrumento diagnóstico próximo da realidade escolar dos estudantes,sugere-se escolher para o pré-teste exercícios existentes em livros didáticos. Para o pré-teste proposto foram selecionadas 12 questões, as quais vem acompanhada de sua referência ao livro do qual foi retirada.

===

1. - Observe o triangulo da figura 5.1, como descobrir o maior ângulo? [13] Este problema visa observar a percepção matemática do aluno para a relação existente entre os ângulos e os lados dos triângulos. Ao lado maior opõe-se o ângulo maior e ao lado menor o ângulo menor.

===

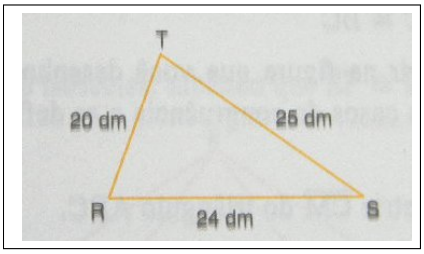


Figura 5.1: *Oscar Gueli 7a.série p.187*

2. - Com base na definição, determine a sentença falsa (justifique):

a) Todo quadrado é eqüilátero

b) Todo losângulo é eqüilátero

c) Todo triângulo eqüilátero é isósceles

d) Todo retângulo é equiângulo

e) Todo triângulo isósceles é equilátero

Esta questão busca determinar a capacidade de identificação e classificação das figuras planas partindo de suas características básicas.

===

3. - Com base na figura 5.2 qual destas igualdades é verdadeira? [16] (justifique)

a) a = b

b) e=a+b

c) c = 90

d) e+c = a+b

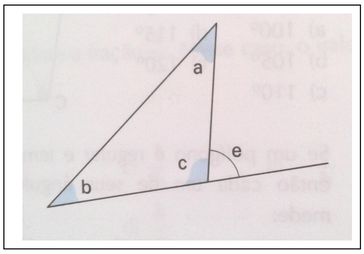


Figura 5.2: *Imenes & Lelis 7a.série p.278*

e) a+b+c = 180

Este problema busca identificar o domínio do conceito básico da Trigonometria de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o.

==

4. - (Supletivo-SP) Quantos m de fios são necessários para fazer a ligação de um poste de 12m de altura até a caixa de luz que está ao lado da casa a a uma distância de 16m do poste?(5.3) [11] Este problema é uma aplicação direta do teorema de Pitágoras, sendo dados os catetos deve-se achar a hipotenusa.

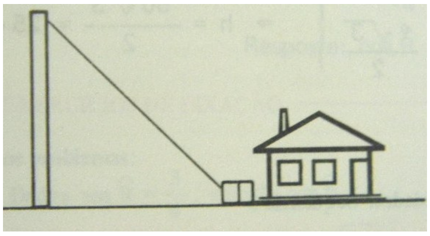


Figura 5.3: *A conquista da Matemática 8a.série p.151*

==

5. - (Figura 5.6-a)Um garoto empina uma pipa com um fio esticado de 96 m. Se o ângulo entre o fio e o chão é de 30^o. E o menino segura a ponta do fio a uma altura de 1,5m em relação ao chão, a que altura esta a pipa? [14] Esta questão é importante porque o aluno terá que imaginar o triangulo formado pela linha da pipa e depois decidir qual a relação que deve utilizar para calcular a distância vertical. No caso de montar corretamente com o sen30^o ele ainda deverá lembrar-se de subtrair a altura da ponta da linha, 1,5 m.

==

6. - (Figura 5.6-b)Qual é a altura da árvore maior sabendo que a menor mede 1,68m e AB=BC ? Ache primeiro BC consultando a tabela. [14] Este é um problema de dupla aplicação das relações trigonométricas. O aluno deve inicialmente decidir que relação

Figura 5.4: *a*

a	34°	57°
sen a	0,56	0,84
cos a	0,83	0,54
tg a	0,67	1,54

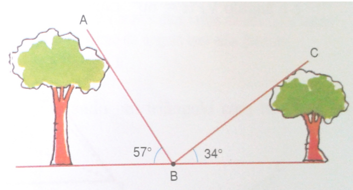


Figura 5.5: *b*

Figura 5.6: *Oscar Guelli 8a.série p.209*

utilizar para calcular BC e depois qual usar para calcular a altura da árvore mais alta.

==

7. - Calcule a média das notas de matemática da classe de acordo com a tabela?

Nota	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
Frequência	1	1	7	9	10	1	1

Busca-se neste problema a verificação do domínio direto do conceito de média, e habilidade nas operações matemáticas, necessárias ao processamento dos resultados experimentais.

==

8. - Na figura 5.7, os ângulos a e b são chamados de: [16]

a) alternos e internos

b) correspondentes

c) opostos pelo vértice

d) suplementares

e) retos

Neste problema busca-se verificar o domínio da nomenclatura e da capacidade de atribuir sentido matemático às palavras.

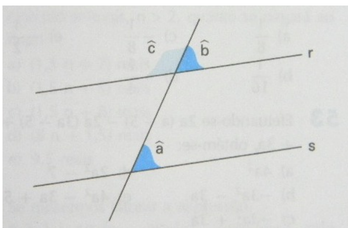


Figura 5.7: *Imenes & Lelis 7a.série p.277*

==

9. - Na figura 5.8 as retas r e s são paralelas. Calcule os ângulos do triângulo. [13] Neste exercício pode-se observar a capacidade do aluno dominando dois conceitos , ângulos alternos internos são iguais e a soma dos ângulos de um triângulo é 180º. , estabelecer a dedução e o cálculo de a.

==

10. - Na figura 5.9 os lados de um ângulo são paralelos aos lados do outro ângulo determine os valores de x e y. [13] (p.148)

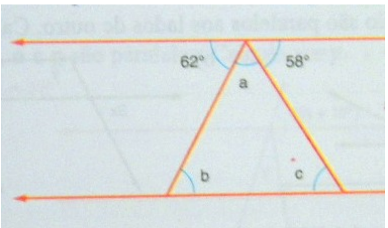


Figura 5.8: *Oscar Gueli 7a.série p.147*

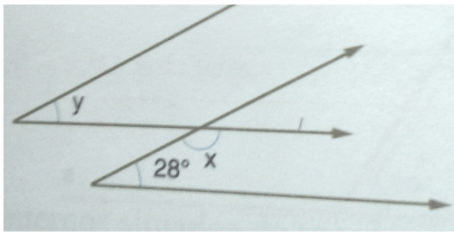


Figura 5.9: *Oscar Gueli 7a.série p.148*

==

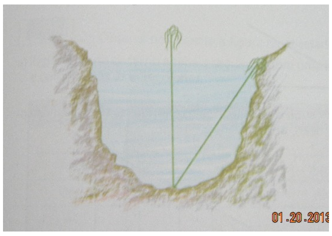


Figura 5.10: *PROMAT:projeto oficina de matemática,8a série, p.171*

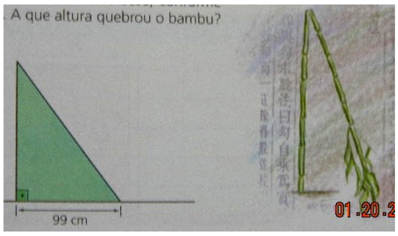


Figura 5.11: *PROMAT:projeto oficina de matemática,8a série, p.171*

11. - Problema do livro chinês Chui-Chang, figura 5.10, de quase 250 a.C. Uma lagoa, cuja superfície lembra um circulo com diâmetro de 330cm, tinha em seu centro um bambu, visível 33cm fora da água. Puxando-se esse bambu para a borda, ele terminava exatamente na superfície da lagoa. Veja o esquema. Qual a profundidade P no centro da lagoa. [12] (p.171) Este é um grande exercício para exigir do aluno muita atenção nos detalhes e na transposição do modelo real para o modelo matemático.

==

12. - No livro chinês de Yang Hui (1261 d.C.). Um bambu que media 330 cm quebrou e sua ponta ficou a 99ccm da base, conforme a ilustração da figura 5.11. A que altura quebrou o bambu? [12]. Este é um grande exercício para exigir do aluno muita atenção nos detalhes e na transposição do modelo real para o modelo matemático.

5.4 Elaboração da sequência didática

O referencial teórico usado foi baseado em Ausubel, conforme exposto no capítulo 2. Considerando suas idéias de observar o domínio dos conteúdos anteriores, subsunçores, a sequência didática proposta recua à última série do Ensino Fundamental, recuperando os conteúdos assim expostos:
==

1- Razão e proporção de segmentos

1.1- Pesquisa na Internet – Quem foi Tales de Mileto e qual sua importância para a matemática?;

1.2- Conteúdo em sala – Demonstração do Teorema de Tales;

1.3- Desafios de sala: divisão em duas partes de um segmento usando régua não graduada e compasso e esquadro;

1.4- Atividade 1 – Usando um par de esquadros e um compasso divida um segmento em três, cinco ou sete partes. Reflexão sobre a relação do desafio com a teoria de Tales;

1.5- Avaliação do módulo
==

2- Semelhança de polígonos - critérios de semelhança para triângulos

2.1- Pesquisa na Internet – Quantas unidades de medida de comprimento existiam no Brasil colônia? Quantas unidades de áreas existem no Brasil de hoje?

2.2- Conteúdo em sala – Pede-se ao aluno que defina o que é semelhança. Pede-se a turma que dê exemplos de semelhança e a partir daí constrói -se o conceito de semelhança;

2.3- Desafios de sala: Definição do conceito de semelhança de triângulos;

2.4- Atividade 2 - Escolher uma escala Fazer uma planta de uma área da escola. Reflexão - O que é uma planta em termos matemático? Como medimos distâncias? Qual a unidade de medida padrão para distância?

2.5- Avaliação do módulo.
==

3- Semelhança de Triângulos Retângulo

3.1- Pesquisa na Internet – Procurem e descrevam fatos históricos de determinação de distância utilizando semelhança de triângulos, ex: medir a altura da Pirâmide, medir o raio da terra, medir o diâmetro da lua etc..

3.2- Conteúdo em sala – Critérios de semelhança de triângulos. Pergunta-se à Turma: como fica o critério de semelhança de triângulos retângulos.

3.3- Desafios de sala: Como você faria para ampliar de 1 para 3, (1:3), um desenho dado, usando só compasso e régua não graduada. Reflexão o que isto tem a ver com semelhança de triângulos.

3.4- Atividade 3 – Experimente determinar a altura de um poste, uma árvore ou um prédio utilizando a sombra do sol. Quais os problemas que você encontrou? Conseguiu um resultado único? Que parâmetros alteram sua resposta?

3.5- Avaliação do módulo.

===

4- Razões trigonométricas no triângulo retângulo

4.1- Pesquisa na Internet – Buscar o significado das palavras seno, cosseno e tangente;

4.2- Conteúdo em sala – Definição de Arco de circulo. Medição de arco. Ângulo central. Medição de ângulos em grau e em radiano. Conceito de corda de um arco. A relação entre corda de um arco e seno do ângulo de metade do arco. Conceito de ângulo complementar e de cosseno. Conceito de tangente;

4.3- Desafios de sala: Vamos construir a tabela do seno e da tangente de 0^o até 45^o. Será que precisamos medir para achar o cosseno? Tendo agora o cosseno tenho que realizar novas medições para obter os valores entre 45^o e 90^o?

4.4- Atividade 4 – Vamos utilizar uma trena, calculadora, a tabela construída e um transferidor para encontrar distâncias horizontais e verticais? Quais os problemas encontrados? O que determina o uso da razão seno ou da razão tangente?

4.5- Avaliação do módulo.

===

5- Medidas de distâncias e tratamento estatístico - Uso das razões trigonométricas

5.1- Pesquisa na Internet – Qual o objeto de estudo da topografia? E da cartografia? E da geodésica? Quais os instrumentos mais utilizados? Como eram realizadas medições no passado tipo Brasil colônia ou Brasil Império?

5.2 – Instrumentos de medição sua utilização e cuidados na medição. Quais os tipos de erros que podem aparecer pelo mau uso dos equipamentos?

5.3- Desafio de sala – Com o material, fornecido pelo professor, você teria condições de montar um instrumento de medida?

5.4- Atividade 5 – Vamos utilizar nosso instrumental para realizar medições? Todas as medições estão dando o mesmo resultado? Que tipo de procedimento devo tomar com os diversos valores para ter um resultado mais significativo? Que são medidas de dispersão? Como encontro a média, moda e mediana. Como calculo o desvio? Vamos utilizar um instrumento mais preciso? Porque ainda assim não obtenho um resultado exato? Como, o cientista, lida com o erro?

5.5 - Avaliação do módulo e avaliação geral do trabalho..
===

Cabe aqui observar que a primeira aula é de apresentação do PROJETO e diagnaóstico da turma o que eleva o número total de encontros para seis . A pesquisa na internet é proposta para anteceder e antecipar o conteúdo da aula. A história da trigonometria e da topografia perpassa todos os conteúdos à medida que materializam com seus exemplos de aplicação a importância do conteúdo para o conhecimento do homem moderno. Os conteúdos conceituais propostos diferem da grade convencional para a série inicial do ensino médio, contudo, muitos professores iniciam a primeira unidade fazendo uma revisão de conteúdos da 8ª série e, desta maneira, a proposta segue a linha vigente só diferindo na escolha dos conteúdos a serem revisados, dando ênfase à Trigonometria, servindo esta de "subsunçor"para os trabalho das disciplinas técnicas e nas ciências naturais.

A essência desta proposta esta na aplicação da Trigonometria para determinação de ângulos e distâncias. O uso do transferidor de ângulos ou do teodolíto caseiro e a execução de experimentos de medidas tem a grande virtude de promover a interdisciplinariedade com as Ciências Físicas enquanto contextualiza situações problemas. O estudante será levado a manipular instrumentos matemáticos e utilizar equipamentos de medição e construir instrumentos artesanais para reprodução de experimentos conhecidos, a medição exigirá, do professor, a abordagem das unidades de medida, trazendo à discussão a realidade histórica do imenso universo de medidas de comprimento, a padronização do Sistema Internacional de Medidas e as transformações de metro, centímetro e milímetro, podendo, aí, abordar as operações com potências de dez. Os resultados obtidos pelo estudante poderão ainda ser tabulados com determinação de valores médios, moda e mediana, quem sabe desvio padrão, permitindo ao professor abordar a questão da estatística no estudo da validade de resultados experimentais. O que será visto mais detelhado através dos instrumentos didáticos propostos.

5.5 Instrumentos Pedagógicos

Apresentamos no Apêndice todos os instrumentos pedagógicos propostos e a seguir enumeramos, por tipo, alguns deles.

1. - Um planejamento para os encontros com os professores e aplicadores do PROJETO;
2. - Um planejamento da primeira aula onde será feita a apresentação do PROJETO aos alunos;
3. - Cinco planejamentos de aula para desenvolvimento do PROJETO;
4. - Cinco fichas de planejamentos para acompanhamento e avaliação das pesquisas via Internet;
5. - Cinco fichas das propostas de avaliação para cada aula;
6. - Cinco formulários correspondendo à proposta dos quatro experimentos de medida e ao cálculo do valor médio;
7. - Ficha de avaliação do PROJETO.

CAPÍTULO 6

CONSTRUÇÃO E USO DO TEODOLITO

Figura 6.1: *Evolução do teodolito*

Os teodolitos modernos não guardam muita semelhança com os equipamentos que lhe deram origem. A figura 6.1 apresenta três modelos bastante antigos destes equipamentos. Em todos eles vemos um transferidor horizontal de 360^o e um vertical que pode ser de 360^o ou de 180^o, no centro da montagem vê-se o uso associado da luneta para execução da mira ao objeto a ser medido. Antes da invenção da luneta, contudo, já se efetuava levantamento bastante precisos dentro do campo visual do ser humano. Na figura 6.2 é apresentado um instrumento de medida bem antigo com os transferidores de ângulo horizontal e vertical associados, porém sem luneta, o dioptra. Os sacerdotes egípcios já conheciam um instrumento muito semelhante fbox 

Figura 6.2: *Teodolitos e Dioptra*

ao astrolábio, vide figura 6.3, que utilizavam para medição de ângulos e observação do céu local com seus círculos de altura e azimute.

A idéia do PROJETO é conduzir o estudante a reproduzir um dioptra, que chamaremos de teodolito caseiro com materiais descartáveis e de baixo custo.

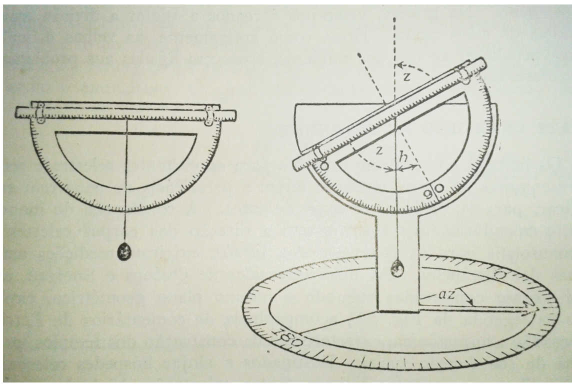


Figura 6.3: *Medidor de ângulos rudimentar*

6.1 Teodolito Caseiro

O objetivo desta atividade é construir um aparelho semelhante aos teodolitos rudimentares, com finalidade de medir ângulos horizontais em relação a um azimute dado e ângulos verticais em relação a horizontal. O aparelho será utilizado na medição de ângulos para resolver situações-problemas que envolvam a determinação de comprimentos, a partir de alturas ou distâncias conhecidas e do uso da tabela com as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

6.1.1 Material do Aluno:

Figura 6.4: *Materiais utilizados pelos alunos*

A montagem do instrumento dos alunos será orientada para o uso de material reciclado ou de baixo custo, (figura 6.4) ,a ser utilizado conforme relação a seguir:

1. uma base de madeira;
2. Uma haste rígida de madeira;
3. dez mídias velhas de CDs ou DVDs;
4. uma base de armazenagem de CD/DVDs;
5. disco transparente de CD/DVD; quatro protetores de cartucho recarregado;
6. duas réguas de madeira de 1m; dobradiça de 2cm;
7. transferidor de 360^o, com haste do meio centralizada;
8. transferidor de 180^o;
9. nível de bolha;
10. seis parafusos $(1/16)''$ com arruelas e porca;
11. um parafuso $(1/4)''$, com arruela e porca;
12. cola Tree-Bond ou similar;
13. fita dupla face fina;
14. durepox;

15. tinta de decoração (artesanato);

16. uma caneta layser ou um canudo de suco ou vareta de antena.

6.1.2 Materiais adicionais e ferramentas:

Figura 6.5: *Ferramentas utilizadas pelos alunos*

Material de uso convencional encontrado em papelarias:

1. régua não graduada;

2. par de esquadros;

3. compasso;

4. cola branca (opcional);

5. pincéis (opcional);

Além das ferramentas gerais de carpintaria martelo, pregos e lixas podemos enumerar:

1. chaves de fenda;

2. estilete;

3. lixa fina;

4. arco de serra com serra;

5. parafusadeira/furadeira.

6.1.3 Procedimento de montagem:

1. **A base de madeira** é montada como um tamborete de três ripas de 2,5x2,5 com 1,5m de comprimento. O tampo que pode ter qualquer forma geométrica. É importante utilizar uma base de três pernas, pois elas são mais estáveis. As pernas da base deverão ter as pernas pontiagudas de forma a pode-se cravá-las no solo quando irregular de forma a se obter nivelamento.

Figura 6.6: *Base de madeira tipo tamborete*

2. **A haste rígida** deve ter forma cilíndrica de dimensão igual a do orifício do CD de for que este possa girar livremente encaixado na haste. A haste deverá ser fixada firmemente na base de madeira. Nesta montagem foi utilizada uma base de armazenagem de CD/DVDs, que facilita a centralização do transferidor. Como já não são tão fáceis de usar pode-se utilizar peças cilíndricas de nylon de 10cm e diâmetro de 16mm, para serem torneadas no diâmetro de 14,5-15,0 mm.

3. **Montagem da baliza** Use uma broca de 1/16" para alargar o furo da dobradiça; Marque nas réguas o ponto a ser furado, como o material da régua é muito frágil deve-se utilizar sempre uma broca bem fina aumentando gradualmente o diâmetro do furo até a dimensão do parafuso; utilizar arruelas se possível. Tomar cuidado no manuseio da régua visto que a dobradiça não fecha totalmente devido a cabeça do parafuso. Como as réguas são de MDF optou-se por não tentar serrá-las para ajustar o zero de uma ao 100cm da outra, desta forma, à todas as medidas, acima de 100cm, deve-se acrescentar 1cm da emenda.

4. **Montagem horizontal do teodolito** Usando um arco de serra, corte o pino central da base de armazenar CDs ou DVDs deixando 1cm na base; Cole 5 CD/DVD com Tree-Bond; Escolha uma mídia clara em bom estado para colocar por cima, cole as capas para baixo; Determine o centro co conjunto e trace com o estilete uma diagonal bem fina; Usando fita dupla face fixe o conjunto à base de forma que não gire; Faça duas

pequenas setas com a fita dupla face e fixe na borda da base de CD/DVD demarcando a direção riscada no CD; Usando uma broca 14,5-15mm abra um furo na haste central do transferidor de forma a coincidir com o furo dos CD/DVDs. Cole o transferidor com fita dupla face sobre uma mídia transparente e coloque o conjunto na base; Verifique a centralidade da linha riscada sobre o diâmetro do CD/DVD; Se tudo estiver bem use o durepox para fazer uma trava sobre o pino central impedindo os CD/DVDs de caírem.

6.2 Transferidor universal de ângulos

Figura 6.7: *Transferidor universal de 300mm Digimess*

O objetivo desta atividade é construir um aparelho de maior precisão para ser manipulado pelo professor e por alunos, em busca de resultados que conduzam a uma verificação mais precisa da teoria. O instrumental montado é de uso profissional em pequenos levantamentos mas caiu em desuso com a popularização dos GPS.

6.2.1 Material do Professor:

O equipamento do professor, mostrado na figura 6.7, fará uso de instrumentos de medição e apontamento de custo mais elevado para permitir a determinação dos ângulos com maior grau de precisão de forma a poder explorar a questão da sensibilidade das funções seno e tangente com a inclinação.

1. Um tripé fotográfico com pernas regulável, base com movimento nos três eixos e bóia de nível;

2. Um transferidor universal, 300mm (Mitutoyo);

3. Uma caneta layser verde;

4. Tinta de decoração (artesanato).

6.2.2 Procedimento de montagem:

Figura 6.8: *Montagem da base*

O Transferidor universal de ângulos é um instrumento de valor elevado tanto para professor como para aluno, vide orçamento na seção 8.5, e que só poderá ser adquirido pela U.E. através de verba para desenvolvimento pedagógico. A base de fixação do transferidor é uma régua metálica de 30cm. Para fixar o transferidor ao tripé a régua era muito grande e foi cortada, em um torneiro, uma peça de 3,5cm. Esta peça foi soldada a uma barra de metal chata de 5mm de dimensões 5,0cm x 2,5cm, em cuja face inferior, foi também soldada uma porca de $(\frac{3}{16})''$ para fixação ao tripé de máquina fotográfica, vide figura 6.8.

Historicamente falando a introdução da luneta no conjunto transferidor deve-se à limitação da acuidade visual que foi ampliada com a invenção da luneta, permitindo a leitura na baliza à distâncias cada vez maiores. Para ampliar a leitura pensou-se inicialmente em utilizar um apontador layser vermelho comum em qualquer camelô. Este feixe contudo apresenta limitação de uso durante o dia, com redução drástica de alcance. A solução veio com o uso do layser verde cujo alcance pode chegar a 6 km em situação ótima, oferecendo assim muita adequação a proposta do experimento. Foi adquirido via Internet um apontador layser verde que com uso de braçadeiras plásticas de 10cm foi fixado ao braço superior do transferidor de ângulos, conforme mostra a figura 6.9

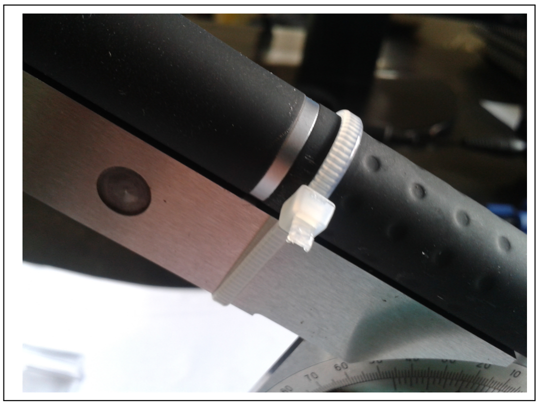


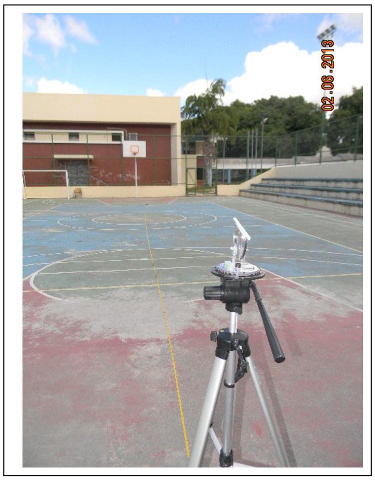
Figura 6.9: *Montagem do apontador layser*

CAPÍTULO 7

PROCEDIMENTO DE TRABALHO EM CAMPO

O Transferidor de ângulos universal é um instrumento de medição de ângulos com precisão de $5'$ e que por isto mesmo pode ser utilizado na determinação de distâncias dentro do campo visual. Este tipo de determinação de pequenas distâncias foi muito utilizada no passado até o surgimento das lunetas ópticas que resultou no desenvolvimento do teodolito. O princípio de uso é simples, conhecido o ângulo e fazendo-se uso de uma tabela trigonométrica é possível determinação de distâncias horizontais e verticais.

Figura 7.1: *Montagem horizontal 02*



7.1 Material auxiliar

Os materiais auxiliares no trabalho de campo são: uma trena de pelo menos 20m, uma baliza de 2m, uma trena pequena de 3m, um fios de prumo, uma prancheta, uma calculadora, uma tábua trigonométrica, uma máquina fotográfica, caneta ou lápis formulário de medição.

Figura 7.2: *Montagem horizontal 02*

7.2 Procedimento em campo

Indicamos a seguir uma rotina confiável para execução das medidas:

1. - Identificação do local da medição no formulário;
2. - Marcação dos extremos a serem medidos;
3. - Instalação do tripé nivelado e com o fio de prumo no ponto A;
4. - Colocação da baliza, em prumo no ponto B;
5. - Transporte do nível do ponto A para o ponto B, registro no formulário;
6. - Deflexão vertical do transferidor, leitura do ângulo alfa, registro no formulário;
7. -Leitura da altura h_1 sobre a baliza, registro no formulário.

As distâncias a serem medidas deverão ser marcadas com tinta em chão cerâmico ou de pedra e com piquetes de madeira em solo. Esta marcação visa permitir a repetição das medidas reduzindo as imprecisões

7.3 Registro de campo

Para avaliar as dificuldades dos experimentos foi realizada uma medição na quadra da U.E. Seguindo a sequência sugerida a primeira medida objetivou levantar a distância da cesta de basquete ao poste de sustentação da outra cesta aonde foi fixada a baliza. A distância foi medida com trena e o ângulo com o transferidor. Os maiores problemas encontrados foram: o nível de claridade que dificulta ver nitidamente o ponto verde; o nivelamento do instrumento e a leitura na lente.

7.3.1 Resultados da medição em campo

Os resultados obtidos estão apresentados nos formulários à seguir. Para possibilitar os cálculos com ângulos lidos em minutos foi elaborado em Excel uma planilha eletrônica que apresenta os cálculos parciais e o valor final do comprimento procurado em cada experimento, vide figura 7.7.

Figura 7.3: *Formulário do Resultado do Experimento 01*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO: CETEP – Teixeira de Freitas

FOLHA DE MEDIÇÃO DE CAMPO – 1º. Caso

Referente Aula 05 : MEDIDAS DE COMPRIMENTO E TRATAMENTO ESTATÍSTICO

Nome do Aluno: PROFESSOR

Equipe número: 00

Atividade número: 01

Localizacão: Teixeira de Freitas

CENTRO TERRITORIAL DE EDUCAÇÃO PROFISSINAL

CROQUI/FOTO DO OBJETO

Medidas com [ ] teodolito caseiro

[X] Transferior de ângulos

Leitura [ ] horizontal

[X] vertical

Medida	h_o (tripé)	H	α (1ª.leitura)	$\tan a$	$d = \frac{H - h_o}{\tan \alpha}$
1	1,55	2,01	1^o	0,017	27,05m
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Figura 7.4: *Formulário do Resultado do Experimento 02*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

FOLHA DE MEDIÇÃO DE CAMPO – 2º. Caso

Referente Aula 05 : MEDIDAS DE COMPRIMENTO E TRATAMENTO ESTATÍSTICO

Nome do Aluno: PROFESSOR

Equipe número: 00

Atividade número: 02

Localizacão: Teixeira de Freitas

CENTRO TERRITORIAL DE EDUCAÇÃO PROFISSINAL

CROQUI/FOTO DO OBJETO

Medidas com [ ] teodolito caseiro

[X] Transferior de ângulos

Leitura [ ] horizontal

[X] vertical

Medida	h_o (tripé)	d	α (1ª.leitura)	$\tan\alpha$	$H = h_o + d.\tan\alpha$
1	1,55	27,30	1^{o}	0,017	2,01m
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Figura 7.5: *Formulário do Resultado do Experimento 03*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

FOLHA DE MEDIÇÃO DE CAMPO – 3º.Caso

Referente Aula 05 : MEDIDAS DE COMPRIMENTO E TRATAMENTO ESTATÍSTICO

Nome do Aluno: PROFESSOR

Equipe número: 00

Atividade número: 03

Localizacão: Teixeira de Freitas

CENTRO TERRITORIAL DE EDUCAÇÃO PROFISSINAL

Medidas com [X] teodolito caseiro

[ ] Transferidor de ângulos

Leitura [ ] horizontal

[X] vertical

Medida	Δh	α (1ª.leitura)	β (2ª.leitura)	$\tan\alpha$	$\tan\beta$	$d = \dfrac{\Delta h}{\tan\beta - \tan\alpha}$
1	0,46	0°	1°	0,0	0,017	27,06
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

Figura 7.6: *Formulário do Resultado do Experimento 04*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

FOLHA DE MEDIÇÃO DE CAMPO – 4º.Caso

Referente Aula 05 : MEDIDAS DE COMPRIMENTO E TRATAMENTO ESTATÍSTICO

Nome do Aluno: PROFESSOR

Equipe número: ____00______

Atividade número: ___04_____

Localizacão: ___Teixeira de Freitas_____________

CENTRO TERRITORIAL DE EDUCAÇÃO PROFISSINAL

Medidas com [X] teodolito caseiro

[ ] Transferidor de ângulos

Leitura [ ] horizontal

[X] vertical

Medida	h_o (tripé)	Δd (diferença)	α (1ª.leitura)	β (2ª.leitura)	$\tan\alpha$	$\tan\beta$	$H = h_{o+}\Delta d.\dfrac{\tan\alpha\,.\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$
1	1,55	5	15	12	0,209	0,212	6,69 m
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

Figura 7.7: *Planilha Excel para ângulos em minutos*

TABELA EXCEL PARA CALCULOS DE ÂNGULOS COM PRECISÃO DE MINUTOS

1º EXPERIMENTO

Medida	h_o (tripé)	H	α (grau)	α (min)	α (rad)	$\tan\alpha$	$d = \frac{H - h_o}{\tan\alpha}$
1	1,55	2,01	1,000	0	0,01745	0,0175	26,35
2	1,55	2,01	0	50	0,01454	0,0145	31,63
3	1,55	2,01	1	10	0,02036	0,0204	22,59
4			45,000	0,000	0,78540	1,0000	

2º EXPERIMENTO

Medida	h_o (tripé)	d	α (grau)	α (min)	α (rad)	$\tan\alpha$	$H = h_o + d.\tan\alpha$
1	1,55	27,3	1,000	0	0,01745	0,0175	2,03
2	1,55	27,3	0	50	0,01454	0,0145	1,95
3	1,55	27,3	1	10	0,02036	0,0204	2,11
4			45,000	0,000	0,78540	1,0000	

3º EXPERIMENTO

Medida	Δh	α (grau)	α (min)	α (rad)	β (grau)	β (min)	β (rad)	$\tan\alpha$	$\tan\beta$	$d = \frac{\Delta h}{\tan\beta - \tan\alpha}$
1	0,46	0,000	0	0,00000	1,000	0	0,01745	0,0000	0,0175	26,35
2										
3										
4										

4º EXPERIMENTO

Medida	h_o (tripé)	Δh	α (grau)	α (min)	α (rad)	β (grau)	β (min)	β (rad)	$\tan\alpha$	$\tan\beta$	$H = h_o + \Delta d.\frac{\tan\alpha.\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$
1	1,55	5	15,000	20	0,26762	12,000	43	0,22195	0,2742	0,2257	7,93
2											
3											
4											

CAPÍTULO 8

DESCRIÇÃO DOS INSTRUMENTOS E PRÁTICA DE MEDIÇÃO

Para executar um experimento de medição é preciso estar familiarizado com o instrumental, bem como, conhecer seus recursos, sua precisão, suas limitações e recomendações de uso, desta forma estaremos aptos a executar medições mais precisas. Por este motivo passaremos agora a apresentar os instrumentos que serão utilizados.

8.1 A trena

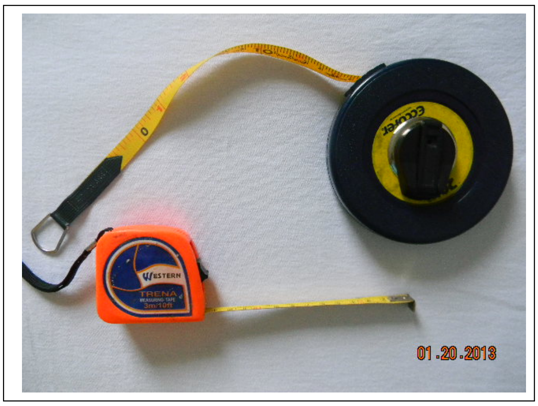


Figura 8.1: *Jogo de trenas*

É um instrumento para medição direta de distâncias entre dois pontos topográficos sobre alinhamentos. Uma das dificuldades do uso da trena em espaços abertos deve-se ao vento, que provoca uma catenária horizontal. A catenária vertical também prejudica muito a medida, razão pela qual não se recomenda medições direta de vãos maiores que 20m. Distâncias maiores devem ser medidas com trenadas de 20m. Seu procedimento de uso é simples. Em terrenos acidentados deve-se procurar manter a linha horizontal com medidas em degrau, esticando a trena sobre o alinhamento a medir, neste caso em vãos maiores, trenas elásticas podem prejudicar a medição.

Procedimentos de uso:

1. sempre medir do centro de uma baliza até o centro de outra baliza;
2. não fazer trenadas maiores de 20,0 m;
3. começar pelo ponto mais alto (zero da trena) no terreno;
4. achar a horizontal, que é menor distância entre duas linhas verticais;
5. não apoiar a trena em nada;
6. esticar bem a trena antes da leitura;
7. conferir a leitura.

Proposta de pesquisa associada:
O que é a catenária? O sol pode interferir na medição? Porque temos que manter o prumo das balizas durante a leitura? Qual a figura geométrica associada a este procedimento?

8.2 A baliza

É uma haste de madeira, plástico ou metálica graduada em dm e cm utilizada em levantamentos topográficos para registro de altura de um ponto no final da linha de visada. Quando se faz duas visadas a baliza também serve para leitura da variação das alturas das visadas. Ela é conduzida e sustentada por pessoal de apoio à medição e que portanto deve ser treinado para não introduzir erros na medição. A maior dificuldades no uso da baliza, fica por conta das medições demoradas, o auxiliar se cansa e mesmo com nível de bolha perde o prumo. O uso de baliza sem nivel de bolha normalmente introduz erros maiores.

Procedimentos de uso:

1. sempre apoiar sobre o pino de medição;

Figura 8.2: *Baliza de réguas*

2. buscar manter a vertical com um nível de bolha acoplado à baliza;
3. quando a visada é projetada sobre a baliza deve-se registrar a medição;
4. conferir a leitura.

8.3 O transferidor de ângulos

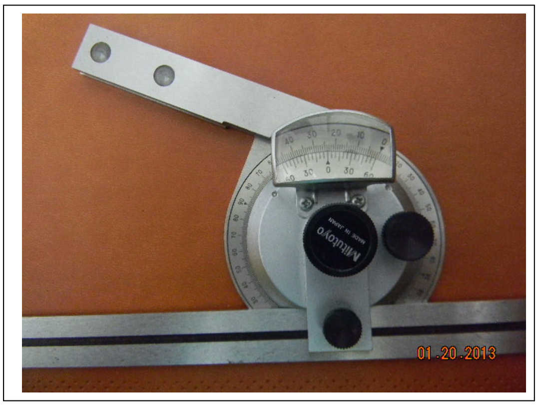


Figura 8.3: *Transferidor de Ângulos Universal*

É um instrumento profissional de medição de ângulos, fabricado em aço inoxidável, utilizado para pequenos trabalhos de levantamento topográficos existe em diferentes versões, será utilizado aqui o modelo com lupa de leitura, o que permite leituras de até 5 minutos, com deslocamento de 360^o.

Procedimento de uso:

1. fixar a régua do transferidor à base;

2. nivelar a base com o uso de nível de bolha;
3. fixar bem o transferidor à base utilizando o parafuso inferior;
4. zerar o transferidor e verificar o nível sobre o braço superior;
5. regular a mobilidade do braço superior com o parafuso central;
6. apontar para a mira instrumento movimentando o parafuso à esquerda do centro;
7. efetuar a leitura do ângulo a partir da marca do zero inferior;
8. efetuar a leitura dos minutos a partir do melhor alinhamento entre as escalas.

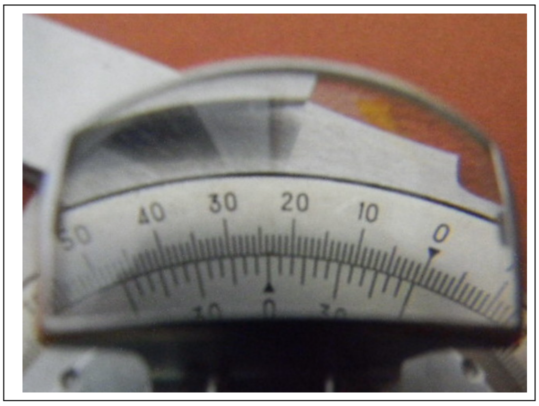


Figura 8.4: *Lupa do transferidor*

Na figura acima é possível observar o perfeito alinhamento entre as escalas na marca dos 20^o, que na escala inferior corresponde a -10 minutos e do lado positivo a coincidência vai ocorrer na marca de 50 minutos com 43^o, então o ângulo medido foi de 23^{o}50'.

8.4 Erros no uso dos equipamentos

"Medir é errar"
(Dora Orth)

Em sua apostila TOPOGRAFIA APLICADA [21], a professora Dora Orth sintetiza uma série de reflexões mínimas que se deve ter antes de começar um procedimento de medida, à saber. É impossível medir com perfeição. O erro se torna parte de qualquer medição. Para minimizar os erros todo experimentador assume posturas de controle e avaliação da precisão de seu experimento. Nas medições topográficas, deve-se tomar cuidados especiais durante os levantamentos, e "ajustar os erros", antes de usar os dados levantados. Independente do equipamento de medição ou tipo de medição, existe simultaneamente vários tipos e fontes de erros que podem ser assim classificados:

erros acidentais que provêem da imperfeição dos nosso sentidos. Estes variam muito e não podem ser eliminados e nem calculados;

erros sistemáticos frutos da imperfeição dos equipamentos, erros de calibração ou falta de aferição dos equipamentos, descuido no uso dos equipamentos, em sua instalação, posição de leitura,tempo;

erros grosseiros que são frutos de enganos ....

Vejamos os erros mais frequentes e que podem ser evitados:

1. **erros sistemáticos no uso da trena:**

    - erro de alinhamento;
    - não verticalidade da baliza;
    - não horizontalidade da trena;
    - não aferição do comprimento da trena;
    - trena não esticada provocando exagerada catenária vertical ou horizontal;
    - variação do comprimento da trena pela temperatura com o sol muito forte.

2. **erros grosseiros no uso da trena:**

    - erro de anotação;
    - engano no número de trenadas;
    - erro no ajuste do zero da fita;
    - engano no sentido da graduação da fita.

8.5 Planilha de material e equipamentos - Orçamento

Instrumentos de medição

Item	Descrição	Quantidade	Valor
1	Transferidor universal de ângulos digmes	1	241,00
2	Apontador de layser verde	1	40,00
3	Tripé universal W-360	1	60,00
4	Trena Fechada De Fibra C/ 20 Metros C/ Escala Dupla	1	28,00
5	Trena 3 Metros - Tramontina	1	8,00
6	Fio de prumo	1	6,00

Material de baixo custo

Item	Descrição	Quantidade	Valor
1	réguas de 1m para professor, em mdf	2	4,50
2	parafusos de 3x12mm cilin c/porca e arruelas	6	0,20
3	parafusosne de 5x30mm c/porca e arruelas	1	0,50
4	porca de 10mm	1	0,30
5	transferidor de 360^o	1	1,30
6	transferidor de 180^o	1	0,80
7	cola rápida estilo super bond	1	4,00
8	fita dupla face	1	3,50

Material descartável

Item	Descrição	Quantidade	Valor
1	CD/DVD's velhos	10	0,00
2	base de armazenar CD/DVD's	1	0,00
3	protetor de recarga de cartuchos de impressora	4	0,00
4	discos tranparentes de CD/DVD's	1	0,00
5	canudos plásticos	1	0,00
6	pedaço 5cm de barra de 5x25mm	1	0,00

CAPÍTULO 9

CONSIDERAÇÕE E RECOMENDAÇÕES

Os equipamentos propostos foram testados em quatro experimentos de medida simulando as práticas que serão desenvolvidas pelos alunos e pode-se notar o grande potencial da atividade. As situações de campo levam o aluno a um questionamento imediato dos resultados obtidos e as questões levantadas poderão ser exploradas pelo professor para introduzir reflexões quanto a variação dos valores da tangente e as razões da sensibilidade do resultado em face a variação do ângulo. Pode a critério o professor introduzir o conceito de circulo trigonométrico, partindo do posicionamento do instrumento e determinando sentido para a medição de distâncias.

O primeiro ano é o ano do aprendizado das funções e a exploração das tabelas do seno, cosseno e da tangente pode auxiliar a construção da idéia de função. Outro tema que pode ser bem explorado são os conceitos estatísticos de medida de tendência central e medida de dispersão.

A realização das medidas também permitiu as observações abaixo:

- Existe uma séria dificuldade de uso do apontador em dias de muita insolação já que se perde a acuidade visual do ponto verde a medida que aumenta a distância.
- o nivelamento do tripé e da mesa do instrumento é muito delicado o que certamente introduzirá erros na medição.
- o trabalho deve ser desenvolvido por uma equipe de no mínimo quatro estudantes um na leitura, dois na trena e um terceiro na anotação dos dados.

- os resultados obtidos estão dentro do esperado e permitem o professor explorar temas outro como o estudo estatístico.
- o conteúdo pode dar seguimento ao conteúdo de funções partindo da tabela das razões seno, cosseno e tangente.
- o desenvolvimento do planejamento atende aos oito princípios facilitadores da aprendizagem significativa propostos por Marcos Antônio Moreira, expostos no capitulo 2
- espera-se que após este trabalho a aprendizagem possa ser avaliada através de um pós-teste com questões do ENEM e de Vestibulares, sobre o conteúdo.
- Também se espera que o professor do curso de física possa refletir sobre o aprendizado do conteúdo de Vetores e Cinemática após a aplicação do PROJETO

Acredita-se pois que a hipótese de trabalho, de que, a partir desta sequência didática, iniciada pela Trigonometria na 1^a série do Ensino Médio, baseada no uso da Internet, atividades externas à sala e resolução de problemas concretos, se possa construir um aprendizado significativo para o aluno, utilizando como recurso chave a construção e manipulação do teodolito caseiro, trabalhando aplicações e restrições ao seu uso, contribuindo assim para um repensar o ensino da matemática para o Ensino Profissional Técnico.

REFERÊNCIAS

[1] AUSUBEL, David P., *The psychology of meaningful verbal learning. New York*, Grune and Stratton, 1963.

[2] BIANCHINI, Edvaldo e PACCOLA, Herval, *Matemática*, Volume 1 Ensino Médio, Editora Moderna, São Paulo, 2004, Livro do professor.

[3] BOYER,Carl Benjamin, *História da Matemática*, Edgard Blücher, São Paulo, 1996.

[4] BRASIL, Presidência da República, Brasília-1996, *Lei 9.394/96, Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional Art.36 Art.21*, Disponível em: $< http : //portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/tvescola/leis/lein9394.pdf >$. Acesso em: 15 out. 2012.

[5] BRASIL, Presidência da República, Brasília-2008, *Lei 11.741/08, Altera a Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional Art.36-D*, Disponível em: $< http : //www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007 - 2010/2008/Lei/L11741.htm >$. Acesso em: 15 out. 2012.

[6] CUNHA, Francisco, *A evolução da topografia através dos tempos*, $< http//www.planortogonal.com/index.php?option = com\_content\&view = article\&id = 37 : a - evolucao - da - topografia - atraves - dos - tempos\&catid = 1 : topografia\&Itemid = 41 >$, acesso em 20 jan. 2013 as 14:52.

[7] DANTE, Luis Roberto, *Matemática*, Volume 1 Ensino Médio, Editora Ática, São Paulo, 2004, Livro do professor.

[8] FEHR, HoWard F., *Educação Matemática nas Américas*, Cia. Editora Nacional, São Paulo, 1969, Relatório da Segunda Conferência Interamericana sôbre Educação Matemática.

[9] GALANTE, Carlos e MARCONDES, Osvaldo, *Matemática*, Série Ginasial, vol. 70, Editora do Brasil S/A, São Paulo, 1956, Coleção Didática do Brasil,12ª. Edição.

[10] GARBI, Gilberto Geraldo, *C.Q.D.:explicações e demonstrações sobre conceitos teoremas e fórmulas essenciais da geometria*, Editora Livraria de Física, São Paulo, 2010.

[11] GIOVANNI, José Rui e CASTRUCCI, Benedito, *A conquista da Matemática*, 8ª.série, FTD, São Paulo, 1985.

[12] GRASSESCHI, Maria Cecília C., *PROMAT:projeto oficina de matemática*, 8ª.série, FTD, São Paulo, 1999.

[13] GUELLI, Oscar, *Matemática: uma aventura do pensamento*, 7ª.série, Ática, São Paulo, 1998, Livro do professor.

[14] ______, *Matemática: uma aventura do pensamento*, 8ª.série, Ática, São Paulo, 2003, Livro do professor.

[15] HOGBEN, Lancelot, *Maravilhas da Matemática Influência e função da matemática nos conhecimentos humanos*, Segunda edição, Editôra Globo, Press, Pôrto Alegre-RG.

[16] IMENES, Luiz M. e LELLIS, Marcelo, *Matemática Imenes e Lellis*, 7ª.série, Editora Scipione, São Paulo, 1999.

[17] LINDEGGER, Luis Roberto de Moura, *Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triangulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos*, Master's thesis, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

[18] MONSALVE G., Miguel & VARGAS M., José Alexander, *KURT GÖDEL - Constructor de Universos*, < *http : //www.unalmed.edu.co/ dirmate/documentos/SEMINARIO/MMonsalve.pdf* >, acessado em 18/01/2013, 18:30.

[19] MOREIRA, M. A., *Aprendizagem significativa crítica*, Atas do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa **Lisboa (Peniche)** (2000), Repositório Aberto. Disponível em: < *https : //repositorioaberto.uab.pt/handle/*10400.2/1320 >.

[20] NOVAK, J. D.,MOREIRA, M. A., et all, *Contributos do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa*, < https : //repositorioaberto.uab.pt/bitstream/10400.2/1320/1/Livro%20Peniche.pdf#page = 122 >, Peniche, 2000, acessado em 18/01/2013, 18:15.

[21] ORTH, Dora, *TOPOGRAFIA APLICADA - Apostila Didática - Parte II - Topometria - 2008*, UFSC-Universidade Federal de Santa Catarina, < http : //www.grupoge.ufsc.br/publica/Apostila2.pdf >, acesso em 23/01/2013 às 17:29.

[22] PAIVA, Manoel, *Matemática*, Volume 1 Ensino Médio, Editora Moderna, São Paulo, 2009, Livro do professor.

[23] PEREIRA, Cicero S. e RÊGO, Rômulo M., *Aprendizagem em trigonometria - contribuição da teoria da aprendizagem significativa*, CIAEM-XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (2011), Recife-Brasil de 26 a 30 jul.

[24] POSTMAN, Neil, *The end of education:Refdefining the value of school*, Vintage Books/Random House, New York, 1996.

[25] Minsistério da Educação , Secretaria da Educação Média e Tecnológica, *Parâmetros Curricilares Nacionais- PCN Ensino Médio*, MEC-Brasília, 1999.

[26] SOUZA, Joamir, *Matemática*, Volume 1 Ensino Médio, Editora FTD, São Paulo, 2009, Coleção Novo Olhar.

[27] SUPROF, *Orientação para elaboração do Projeto Político pedagógico - PPP dos Centros da Educação Profissional do Estado da Bahia*, < http : //www.youblisher.com/p/271443 − Orientac − es − para − elaboracao − do − Projeto − Politico − Pedagogico − PPP − dos − Centros − da − Educacao − Profissional − do − Estado − da − Bahia >, acesso em 14/01/2013 às 20:40.

[28] VALADARES, Jorge, *A importância epistemológica do Vê do conhecimento*, Atas do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa **Universidade Aberta, Lisboa (Peniche)** (1999), Repositório Aberto. Disponível em: < https : //repositorioaberto.uab.pt/handle/10400.2/1320 >.

[29] VERGNAUD, G., *Epistemology and Psiclogy in Mathematicis Education*, Mathematicis and Cognition, Nesher,P e Kilpatrik,J., Cambridgge University Press, 1994, pp 2-17.

APÊNDICE

Instrumentos pedagógicos propostos

1. - Planejamento dos encontros com os professores aplicadores;
2. - Primeira Aula - Apresentação dos alunos e do PROJETO;
3. - Planejamento da Aula 02;
4. - Planejamento da Aula 03;
5. - Planejamento da Aula 04;
6. - Planejamento da Aula 05;
7. - Planejamento da Aula 06;
8. - Ficha de avaliação da Pesquisa-01 via Internet;
9. - Ficha de avaliação da Pesquisa-02 via Internet;
10. - Ficha de avaliação da Pesquisa-03 via Internet;
11. - Ficha de avaliação da Pesquisa-04 via Internet;
12. - Ficha de avaliação da Pesquisa-05 via Internet;
13. - Ficha de avaliação da Aula 02;
14. - Ficha de avaliação da Aula 03;
15. - Ficha de avaliação da Aula 04;

16. - Ficha de avaliação da Aula 05;

17. - Ficha de avaliação Aula 06 do Experimento;

18. - Formulário do Experimento 01 (já apresentado)

19. - Formulário do Experimento 02 (já apresentado)

20. - Formulário do Experimento 03 (já apresentado)

21. - Formulário do Experimento 04 (já apresentado)

22. - Formulário de Anánise Estatística

Figura 9.1: *Planejamento com Aplicadores*

NOME DA UNIDADE ESCOLAR:

PLANEJAMENTO 1º / 2º.. ENCONTRO DURAÇÃO (50 min cada)

CONJUNTO
Professores APLICADORES – professores de matemática da série inicial de das escolas selecionadas.

CONTEÚDO A TRABALHAR
Apresentação do PROJETO, seus objetivos, metodologia e instrumentos de aprendizagem e avaliação.

OBJETIVO GERAL
Usar a trigonometria como gancho para revisão de conteúdos do ensino fundamental.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
- Despertar a sensibilidade do estudante para percepção da semelhança de triângulos;
- Trabalhar razões e proporções;
- Relembrar o conceito de unidade de medidas de comprimento, suas relações;
- Trabalhar conversão de unidades e paralelamente potencias de dez;
- Exercitar o uso da tabela trigonométrica em exercícios práticos de medida;
- Trabalhar o conceito de experimento, dados, erros e estatística descritiva.

PROPOSTA DE TRABALHO
Apresentação dos planos de aula e seus instrumentos. Construção do teodolito caseiro com os materiais descartáveis e de baixo custo. Manipulação do teodolito. Apresentação do transferidor de ângulos e instrumentos de medição, conhecimento dos instrumentos, sua história, aplicação, restrições e cuidados ao medir.

LOCAL
Esta primeira tarefa pode romper com os limites da sala de aula e ser desenvolvida em qualquer outro ambiente da escola, de preferência rico em detalhes.

MATERIAL
Trena, escala, régua, compasso, esquadros, transferidor, papel, lápis, borracha, prancheta, material descartável segundo relação e o transferidor de ângulos.

TAREFA DE SALA
Elaborar o questionário de pequisa sócio-economica e avaliar o pré-teste diagnóstico.

AVALIAÇÃO
Avaliação dos objetivos e dos instrumentos sua aplicação, adequação, restrição e algo mais que surgir.

OBSERVAÇÕES
O professor deve ter em mente as observações abaixo:
- precisão dos instrumentos e erros de leitura;
- leitura de ângulos;
- método de conferência da medição.

Figura 9.2: *Planejamento da Aula 01*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PLANEJAMENTO	1ª. AULA	DURAÇÃO (50 min)

CONTEÚDO DA AULA
Apresentações do professor aplicador, e dos alunos, apresentação do planejamento da Ia. Unidade

CONTEÚDO
Formulário sócio-econômico e teste diagnóstico

OBJETIVO
Conhecer a turma através da aplicação dos instrumentos diagnósticos. Apresentação do PROJETO em linhas gerais e formação das equipes de três estudantes.

PROPOSTA DE TRABALHO
Após as apresentações mútuas o professor tecerá comentário ao PROJETO, lançará no quadro as seguintes tarefas para a aula seguinte:
- trazer o nome do livro didático que estudou na 8ª. Série;
- apresentar formação da equipe preenchendo a proposta com três participantes;
- efetuar pesquisa para a próxima aula sobre Tales.
Depois disto o professor aplicará primeiramente o formulário sócio-econômico, reservando 30 minutos para a aplicação do teste diagnóstico.

LOCAL
Sala de aula.

MATERIAL
Questionário sócio-econômico, teste diagnóstico, proposta de equipe e canetas.

TAREFA DE CASA

1ª. Pesquisa na Internet, sobre Tales.
Perguntas orientativas:
1. Quem foi Tales de Mileto?
2. Quando e onde viveu?
3. Qual a sua grande contribuição para a matemática?
4. Você seria capaz de explicar, não é demonstrar, o Teorema de Tales?
5.

Sites recomendados:
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm28/tales.htm - sobre o Filósofo Tales
http://www.brasilescola.com/matematica/teorema-tales.htm - descrição/ aplicação
http://www.youtube.com/watch?v=YvUwxGs8n30 – prova do Teorema de Tales
http://www.youtube.com/watch?v=Q0nFctT5OoI - sobre razão e proporção

Figura 9.3: *Planejamento da Aula 02*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PLANEJAMENTO 2ª. AULA DURAÇÃO (100 min)

CONTEÚDO DA AULA
Teorema de Tales – razões e proporções de segmentos.

CONTEÚDOS A TRABALHAR
Retas paralelas; posições relativas dos ângulos: alternos, internos, externos, correspondentes; propriedades do paralelogramo; congruência de triângulos; razão e proporção geométrica e algébrica.

OBJETIVO GERAL
Demonstrar o Teorema de Tales apresentando o conceito de razão e proporção entre segmentos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
- Aprender a usar o esquadro para traçar paralelas, dominando o fundamento teórico
- Trabalhar razões e proporções algébricas;
- Trabalhar razões e proporções geométricas;
- Resolver exercício envolvendo equações de 1º. Grau;
- Resolver exercícios envolvendo de sistemas de equações do 1º. Grau;
- Despertar a sensibilidade do estudante para percepção da semelhança de triângulos;

METODOLOGIA
O professor deve apresentar o conteúdo, resolver exercícios padrão, revisar regras de solução de equações e sistemas de 1º. Grau. Em sala de aula o professor deve propor e orientar a turma na divisão de um segmento em duas partes com o uso de régua não graduada, esquadros e compasso. Em sala de aula o professor deve desafiar a turma a dividir em 3,5 ou 7 partes iguais um segmento usando régua não graduada e compasso e esquadro.

LOCAL
O uso de régua e compasso sugere o uso de uma boa mesa para desenho pode ser utilizada a sala de aula ou qualquer outro ambiente que disponha de uma boa mesa.

MATERIAL
Trena, régua não graduada, compasso, esquadros, transferidor, papel, lápis, borracha.

AVALIAÇÃO
Questionário da pesquisa, participação na equipe, produção de desenhos e auto avaliação.

OBSERVAÇÕES
O professor deve ter em mente as observações abaixo:
- evitar o uso de máquinas de calcular;
- método de conferência da medição;
- cuidados no uso do lápis, sempre na vertical ou na mesma inclinação;
- cuidados no uso do compasso, igualar as pernas.

Figura 9.4: *Planejamento da Aula 03*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PLANEJAMENTO 3ª. AULA DURAÇÃO (100 min)

CONTEÚDO DA AULA
Semelhança de polígonos - critérios de semelhança para triângulos.

CONTEÚDOS A TRABALHAR
Pede-se ao aluno que defina o que é semelhança. Pede-se a turma que dê exemplos de figuras semelhantes e a partir daí constrói-se o conceito de semelhança.

OBJETIVO GERAL
Definir o conceito de semelhança de triângulos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
- Relembrar os critérios de congruência e semelhança de triângulos;
- Perceber a dificuldade de estabelecer um critério geral para semelhança de polígonos;
- Resolver exercício de semelhança envolvendo equações de 1º. Grau;
- Perceber o caso especial da semelhança de triângulos retângulos;
- Debater o conceito de unidade de medida, para que servem e sua relação com semelhança;
- Entender o conceito de conversão de unidades de comprimento do metro para polegada;
- Entender conversão de unidades de comprimento no sistema métrico;
- Exercitar conversão de unidades decimal, uso de potencia de dez.

METODOLOGIA
O professor deve apresentar o conteúdo, resolver exercícios padrão, revisar regras de solução de equações e sistemas de 1º. Grau. O professor deve lançar um desafio em sala para que encontrem dois critérios mais simples de determinação de triângulos retângulos semelhantes. O professor deverá propor como atividade final da aula, a escolha de uma escala e a elaboração de uma planta, de uma área da escola

LOCAL
O ambiente desta aula pode ser externo a sala de aula, mesmo a parte teórica pode ser desenvolvida com as pranchetas de desenho.

MATERIAL
Trena, escala, régua, compasso, esquadros, transferidor, papel, lápis, borracha e prancheta.

AVALIAÇÃO
Questionário da pesquisa, participação na equipe, produção de desenhos e auto-avaliação.

OBSERVAÇÕES
O professor deve ter em mente as observações abaixo:
- precisão dos instrumentos e erros de leitura;
- leitura de ângulos;
- método de conferência da medição (ex. uso de uma diagonal).

Figura 9.5: *Planejamento da Aula 04*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PLANEJAMENTO 4ª. AULA DURAÇÃO (100 min)

CONTEÚDO DA AULA
Semelhança de Triângulos retângulos – critérios de semelhança.

CONTEÚDOS A TRABALHAR
Critérios de semelhança, identificação e aplicação, relações métricas no triângulos retângulos.

OBJETIVO GERAL
Trabalhar semelhança no triângulo retângulo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
- Fixar os critérios de semelhança em triângulos retângulos;
- Aplicar a semelhança de triângulos retângulos na determinação das relações métricas;
- Aplicar semelhança de triângulos na solução de problemas;
- Perceber as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

METODOLOGIA
O professor deve apresentar o conteúdo, resolver exercícios padrão, revisar dedução das relações métricas no triângulo retângulo. O professor deve lançar um desafio, em sala, de como fazer para ampliar de 1:3 um desenho dado, usando só compasso e régua não graduada. O aplicador deverá lançar como reflexão a pergunta de o que isto tem a ver com semelhança de triângulos. Como atividade externa pode-se desafiar os estudantes para que experimente determinar a altura de um poste, uma árvore ou um prédio utilizando a sombra do sol. Quais os problemas encontrados? Conseguiu-se um resultado único? Que parâmetros alteram a resposta? São toda perguntas que preparam o estudante para a etapa de experimentação.

LOCAL
O ambiente desta aula deve ser misto, a apresentação do conteúdo em sala pois evita a dispersão e as medições em área externa à sala de aula.

MATERIAL
Trena, escala, régua, esquadros, papel, lápis, borracha e prancheta.

AVALIAÇÃO
Questionário da pesquisa, participação na equipe, produção de desenhos e auto- avaliação.

OBSERVAÇÕES
O professor deve ter em mente as observações abaixo:
- precisão dos instrumentos e erros de leitura;
- os resultados variam muito com a inclinação da vareta, ou seja o prumo.

Figura 9.6: *Planejamento da Aula 05*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PLANEJAMENTO 5ª. AULA DURAÇÃO (200 min)

CONTEÚDO DA AULA
Razões trigonométricas no triângulo retângulo.

CONTEÚDOS A TRABALHAR
Definição de Arco de circulo. Medição de arco. Ângulo central. Medição de ângulos em grau e em radiano. Conceito de corda de um arco. A relação entre corda de um arco e seno do ângulo de metade do arco. Conceito de ângulo complementar e de cosseno. Conceito de tangente.

OBJETIVO GERAL
Definir o conceito de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
- Relembrar o conceito de circulo, arco de circulo e corda;
- Relembrar o conceito de ângulo central e sua relação com o arco de circunferência;
- Relembrar as unidades de medida de ângulos, os ângulos especiais, reto, raso;
- Relembrar a definição do número π e os métodos de conversão de grau para radiano;
- Resolver exercício de medição e conversão de ângulos;
- Calcular e familiarizar-se com os valores das razões trigonométricas para diversos ângulos;

METODOLOGIA
O professor deve apresentar o conteúdo, resolver exercícios padrão, buscar a familiarização do aluno com as razões trigonométricas. O professor deve lançar um desafio em sala para o aluno construir a tabela do seno e da tangente de 0º até 45º. Deve desafiar o estudante para que ele perceba e responda, após encontrada a tabela do seno, se há necessidade de medir as razões para achar o cosseno? E como preencher a coluna da tangente? Também pode propor o uso de: uma trena, calculadora, da tabela construída e de um transferidor para encontrar distâncias horizontais e verticais? Quais os problemas encontrados? O que determina o uso da razão seno ou da razão tangente?

LOCAL
O ambiente desta aula deve ser misto, a apresentação do conteúdo em sala, pois, evita a dispersão e as medições em área externa à sala de aula.

MATERIAL
Trena, escala, régua, compasso, esquadros, transferidor, papel, lápis, borracha e prancheta.

AVALIAÇÃO
Questionário da pesquisa, participação na equipe, produção de desenhos e auto avaliação.

OBSERVAÇÕES
O professor deve ter em mente as observações abaixo:
- precisão dos instrumentos e erros de leitura;
- leitura de ângulos.

Figura 9.7: *Planejamento da Aula 06*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PLANEJAMENTO 6ª. AULA DURAÇÃO (300 min)

CONTEÚDO DA AULA
Uso das razões e relações trigonométricas.

CONTEÚDOS A TRABALHAR
Seno, cosseno e tangente. Relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo. Conceito de cosecante, secante e cotangente.

OBJETIVO GERAL
Trabalhar de forma experimental o conceito de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo na determinação de distâncias.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
- Montar um teodolito caseiro;
- Aplicar o teodolito caseiro na medição de ângulos;
- Calcular distâncias a um objeto a partir da medição de duas visadas;
- Determinar indireta de alturas inacessíveis;
- Aprender a medir ângulos com um transferidor universal de ângulos;
- Entender a aproximação e a validade do modelo matemático no uso do transferidor.

METODOLOGIA
O professor deve apresentar a história dos Instrumentos de medição, em especial do teodolito, sua utilização e cuidados na medição. Quais os tipos de erros que podem aparecer pelo mau uso dos equipamentos? Com base na pesquisa da Internet, serão debatidas em sala as possibilidades de montagem de um teodolito caseiro com o material sugerido pelo professor. O professor deve sugerir o uso do instrumental montado para realizar medições? Os alunos deverão responder as indagações do tipo: Todas as medições estão dando o mesmo resultado? Que tipo de procedimento deve-se tomar com os diversos valores para ter um resultado mais significativo? Que são medidas de dispersão? Como encontro a média, moda e mediana. Como calculo o desvio? Vamos utilizar um instrumento mais preciso? Porque ainda assim não obtenho um resultado exato? Como o cientista lida com o erro? Utilizando os valores medidos o professor deverá apresentar e orientar o calculo da média, moda, mediana e do desvio padrão.

LOCAL
O ambiente desta aula pode ser externo a sala de aula, mesmo a parte teórica pode ser desenvolvida com as pranchetas de desenho.

MATERIAL
Trena, escala, régua, compasso, esquadros, transferidor, papel, lápis, borracha e prancheta.

AVALIAÇÃO
Questionário da pesquisa, participação na equipe, produção de desenhos e auto-avaliação.

OBSERVAÇÕES
O professor deve ter em mente as observações já realizadas nas atividades anteriores.

Figura 9.8: *Ficha para avaliação da pesquisa 01*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PROPOSTA DE FICHA DE AVALIAÇÃO DA PESQUISA NA INTERNET

Referente Aula 02 : TEOREMA DE TALES

Nome do Aluno: ____

Equipe número: ____________

1- Em que horário você acessou, (quando demorou mais)?

2- Quanto tempo ficou conectado em estudo?

3- Quais os vídeos que assistiu?

4- Visitou outros link's? Quais?

5- O que mais lhe chamou a atenção na vida do filósofo?

6- A qualidade dos vídeos está boa?

7- Deu para entender o vídeo em espanhol?

8- Conseguiu lembrar dos conceitos de ângulos correspondentes, alternos...?

9- Consegue definir o que é uma razão e uma proporção?

10- Achou que valeu a pena o estudo no computador?

PESQUISA PARA PRÓXIMA AULA

Que é uma unidade de medida?
http://www.kersaber.com/o-que-sao-unidades-de-medida
Para que servem as unidades de medida?
http://www.escolakids.com/unidades-de-medidas-por-que-elas-existem.htm
Qual a unidade de medida de comprimento?
http://www.colegioweb.com.br/matematica/metro.html
http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/unidades-medida-ao-longo-historia.htm
Quantas unidades de medida de comprimento existiam no Brasil colônia? ^
http://doc.brazilia.jor.br/HistDocs/Medidas-antigas-nao-decimais.shtml
Quantas unidades de área exitem no Brasil de hoje?
http://pt.wikipedia.org/wiki/Alqueire

Figura 9.9: *Ficha para avaliação da pesquisa 02*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PROPOSTA DE FICHA DE AVALIAÇÃO DA PESQUISA NA INTERNET

Referente Aula 03 : UNIDADES DE MEDIDA - MEDINDO TRIÂNGULOS

Nome do Aluno: ____

Equipe número: ____________

1- Em que horário você acessou, (quando demorou mais)?

2- Quanto tempo ficou conectado em estudo?

3- Quais os link's você visitou e leu?

4- Visitou outros link's? Quais?

5- O que mais lhe chamou a atenção na história das unidades de medida?

6- A quantidade de link's foi muito grande?

7- Deu para entender o que é unidade de medida?

8- Conseguiu lembrar como convertemos metro em centímetros e em milímetros?

9- Consegue definir outras unidades de medida, de peso, de tempo, de volume etc.?

10- Achou que valeu a pena o estudo no computador?

PESQUISA PARA PRÓXIMA AULA

Procurem e descrevam fatos histórico de determinação de distância utilizando semelhança de triângulos, ex: medir a altura da Pirâmide, medir o raio da terra, medir o diâmetro da lua etc..

1- http://www.youtube.com/watch?v=cWkU6fGoYA8 medindo pirâmides
2- http://comahistoriadamatematica.blogspot.com.br/2011/04/tales-e-altura-da-piramide.html idem.
3- http://www.fund198.ufba.br/trigo-pa/5-1aplic.pdf raio da terra e distância da terra à lua
4- http://matematicanacidadela.blogspot.com.br/2008/06/erasttenes-o-raio-da-terra-numa-noite.html idem
5- http://www.inape.org.br/colunas/fisica-conceito-historia/medindo-circunferencia-terra
6- http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/recursos/954/atividade4/atividade4.htm
7- http://www.zenite.nu/ sobre Eratóstenes e Hiparco

Figura 9.10: *Ficha para avaliação da pesquisa 03*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PROPOSTA DE FICHA DE AVALIAÇÃO DA PESQUISA NA INTERNET

Referente Aula 04 : SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Nome do Aluno: ____

Equipe número: ____________

1- Em que horário você acessou, (quando demorou mais)?
2- Quanto tempo ficou conectado em estudo?
3- Quais os link's você visitou e leu? Assistiu o vídeo?
4- Visitou outros link's? Quais?
5- Conseguiu entender as explicações sobre como eram feitos os cálculos?
6- A quantidade de link's foi muito grande?
7- Deu para entender o uso da semelhança de triângulos na medida?
8- Conseguiu encontrar outros exemplos interessantes?
9- Achou que valeu a pena o estudo no computador?

PESQUISA PARA PRÓXIMA AULA

Procurem buscar o significado das palavras seno, cosseno e tangente.

1- http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm origem da palavra seno
2- http://matematicanoponto.blogspot.com.br/2012/03/origem-dos-nomes-seno-cosseno-e.html idem.
3- http://clickmatematica2.blogspot.com.br/ visite o blog pois ele fala de diversos assuntos relacionados ao estudo:
4- http://clickmatematica2.blogspot.com.br/2012/03/origem-dos-nomes-senocossenotangente.html
   http://clickmatematica2.blogspot.com.br/2012/04/origem-da-tabela-trigonometrica.html
5- http://clickmatematica2.blogspot.com.br/2012/03/videos-e-imagens.html
6- http://clickmatematica2.blogspot.com.br/2012/03/curiosidades.html

Figura 9.11: *Ficha para avaliação da pesquisa 04*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PROPOSTA DE FICHA DE AVALIAÇÃO DA PESQUISA NA INTERNET

Referente Aula 05 : RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nome do Aluno: ____

Equipe número: ____________

1- Em que horário você acessou, (quando demorou mais)?
2- Quanto tempo você ficou conectado em estudo?
3- Quais os link's que você visitou e leu?
4- Você visitou outros link's? Quais?
5- O que você encontrou de interessante no blog?
6- Você consegue a partir do significado do cosseno entender sua relação com o seno?
7- Deu para você entender na tabela trigonométrica a simetria do seno para o cosseno ?
8- Você conseguiu entender as outras razões secante, cosecante e cotangente?
9- Você achou que valeu a pena o estudo no computador?

PESQUISA PARA PRÓXIMA AULA

Procurem buscar o significado das palavras seno, cosseno e tangente.

1- http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm origem da palavra seno
2- http://matematicanoponto.blogspot.com.br/2012/03/origem-dos-nomes-seno-cosseno-e.html idem.
3- http://clickmatematica2.blogspot.com.br/ visite o blog pois ele fala de diversos assuntos relacionados ao estudo:
4- http://clickmatematica2.blogspot.com.br/2012/03/origem-dos-nomes-senocossenotangente.html
http://clickmatematica2.blogspot.com.br/2012/04/origem-da-tabela-trigonometrica.html
5- http://clickmatematica2.blogspot.com.br/2012/03/videos-e-imagens.html
6- http://clickmatematica2.blogspot.com.br/2012/03/curiosidades.html

Figura 9.12: *Ficha para avaliação da pesquisa 05*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PROPOSTA DE FICHA DE AVALIAÇÃO DA PESQUISA NA INTERNET

Referente Aula 05 : EXPERIMENTOS DE MEDIÇÃO DE DISTÂNCIAS E ALTURAS

Nome do Aluno: ____

Equipe número: ____________

1- Em que horário você acessou, (quando demorou mais)?
2- Quanto tempo você ficou conectado em estudo?
3- Quais os link's você visitou e leu?
4- Você visitou outros link's? Quais?
5- O que você encontrou de interessante nos vídeos?
6- Você consegue a partir dos vídeos imaginar a construção de um teodolito caseiro?
7- Deu para você entender o uso da tabela trigonométrica na medição da distância ?
8- Você consegue repetir o experimento apresentado no vídeo?
9- Você achou que valeu a pena o estudo no computador?

PESQUISA PARA PRÓXIMA AULA

Controle estatístico de um experimento.

1- http://www.youtube.com/watch?v=-E61WDtNlwM o uso da estatística
2- http://www.youtube.com/watch?v=Ovwo-xwvBUE distribuição de frquências
3- http://www.youtube.com/watch?v=-fEAMP8YC1I media, moda e mediana
4- http://www.youtube.com/watch?v=TIaURF9ieM4 idem
5- http://www.youtube.com/watch?v=SGMT78kUqIw experimento de física
6- http://wwwp.fc.unesp.br/~lavarda/fge/fge_met_lab.pdf tratamento estatístico de dados

Figura 9.13: *Ficha de avaliação da aula 02*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

P PROPOSTA DE FICHA DE AVALIAÇÃO DA AULA

Referente Aula 02 : TEOREMA DE TALES

Nome do Aluno: ____

Equipe número: ____________

DÊ UMA NOTA DE 0 a 5 PARA AS ATIVIDADES ABAIXO:

1- Participação pessoal e envolvimento com o trabalho? ______
2- Clareza da exposição dos conceitos? ______
3- Tempo e quantidade de exercícios resolvidos? ______
4- Retirou as dúvidas das soluções algébricas? ______
5- Tempo foi suficiente para execução dos desenhos? ______
6- O tempo da aula foi adequado? ______
7- Aprendeu a manusear o compasso e os esquadros? ______
8- Quantos conceitos você já conhecia e ainda se lembrava? ______
9- Cite pelo menos três conceitos que você considera importante e que aprendeu na aula de hoje

Figura 9.14: *Ficha de avaliação da aula 03*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

P PROPOSTA DE FICHA DE AVALIAÇÃO DA AULA

Referente Aula 03 : SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Nome do Aluno: ____

Equipe número: ____________

DÊ UMA NOTA DE 0 a 5 PARA AS ATIVIDADES ABAIXO:

1- Participação pessoal e envolvimento com o trabalho? ______

2- Clareza da exposição dos conceitos? ______

3- Tempo e quantidade de exercícios resolvidos? ______

4- Retirou as dúvidas das soluções algébricas? ______

5- Tempo foi suficiente para execução dos desenhos? ______

6- O tempo da aula foi adequado? ______

7- Aprendeu a manusear o compasso e os esquadros? ______

8- Quantos conceitos você já conhecia e ainda se lembrava? ______

9- Cite pelo menos três conceitos que você considera importante e que aprendeu na aula de hoje

Reflexão - O que é uma planta em termos matemático? Como medimos distâncias? Qual a unidade de medida pardrão para distância?

Figura 9.15: *Ficha de avaliação da aula 04*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PROPOSTA DE FICHA DE AVALIAÇÃO DA AULA

Referente Aula 04 : SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS
CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA.

Nome do Aluno: ____

Equipe número: ____________

DÊ UMA NOTA DE 0 a 5 PARA AS ATIVIDADES ABAIXO:

1- Participação pessoal e envolvimento com o trabalho? ______

2- Clareza da exposição dos conceitos? ______

3- Tempo e quantidade de exercícios resolvidos? ______

4- Retirou as dúvidas das soluções algébricas? ______

5- Tempo foi suficiente para execução dos desenhos? ______

6- O tempo da aula foi adequado? ______

7- Ainda tem dificuldade manusear os esquadros? ______

8- Quantos conceitos você já conhecia e ainda se lembrava? ______

9- Cite pelo menos três conceitos que você considera importante e que aprendeu na aula de hoje

Reflexão - Como fazer para garantir que uma régua esta na vertical, que o prumo está correto? E como marcar o ângulo de 90º. Na construção de uma casa?

Figura 9.16: *Ficha de avaliação da aula 05*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PROPOSTA DE FICHA DE AVALIAÇÃO DA AULA

Referente Aula 05: RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Nome do Aluno: ____

Equipe número: ____________

DÊ UMA NOTA DE 0 a 5 PARA AS ATIVIDADES ABAIXO:

1- Participação pessoal e envolvimento com o trabalho? ______

2- Clareza da exposição dos conceitos? ______

3- Tempo e quantidade de exercícios resolvidos? ______

4- Retirou as dúvidas das soluções algébricas? ______

5- Tempo foi suficiente para execução dos desenhos? ______

6- O tempo da aula foi adequado? ______

7- Teve dificuldade de manusear o transferidor? ______

8- Quantos conceitos você já conhecia e ainda se lembrava? ______

9- Cite pelo menos três conceitos que você considera importante e que aprendeu na aula de hoje

Reflexão - Como fazer para desenhar um gráfico com os valores do seno, do cosseno e da tangente para ângulos entre 0º e 90º?

Figura 9.17: *Ficha de avaliação da aula 06*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

PROPOSTA DE FICHA DE AVALIAÇÃO DA AULA

Referente Aula 06 : USO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nome do Aluno: ____

Equipe número: ____________

DÊ UMA NOTA DE 0 a 5 PARA AS ATIVIDADES ABAIXO:

1- Participação pessoal e envolvimento com o trabalho? ______
2- Clareza da exposição das tarefas? ______
3- Tempo de acesso aos instrumentos de medida ? ______
4- Retirou as dúvidas no desenvolver das práticas? ______
5- Tempo foi suficiente para execução dos experimentos? ______
6- O número de aula foi adequado? ______
7- Teve dificuldade de manusear o transferidor? ______
8- O experimento ajudou você a memorizar mais as razões? ______
9- Cite pelo menos aspectos positivos do experimento e
Que você considera importante , e que aprendeu na aula de hoje

Reflexão - Como fazer para melhorar o medidor de ângulos e ganhar precisão?

Figura 9.18: *Formulário de Anánise Estatística*

NOME DA UNIDADE DE ENSINO:

FOLHA DE PROCESSAMENTO E ANÁLISE DOS DADOS

Referente Aula 05 : MEDIDAS DE COMPRIMENTO E TRATAMENTO ESTATÍSTICO

TURMA: ____________

Quantidade de alunos: ____________

Atividade número: __________

Localizacão: ____

____.

CROQUI/FOTO DO OBJETO

Medidas:

Média

Erro:

Média

Erro quadrático:

Média