

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

## As Cônicas, Quádricas e suas Aplicações

Antonio Simões Gaspar

Brasília

2014

**Antonio Simões Gaspar**

# **As Cônicas, Quádricas e suas Aplicações**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Nilton Moura Barroso Neto

Brasília

2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de  
Brasília. Acervo 1016061.

Gaspar, Antonio Simões.  
G249c As cônicas, quadráticas e suas aplicações / Antonio Simões  
Gaspar. -- 2014.  
75 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade de Brasília,  
Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática,  
2014.

Inclui bibliografia.

Orientação: Nilton Moura Barroso Neto.

1. Geometria analítica. 2. Cônicas. 3. Quádricas.  
I. Barroso Neto, Nilton Moura. II. Título.

CDU 514.12

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# As Cônicas, Quádricas e suas Aplicações.

por

**Antonio Simões Gaspar\***

*Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 05 de junho de 2014.

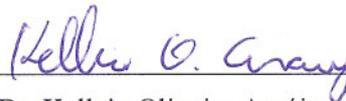
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Nilton Moura Barroso Neto (Orientador) – MAT/UnB



Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira – UFG/GO



Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo – MAT/UnB

\* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Todos direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Antonio Simões Gaspar** graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais em 1982. Especializou-se em Metodologia e a didática do ensino em 1989 e atualmente é Professor do Ensino Básico do Colégio Militar de Brasília.

Dedico este trabalho a meu pai Joaquim dos Santos Gaspar (in memoriam) que apesar de só ter o ensino primário trabalhou incansavelmente para dar condições para que seus filhos estudassem

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me propiciado saúde, fé e perseverança nesta caminhada que, por muitas vezes, fui tentado a desistir devido aos vários obstáculos encontrados no caminho.

Ao amor da minha vida, minha esposa Cristina, que sempre me apoiou com seu carinho e suas palavras de conforto.

As minhas filhas Renata e Beatriz, que sempre estiveram ao meu lado incentivando o meu aprimoramento.

À Universidade de Brasília(UNB) e ao Departamento de Matemática, pela oportunidade dada para podermos realizar o mestrado.

Ao coordenador Professor Dr. Rui Semertz, pelo o apoio e dedicação dados ao curso.

Aos professores e tutores do programa de mestrado do PROFMAT, pelos ensinamentos me proporcionando uma melhor qualificação e crescimento profissional.

A todos os colegas de mestrado, em especial, Cores, Murilo, Adriana e Daniel pelo estudo que realizamos juntos que tanto contribuiu para meu sucesso nas avaliações.

Aos colegas, professor Adameck pelo incentivo, professor Daniel Alves pelas correções e professor Belchior pelas discussões que tanto enriqueceram o desenvolvimento do trabalho.

Ao meu professor orientador, Dr. Nilton Moura Barroso Neto, pela paciência e dedicação com que orientou este trabalho sem as quais não teria a mesma qualidade.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro que foi de grande valia.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização de mais esta conquista.

## Resumo

Este trabalho inicia-se com uma breve abordagem dos pré-requisitos necessários para o desenvolvimento teórico das cônicas. Em seguida apresentamos as suas definições, seus principais elementos e suas respectivas equações reduzidas. As equações das cônicas também são apresentadas nas formas transladadas e rotacionadas. No capítulo 3, estudamos as quádricas, suas principais propriedades e algumas das suas relações com as funções de várias variáveis. Finalmente, no último capítulo do trabalho, mostramos algumas aplicações desses objetos geométricos no nosso cotidiano. No apêndice, deduzimos as equações da elipse, hipérbole e parábola no sistema de coordenadas polares.

**Palavras-chave:** Geometria analítica; Cônicas; Quádricas; Aplicações.

## Abstract

This work begins with a brief overview about the subject needed in the theoretic development of conics. Next we present the definitions, the main features and the reduced equations of conic sections. The conic equations are also presented in their translated and rotated forms. In chapter 3, we study quadrics, their properties and some of their relations with functions of several variables. Finally, in the last chapter of this work, we present some applications of these objects in our daily lives. In the appendix, we deduce the ellipse, hyperbola and parabola equations in polar coordinates.

**Keywords:** Analytic geometry ; Conics ; Quadrics ; Applications.

# Lista de Figuras

1	Seções cônicas . . . . .	13
2	Cone oblíquo com duas folhas . . . . .	14
1.1	Sistema de coordenadas cartesianas do plano . . . . .	17
1.2	Coordenadas polares do ponto $P$ . . . . .	18
1.3	A translação de um sistema de coordenadas . . . . .	19
1.4	Rotação de um sistema de coordenadas. . . . .	20
1.5	Reta tangente a uma curva. . . . .	22
1.6	Reta tangente ao gráfico de uma função . . . . .	23
2.1	Elipse com focos nos pontos $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ . . . . .	25
2.2	Hipérbole com focos nos pontos $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ . . . . .	29
2.3	Assíntotas da hipérbole . . . . .	30
2.4	Parábola com foco no ponto $(c, 0)$ e reta diretriz $x = -c$ . . . . .	32
2.5	Cônica transladada. . . . .	34
3.1	Elipsoide. . . . .	41
3.2	Hiperboloide de 1 folha. . . . .	42
3.3	Hiperboloide de 2 folhas. . . . .	43
3.4	Cone elíptico. . . . .	44
3.5	Cilindro elíptico. . . . .	45
3.6	Cilindro hiperbólico. . . . .	46
3.7	Paraboloide. . . . .	47
3.8	Paraboloide hiperbólico. . . . .	48
3.9	Cilindro parabólico. . . . .	49
3.10	Gráfico de uma função de duas variáveis . . . . .	50
3.11	Curvas de nível do paraboloide . . . . .	51

3.12	Curvas de nível da sela. . . . .	52
3.13	Superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . . . . .	53
3.14	Superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . . . . .	53
4.1	Propriedade refletora da elipse . . . . .	55
4.2	Luminária em consultório de odontologia . . . . .	57
4.3	Catedral de Brasília . . . . .	59
4.4	Propriedade refletora da hipérbole . . . . .	60
4.5	Observatório Monte Palomar . . . . .	61
4.6	Sistema de navegação LORAN. . . . .	62
4.7	Ponte Akashi Kaikyo . . . . .	63
4.8	Ponte Juscelino Kubitschek . . . . .	64
4.9	Propriedade refletora da parábola . . . . .	65
4.10	Raios refletidos na parábola . . . . .	66
4.11	Farol do carro . . . . .	67
4.12	Fornos solares . . . . .	68
4.13	Antenas parabólicas . . . . .	68
4.14	Elipse em coordenadas polares . . . . .	69
4.15	Hipérbole em coordenadas polares . . . . .	71
4.16	Parábola em coordenadas polares. . . . .	72

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>16</b>
1.1 Sistemas de coordenadas . . . . .	16
1.2 A Translação e a Rotação de um Sistema de Coordenadas . . . . .	18
1.3 Reta tangente a uma curva . . . . .	21
<b>2 As Cônicas</b>	<b>24</b>
2.1 Elipse . . . . .	24
2.2 Hipérbole . . . . .	28
2.3 Parábola . . . . .	31
2.4 Cônicas Transladadas e Rotacionadas . . . . .	33
2.5 Cônicas Degeneradas . . . . .	38
<b>3 As Quádricas</b>	<b>40</b>
3.1 Quádricas Canônicas . . . . .	40
3.2 Quádricas como Gráficos de Funções . . . . .	49
<b>4 Aplicações das Cônicas</b>	<b>54</b>
4.1 Propriedades da Elipse . . . . .	54
4.2 Propriedades da Hipérbole . . . . .	58
4.3 Propriedades da Parábola . . . . .	63
<b>Apêndice: Cônicas em Coordenadas Polares</b>	<b>69</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Introdução

Os historiadores afirmam que, há aproximadamente quatro mil anos, no Egito Antigo, um faraó tinha dividido as terras em porções retangulares entre todos os egípcios, procurando ajustar o tributo sob a lei de um imposto igual. Quem perdesse parte de sua terra, em consequência das inundações do rio Nilo, devia comunicar ao rei, que mandava, então, um inspetor para calcular a perda e fazer um desconto proporcional no imposto. Foi assim que nasceu a geometria. A própria etimologia da palavra “geometria” significa “medida de terra” (geo=terra; metria=medida).

A ciência geométrica dos egípcios foi introduzida na Grécia no século VI a.C. por Tales de Mileto e recebeu enorme contribuição através de notáveis pensadores gregos entre os quais podemos destacar Pitágoras e Zenon, no século V a.C., Eudoxo e Menaecmus, no século IV a.C. e Euclides, Arquimedes e Apolônio no século III a.C.

Foi no século IV a.C. que o astrônomo e geômetra Menaecmus descobriu que havia duas curvas, chamadas mais tarde de parábola e hipérbole, que apresentavam propriedades que possibilitavam encontrar a solução para o problema da duplicação do cubo (problema de Delos). Como decorrência dessa descoberta apareceu outra curva chamada mais tarde de elipse. Essas três curvas são chamadas até hoje de seções cônicas, porque Menaecmus as concebeu como interseção de um plano, perpendicular à geratriz, com três tipos de cone circular reto de uma folha, de acordo com o ângulo do vértice: agudo (oxytome – elipse), reto (orthotome – parábola) e obtuso (amblytome – hipérbole).

No século III a.C., tivemos a maior de todas as contribuições de Euclides à Matemática e à ciência em geral através de sua obra *Os Elementos* que edificou a Geometria como sistema lógico, conferindo-lhe o caráter de ciência dedutiva. Ainda no século III a.C., os ilustres matemáticos helênicos Arquimedes e Apolônio enriqueceram muito a Geometria com suas obras.

Apolônio de Perga, juntamente com Euclides e Arquimedes, foi reconhecidamente

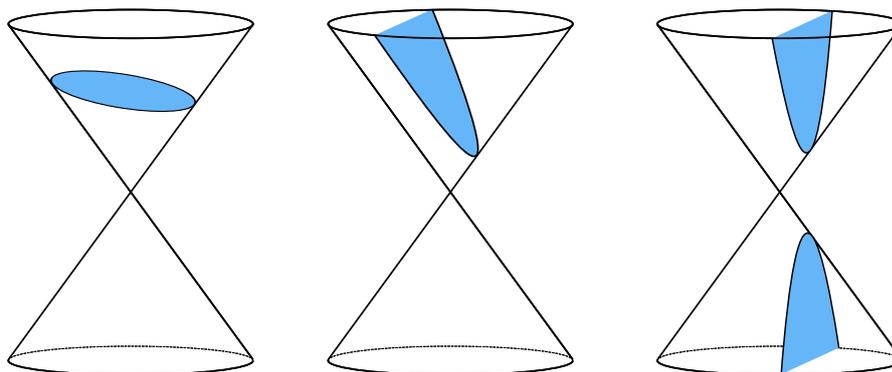


Figura 1: Seções cônicas

um dos maiores matemáticos de todos os tempos. A sua grande reputação é devido a sua importante obra sobre as seções cônicas. Os *Estóicos das Cônicas*, com seu título original em grego, de Apolônio, é comparado pela sua importância e generalidade a *Os Elementos* de Euclides. Estas obras foram consideradas as melhores obras em seus campos. Apolônio era conhecido como o grande geômetra. Podemos dizer que, juntamente com Menaecmus, Apolônio foi um dos iniciadores (fundadores) da Geometria Analítica.

A elipse, a parábola e a hipérbole antes de Apolônio eram seções obtidas de três tipos diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Apolônio demonstrou que não era necessário tomar seções perpendiculares a um elemento do cone e que simplesmente variando a inclinação do plano de secção em um único cone de duas folhas poderia se obter as três curvas.

Apolônio ainda provou que o cone não precisaria ter seu eixo perpendicular à base circular, ou seja, ser reto, mas poderia também ser oblíquo ou escaleno. Apolônio, em seu estudo, quando considerou um cone com duas folhas, introduziu as três curvas do modo como a conhecemos atualmente, inclusive os nomes: elipse, parábola e hipérbole.

Muitos séculos se passaram sem importantes avanços científicos. No século XVII, ocorreu o primeiro grande avanço na geometria após os gregos. Em 1629, o matemático francês Pierre De Fermat (1601-1665), na restauração de obras perdidas da Antiguidade e baseado em informações encontradas nos tratados clássicos preservados, começou a fazer descobertas muito importantes em Matemática. Na sua tentativa de reconstituir certas demonstrações perdidas de Apolônio sobre os lugares geométricos, com base em alusões contidas na *Coleção Matemática de Pappus*, Fermat descobriu o princípio fundamental da geometria analítica no sentido de que sempre que numa equação final

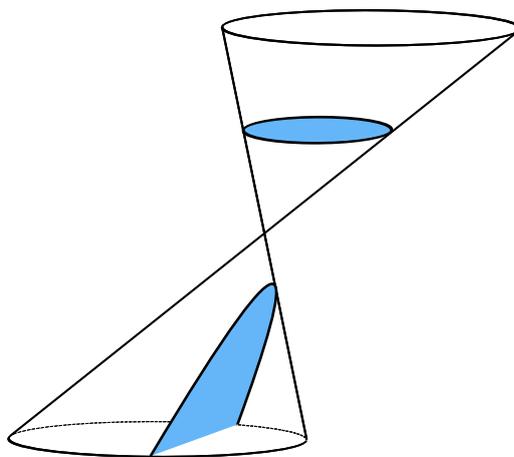


Figura 2: Cone oblíquo com duas folhas

encontram-se duas quantidades incógnitas, tem-se um lugar geométrico, qual seja a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva.

Em 1637, o notável filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650) publicou, na Holanda, em francês, seu grandioso *Discours de la Méthode pour bien conduire la raison e chercher la vérité dans les sciences* (Discurso sobre o método para bem conduzir a própria razão e procurar a verdade nas ciências), conhecido como “O Discurso do Método”. O Discurso do Método trazia três importantes apêndices: *Les Météores* (Os Meteoros), estudo dos corpos celestes: *La dioptrique* (A Dióptrica), estudo da refração da luz e *La Géométrie* (A Geometria), primeiros ensaios da geometria analítica, em que mostrou como, utilizando a álgebra, a geometria poderia ser estudada.

René Descartes deixa claro os objetivos de *La Géométrie* logo na primeira frase do trabalho: *todo problema de geometria pode ser facilmente reduzido a termos tais que o conhecimento dos comprimentos de certos segmentos basta para construir a solução*.

Pierre De Fermat e principalmente René Descartes, com suas obras, sistematizaram o emprego da Álgebra nos problemas de Geometria. A Geometria Analítica, em homenagem a Descartes, também se chama Geometria Cartesiana. As ciências matemáticas, com a aplicação do método cartesiano na Geometria, obtiveram um progresso vertiginoso, por isso, muitas vezes, alguns pesquisadores consideram René Descartes como o iniciador da Matemática Moderna.

Quase todo professor de Matemática já teve a experiência de ser questionado, por alunos enfadados com demonstrações e com questões que consideram incompreensíveis

e inúteis, sobre a importância da Matemática e sua utilidade ou aplicabilidade. Os alunos sempre questionam com perguntas do tipo: “Para que estudar Matemática?”, “Para que serve toda essa Matemática?”.

Inspirado pela disciplina de Geometria Analítica do curso de mestrado do PROF-MAT e como professor do 3º ano do ensino médio onde leciono Geometria Analítica há vários anos, resolvi pesquisar as principais propriedades e aplicações das cônicas e quádricas, sistematizando-as para que assim as aulas sejam mais interessantes e respondam aos questionamentos dos alunos, despertando neles um interesse maior pelos estudos.

Organizamos este trabalho da seguinte forma:

No primeiro capítulo, encontramos as preliminares onde abordamos os sistemas de coordenadas cartesianas e polares, translação de eixos coordenados, rotação de eixos coordenados e a noção de reta tangente à uma curva, que são pré-requisitos necessários para o desenvolvimento da fundamentação teórica nos capítulos seguintes.

No capítulo 2, fazemos o desenvolvimento teórico sobre as cônicas onde apresentamos seus elementos e suas propriedades deduzindo, assim, suas equações reduzidas e mostrando que elas podem ser comparadas com a equação geral do segundo grau nas variáveis  $x$  e  $y$ .

No capítulo 3, abordamos as superfícies quádricas, mostrando suas equações canônicas e destacando as interseções com um plano paralelo aos planos coordenados. Também neste capítulo apresentamos as quádricas como gráficos de funções.

No mundo moderno verificamos as propriedades das cônicas aplicadas em vários ramos das ciências, tais como: Física, Astronomia, Engenharia, Medicina, e muitos outros. Algumas das aplicações das cônicas estão relatadas no capítulo 4 onde apresentamos também as demonstrações dessas propriedades.

No final do texto acrescentamos também um apêndice onde tratamos das equações das cônicas em coordenadas polares.

Por fim, informamos que as figuras são numeradas por capítulo e as equações são numeradas de acordo com as seções. Por exemplo, (2.1.11) refere-se decima primeira equação da primeira seção do segundo capítulo.

# Capítulo 1

## Preliminares

Apresentamos, neste capítulo, os pré-requisitos necessários para o embasamento teórico desenvolvido nos próximos capítulos. Mais precisamente, falaremos sobre sistema de coordenadas no plano, as transformações de translação e rotação no plano e a noção de reta tangente ao gráfico de uma função.

### 1.1 Sistemas de coordenadas

Um par ordenado é um par de números reais  $(a, b)$  tal que

$$(a, b) = (c, d) \text{ implica } a = c \text{ e } b = d.$$

Alternativamente, também é possível definir o par ordenado  $(a, b)$  como o conjunto

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Neste caso, podemos deduzir facilmente a propriedade acima a partir dos axiomas da teoria de conjuntos. De fato, se  $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ , então  $\{a\} = \{c\}$  ou  $\{a\} = \{c, d\}$ . Em qualquer caso temos  $a = c$ . Portanto

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}.$$

Suponha que  $b = a$ . Neste caso  $\{\{a\}\} = \{\{a, b\}, \{a\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$  ou seja  $a = c = b = d$ . Agora suponha que  $b \neq a$ . Nessa situação,  $b$  é elemento de apenas um dos conjuntos  $\{a\}, \{a, b\}$ . Isto significa que  $b$  é elemento de apenas um dos conjuntos

$\{a\}$ ,  $\{a, d\}$ . Portanto, devemos ter necessariamente que  $b \in \{a, d\}$  e, daí,  $b = d$ , como queríamos demonstrar.

Dado um par de retas ortogonais  $x = Ox$  e  $y = Oy$ , podemos associar para cada ponto  $P$  do plano um único par ordenado  $(a, b)$ , onde  $a$  e  $b$  são as distâncias do ponto  $P$  até as retas  $Oy$  e  $Ox$ , respectivamente. Os números  $a$  e  $b$  são chamados coordenadas cartesianas do ponto  $P$ . Inversamente, se  $a$  e  $b$  forem dois números escolhidos arbitrariamente, então ao par ordenado  $(a, b)$  corresponde um único ponto  $P$ . De fato, as retas  $Ox$  e  $Oy$  dividem o plano em quatro regiões chamadas quadrantes. Se  $a$  e  $b$  forem ambos positivos,  $P$  estará no primeiro quadrante do sistema de coordenadas; se  $a$  for negativo e  $b$  positivo,  $P$  estará no segundo quadrante; se ambos forem negativos,  $P$  estará no terceiro quadrante e se  $a$  for positivo e  $b$  negativo,  $P$  estará no quarto. O ponto de intersecção das retas é chamado de origem e é representado pela letra  $O$ . É claro que  $O = (0, 0)$  (veja figura 1.1).

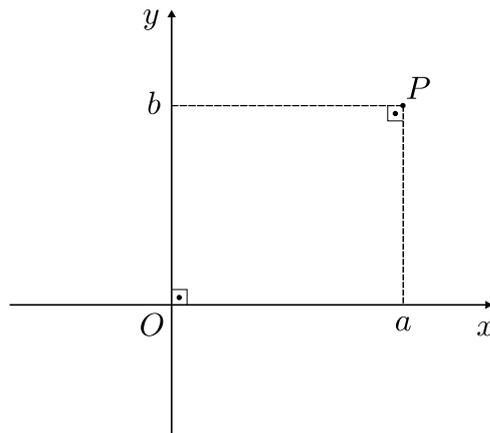


Figura 1.1: Sistema de coordenadas cartesianas do plano

Esse processo de identificação dos pontos do plano com um par de números reais é chamado de sistema de coordenadas cartesianas do plano e o par de retas  $Ox$  e  $Oy$  será denotado laconicamente por  $xOy$ .

O sistema de coordenadas cartesiano não é o único sistema utilizado para representar analiticamente os pontos do plano. Outro sistema de coordenadas bastante útil e frequentemente utilizado em aplicações é o sistema de coordenadas polares que passamos a descrever agora.

Consideremos um ponto  $O$ , chamado de origem, e uma semirreta  $OA$  denominada

eixo polar. Para cada ponto  $P$  associamos um par ordenado  $(\rho, \theta)$ , onde  $\rho$  é a distância de  $O$  a  $P$  e  $\theta$  é a medida, em radianos, do ângulo formado pelo eixo polar  $OA$  e a semirreta  $OP$  (veja figura 1.2).

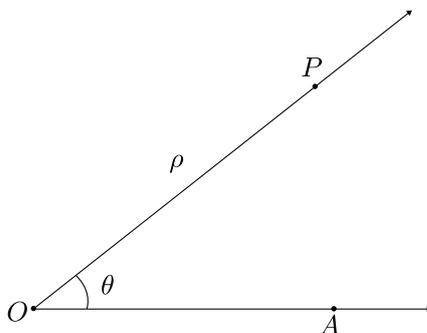


Figura 1.2: Coordenadas polares do ponto  $P$ .

Os números reais  $\rho$  e  $\theta$  são denominados coordenadas polares do ponto  $P$ ;  $\rho$  é chamado de raio e  $\theta$  é o ângulo polar do ponto  $P$ . Observe que quando o ponto  $P$  está sobre o eixo polar as coordenadas polares de  $P$  não estão bem definidas, pois neste caso temos  $\theta = 2k\pi$ . Algo ainda pior ocorre quando  $P = O$ . Nesta situação temos  $\rho = 0$ , porém o ângulo polar pode ser, a princípio, qualquer número real.

Quando o ponto  $P$  é distinto do polo seu raio vetor  $\rho$  é sempre positivo, pois como falamos antes, representa a distância do ponto até o polo. Entretanto, em determinadas situações é útil considerar valores negativos para o raio  $\rho$ . Nestes casos convencionam-se identificar o ponto  $(-\rho, \theta)$  com o ponto  $(\rho, \theta + \pi)$ , que será marcado na semirreta oposta à semirreta  $OP$ .

## 1.2 A Translação e a Rotação de um Sistema de Coordenadas

A equação de um lugar geométrico é definida em relação a um sistema determinado de coordenadas. Podemos substituir o sistema de coordenadas em questão por um novo sistema a fim de simplificar as equações de certas curvas. Qualquer transformação rígida  $T$  do plano pode ser escrita como uma composição de translações e rotações.

Por esse motivo é suficiente para nossos propósitos estudar apenas essas duas classes de transformações.

Seja  $xOy$  um sistema de coordenadas. Construimos um novo sistema de coordenadas  $x'O'y'$  no plano fixando a origem em um ponto  $O'$  e considerando as retas  $O'x'$  e  $O'y'$ , que passam por  $O'$ , paralelas às retas  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente (veja a figura 1.3). Se  $(h, k)$  são as coordenadas cartesianas do ponto  $O'$  no sistema  $xOy$ , então dizemos que  $x'O'y'$  é obtido a partir de  $xOy$  por translação ao ponto  $(h, k)$ .

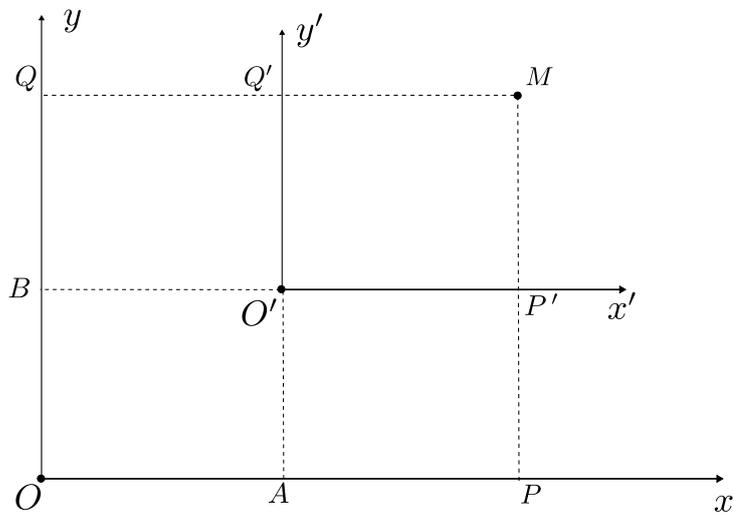


Figura 1.3: A translação de um sistema de coordenadas

A distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta determinado por eles. Usaremos a notação  $d(O, A)$  para indicar a distância entre os pontos  $O$  e  $A$ . A posição do novo sistema de eixos é determinada pela nova origem  $O'$  de coordenadas  $(h, k)$ , isto é,

$$h = d(O, A), \quad k = d(O, B). \quad (1.2.1)$$

Seja  $M$  um ponto qualquer do plano com coordenadas  $(x, y)$  no sistema de coordenadas  $xOy$ . Neste caso temos

$$x = d(O, P), \quad y = d(O, Q).$$

As novas coordenadas desse mesmo ponto em relação ao novo sistema serão

$$x' = d(O', P'), \quad y' = d(O', Q').$$

Observando a figura (1.3) temos

$$x = d(O, P) = d(O, A) + d(A, P) = d(O, A) + d(O', P') = h + x',$$

$$y = d(O, Q) = d(O, B) + d(B, Q) = d(O, B) + d(O', Q') = k + y'.$$

Assim, as equações de transformação das antigas coordenadas para as novas são dadas por  $x = x' + h$  e  $y = y' + k$ . Para obtermos as equações de transformação das novas coordenadas para as antigas, basta isolarmos  $x'$  e  $y'$  nas equações anteriores, ou seja,

$$x' = x - h, \quad y' = y - k. \quad (1.2.2)$$

Passamos agora à rotação de eixos coordenados. Geometricamente, essa é uma transformação do plano que consiste em fazer girar os eixos coordenados por um mesmo ângulo  $\theta$  e num mesmo sentido em torno de sua origem  $O$  (veja figura 1.4). Mais uma vez, seja  $M$  um ponto qualquer do plano com coordenadas  $(x, y)$  no sistema de coordenadas  $xOy$ . Sabemos que

$$x = d(O, P), \quad y = d(O, Q).$$

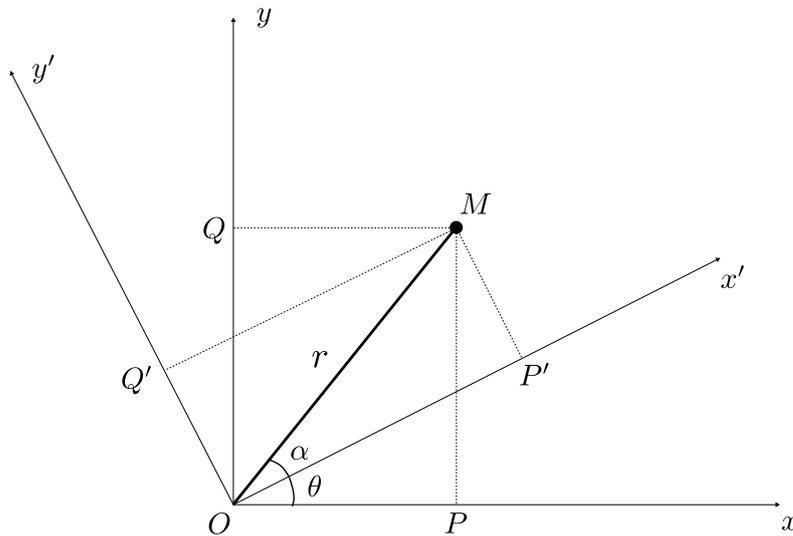


Figura 1.4: Rotação de um sistema de coordenadas.

Seja  $(x', y')$  o par de coordenadas cartesianas de  $M$  no sistema de coordenadas  $x'Oy'$ . Obtemos

$$x' = d(O, P'), \quad y' = d(O, Q').$$

Considere o ângulo  $\alpha = MOP'$  e o segmento  $\overline{OM} = r$ . Observando a figura (1.4) é fácil ver que valem as seguintes relações trigonométricas

$$x = d(O, P) = r \cos(\theta + \alpha),$$

$$y = d(O, Q) = r \operatorname{sen}(\theta + \alpha),$$

$$x' = d(O, P') = r \cos(\alpha),$$

$$y' = d(O, Q') = r \operatorname{sen}(\alpha).$$

Usando as fórmulas das funções trigonométricas da soma temos

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta + \alpha) \\ &= r \cos(\theta) \cos(\alpha) - r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\alpha) \\ &= x' \cos(\theta) - y' \operatorname{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Analogamente

$$y = x' \operatorname{sen}(\theta) + y' \cos(\theta).$$

Resolvendo as equações de transformação para  $x'$  e  $y'$ , obtemos

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\theta) + y \operatorname{sen}(\theta), \\ y' &= -x \operatorname{sen}(\theta) + y \cos(\theta). \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Pela translação e pela rotação dos eixos coordenados estabelecemos as fórmulas de transformação de coordenadas que, usadas devidamente, ajudarão a determinar as equações gerais de certas curvas no plano.

### 1.3 Reta tangente a uma curva

Sejam  $\gamma$  uma curva,  $M$  e  $P$  dois pontos de  $\gamma$  e  $MP$  a reta secante determinada por esses pontos, conforme a figura (1.5).

Imaginemos o ponto  $P$  percorrendo a curva  $\gamma$  e se aproximando do ponto  $M$ . Neste caso, as retas secantes assim obtidas aproximam-se de uma reta  $t$ . Esta reta limite é chamada de tangente à curva  $\gamma$  no ponto  $M$  e o ponto  $M$  é chamado ponto de contato ou ponto de tangência.

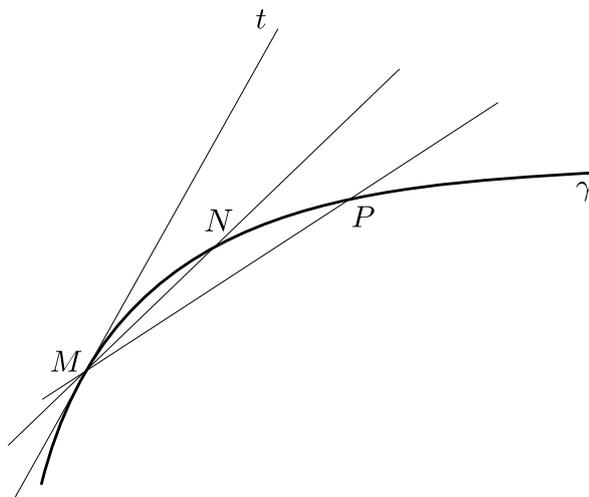


Figura 1.5: Reta tangente a uma curva.

O argumento acima ainda carece de rigor matemático. Passemos agora ao cálculo preciso da reta tangente no caso em que a curva  $\gamma$  é o gráfico de uma função derivável  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida em um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ . Temos que  $\gamma = \{(x, f(x)) : x \in I\}$ . Dado  $c \in I$ , então para um número  $h \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeno temos que  $c+h \in I$ . Sejam  $M$  e  $N$  os pontos de  $\gamma$  correspondentes, isto é,

$$M = (c, f(c)) \quad \text{e} \quad N = (c+h, f(c+h)).$$

A secante  $MN$  tem como inclinação o quociente

$$I(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{c+h-c} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Se existir, o limite  $\lim_{h \rightarrow 0} I(h)$  será chamado de derivada de  $f$  no ponto  $c$  e denotado por  $f'(c)$ . Nesse caso, dizemos que  $f$  é derivável em  $c$ . Uma função  $f$  é derivável em  $I \subset \mathbb{R}$  se for derivável para todo  $c \in I$ . O cálculo das derivadas das diversas funções do cálculo é uma tarefa relativamente simples. Os leitores interessados em aprender mais sobre o assunto podem consultar um dos muitos livros disponíveis e dedicados ao Cálculo Diferencial.

Observe que, geometricamente,  $f'(c)$  é a inclinação da reta tangente à curva  $\gamma$  no ponto  $M$  (veja figura 1.6). Definimos a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $M = (c, f(c))$  como a reta que passa por esse ponto e tem inclinação igual a  $f'(c)$ , isto é,

$$y - f(c) = f'(c)(x - c).$$

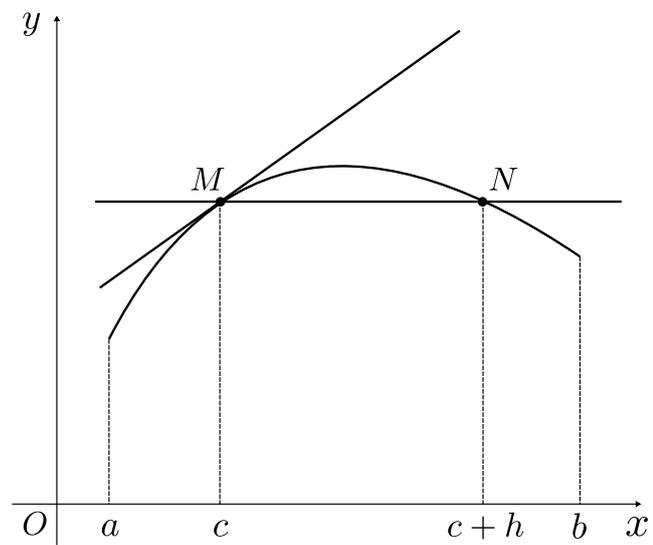


Figura 1.6: Reta tangente ao gráfico de uma função

A reta perpendicular à tangente no ponto  $M$  diz-se normal a curva em  $M$ . Se  $f'(c) \neq 0$  podemos representá-la pela equação

$$y - f(c) = -\frac{1}{f'(c)}(x - c).$$

# Capítulo 2

## As Cônicas

Neste capítulo estudaremos as cônicas: elipse, hipérbole e parábola, que são curvas que se obtêm como interseção de um cone circular reto de duas folhas com um plano.

Inspirado nos estudos de Apolônio, Pierre de Fermat estabeleceu o princípio fundamental da Geometria Analítica, quando mostrou, que no plano uma equação do 1º grau representa uma reta e uma equação do 2º grau representa uma cônica.

### 2.1 Elipse

Fixe dois pregos sobre uma folha de papel. Em cada um desses pregos amarre as pontas de um barbante com comprimento maior que a distância entre eles. Mantendo o barbante esticado, com a ponta do lápis risque o papel. A curva assim obtida é chamada de elipse. Sua definição formal é a seguinte.

**Definição 2.1.** *A elipse, como figura geométrica, é o conjunto de todos os pontos no plano, tais que a soma de suas distâncias a dois pontos distintos fixados, chamados de focos da elipse, é uma constante positiva dada, maior que a distância entre os pontos.*

Suponhamos inicialmente que a elipse tem focos nos pontos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  e seja  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < c < a$  (veja figura 2.1).

Nesta situação, se o ponto  $P = (x, y)$  pertence a elipse temos que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

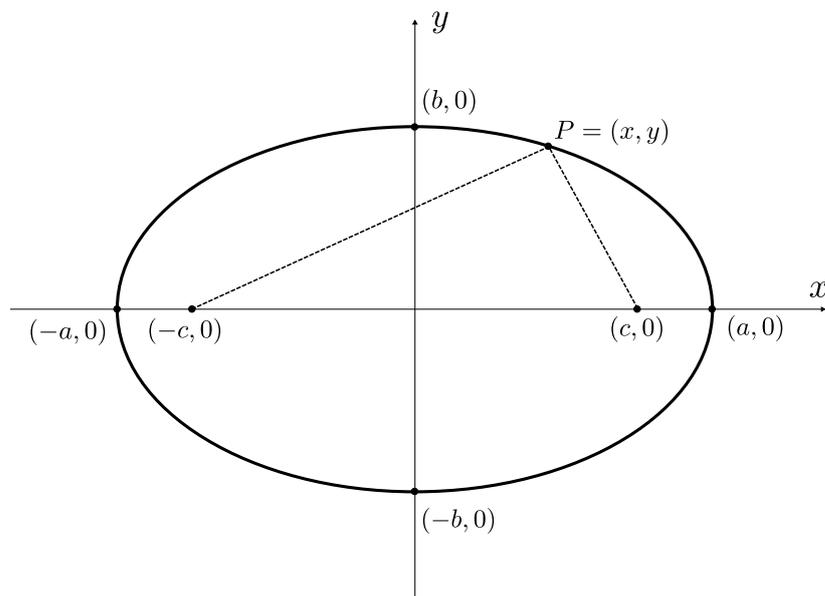


Figura 2.1: Elipse com focos nos pontos  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$ .

Daí

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ou seja,

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

ou seja,

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

ou seja,

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ou seja,

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ou seja,

$$(a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

ou seja,

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

ou seja,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como  $a > c$ , resulta que  $a^2 > c^2$  e  $a^2 - c^2 > 0$ . Definimos

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Substituindo, temos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

de onde obtemos finalmente que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.1.1)$$

Provamos acima que as coordenadas de um ponto genérico  $P = (x, y)$  da elipse satisfazem a equação (2.1.1). Vamos agora verificar que, reciprocamente, qualquer ponto cujas coordenadas satisfazem esta equação pertence à elipse.

Multiplicando a equação (2.1.1) por  $a^2b^2$  e pondo  $b^2 = a^2 - c^2$ , temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) = a^4 - a^2c^2$$

ou seja,

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

ou seja,

$$(a^2 - cx)^2 = a^2((x - c)^2 + y^2) \quad (2.1.2)$$

Como  $a^2 = b^2 + c^2$ , temos  $a > c \geq 0$ . Da equação (2.1.1), temos também  $a \geq |x|$ . Daí  $a^2 > |cx|$  e portanto  $a^2 - cx > 0$ . Agora extraindo a raiz quadrada em ambos os membros da equação (2.1.2), temos

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

ou seja,

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Somando  $x^2$ ,  $y^2$  e  $c^2$  a ambos os membros da equação, temos

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

ou seja,

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

ou seja,

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \quad (2.1.3)$$

Também a equação (2.1.1) nos dá  $y^2 \leq b^2$ , donde  $y^2 \leq a^2 - c^2$ , logo  $c^2 + y^2 \leq a^2$  e daí

$$(x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \leq 4a^2.$$

Assim  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \leq 2a$ , logo  $2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geq 0$ . Agora extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da equação (2.1.3), temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Assim, completamos a prova de que o ponto  $P = (x, y)$  pertence a elipse, se e somente se satisfaz a equação (2.1.1).

A equação (2.1.1) é chamada de equação reduzida da elipse. Observe que se  $(x, y)$  é um ponto da elipse, os pontos  $(x, -y)$ ,  $(-x, y)$  e  $(-x, -y)$  também são pontos dessa curva, pois as variáveis  $x$  e  $y$  aparecem elevadas ao quadrado. Isso significa que os eixos coordenados são eixos de simetria e a origem o centro de simetria. Fazendo  $y = 0$  na equação (2.1.1), obtemos

$$x^2 = a^2,$$

ou seja,

$$x = \pm a.$$

Analogamente, se  $x = 0$  temos  $y = \pm b$ . Os pontos  $A_1 = (a, 0)$ ,  $A_2 = (-a, 0)$ ,  $B_1 = (0, b)$  e  $B_2 = (0, -b)$  são chamados de vértices da elipse. O ponto médio do segmento  $F_1F_2$  é chamado de centro da elipse; neste caso a origem do sistema de coordenadas. Por fim, o número  $e = \frac{c}{a}$  é chamado de excentricidade da elipse. Como  $c^2 = a^2 - b^2$  temos que  $0 < c < a$ , logo

$$0 < e < 1.$$

Quando  $c$  aproxima-se de  $a$ , a excentricidade aproxima-se de 1. Geometricamente, isto significa que a elipse é mais alongada, pois  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  fica pequeno em comparação com  $a$ . Quando  $c$  aproxima-se de zero a excentricidade também aproxima-se de zero, e nesse caso, a elipse é mais arredondada. Se  $b = a$  a excentricidade é igual a zero e a elipse degenera-se em uma circunferência.

Se a elipse tem focos  $F_1 = (0, -c)$ ,  $F_2 = (0, c)$ , ou seja, se os focos da elipse estão sobre o eixo  $Oy$ , é imediato verificar que

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

em que  $a \in \mathbb{R}$  é tal que  $0 < c < a$ .

Podemos resumir os resultados obtidos nessa seção da seguinte forma:

<b>Elipse</b>	
<b>Equação:</b>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in \mathbb{R} - \{0\},$
<b>Vértices:</b>	$(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ .
<b>Focos:</b>	$\begin{cases} (\pm c, 0), & c = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ se } a > b \\ (0, \pm c), & c = \sqrt{b^2 - a^2} \text{ se } b > a \end{cases}$
<b>Excentricidade:</b>	$e = \frac{c}{a}, \quad a > b$ e $e = \frac{c}{b}, \quad b > a; \quad 0 < e < 1$

## 2.2 Hipérbole

**Definição 2.2.** *A hipérbole, como uma figura geométrica, é o conjunto de todos os pontos no plano, tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos distintos fixados é uma constante positiva dada, menor que a distância entre os pontos fixados.*

Suponhamos inicialmente que a hipérbole tem focos nos pontos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  e seja  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < a < c$  (veja a figura 2.2).

Se  $P = (x, y)$  é um ponto da hipérbole, então

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = \pm 2a.$$

Isolando o primeiro radical e depois elevando ao quadrado, temos

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

ou seja,

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando os dois membros desta equação ao quadrado, temos

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

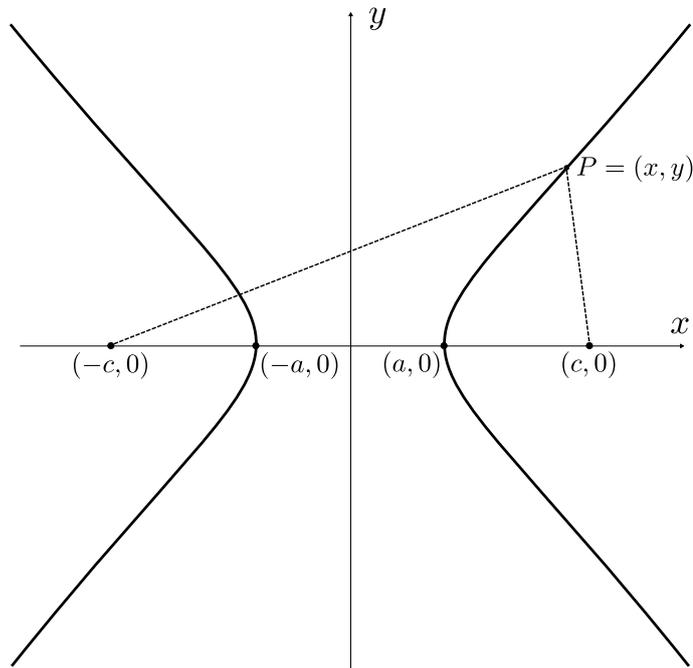


Figura 2.2: Hipérbole com focos nos pontos  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$ .

ou seja,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Como  $c > a$ , resulta que  $c^2 > a^2$  e  $c^2 - a^2 > 0$ . Façamos

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Substituindo, temos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.2.1)$$

Portanto qualquer ponto  $P = (x, y)$  que pertence à hipérbole satisfaz a equação (2.2.1). Fazendo similarmente como no caso da elipse, podemos mostrar que, reciprocamente, se as coordenadas do ponto  $P = (x, y)$  satisfazem a equação (2.2.1), então  $P$  satisfaz a condição geométrica estabelecida pela definição e portanto pertence a hipérbole.

A equação (2.2.1) é chamada de equação reduzida da hipérbole. Observe que as variáveis  $x$  e  $y$  aparecem na equação somente elevadas ao quadrado. Isso significa que

os eixos coordenados são eixos de simetria e a origem o centro de simetria. Fazendo  $y = 0$  na equação (2.2.1), obtemos

$$x^2 = a^2$$

isto é,

$$x = \pm a$$

A interseção do eixo focal  $F_1F_2$  com a hipérbole determina os pontos  $A_1 = (-a, 0)$  e  $A_2 = (a, 0)$ , que são chamados vértices da hipérbole. Fazendo  $x = 0$  na equação (2.2.1) temos  $y^2 = -b^2$ , como  $b \neq 0$  esta última equação não tem solução real. Isto significa que a hipérbole não intersecta o eixo  $Oy$ . O ponto  $O$  médio do segmento  $F_1F_2$  é o centro da hipérbole, neste caso, a origem do sistema de coordenadas. Assim como no caso da elipse, o número  $e = \frac{c}{a}$  define a excentricidade da hipérbole. Como  $0 < a < c$ , temos  $e > 1$ .

Considere as retas  $r = \pm \frac{b}{a}x$ . Da equação (2.2.1) obtemos

$$y = \pm \frac{b}{a}x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

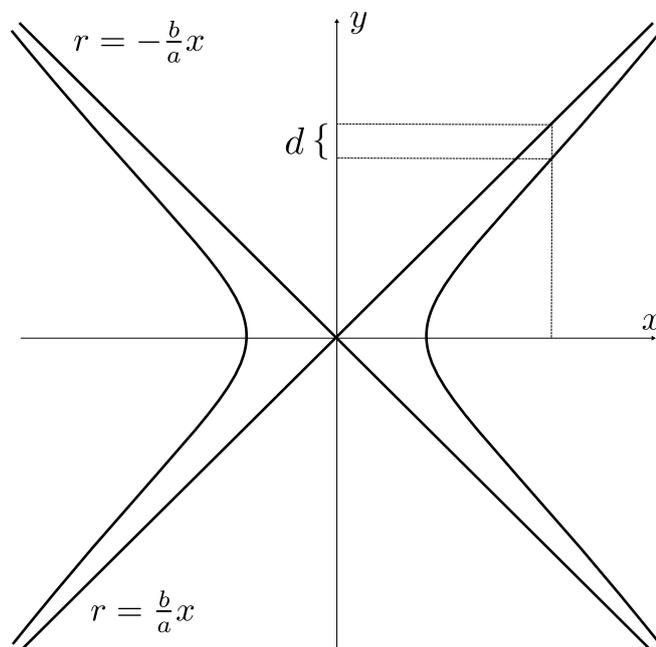


Figura 2.3: Assíntotas da hipérbole

No primeiro quadrante a diferença

$$d(x) = r - y = \frac{b}{a}x \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \right)$$

é tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = 0$ . Fato análogo ocorre nos demais quadrantes. Por esse motivo dizemos que as retas  $r = \pm \frac{b}{a}x$  são assíntotas da hipérbole (veja figura 2.3).

Se a hipérbole tem focos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ , ou seja, se os focos da hipérbole estão sobre o eixo  $Oy$ , é imediato verificar que vale a equação

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

onde  $a \in \mathbb{R}$  é tal que  $0 < a < c$ . Neste caso  $A_1 = (0, -a)$  e  $A_2 = (0, a)$  são seus os vértices e as assíntotas são as retas  $r = \pm \frac{a}{b}x$ .

Podemos resumir os resultados obtidos nessa seção da seguinte forma:

<b>Hipérbole</b>	
<b>Equações:</b>	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ , $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ .
<b>Vértices:</b>	$(\pm a, 0)$ ou $(0, \pm a)$ .
<b>Focos:</b>	$\begin{cases} (\pm c, 0) \\ (0, \pm c) \end{cases}, c = \sqrt{a^2 + b^2}$
<b>Assíntotas:</b>	$r = \pm \frac{b}{a}x$ ou $r = \pm \frac{a}{b}x$
<b>Excentricidade:</b>	$e = \frac{c}{a} > 1$ .

## 2.3 Parábola

**Definição 2.3.** A parábola é definida como o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de uma reta fixada e de um ponto fixado que não está na reta. A reta é chamada de diretriz e o ponto de foco da parábola.

Vamos supor que a parábola tem foco no ponto  $F = (c, 0)$  e a diretriz  $d$  é a reta  $x = -c$  (veja a figura 2.4).

Por definição, se  $P = (x, y)$  é um ponto da parábola, então vale a equação

$$d(P, F) = d(P, d).$$

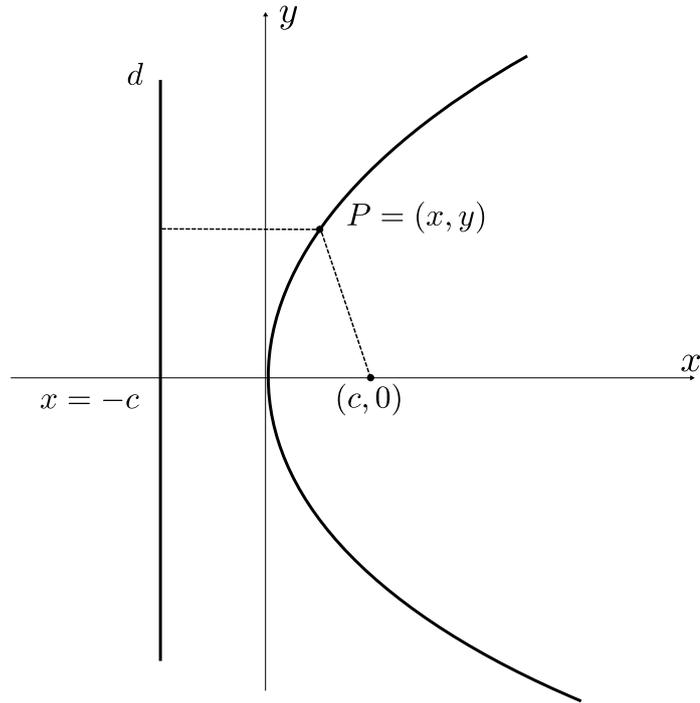


Figura 2.4: Parábola com foco no ponto  $(c, 0)$  e reta diretriz  $x = -c$ .

Daí,

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = |x + c|.$$

Elevando ao quadrado os dois membros da equação:

$$(x - c)^2 + y^2 = (x + c)^2.$$

Desenvolvendo e simplificando, obtemos

$$-2cx + y^2 = 2cx,$$

ou seja,

$$y^2 = 4cx. \tag{2.3.1}$$

Reciprocamente, seja  $P = (x, y)$  qualquer ponto cujas coordenadas satisfazem a equação (2.3.1). Se  $x$  e  $y$  satisfazem esta equação, com  $c > 0$ , então  $x \geq 0$ , por isso  $x + c \geq 0$ . Adicionando  $(x - c)^2$  e extraindo a raiz quadrada a ambos os membros da equação (2.3.1), obtemos

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = |x + c|$$

expressão analítica da condição geométrica estabelecida pela definição. Logo,  $P$  pertence à parábola de equação (2.3.1). Assim, concluímos que a equação (2.3.1) é a equação da parábola. Esta equação é chamada de equação reduzida da parábola.

Observe que se  $(x, y)$  é um ponto da parábola, o ponto  $(x, -y)$  também é ponto da parábola, pois só a variável  $y$  aparece elevada ao quadrado na equação e que se fizermos  $x = 0$  na equação (2.3.1) temos  $y = 0$ . Isso significa que o eixo das abscissas é eixo de simetria da curva e corta a parábola na origem  $V = (0, 0)$ , que é o único vértice. Se isolarmos  $y$  na equação (2.3.1) temos

$$y = \pm 2\sqrt{cx}. \quad (2.3.2)$$

Se  $c > 0$  temos que  $x > 0$ , pois os valores negativos não satisfazem a equação (2.3.2). Isto significa que a parábola está a direita do eixo  $Oy$  e é aberta à direita. Se  $c < 0$  devemos considerar apenas os valores negativos de  $x$ . Neste caso a parábola está a esquerda do eixo  $Oy$  e é aberta à esquerda. É fácil verificar neste caso que o foco está à esquerda da diretriz.

Como, por definição, a distância de qualquer ponto da parábola até o foco é igual à distância desse ponto até a reta diretriz, definimos que a excentricidade da parábola é igual a 1.

Podemos resumir os resultados obtidos nesta seção da seguinte forma:

<b>Parábola</b>
<b>Equação:</b> $y^2 = 4cx$ .
<b>Vértice:</b> $(0, 0)$ .
<b>Foco:</b> $(c, 0)$
<b>Excentricidade:</b> $e = 1$ .

## 2.4 Cônicas Transladadas e Rotacionadas

Vamos obter as equações das cônicas que estão transladadas e rotacionadas de suas posições padrão. Consideremos, inicialmente o sistema de coordenadas  $x'O'y'$  obtido por translação do sistema de coordenadas  $xOy$  pelo ponto  $(h, k)$  (veja a figura 2.5).

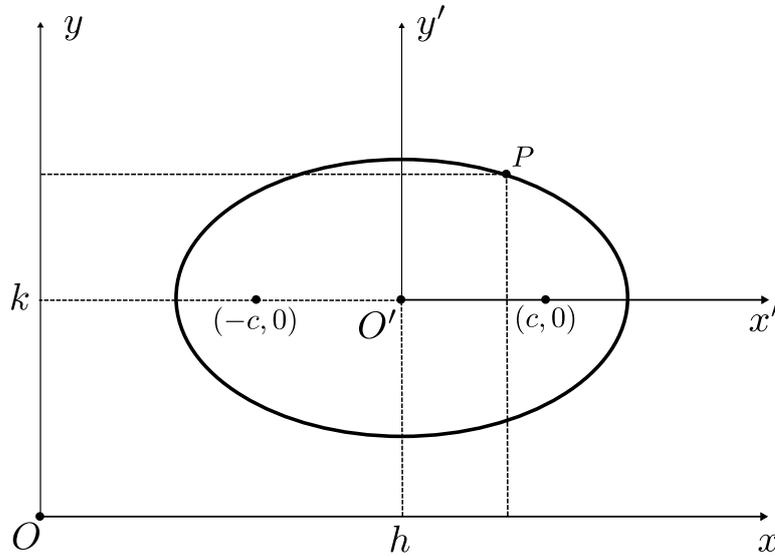


Figura 2.5: Cônica transladada.

Se uma elipse tem focos no eixo  $O'x'$  e centro em  $O'$ , sabemos que a sua equação é dada por

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

A partir das equações (1.2.2) a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

que é a equação reduzida da elipse de centro  $O' = (h, k)$  no sistema de coordenadas  $xOy$ . Expandindo os termos na equação obtemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2 = 0,$$

ou seja,

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2.4.1}$$

em que  $A = b^2, C = a^2, D = -2b^2h, E = -2a^2k$  e  $F = a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2$ . Qualquer outra cônica transladada pode ser escrita dessa forma, com coeficientes adequados em cada caso. Observe que (2.4.1) é a equação de uma elipse, de uma hipérbole ou de uma parábola se os coeficientes  $A$  e  $C$  têm o mesmo sinal, sinais diferentes ou se um deles é nulo, respectivamente. Por esse motivo, dizemos que a equação (2.4.1) é a equação geral de uma cônica transladada.

Agora suponha que temos um sistema de coordenadas  $x'Oy'$  rotacionado por um ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário em torno da origem em relação ao sistema de coordenadas  $xOy$ . Vimos que uma cônica transladada no sistema de coordenadas  $x'Oy'$  tem equação

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \quad (2.4.2)$$

em que pelo menos um dos coeficientes  $A'$  e  $C'$  é diferente de zero.

Para determinarmos a equação da cônica no sistema de coordenadas  $xOy$  substituímos as equações de rotação (1.2.3), desenvolvemos as operações indicadas e reduzimos os termos semelhantes. Após esses cálculos obtemos

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.4.3)$$

em que

$$\left. \begin{aligned} A &= A' \cos^2(\theta) + C' \sin^2(\theta), \\ B &= 2(A' - C') \sin(\theta) \cos(\theta), \\ C &= A' \sin^2(\theta) + C' \cos^2(\theta), \\ D &= D' \cos(\theta) + E' \sin(\theta), \\ E &= E' \cos(\theta) - D' \sin(\theta), \\ F &= F'. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.4)$$

Observe que, nesse caso, o termo misto  $xy$  surge na equação. Ele indica que há rotação do sistema de coordenadas. Dada uma equação da forma (2.4.3) podemos determinar facilmente o ângulo de rotação. Para isso note que

$$A - C = A'[\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] - C'[\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] = (A' - C') \cos(2\theta). \quad (2.4.5)$$

Daí

$$B = (A' - C') \sin(2\theta) = (A - C) \tan(2\theta),$$

ou seja,

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C},$$

Estamos assumindo tacitamente que  $A - C \neq 0$ . Quando  $A = C$  a equação (2.4.5) nos dá que  $(A' - C') \cos(2\theta) = 0$ . Se  $B \neq 0$ , então não podemos ter  $A' = C'$ , logo  $\cos(2\theta) = 0$ , ou seja,  $\theta = 45^\circ$ .

Note que (2.4.3) é a equação de uma elipse se, e somente se, (2.4.2) é a equação de uma elipse. Isto significa que  $A'$  e  $C'$  têm o mesmo sinal, ou seja  $A'C' > 0$ . Para obtermos uma condição para que a cônica (2.4.3) seja uma elipse usamos as equações (2.4.4). Delas vem que

$$\begin{aligned} AC &= [A' \cos^2(\theta) + C' \sin^2(\theta)][A' \sin^2(\theta) + C' \cos^2(\theta)] \\ &= [(A')^2 + (C')^2] \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + A'C'[\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)]. \end{aligned}$$

Como  $B^2 = 4[(A')^2 + (C')^2 - 2A'C'] \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$  temos que

$$\begin{aligned} 4AC - B^2 &= 4A'C'[\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) + 2 \cos(\theta) \sin(\theta)] \\ &= A'C'[\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)]^2 \\ &= A'C' > 0. \end{aligned}$$

Portanto, (2.4.3) é a equação de uma elipse se  $B^2 - 4AC < 0$ . Analogamente, se  $B^2 - 4AC > 0$  ou  $B^2 - 4AC = 0$  a equação (2.4.3) representa uma hipérbole ou uma parábola, respectivamente.

Podemos resumir o que provamos acima no seguinte resultado

**Teorema 2.1.** *A equação  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , em que  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$  é uma cônica. Em particular, ela será*

- (i) *uma elipse se  $B^2 - 4AC < 0$ ;*
- (ii) *uma hipérbole se  $B^2 - 4AC > 0$ ;*
- (iii) *uma parábola se  $B^2 - 4AC = 0$ .*

Os cálculos acima também são úteis para obter um esboço de uma cônica dada na forma (2.4.3). De fato, dada uma equação como essa, sabemos que o ângulo de rotação é dado por

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{B}{A - C} \right).$$

Agora substituindo as equações

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta) \\ y &= x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta) \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

na equação (2.4.3) obteremos uma equação do tipo (2.4.1). Agora basta completarmos o quadrado para determinarmos a posição da cônica.

Os exemplos seguintes tornarão mais claras essas afirmações.

**Exemplo 1.** Determinar a natureza do lugar geométrico da equação

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}x + 2y = 0$$

e reduzir a equação à sua forma canônica por transformação de coordenadas.

Primeiramente, note que  $B^2 - 4AC = (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 0$ , logo a equação acima representa uma parábola. Temos ainda

$$\tan(2\theta) = \frac{-2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3},$$

de onde vem que  $2\theta = 60^\circ$ , ou seja,  $\theta = 30^\circ$ .

Como

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\theta) = \frac{1}{2},$$

a partir das equações (2.4.6) temos

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y',$$

cujas substituições na equação dada acarreta

$$(y')^2 + 4x' - 2\sqrt{3}y' = 0.$$

Finalmente, completando o quadrado na variável  $y$  ficamos com a equação

$$(y' - \sqrt{3})^2 = -4 \left( x' - \frac{3}{4} \right),$$

que é a equação de uma parábola de vértice  $(\frac{3}{4}, \sqrt{3})$ .

Uma cônica bastante conhecida é a seguinte

**Exemplo 2.** Considere a equação

$$y = \frac{1}{x}. \tag{2.4.7}$$

Temos que  $xy = 1$ . Como  $B^2 - 4AC = 1^2 - 4 \cdot 0 \cdot 0 = 1 > 0$ , concluímos que (2.4.7) é a equação de uma hipérbole. De fato, como  $A = C = 0$  temos que  $\theta = 45^\circ$ . Substituindo as relações

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \quad \text{e} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

em (2.4.7) obtemos

$$1 = xy = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \right) = \frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2}.$$

## 2.5 Cônicas Degeneradas

Em algumas situações as cônicas degeneram-se em conjuntos mais simples. Nesta seção veremos como isso pode ocorrer. Por simplicidade consideramos apenas o caso de uma cônica transladada. O caso geral é obtido a partir desse por uma rotação no sistema de coordenadas.

Começamos com uma elipse. Neste caso temos que os coeficientes  $A$  e  $C$  têm o mesmo sinal. Dividindo a equação (2.4.1) por  $AC$ , completando os quadrados e fazendo as devidas simplificações, temos

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2}.$$

Observamos que a equação (2.4.1) representa o ponto  $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$  se  $CD^2 + AE^2 - 4ACF = 0$  ou o conjunto vazio se  $CD^2 + AE^2 - 4ACF < 0$ . Esses casos são denominados de casos degenerados da elipse.

Agora suponha o caso da hipérbole em que  $A$  e  $C$  têm sinais trocados. Sem perda de generalidade assumimos que  $A > 0$  e  $C < 0$ . Então a equação (2.4.1) fica

$$\left(\frac{x + \frac{D}{2A}}{\sqrt{-C}}\right)^2 - \left(\frac{y + \frac{E}{2C}}{\sqrt{A}}\right)^2 = \frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4A^2C^2}.$$

Portanto, a equação (2.4.1) representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados se  $4ACF - CD^2 - AE^2 \neq 0$ , e representa um par de retas concorrentes se  $4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$ . Este último caso é chamado de caso degenerado da hipérbole.

Se o coeficiente  $A$  ou o coeficiente  $C$  é nulo, sabemos que a equação (2.4.1) representa uma parábola. Suponha que  $A = 0$ . Neste caso essa equação se reescreve como

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Quando  $D = 0$ , a equação resume-se numa equação do segundo grau em  $y$  da forma

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{F}{C} = 0.$$

Sabemos que se as raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação acima forem reais e distintas esta poderá ficar na forma fatorada

$$(y - r_1)(y - r_2) = 0,$$

sendo assim representadas por duas retas,  $y = r_1$  e  $y = r_2$ , distintas e paralelas ao eixo  $Ox$ . Se as raízes  $r_1$  e  $r_2$  são iguais será representada por uma única reta paralela ao eixo  $Ox$ . Se as raízes são complexas representa um conjunto vazio. Esses são os casos degenerados da parábola.

# Capítulo 3

## As Quádricas

Uma superfície quádrlica ou simplesmente quádrlica é o conjunto de pontos  $P = (x, y, z)$  do espaço cujas coordenadas cartesianas satisfazem a equação geral do segundo grau em três variáveis da forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (3.0.1)$$

em que  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$  e  $J$  são números reais e pelo menos um dos coeficientes  $A, B, C, D, E$  e  $F$  é não nulo.

Como no caso das cônicas através de uma rotação e translação de eixos a equação (3.0.1) pode ser reduzida a duas formas do tipo:

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R, \quad (3.0.2)$$

ou,

$$Mx^2 + Ny^2 = Sz, \quad (3.0.3)$$

tendo a equação (3.0.3) formas análogas quando permutamos  $z$  por  $x$  ou  $y$ .

### 3.1 Quádricas Canônicas

As quádrlicas do tipo (3.0.2) tem a origem como centro de simetria, por isso, são denominadas quádrlicas cêntricas. As quádrlicas do tipo (3.0.3) não tem centro de simetria, logo, são denominadas quádrlicas não cêntricas. Começaremos pelas superfícies

quádricas cêntricas.

**1) Elipsoide:** É uma superfície representada pela equação de segundo grau na forma canônica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.1.1)$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais positivos. Se fazemos  $z = k$  com  $k \in \mathbb{R}$  a equação (3.1.1) nos dá

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}.$$

Geometricamente, isso significa que a interseção do elipsoide com o plano horizontal  $z = k$  é uma elipse, um ponto ou vazia nos casos em que  $|k| < c$ ,  $|k| = c$  e  $|k| > c$ , respectivamente. Análise semelhante é válida para as intersecções do elipsoide com os planos  $x = k$  e  $y = k$  (veja figura 3.1).

Observe ainda que o elipsoide é simétrico em relação a todos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Além disso, se  $a = b = c = R$  na equação (3.1.1), então a superfície é uma esfera de raio  $R$ .

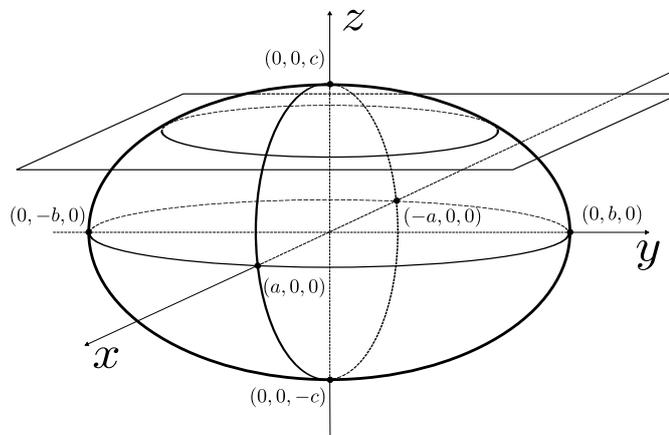


Figura 3.1: Elipsoide.

**2) Hiperboloide de uma folha:** São superfícies representadas pelas equações de segundo grau nas formas canônicas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.1.2)$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ou

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais positivos.

As análises feitas aqui serão referentes a equação na forma (3.1.2), diferindo das outras formas apenas pela posição dos eixos coordenados.

As interseções da superfície com os eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$  são os pontos  $(\pm a, 0, 0)$  e  $(0, \pm b, 0)$ , respectivamente. Com o eixo  $Oz$  não há interseções, pois quando  $x = y = 0$  devemos ter  $-z^2 = c^2$ , que não tem solução no conjunto dos números reais (veja figura 3.2).

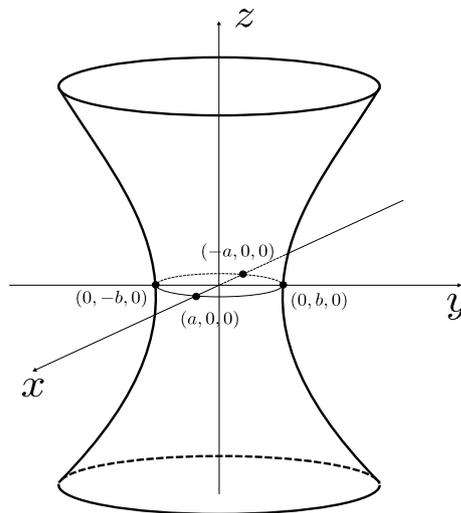


Figura 3.2: Hiperboloide de 1 folha.

Planos paralelos aos planos  $xOz$  e  $yOz$ , que não passam pelos pontos  $(\pm a, 0, 0)$  e  $(0, \pm b, 0)$ , intersectam a superfície na forma de hipérbolas. Quando passam por estes pontos determinam duas retas concorrentes.

A interseção de planos paralelos ao plano  $xOy$  com a superfície do hiperboloide são elipses. Observe ainda que o hiperboloide é simétrico em relação, a todos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

**3) Hiperboloide de 2 folhas:** São superfícies representadas pelas equações de segundo grau nas formas canônicas

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.1.3)$$

ou

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais positivos. Estas equações são simétricas em relação a todos planos coordenados, eixos coordenados e a origem. Assim como o hiperboloide de uma folha faremos o estudo da equação (3.1.3) a qual difere das outras duas apenas pela posição de seus eixos coordenados.

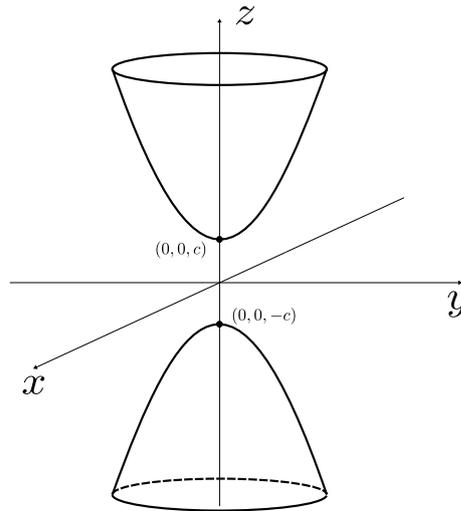


Figura 3.3: Hiperboloide de 2 folhas.

Não há interseções com os eixos  $Ox$  e  $Oy$ , apenas com o eixo  $Oz$  nos pontos  $(0, 0, c)$  e  $(0, 0, -c)$  (veja figura 3.3). As interseções da superfície com plano  $z = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , são elipses desde que  $|k| > c$ . Se  $|k| < c$  a interseção é o conjunto vazio.

**4) Cone elíptico:** São superfícies representadas pelas equações de segundo grau nas formas canônicas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (3.1.4)$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

ou

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais positivos. Estas equações são simétricas em relação a todos planos coordenados, eixos coordenados e a origem.

Analisando as seções planas do cone elíptico de equação (3.1.4), observamos que a interseção de planos paralelos ao plano  $xOy$  e que não passam pela origem com a superfície determinam elipses (veja a figura 3.4). Se o plano passar pela a origem a interseção é o vértice  $(0, 0, 0)$ .

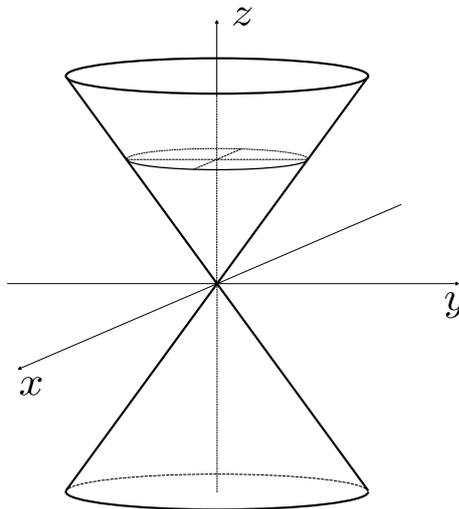


Figura 3.4: Cone elíptico.

A interseção da superfície com planos paralelos ao plano  $xOz$  ou ao plano  $yOz$  e que não passam pela origem do sistema cartesiano são hipérbolos. Se o plano passar pela origem a interseção é um par de retas concorrentes no vértice.

**5) Cilindro elíptico:** São superfícies representadas pelas equações de segundo grau nas formas canônicas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.1.5}$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ou

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais positivos. Estas equações são simétricas em relação a todos planos coordenados, eixos coordenados e a origem. Analisaremos as seções planas do cilindro elíptico de equação (3.1.5). Veja figura 3.5.

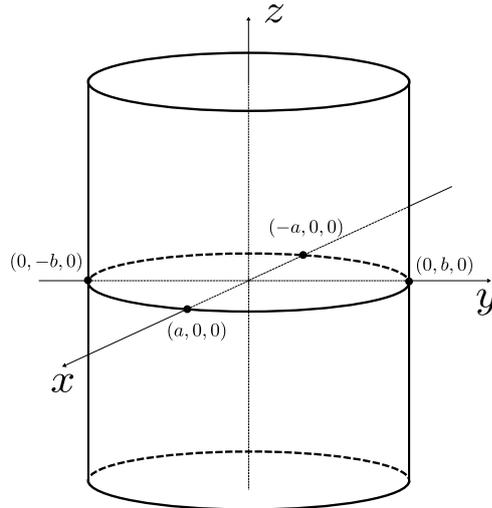


Figura 3.5: Cilindro elíptico.

As interseções da superfície quádrlica com planos paralelos ao plano  $xOy$  são elipses, enquanto as interseções da superfície com planos paralelos ao plano  $xOz$  ou ao plano  $yOz$  são duas retas, uma reta ou o conjunto vazio.

**6) Cilindro hiperbólico:** São superfícies representadas pelas equações de segundo grau nas formas canônicas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.1.6}$$

ou

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais positivos. Existem mais três equações na forma canônica de cilindro hiperbólico, para encontrá-las basta fazer uma troca dos sinais das frações em cada equação. Estas equações são simétricas em relação aos três planos

coordenados e a origem. Estudaremos as seções planas do cilindro hiperbólico de equação (3.1.6), veja a figura 3.6.

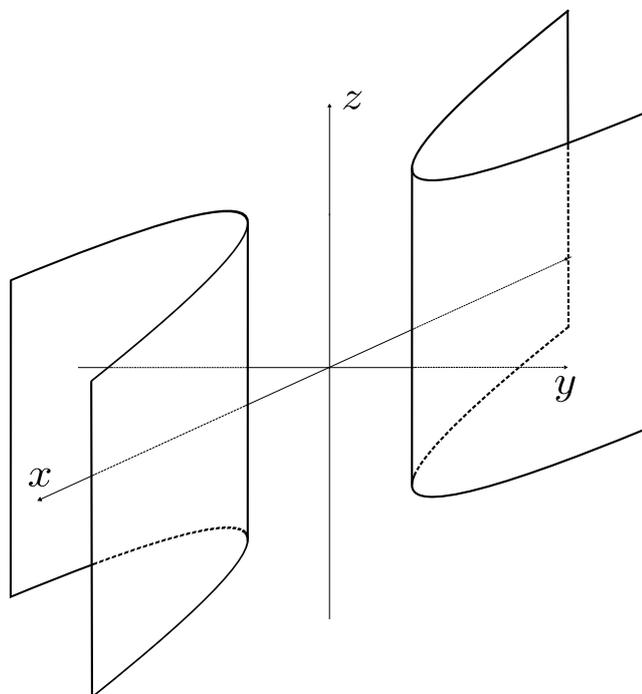


Figura 3.6: Cilindro hiperbólico.

As interseções da superfície quádrlica com planos paralelos ao plano  $xOy$  são hipérbolas. Além disso, a intersecção da superfície com planos da forma  $x = k$ , paralelos ao plano  $yOz$ , são duas retas, se  $|k| > a$ ; uma reta, se  $k = \pm a$  ou o conjunto vazio, se  $|k| < a$ . Finalmente, as intersecções da superfície com planos paralelos ao plano  $xOz$  são sempre duas retas.

Vamos agora apresentar as superfícies quádrlicas não cêntricas em sua forma canônica.

**7) Parabolóide elíptico:** São superfícies dadas pelas equações do segundo grau na forma canônica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad (3.1.7)$$

ou

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by,$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais diferentes de zero. Estudemos o parabolóide elíptico de equação (3.1.7), com  $c > 0$ .

As seções pelos planos de coordenadas  $xOz$  e  $yOz$  são parábolas simétricas em relação ao eixo  $Oz$  com vértices na origem das coordenadas. As seções por planos

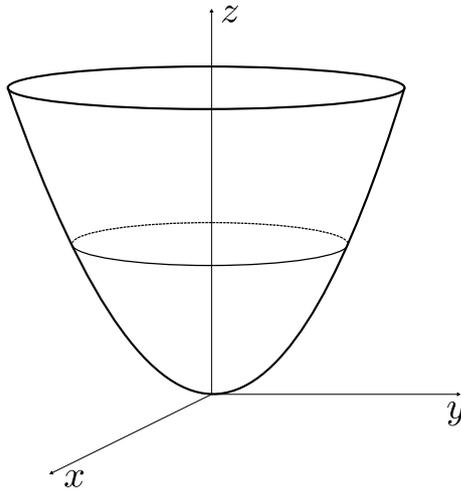


Figura 3.7: Parabolóide.

paralelos ( $z = k$ ) de coordenadas  $xOy$  são: elipses, se  $k > 0$ ; um ponto que coincide com a origem das coordenadas chamado vértice do parabolóide, se  $k = 0$  e o conjunto vazio, se  $k < 0$  (veja figura 3.7).

Se  $a = b$  dizemos que a superfície é um parabolóide circular, pois, neste caso, as intersecções pelos planos  $z = k$  são círculos.

**8) Parabolóide hiperbólico:** Também chamados de *selas*, são superfícies dadas pelas equações do segundo grau na forma canônica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad (3.1.8)$$

ou

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = ax,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by,$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais diferentes de zero. Analisemos a equação (3.1.8), com  $c < 0$ .

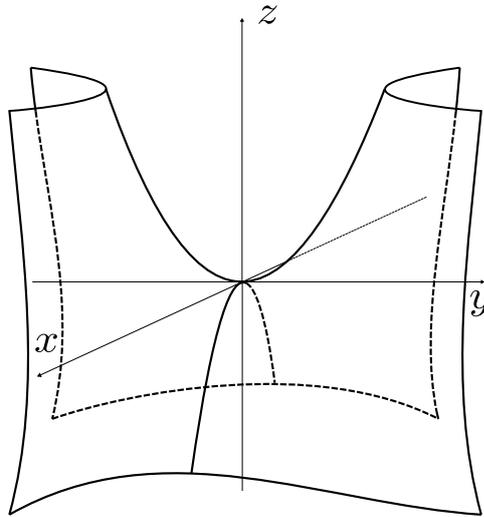


Figura 3.8: Parabolóide hiperbólico.

A interseção da superfície com o plano  $z = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , paralelo ao plano  $xOy$ , é uma hipérbole ou são duas retas. As seções pelos planos paralelos ao plano  $xOz$  e  $yOz$  são parábolas (veja figura 3.8).

**9) Cilindro parabólico:** São superfícies dadas pelas equações, na forma canônica, de segundo grau

$$\frac{y^2}{b^2} = cz \quad \text{ou} \quad \frac{z^2}{c^2} = by,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} = by \quad \text{ou} \quad \frac{z^2}{c^2} = ax,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} = cz \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} = ax,$$

em que,  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais não nulos. Analisemos a equação  $\frac{x^2}{a^2} = cz$ , com  $c > 0$ .

A interseção da superfície com um plano  $z = k$  paralelo ao plano  $xOy$  determina duas retas, se  $k > 0$ ; uma reta, se  $k = 0$  e o conjunto vazio, se  $k < 0$ . As seções por planos paralelos a  $xOz$  são parábolas. Por fim, observe que a secção por um plano  $x = k$  é uma reta paralela ao eixo  $Oy$  (veja a figura 3.9).

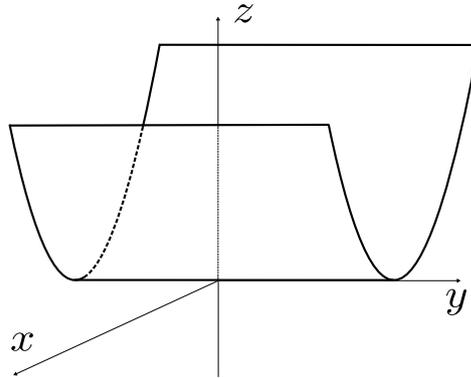


Figura 3.9: Cilindro parabólico.

## 3.2 Quádricas como Gráficos de Funções

Considere a equação do parabolóide

$$z = x^2 + y^2.$$

Podemos pensar, neste caso, que a coordenada  $z$  é uma função das variáveis  $x$  e  $y$ , ou seja, que para cada par ordenado  $(x, y)$  associamos o número real  $z(x, y) = x^2 + y^2$ . De maneira geral temos a seguinte definição

**Definição 3.1.** *uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma regra que permite associar para todo par ordenado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  um único elemento  $f(x, y) \in \mathbb{R}$ .*

As variáveis  $x$  e  $y$ , da função  $z = f(x, y)$ , se dizem independentes, subentendendo-se que cada qual pode variar livremente sem acarretar uma variação da outra. Quanto a  $z$  se dirá a variável dependente ou, simplesmente, a função.

Através de um sistema de coordenadas cartesiano retangular no espaço, podemos definir o gráfico de função de duas variáveis.

Formalmente

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Portanto, para cada par de valores de  $x$  e  $y$  em uma determinada região do plano  $xOy$ , a função  $f(x, y)$  faz corresponder um valor de  $z$ , ou seja, a cada ponto  $P = (x, y)$  dessa região corresponderá um ponto  $M = (x, y, f(x, y))$  do espaço. O conjunto destes pontos no espaço nos dá uma superfície, que constitui a representação da função.

Por exemplo, se  $(x, y, z) \in G(f)$ , em que  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , então devemos ter  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ . Essa é a equação de um parabolóide. Analogamente, no caso da

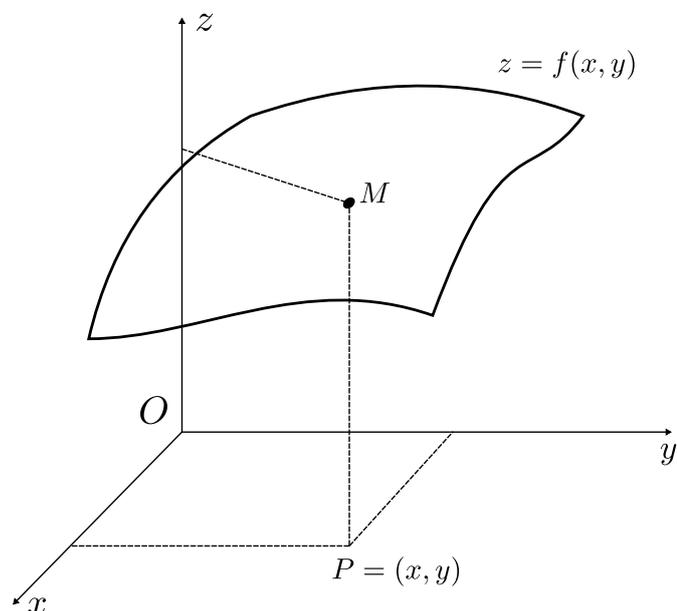


Figura 3.10: Gráfico de uma função de duas variáveis

função  $g(x, y) = y^2 - x^2$ , os pontos do gráfico de  $g$  satisfazem a equação  $z = y^2 - x^2$ , ou seja é uma sela.

Em geral não é fácil esboçar o gráfico de uma função de duas variáveis (veja figura 3.10). Coisa pior ocorre no caso de uma função de três (ou mais!) variáveis. Neste caso, o gráfico de  $f$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^4$ , e não podemos visualizá-lo. Porém, descreveremos a seguir um método que pode nos dar informações sobre o gráfico dessas funções.

Se a superfície  $G(f)$  for intersectada pelo plano horizontal  $z = k$ , então todos os pontos  $(x, y, f(x, y))$  da interseção satisfazem a equação  $f(x, y) = k$ , em que  $k$  é uma constante. A projeção ortogonal desta interseção sobre o plano  $xOy$  é denominada curva de nível de altura  $k$ . Em outras palavras, essa curva de nível é o conjunto

$$f^{-1}(k) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\}.$$

Através de um conjunto de curvas de nível para  $z = f(x, y)$ , podemos obter uma boa descrição da função. No exemplo do parabolóide as curvas de nível são descritas pelas equações

$$x^2 + y^2 = k.$$

As equações acima só tem soluções quando  $k \geq 0$ . Elas representam circunferências menos quando  $k = 0$ , caso em que a circunferência de raio zero é a origem do sistema  $xOy$  (veja figura 3.11).

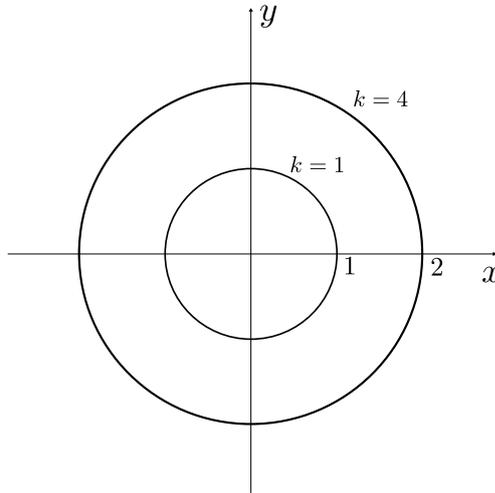


Figura 3.11: Curvas de nível do parabolóide

Para a função de duas variáveis  $z = g(x, y) = y^2 - x^2$ , cujo gráfico é uma sela, as curvas de nível de altura  $k$  são descritas pelas equações

$$y^2 - x^2 = k.$$

Se  $k = 0$ , obtemos  $y^2 - x^2 = (x - y)(x + y) = 0$ , ou seja,  $y = \pm x$ . Essas retas representam as bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares do plano  $xOy$ .

Se  $k < 0$ , temos

$$\frac{x^2}{(\sqrt{-k})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{-k})^2} = 1,$$

que representam hipérboles equiláteras ( $a = b$ ) de eixo focal  $Ox$  e centro na origem.

Finalmente, se  $k > 0$ , temos

$$\frac{y^2}{(\sqrt{k})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{k})^2} = 1,$$

que são as equações das hipérboles equiláteras de eixo focal  $Oy$  e centro na origem. Essas curvas de nível podem ser observadas na figura 3.12.

No caso de uma função de três variáveis, os conjuntos de nível são superfícies de  $\mathbb{R}^3$ . Por exemplo, dada a função  $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , o conjunto de nível de

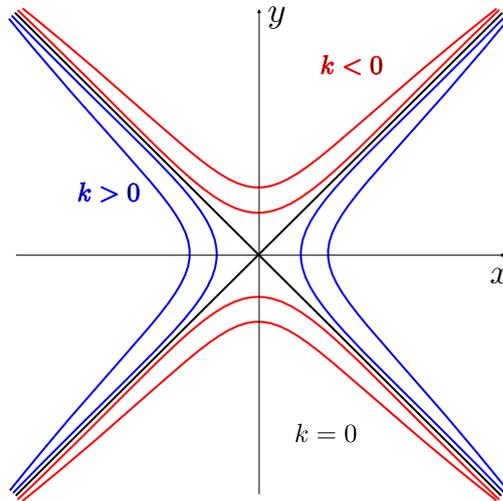


Figura 3.12: Curvas de nível da sela.

altura  $k$  é o conjunto dos pontos do espaço que satisfazem a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = k.$$

Essa equação não tem solução se  $k < 0$ , tem solução única se  $k = 0$  e representam esferas concêntricas de raio  $\sqrt{k}$  quando  $k > 0$ . Para o caso da função  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  as equações  $x^2 + y^2 - z^2 = k$  representam uma família de hiperboloides de duas folhas, se  $k < 0$ , um cone elíptico, se  $k = 0$  e um hiperboloide de uma folha se  $k > 0$ . Observe as figuras (3.13) e (3.14).

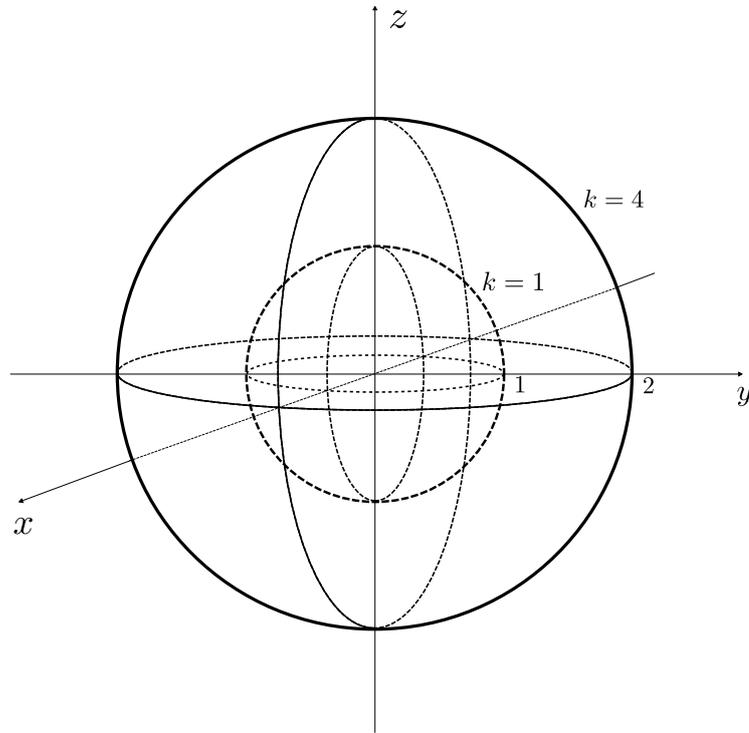


Figura 3.13: Superfícies de nível da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

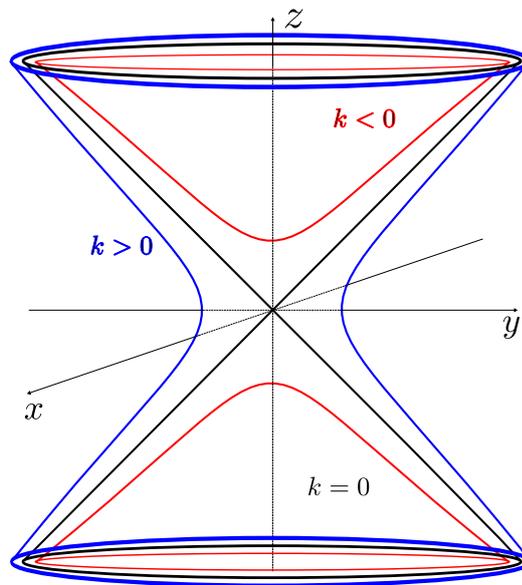


Figura 3.14: Superfícies de nível da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ .

# Capítulo 4

## Aplicações das Cônicas

As cônicas e quádras aparecem com bastante frequência em nosso cotidiano. Neste capítulo abordaremos diversas aplicações práticas desses objetos matemáticos. Como veremos eles estão mais presentes no nosso dia-a-dia do que podemos suspeitar em um primeiro momento.

### 4.1 Propriedades da Elipse

O estudo do movimento dos planetas começou com os filósofos gregos. O astrônomo grego Claudio Ptolomeu propôs um sistema planetário que colocava a terra como centro do Universo (sistema geocêntrico). Este sistema foi aceito por muitos séculos, quando o astrônomo polonês Nicolau Copérnico, no século XV, propôs um sistema que o sol era o centro do Universo e os planetas tinham orbitas circulares em torno dele (sistema heliocêntrico).

Entretanto, foi o matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) que, ao analisar dados observados por Tycho Brahe, descobriu acertadamente que os planetas seguem trajetórias elípticas. A primeira lei de Kepler sobre o movimento dos planetas no nosso Sistema Solar diz que todos os planetas se movem em orbitas elípticas em que o sol ocupa um dos focos. Os satélites se movem em torno de seus respectivos planetas em orbitas elípticas assim como a lua se move em torno da terra. Também o cometa Halley segue trajetória elíptica em que o sol ocupa um dos focos.

Na construção de pontes, de concreto e de pedras pelos antigos romanos, são uti-

lizados arcos em forma de uma semi-elipse. Ainda hoje a elipse de inércia é muito empregada na teoria de resistência de materiais na engenharia civil.

Em Engenharia Elétrica na teoria de correntes elétricas estacionárias se utiliza conjuntos de elipses de mesmo foco (elipses homofocais) e na Engenharia Mecânica engrenagens elípticas (excêntricas) são usadas.

Vamos agora demonstrar uma propriedade da elipse que permite outras aplicações. Esta propriedade se chama propriedade refletora da Elipse.

**Teorema 4.1** (Propriedade Refletora da Elipse). *Uma reta passando por um dos focos de uma elipse é refletida para o outro foco.*

**Demonstração.** Considere as seguintes retas passando por um ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  da elipse (veja figura 4.1):

- (i)  $r$ , a reta que passa pelo foco  $F_1 = (-c, 0)$ ;
- (ii)  $n$ , a reta normal à elipse;
- (iii)  $s$ , a reta que passa pelo foco  $F_2 = (c, 0)$ .

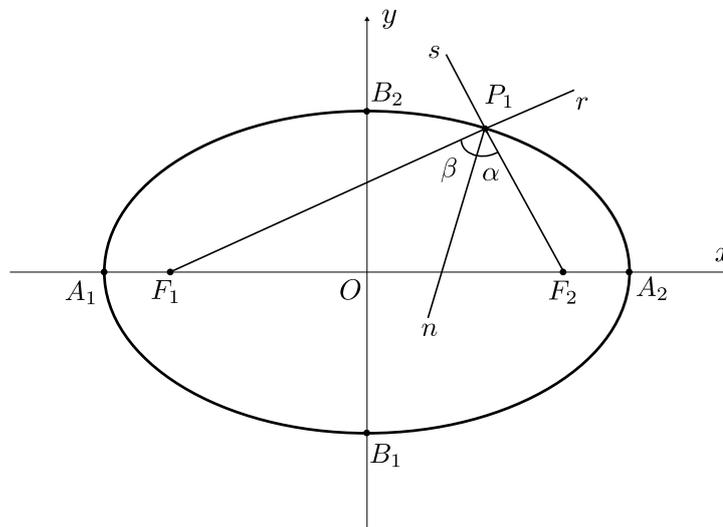


Figura 4.1: Propriedade refletora da elipse

Derivando a equação da elipse  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  em relação a  $x$ , temos

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0$$

ou seja,

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

que, como vimos no capítulo 1, é a declividade da elipse.

A declividade da elipse no ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  é  $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ , logo a declividade de  $n$  será  $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ . Observe que as declividades das retas  $r$  e  $s$  são respectivamente  $\frac{y_1}{(x_1+c)}$  e  $\frac{y_1}{(x_1-c)}$ . Logo, temos

$$\tan \alpha = \frac{\frac{y_1}{x_1-c} - \frac{a^2y_1}{b^2x_1}}{1 + \left(\frac{y_1}{x_1-c}\right)\left(\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\right)} = \frac{b^2x_1y_1 - a^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2x_1^2 - b^2cx_1 + a^2y_1^2}.$$

Como o ponto  $P_1$  esta sobre a elipse suas coordenadas satisfazem a equação  $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$ . Substituindo esta equação e a relação  $c^2 = a^2 - b^2$ , temos

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{x_1y_1(b^2 - a^2) + a^2cy_1}{a^2b^2 - b^2cx_1} \\ &= \frac{-c^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2(a^2 - cx_1)} \\ &= \frac{cy_1(-cx_1 + a^2)}{b^2(-cx_1 + a^2)} \\ &= \frac{cy_1}{b^2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{\frac{a^2y_1}{b^2x_1} - \frac{y_1}{x_1+c}}{1 + \left(\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\right)\left(\frac{y_1}{x_1+c}\right)} \\ &= \frac{a^2x_1y_1 + a^2cy_1 - b^2x_1y_1}{b^2x_1^2 + b^2cx_1 + a^2y_1^2} \\ &= \frac{x_1y_1(a^2 - b^2) + a^2cy_1}{a^2b^2 + b^2cx_1} \\ &= \frac{c^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2(a^2 + cx_1)} \\ &= \frac{cy_1(cx_1 + a^2)}{b^2(cx_1 + a^2)} \\ &= \frac{cy_1}{b^2}. \end{aligned}$$

Concluimos que,  $\alpha = \beta$ . Através da propriedade refletora da elipse fica provado que todo raio que incidir na elipse proveniente de um dos focos será refletido para o outro foco.  $\square$

Podemos observar também que a propriedade  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , em que  $2a$  é uma constante, estabelece que todos os raios oriundos de uma fonte colocada em um dos focos, independente de quais trajetórias tenham tomado, chegarão ao mesmo tempo no outro foco, pois percorrem as mesmas distâncias.

Considerando um elipsoide, que é a superfície gerada pela rotação da elipse em torno de seu eixo, e as propriedades da elipse podemos destacar algumas aplicações dessa superfície. Por exemplo, na odontologia, as luminárias encontradas na maioria dos consultórios dos dentistas usam espelhos refletores na forma de uma superfície elíptica. Estes espelhos refletoras ao receber raios luminosos provenientes de um dos focos os refletem concentrando-os no outro foco, amplificando a luminosidade, que é utilizado para iluminar exatamente o local a ser tratado sem ofuscar o paciente. (veja figura 4.2)



Figura 4.2: Luminária em consultório de odontologia

Na medicina aparelhos no formato de elipsoide são utilizados em tratamentos radioterápicos. Estes aparelhos emitem radiações de alta energia em um dos focos da elipse para combater células malignas de tumores localizados no outro foco. Desta forma os aparelhos só destroem tecidos doentes não atingindo tecidos saudáveis que se encontram nas proximidades.

Outro aparelho no mesmo formato é utilizado no tratamento de cálculo renal (litíase). Neste aparelho utiliza-se ondas sonoras de alta frequência (ultrassom), que são emitidas em um dos focos e refletidas para o outro foco onde está o cálculo. As ondas sonoras emitidas provocam vibrações no cálculo renal até poder esmiúça-lo de tal maneira que possam ser expelidos naturalmente pela urina.

Também encontraremos a aplicação da propriedade refletora da elipse em certos formatos de construções de salas encontradas em museus de ciência, castelos e catedrais, chamadas de salas de sussurros. Projetadas num formato de parte de um elipsoide onde estão marcados dois pontos no chão. Duas pessoas uma em cada um desses pontos pode se comunicar uma com a outra em voz sussurrada de maneira que no resto da sala seja inaudível.

## 4.2 Propriedades da Hipérbole

Agora falaremos das aplicações da hipérbole.

A Engenharia Civil utiliza o formato do hiperboloide de uma folha na construção de usinas atômicas. O hiperboloide de uma folha que é gerado pela rotação da hipérbole em torno de seu eixo transversal é também gerado por uma reta, podendo ser considerado formado por uma união de retas (superfície regrada). Dessa forma na construção de centrais de energia atômica são utilizadas barras de aço retilíneas que se cruzam obtendo uma estrutura extremamente resistente. Esteticamente o hiperboloide foi utilizado pelo arquiteto Oscar Niemayer no projeto da construção da Catedral de Brasília. (veja figura 4.3)

As aplicações na Física e na Química é a lei ligada ao comportamento dos gases formulada pelo químico irlandês Robert Boyle (1627-1691). O gráfico que descreve a variação do volume de uma certa quantidade de gás quando varia sua pressão, isotermicamente, é um dos ramos da hipérbole equilátera. Seja  $V$  o volume de um gás, a uma temperatura constante, submetido a uma pressão  $P$ . A lei de Boyle estabelece que  $PV = K(\text{constante})$ .

Vejamos agora a propriedade refletora da hipérbole que também é muito utilizada para varias aplicações.

**Teorema 4.2** (Propriedade Refletora da Hipérbole). *Uma reta que passa por um dos focos de uma hipérbole ao atingi-la é refletida na direção do seu segundo foco.*



Figura 4.3: Catedral de Brasília

**Demonstração.** Sejam as seguintes retas passando por um ponto  $P_1(x_1, y_1)$  da hipérbole:

- (i)  $r$ , a reta que passa pelo foco  $F_1 = (-c, 0)$ ;
- (ii)  $t$ , a reta tangente a hipérbole em  $P_1$ ;
- (iii)  $s$ , a reta que passa pelo foco  $F_2 = (c, 0)$ .

Em qualquer ponto de uma hipérbole a tangente é bissetriz do ângulo formado pelos raios focais do referido ponto (veja figura 4.4).

Derivando a equação da hipérbole  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  em relação a  $x$ , temos

$$2b^2x - 2a^2yy' = 0,$$

ou seja,

$$y' = \frac{b^2x}{a^2y}, \quad (4.2.1)$$

que é a declividade da hipérbole. A declividade da hipérbole no ponto  $P_1(x_1, y_1)$  é  $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ . As declividades das retas  $r$  e  $s$  são respectivamente  $\frac{y_1}{x_1+c}$  e  $\frac{y_1}{x_1-c}$ .

Logo, temos

$$\tan \alpha = \frac{\frac{y_1}{x_1+c} - \frac{b^2x_1}{a^2y_1}}{1 + \left(\frac{y_1}{x_1+c}\right) \left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)} = \frac{a^2y_1^2 - b^2x_1^2 - b^2cx_1}{(a^2 + b^2)x_1y_1 + a^2cy_1}.$$

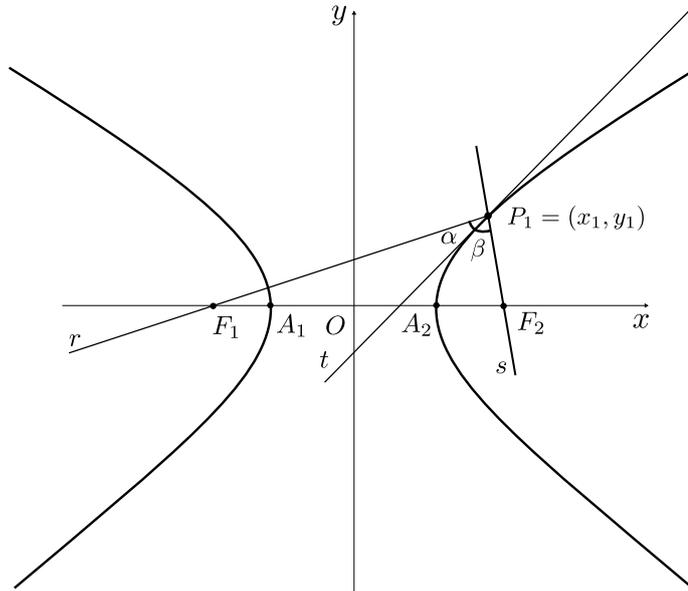


Figura 4.4: Propriedade refletora da hipérbole

Como o ponto  $P_1$  está sobre a hipérbole, suas coordenadas satisfazem a equação

$$b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2.$$

Substituindo esta equação e a relação  $c^2 = a^2 + b^2$ , temos

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{-a^2 b^2 - b^2 c x_1}{c^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1} \\ &= \frac{b^2 (a^2 + c x_1)}{c y_1 (a^2 + c x_1)} \\ &= \frac{b^2}{c y_1}. \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} - \frac{y_1}{x_1 - c}}{1 + \left( \frac{b^2 x_1}{a^2 x_1 y_1} \right) \left( \frac{y_1}{x_1 - c} \right)} \\ &= \frac{b^2 x_1^2 - b^2 c x_1 - a^2 y_1^2}{a^2 x_1 y_1 - a^2 c y_1 + b^2 x_1 y_1} \\ &= \frac{a^2 b^2 - b^2 c x_1}{x_1 y_1 (a^2 + b^2) - a^2 c y_1} \\ &= \frac{b^2}{c y_1}. \end{aligned}$$

Concluimos que,  $\alpha = \beta$ . Assim todo raio que partir de um dos focos ao encontrar uma superfície hiperbólica será refletido em direção ao outro foco.  $\square$

Esta propriedade da hipérbole é usada na construção de telescópios (veja figura 4.5). Foi o italiano Galileu Galilei (1564 – 1642) o primeiro cientista a construir tal instrumento. O telescópio construído por Galileu é chamado de telescópio refrator, que funciona com base na refração da luz. Os telescópios criados por Galileu tinham um inconveniente que era a deformação das imagens produzidas por suas lentes e a decomposição da luz branca em várias cores produzindo um efeito cromático indesejável (aberração cromática).



Figura 4.5: Observatório Monte Palomar

Em seguida vieram os telescópios refletores, que ao contrário do modelo refrator usam um espelho como elemento principal. Os raios provenientes de um corpo celeste são refletidos para o foco de um espelho parabólico, colocado no fundo de um tubo, onde vão formar a imagem do objeto. Este modelo de telescópio foi aperfeiçoado por Issac Newton, que também tinha seus inconvenientes.

Em 1672, o astrônomo francês Cassegrain (1629-1693) chegou a sua forma atual, usando a tecnologia do espelho hiperbólico. Cassegrain utilizou um espelho secundário hiperbólico entre o espelho parabólico e seus focos coincidentes. Dessa forma, os raios que iriam formar a imagem no foco da parábola são refletidos, pelo espelho hiperbólico, sendo formada no outro foco da hipérbole.

Outra aplicação é o sistema LORAN (Longe Range Navegation) e o sistema DECCA, utilizados em navegações de barco e aviões que usam a hipérbole. De três estações de rádio fixadas nos pontos  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  são emitidos concomitantemente sinais de rádio de

dois pontos fixos, por exemplo  $F_1$  e  $F_2$ , que são captados pelo navegante situado numa posição  $P$ , ao longo dos tempos  $t_1$  e  $t_2$ . Pela diferença entre os tempos o navegante mede o intervalo

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

A diferença entre a distância da posição  $P$  do navegante a estação  $F_1$  e a distância da posição do navegante à estação  $F_2$  é dada por

$$PF_1 - PF_2 = k \Delta t$$

em que  $k$  representa a velocidade do som no ar. Assim, a cada par de estações o navegante determina a característica da hipérbole na qual está  $P$ . A interseção das três hipérbolas determina a posição onde o navegante se encontra (veja figura 4.6).

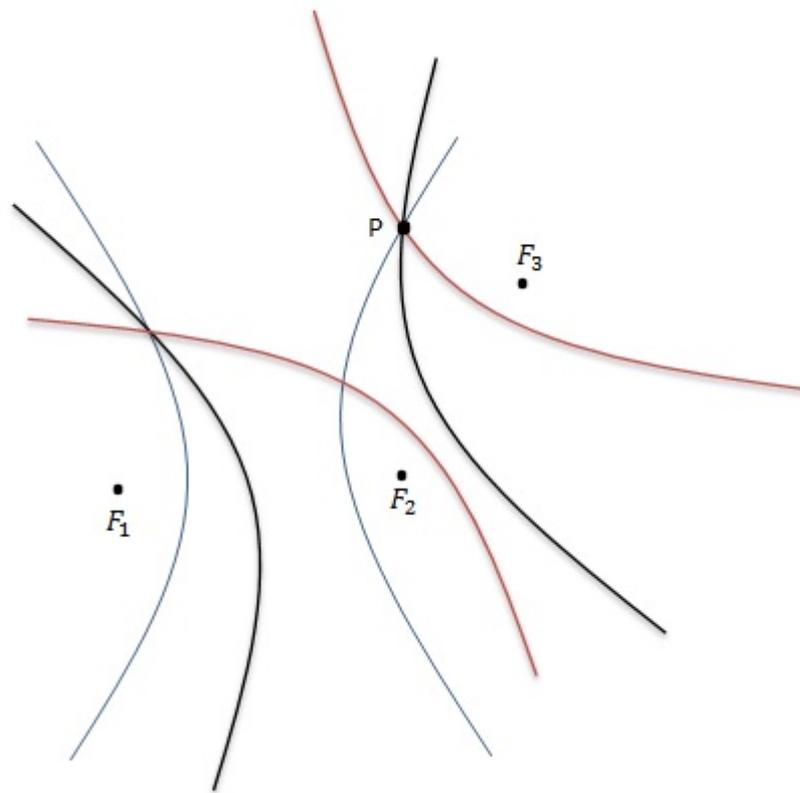


Figura 4.6: Sistema de navegação LORAN.

### 4.3 Propriedades da Parábola

A parábola é muito aplicada na construção de pontes. A ponte pênsil ou ponte suspensa é um tipo de ponte sustentada por cabos ou tirantes de suspensão. Numa ponte pênsil o tabuleiro contínuo (pista de rolamento) é sustentado pelos tirantes ligados aos seus suportes (dois cabos maiores na forma do arco de uma curva que pendem das torres de sustentação). Se a distribuição de carga sobre o tabuleiro é uniforme na direção horizontal, então cada cabo pende muito aproximadamente num arco parabólico. As pontes pênsis ou suspensas juntas com as estaiadas são aquelas que possibilitam os maiores vãos.

Atualmente a maior ponte suspensa do mundo é a ponte Akashi Kaikyo (veja a figura 4.7) construída em 1998, que liga as cidades de Kobe e Awaji Island no Japão. Ela possui  $3922m$  de comprimento e o vão central de  $1991m$ .



Figura 4.7: Ponte Akashi Kaikyo

Outra obra da Engenharia Civil de grande beleza arquitetônica é a ponte Juscelino Kubitschek, também conhecida como ponte JK, que está situada no lago Paranoá em Brasília. Seus  $1200m$  de comprimento, fixados a cabos tensionados de aço colocados em forma cruzada, estão divididos em três vãos de  $240m$  sustentados por três arcos parabólicos. A estrutura em três arcos assimétricos foi inspirada pelo movimento de uma pedra saltando sobre o espelho d'água quando atirada obliquamente em relação a

ele (veja a figura 4.8).



Figura 4.8: Ponte Juscelino Kubitschek

Ainda na Engenharia Civil em resistência dos materiais, uma viga quando submetida a uma carga uniforme o diagrama do seu Momento Fletor é uma parábola.

Em estudos balísticos, quando um projétil é lançado, sob a ação apenas da força da gravidade, descreve uma trajetória parabólica. Outras aplicações estão relacionadas a propriedade refletora da parábola. Vamos agora demonstrá-la.

**Teorema 4.3** (Propriedade Refletora da Parábola). *Quando uma reta atinge a parábola emergindo de seu foco é refletido paralelamente ao seu eixo. Analogamente, toda reta que incide paralelamente ao eixo da parábola é refletido pelo seu foco.*

**Demonstração.** Sejam as seguintes retas passando por um ponto  $P_1(x_1, y_1)$  da parábola (veja figura 4.9).

- (i)  $r$ , a reta paralela à reta focal;

(ii)  $n$ , a reta normal à parábola;

(iii)  $s$ , a reta que passa pelo foco  $F$ .

Sejam  $\alpha$  o ângulo formado por  $n$  e  $s$  e  $\beta$  o ângulo formado por  $n$  e  $r$ , como se mostra na figura 4.9. Vamos mostrar que  $\alpha = \beta$ . A equação da parábola é  $y^2 = 4cx$ .

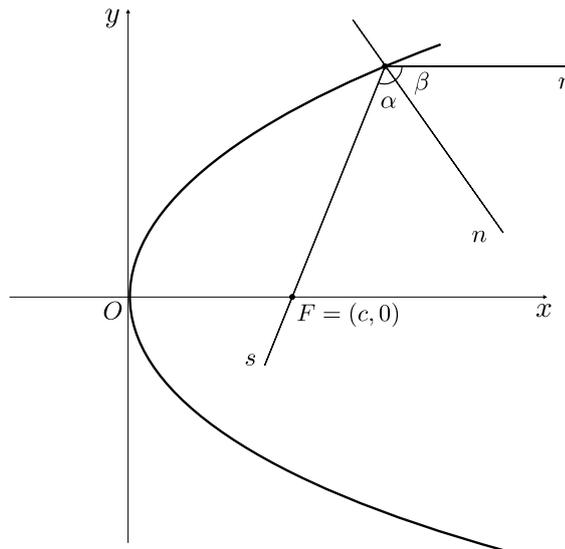


Figura 4.9: Propriedade refletora da parábola

Derivando a equação da parábola em relação a  $x$ , obtemos

$$2yy' = 4c,$$

ou seja,

$$y' = \frac{4c}{2y} = \frac{2c}{y}.$$

Isso mostra que a declividade da tangente à parábola no ponto  $P_1(x_1, y_1)$  é  $\frac{2c}{y_1}$ . Logo, a declividade da reta normal  $n$  será  $-\frac{y_1}{2c}$ . Sabendo que a declividade da reta  $s$  é  $\frac{y_1}{x_1 - c}$ , temos

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{y_1}{2c} - \frac{y_1}{x_1 - c}}{1 - \frac{y_1^2}{2c(x_1 - c)}} = \frac{-x_1 y_1 + c y_1 - 2c y_1}{2c x_1 - 2c^2 - y_1^2} = \frac{-x_1 y_1 - c y_1}{2c x_1 - 2c^2 - y_1^2}.$$

Como o ponto  $P_1$  está sobre a parábola, suas coordenadas satisfazem a equação  $y_1^2 = 4c x_1$ . Substituindo na relação acima, temos

$$\tan \alpha = \frac{-x_1 y_1 - c y_1}{2c x_1 - 2c^2 - 4c x_1} = \frac{-y_1(x_1 + c)}{-2c(x_1 + c)} = \frac{y_1}{2c}.$$

Como a declividade de  $r$  é zero, então

$$\tan \beta = \frac{0 - \left(-\frac{y_1}{2c}\right)}{1 + 0 \left(-\frac{y_1}{2c}\right)} = \frac{y_1}{2c}.$$

Concluimos que  $\alpha = \beta$ . Fica assim provado que todo raio que incidir na parábola paralelamente ao eixo de simetria é refletido segundo uma reta que passa pelo foco e todo raio que incidir na parábola proveniente do foco é refletido paralelamente ao eixo de simetria. (veja a figura 4.10).  $\square$

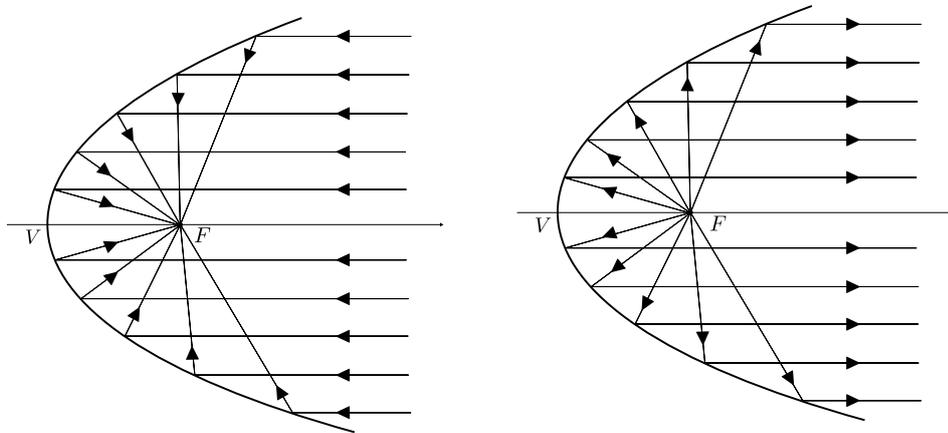


Figura 4.10: Raios refletidos na parábola

Girando a parábola em torno do seu eixo de simetria, obtém-se uma superfície chamada parabolóide elíptico (veja a figura 3.7). Considerando uma superfície de um parabolóide elíptico e a propriedade refletora, encontraremos várias aplicações entre as quais podemos destacar: faróis de automóveis e locomotivas, holofotes, forno solar e antena parabólica, entre outras. Se colocarmos uma fonte de luz no foco da parábola, os raios de luz que incidirem sobre a superfície do parabolóide elíptico gerado pela parábola, pelo princípio da reflexão, serão refletidos segundo retas paralelas ao eixo de simetria da parábola. Este é o princípio do refletor parabólico que permite que a luz emanada da fonte se propague em raios paralelos, formando o que chamamos de fecho de luz. Podemos ver esse princípio em lanternas, holofotes e faróis de carros (veja a figura 4.11).

Já os fornos solares do tipo parabólico são superfícies na forma de parabolóide que recebem os raios da luz provenientes do sol, paralelos ao eixo de simetria, os quais são



Figura 4.11: Farol do carro

refletidos para o foco produzindo uma grande quantidade de calor (veja a figura 4.12).

O mesmo princípio é aplicado na construção de espelhos para telescópios astronômicos, antenas de radar e antenas parabólicas bastante utilizadas em residências (veja a figura 4.13). Os sinais (ondas de rádio, televisão ou luz) chegam muito fracos, por serem emitidos de grandes distâncias, sendo necessário recebê-los em uma área relativamente grande e concentrá-los num mesmo ponto para serem amplificados naturalmente. A superfície da antena (ou do espelho) deve ter uma forma tal que os sinais que chegam paralelos após a reflexão sejam direcionados para um único ponto. A superfície que tem as características geométricas para atender a propriedade descrita acima é a do parabolóide.



Figura 4.12: Fornos solares



Figura 4.13: Antenas parabólicas

# Apêndice

## Cônicas em Coordenadas Polares

Nesta seção apresentaremos as equações das cônicas em coordenadas polares. Veremos que, em coordenadas polares, todas as cônicas têm a mesma equação.

Consideremos, inicialmente, uma elipse com focos  $O = (0, 0)$  e  $F = (-2ea, 0)$  e seja  $P = (x, y)$  um ponto dessa curva, de maneira que a soma das distâncias do ponto  $P$  até  $O$  e  $F$  é igual a  $2a$ . Neste caso devemos ter  $0 < e < 1$ , pois a distância entre os focos deve ser menor que  $2a$  (veja figura 4.14).

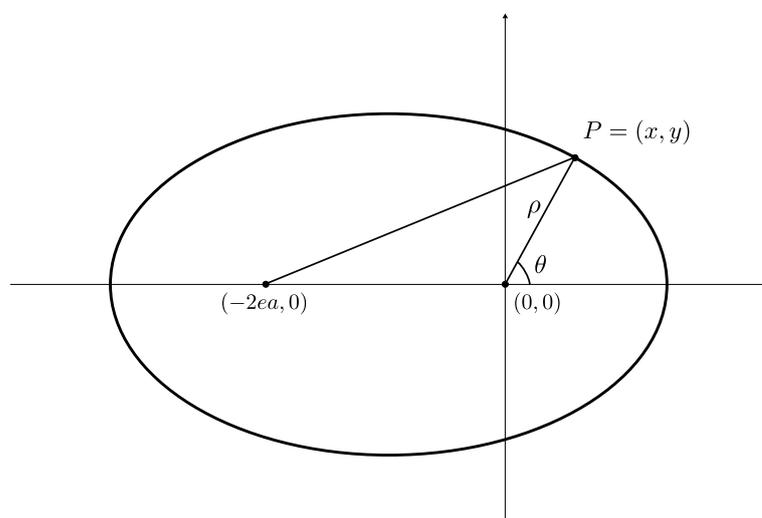


Figura 4.14: Elipse em coordenadas polares

Pela definição da elipse sabemos que

$$d(P, F) + d(P, O) = 2a.$$

Daí

$$\sqrt{(x + 2ea)^2 + y^2} + \rho = 2a.$$

Isolando o radical e depois elevando ao quadrado, temos

$$(x + 2ea)^2 + y^2 = (2a - \rho)^2,$$

ou seja,

$$x^2 + 4xea + 4e^2a^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\rho + \rho^2.$$

Substituindo  $x^2 + y^2$  por  $\rho^2$  e fazendo os devidos cancelamentos, temos

$$\rho + xe = a(1 - e^2).$$

Como  $x = \rho \cos \theta$ , resulta

$$\rho + e\rho \cos(\theta) = a(1 - e^2),$$

ou seja,

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)}.$$

Fazendo  $\Lambda = a(1 - e^2)$ , podemos escrever a equação polar da cônica em sua forma final

$$\rho = \frac{\Lambda}{1 + e \cos(\theta)}. \quad (4.3.1)$$

Vamos agora considerar o caso da hipérbole no qual a diferença das distâncias entre os dois focos é  $2a$ . Sejam novamente os focos  $O$  e  $F$ , tal como usados na elipse. Neste caso devemos ter  $e > 1$  (veja figura 4.15).

Considerando o ponto genérico  $P = (x, y)$ , pela definição da hipérbole sabemos que

$$d(P, F) - d(P, O) = \pm 2a. \quad (4.3.2)$$

Escolhendo o sinal positivo na equação acima vem

$$\sqrt{(x + 2ea)^2 + y^2} - \rho = 2a.$$

Isolando o radical e depois elevando ao quadrado, temos

$$(x + 2ea)^2 + y^2 = (2a + \rho)^2,$$

ou seja,

$$x^2 + 4xea + 4e^2a^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\rho + \rho^2.$$

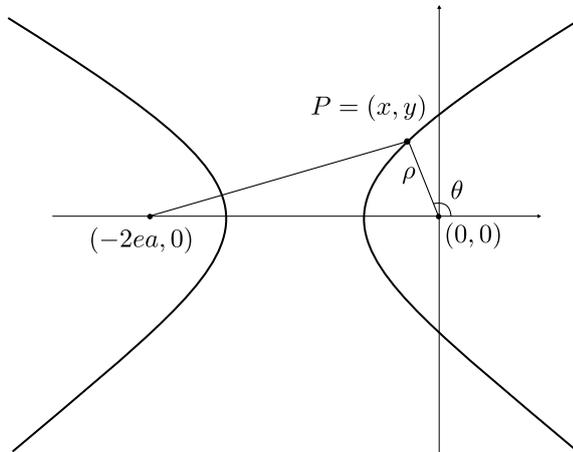


Figura 4.15: Hipérbole em coordenadas polares

Substituindo  $x^2 + y^2$  por  $\rho^2$  e fazendo os devidos cancelamentos, temos

$$\rho - xe = a(e^2 - 1).$$

Como  $x = \rho \cos(\theta)$ , resulta

$$\rho - e\rho \cos(\theta) = a(e^2 - 1),$$

ou seja,

$$\rho = -\frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos(\theta)}.$$

Como convencionamos que  $(-\rho, \theta) = (\rho, \theta + \pi)$ , obtemos

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos(\pi + \theta)}.$$

Sabendo que  $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ , encontramos finalmente

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)} = \frac{\Lambda}{1 + e \cos(\theta)}.$$

Se escolhermos o sinal negativo na expressão (4.3.2), cálculos análogos aos anteriores mostram facilmente que a equação da hipérbole é dada novamente por (4.3.1).

Finalmente vamos considerar a parábola como o conjunto de pontos, tais que a distância até  $O$  é igual a distância até a reta  $x = a$  (veja a figura 4.16).

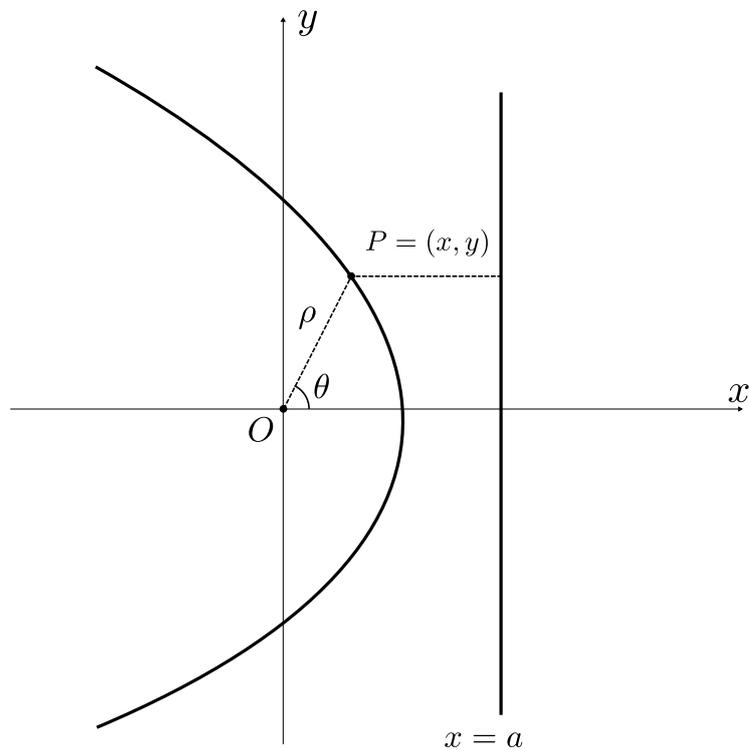


Figura 4.16: Parábola em coordenadas polares.

Daí

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a - \rho \cos(\theta),$$

ou seja,

$$\rho = a - \rho \cos(\theta)$$

ou seja,

$$\rho + \rho \cos(\theta) = a.$$

Finalmente obtemos a equação polar da cônica na forma

$$\rho = \frac{a}{1 + \cos(\theta)}.$$

Agora, para todo  $\Lambda$  e  $e$ , considere a equação

$$r = \frac{\Lambda}{1 + e \cos(\theta)}. \tag{4.3.3}$$

Simplificando essa expressão temos  $r = \Lambda - re \cos(\theta)$ . Elevando ao quadrado vem

$$r^2 = [\Lambda - re \cos(\theta)]^2$$

ou seja,

$$r^2 = \Lambda^2 - 2\Lambda r e \cos(\theta) + r^2 e^2 \cos^2(\theta).$$

Como  $r^2 = x^2 + y^2$  e  $x = r \cos(\theta)$ , podemos escrever essa última expressão como

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = \Lambda^2 - 2\Lambda e x.$$

Concluimos que a equação (4.3.3) será uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola conforme tenhamos  $0 < e < 1$ ,  $e > 1$  ou  $e = 1$ , pois nesses casos os coeficientes dos termos quadráticos têm o mesmo sinal, sinais trocados ou um deles é nulo, respectivamente.

# Referências Bibliográficas

- [1] STEWART, J.. *Cálculo, volume 2*, 7ª edição, Editora Cengage Learning, São Paulo, 2014.
- [2] ANTON, H.. *Cálculo, volume II*, 8ª edição, Artmed Editora S. A., Porto Alegre-RS, 2005.
- [3] THOMAS, G.B.. *Cálculo, volume 2*, 11ª edição, Pearson Education do Brasil Ltda., São Paulo-SP, 2008.
- [4] COURANT, R. E ROBBINS, H.. *O que é Matemática?*, 7ª edição, Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2000.
- [5] JUDICE, E.D.. *Elementos de Geometria Analítica 1*, 2ª edição, Editora Vega S.A., Belo Horizonte-MG, 1971.
- [6] LEMANN, C.H.. *Geometria Analítica*, Editora Globo S.A.,Porto Alegre-RS, 1970.
- [7] EFIMOV, N. *Elementos de Geometria Analítica*, 7ª edição, Livraria Cultura Brasileira Editora, Belo Horizonte-MG, 1972.
- [8] LIMA, E.L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [9] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar 7, Geometria Analítica*, 4ª edição, São Paulo: Atual Editora, 1993.
- [10] BOYER, C.B. *História da Matemática*, São Paulo, Editora Edgard Blucher, 2003.
- [11] WAGNER, E.. *Porque as antenas são parabólicas*, Revista do Professor de Matemática, n°33, pp. 10-15. Quadrimestral,SBM, São Paulo-SP, 1997.

- [12] ÁVILA, G.. *A Hipérbole e os telescópios*, Revista do Professor de Matemática, nº34, pp 22-27, SBM, São Paulo-SP, 1997.
- [13] VALADARES, R.J.C.. *Eclipse, sorrisos e sussuros*, Revista do Professor de Matemática, nº36, pp 24-28, SBM, São Paulo-SP, 1998.