



**Lúcio Sebastião Coelho da Silva**

## **O Teorema de Morley**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro  
Março 2014



**Lúcio Sebastião Coelho da Silva**

## **O Teorema de Morley**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Marcos Craizer**

Orientador

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Profa. Christine Sertã Costa**

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Profa. Gabriela dos Santos Barbosa**

Fundação Educacional Unificada Campograndense – FEUC

**Prof. Antonio Carlos Saraiva Branco**

Fundação Getúlio Vargas – FGV

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de março de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

### **Lúcio Sebastião Coelho da Silva**

Licenciou-se em Ciências com habilitação em Matemática pela FEUC (Fundação Educacional Unificada Campograndense) em 1994. Especializou-se em Matemática Pura pelo programa de Pós-graduação do CEPOPE/FEUC em 1996. Atua como professor de Ensino Fundamental na Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro e de Ensino Médio no Centro Educacional da Lagoa (CEL), no qual também faz parte da coordenação de Matemática. Docente dos cursos de graduação em Matemática, Informática, Pedagogia e Ciências Sociais na FEUC.

#### Ficha Catalográfica

Silva, Lúcio Sebastião Coelho da

O teorema de Morley / Lúcio Sebastião Coelho da Silva ; orientador: Marcos Craizer. – 2014.

58 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2014.

CDD: 510

À minha avó Maria (*in memorian*) pelos ensinamentos de vida, pela garra e pelo exemplo de dedicação à família.

Aos meus pais pelo investimento na minha formação como pessoa.

À minha esposa Gleici Naira, que divide comigo a caminhada da vida.

À minha filha, Mariani Vitoria, presente de Deus em minha vida.

A Jorge Crim Valente, meu grande amigo.

Aos meus professores, que me fizeram descobrir o encantamento pelo Magistério, em especial a Vera Bellis, Cleber Amaral, Alzir Fourny e Mary de Sousa e Silva.

## Agradecimentos

A Deus, pois sem Ele nada podemos fazer.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

À SBM e à PUC-Rio, pela organização do curso.

Ao meu orientador, professor Marcos Craizer, pela incansável dedicação e incentivo permanente durante todo o curso e, principalmente no desenvolvimento do TCC.

Aos demais professores da PUC, pelas aulas ministradas.

Aos meus colegas de mestrado, pelo companheirismo, pela amizade e pelo bom humor, mesmo nos momentos mais difíceis.

## Resumo

Silva, Lúcio Sebastião Coelho da; Craizer, Marcos. **O Teorema de Morley**. Rio de Janeiro, 2014. 58p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho, o foco principal é o Teorema de Morley, cuja formulação tem como base um dos três problemas clássicos da Geometria: a trissecção de um ângulo. A partir da contextualização histórica, procura-se inserir o tema como motivação ao estudo da Geometria. Seja pela riqueza dos conteúdos envolvidos ou pela dificuldade na sua construção, o Triângulo de Morley é um belo exemplo de aplicação a ser trabalhado em sala de aula. Em paralelo é feita uma análise crítica das dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, principalmente em Geometria, visando oferecer subsídios importantes à atividade docente e impactando positivamente o seu trabalho. Com as demonstrações e aplicações apresentadas, procura-se sedimentar conhecimentos adquiridos, bem como apontar caminhos para soluções de diversos problemas geométricos similares.

## Palavras-Chave

Geometria; triângulo; trissecção; Morley.

## Abstract

Silva, Lúcio Sebastião Coelho da; Craizer, Marcos (Advisor). **Morley's Theorem**. Rio de Janeiro, 2014. 58p. MSc. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work, the main focus is the Morley's Theorem, whose formulation is based on one of three classical problems of Geometry: a trisection of an angle. From the historical context, it tries to insert the subject as motivation to the study of geometry. By the richness of the content or the difficulty involved in its construction, the Morley's triangle is a fine example of application to work with in the classroom. In parallel, a critical analysis of the difficulties that are found on the process of teaching and learning Mathematics, especially Geometry, is done in order to offer important benefits to the teaching activity and positively impacting their work. With demonstrations and applications that are shown it tries to fix up the acquired knowledge, as well as identifying ways to solutions of several similar geometric problems.

## Keywords

Geometry; triangle; trisection; Morley.

## Sumário

1.	INTRODUÇÃO	13
2.	A GEOMETRIA GREGA	16
3.	A TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO	18
3.1.	A solução de Nicomedes	18
3.2.	As soluções de Arquimedes	21
3.3.	A impossibilidade da trissecção	25
4.	CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO ENSINO DE GEOMETRIA	30
4.1.	O pensar geométrico e a resolução de problemas	30
4.2.	Problemas de Geometria pouco geométricos	32
4.3.	A demonstração em Geometria	34
5.	O TRIÂNGULO DE MORLEY	36
6.	UMA QUESTÃO OLÍMPICA	39
7.	DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE MORLEY	42
7.1.	Através da Geometria Euclidiana Plana	42
7.2.	Através das Relações Trigonométricas	46

8.	EXTENSÕES DO TEOREMA DE MORLEY	48
8.1.	Em paralelogramos	48
8.2.	Em polígonos regulares	50
8.3.	Para as trissetrizes dos ângulos externos do triângulo	51
9.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
10.	BIBLIOGRAFIA	54
	APÊNDICE I	56
	APÊNDICE II	57
	APÊNDICE III	58

## Lista de figuras

Figura 1: <i>Conchoide</i> de Nicomedes.	17
Figura 2: A <i>conchoide</i> sobreposta a uma concha.	17
Figura 3: Trissecção pela <i>Conchoide</i> (1ª parte).	18
Figura 4: Trissecção pela <i>Conchoide</i> (2ª parte).	19
Figura 5: Trissecção sem a <i>Conchoide</i> .	19
Figura 6: Questão em [4].	20
Figura 7: Questão em [5].	20
Figura 8: A trissecção através de <i>neusis</i> .	21
Figura 9: Comparação entre as figuras de Arquimedes e Nicomedes.	22
Figura 10: Espiral de Arquimedes construída com recursos computacionais.	23
Figura 11: Espirais de Arquimedes com segmentos de retas.	24
Figura 12: Trissecção através da espiral de Arquimedes.	24
Figura 13: Adição e subtração com régua e compasso.	25
Figura 14: Teorema de Tales.	26
Figura 15: Construção da raiz quadrada.	27
Figura 16: Figura idealizada por Nicomedes.	28
Figura 17: Triângulo de Morley	36
Figura 18: Os doze pontos de intersecção da trissetrizes de Morley.	37
Figura 19: Teorema de Morley na OBM 2012.	39
Figura 20: Resolução da questão 22, nível 3, da OBM (1ª fase - 2012).	40
Figura 21: Triângulos BDE e BHE congruentes.	41
Figura 22: Um lema importante.	42
Figura 23: Demonstração geométrica - Passo 1.	43
Figura 24: Demonstração geométrica - Passo 2.	43

Figura 25: Demonstração geométrica - Passo 3.	44
Figura 26 : Demonstração geométrica - Passo 4.	45
Figura 27: Demonstração geométrica - Passo 5.	45
Figura 28: Teorema de Morley em um paralelogramo.	48
Figura 29: Losango formado pelas trissetrizes em um retângulo.	49
Figura 30: Retângulo formado pelas trissetrizes em um losango.	50
Figura 31: Paralelogramos formados por trissetrizes.	50
Figura 32: As trissetrizes no pentágono e no octógono.	51
Figura 33: Triângulo de Morley com trissetrizes externas.	51
Figura 34: Cinco triângulos equiláteros formados por trissetrizes.	51

## Lista de tabelas

Tabela 1: Exemplos de números construtíveis.	27
Tabela 2: Teoria van Hiele.	32
Tabela 3: Construção da Conchoide de Nicomedes.	56
Tabela 4: Construção do triângulo de Morley no GeoGebra	57

# 1 INTRODUÇÃO

A presença da Geometria no cotidiano, tanto pela forma de utensílios e objetos quanto pela própria ocupação territorial, dá às pessoas certa familiaridade com alguns conceitos básicos indispensáveis em qualquer estudo. A beleza dos problemas geométricos fascina até mesmo os menos adeptos à Matemática enquanto Ciência. Seja pela plasticidade das figuras ou mesmo pelo tom artístico evidente em algumas construções, a Geometria se mostra como um grande atrativo.

Na abordagem aqui proposta, a intenção é ir além de uma simples percepção ou reconhecimento das características de figuras, trata-se de uma aplicação inspirada em um dos três problemas clássicos da Matemática grega: a trisseção de um ângulo (os outros dois eram a quadratura do círculo e a duplicação do cubo). Embora esse não seja o foco principal do trabalho, a citação desses registros históricos reforça o caráter pedagógico, um dos principais objetivos de um curso de Mestrado Profissional.

O uso de recursos computacionais para as construções geométricas pode até sugerir ao leitor um grau de dificuldade aquém do enfrentado pelos geômetras no passado. A utilização de régua não graduada e do compasso está cada vez mais distante da realidade das salas de aula e muito se perde no desenvolvimento cognitivo e motor do aluno quando não é submetido à manipulação desses instrumentos fundamentais.

Destaca-se, então, a versatilidade do programa GeoGebra<sup>1</sup>. Com ele é possível trabalhar as construções e propriedades geométricas de maneira bem simples, mas com muitos recursos. Sua aplicabilidade não se restringe à Geometria Plana, pois com ele se pode trabalhar Funções, Aritmética, Geometria Analítica, Matrizes e até mesmo Probabilidade.

---

<sup>1</sup> O GeoGebra é um aplicativo de Geometria e Álgebra, gratuito, de manipulação relativamente simples e bastante didática.

Sob o aspecto pragmático, muitas vezes desejado pela sociedade, a tecnologia tem prestado relevantes serviços. Porém, muito se perde ao deixar de lado o pensar matemático, o desenvolver, o investigar e, principalmente, conjecturar. No caso específico das construções geométricas, a justificativa para cada passo envolve uma fundamentação teórica que se torna mais sedimentada pela própria execução.

Em nome de uma busca mais rápida de resultados, jovens estão sendo formados com pouca ou quase nenhuma fundamentação matemática, apenas fazendo uso da Ciência como consumidores, não como adeptos de suas ideias. Afinal, como já se tornou clichê, a Matemática é “*coisa de maluco*”. Muitos desistem dos problemas geométricos em que a figura não faz parte do enunciado, outros se sentem incapazes quando a solução se dá através de linhas traçadas sem aparente justificativa ou quando a visualização requer um pouco mais de atenção.

Com o foco direcionado à aprendizagem em Matemática, mais especificamente na Geometria euclidiana plana, são citadas algumas ideias de estudiosos que ajudam a entender como ocorre o processo de aquisição de conteúdos. Trazer à baila alguns questionamentos quanto à evolução desejada e os resultados obtidos pode ajudar a definir linhas de trabalho docente, respaldando-se no estudo do pensamento matemático e no aprofundamento de conteúdos específicos da disciplina; assim, a atuação do profissional se torna mais completa.

É sob esse aspecto que se pretende desenvolver esse trabalho cuja essência se traduz em uma tentativa de motivar os já simpatizantes e conquistar novos adeptos à tão estigmatizada Matemática, direcionando a abordagem do tema aos formadores de opinião: professores do Ensino Básico. Tanto se discute sobre a formação desse membro de suma importância na sociedade e pouco se realiza, concretamente, para mudar a configuração do cenário educacional no país. Notadamente o PROFMAT assume papel de grande relevância no cenário educacional, buscando revitalizar o ensino de Matemática.

A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno. [1]

De forma mais específica, pretende-se partir dos conceitos geométricos básicos, destacando a evolução histórica e a dedicação dos estudiosos na busca de soluções para problemas que atravessaram gerações, muitas vezes sem lograr êxito. A grande contribuição dessa investigação metódica e perseverante geralmente se traduz em teoremas que futuramente irão subsidiar grandes descobertas, estendendo-se a outras aplicações.

A proposta é de conduzir o leitor a uma abstração de propriedades geométricas em situações cujo aparente grau de dificuldade seja minimizado pela compreensão do fundamento, não pela mera repetição de processos automatizados – apesar de ser inevitável a utilização menos reflexiva de conceitos já sedimentados.

A apresentação de algumas demonstrações tem por objetivo, além de fixar conceitos, valorizar o aspecto motivacional. Com abordagens adequadas aos diversos níveis de ensino, pretende-se propiciar uma leitura agradável, mas sem deixar de lado o rigor teórico.

## 2 A GEOMETRIA GREGA

A Matemática mais intuitiva e experimental, praticada pelos egípcios e babilônios, assumiu um caráter dedutivo com os gregos. Essa foi uma das mudanças mais substanciais na História da Ciência. Euclides<sup>1</sup> foi o primeiro a dar uma consistência teórica a tudo de Matemática que havia sido registrado até o momento. Utilizando apenas a régua não graduada e o compasso, realizou as construções geométricas fundamentais para a axiomatização da Geometria. A partir daí, o critério para ser admitida uma verdade matemática deixou de ser a experimentação e passou a ser a demonstração.

Muitos problemas até hoje considerados de grande complexidade foram resolvidos pelos gregos categoricamente, na maioria das vezes seguindo os passos de Euclides. Mas, apesar de grandes conquistas, continuavam sem solução três problemas clássicos: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo.

Os matemáticos gregos estudaram três problemas de Geometria que desempenharam papel importante no desenvolvimento da Matemática. Eles são problemas de construção e resistiram a todas as tentativas dos gregos para resolvê-los utilizando somente a régua sem graduação e o compasso, os únicos instrumentos utilizados por Euclides nos *Elementos*. [2]

Porém, ao contrário do que se pode pensar, nem sempre os gregos se limitaram a esses instrumentos ou às ideias de Euclides. Suas conquistas foram bastante além disso.

É lugar comum afirmarmos que as figuras geométricas aceitas na geometria grega deviam ser construídas com régua e compasso. De fato, isto é verdade se temos em mente as construções realizadas nos *Elementos* de Euclides. Dizer que o mesmo é verdade para toda a geometria grega significa considerar que o conjunto das práticas gregas seguia o padrão de rigor estabelecido por Euclides, o que não acontecia. [3]

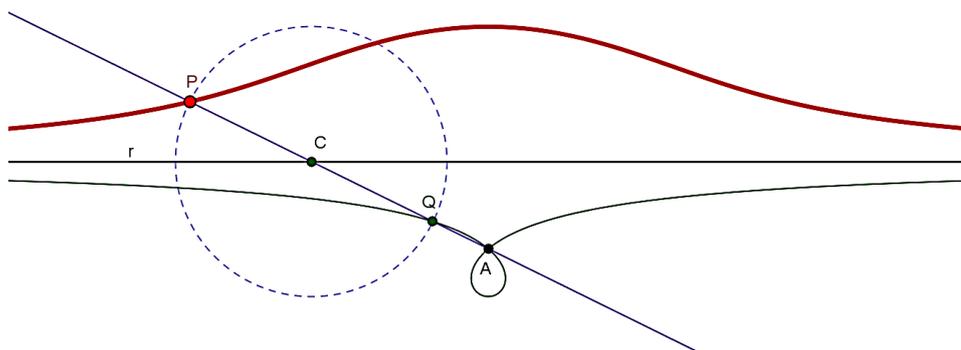
A evolução conquistada após Euclides propiciou aos gregos o emprego de curvas que iriam ajudá-los a resolver os problemas clássicos, especialmente a

---

<sup>1</sup> Euclides de Alexandria (300 a. C.), matemático grego autor da obra *Os Elementos* na qual se baseia a Geometria mais conhecida atualmente e por isso intitulada de *Euclidiana*.

trisseção de um ângulo, de maior relevância nessa abordagem. Nicomedes<sup>2</sup>, através de uma curva chamada *Conchoide* propôs uma solução para esse problema.

Considerando uma reta  $r$  e traçando-se uma reta a ela concorrente a partir de um ponto  $A$  exterior, determina-se um ponto  $C$  na interseção das duas. Com centro em  $C$ , é construída uma circunferência de raio fixo. Os pontos da *conchoide* são os pontos de interseção da reta  $\overleftrightarrow{AC}$  com a circunferência, quando o ponto  $C$  se desloca sobre  $r$ .



**Figura 1:** *Conchoide* de Nicomedes.

A construção desta curva no GeoGebra está descrita no APÊNDICE I.

O termo *conchoide* (ou *concoide*<sup>3</sup>) se refere a objetos que tenham forma similar a uma concha. Na figura abaixo, uma *conchoide* de Nicomedes foi sobreposta a uma concha, justificando o nome a ela atribuído.



**Figura 2:** A *conchoide* sobreposta a uma concha.

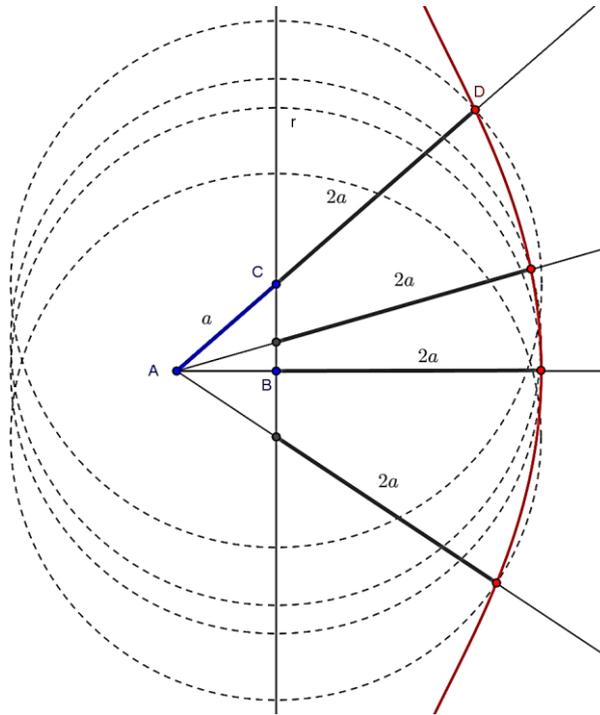
<sup>2</sup> Nicomedes foi um famoso matemático grego que viveu, aproximadamente, entre 280 a.C. e 210 a.C. a quem é atribuída a construção mecânica da curva *conchoide*.

<sup>3</sup> Conchoide é um sinônimo de concoide e significa “que tem a forma de concha”.

### 3 A TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO

#### 3.1. A solução de Nicomedes

Seja  $B\hat{A}C$  o ângulo que se deseja trissectar, de modo que se tenha um triângulo  $ABC$ , de hipotenusa  $\overline{AC} = a$ . Prolongando a semirreta  $\overline{AC}$  até um ponto  $D$ , de tal modo que se tenha  $\overline{CD} = 2a$  e com centro sobre um ponto qualquer da reta suporte do lado  $BC$  e raio  $2a$ , são definidas circunferências cujas intersecções com as semirretas que partem de  $A$  e passam pelos seus respectivos centros determinam a *conchoide*.

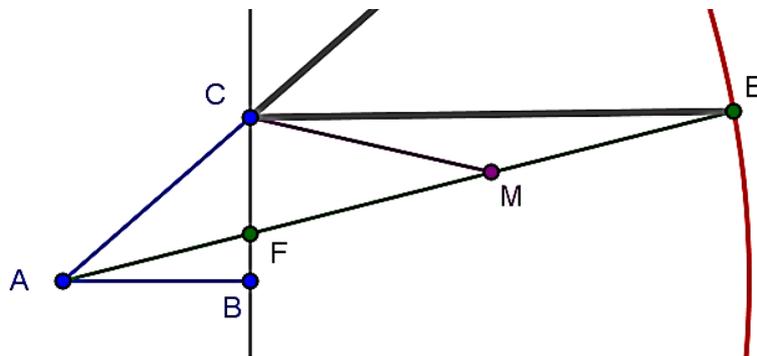


**Figura 3:** Trissecção pela *Conchoide* (1ª parte).

Se  $AB \parallel CE$ , então  $\widehat{CEF} = \widehat{BAF} = \theta$  e, tomando o ponto  $M$ , médio do segmento  $EF$ , tem-se  $\overline{FM} = \overline{EM} = \overline{AC} = a$ . Mas,  $CM$  é mediana relativa à hipotenusa  $EF$  do triângulo  $CEF$ , logo  $\overline{CM} = a$  também.

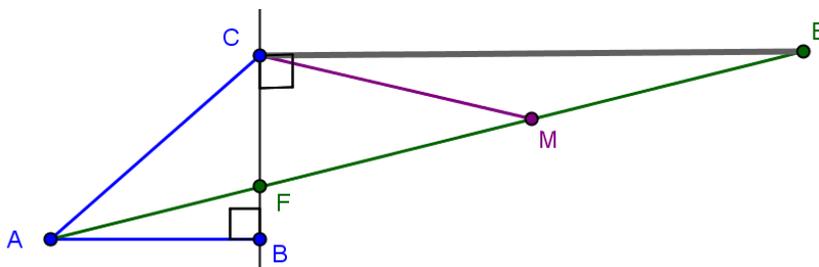
Como  $\widehat{CMF}$  é ângulo externo relativo ao vértice  $M$  do triângulo  $CEM$ , no qual  $\widehat{ECM} = \widehat{CEM} = \theta$ , então  $\widehat{CMF} = 2 \cdot \widehat{ECM} = 2\theta$ . Sendo  $ACM$  um triângulo isósceles, com  $\overline{AC} = \overline{CM}$  então  $\widehat{CMF} = \widehat{CAF} = 2\theta$ .

Logo,  $\widehat{BAC} = \widehat{CAF} + \widehat{BAF} = 2\theta + \theta = 3\theta$ . Portanto,  $\widehat{BAF}$  representa a trisseção de  $\widehat{BAC}$  conforme a figura 4, construída a partir da figura 3.



**Figura 4:** Trisseção pela *Conchoide* (2ª parte).

Um importante resultado dessa construção é a figura destacada abaixo, formada pelos triângulos considerados na resolução de Nicomedes. A trisseção ( $\widehat{BAF} = \frac{1}{3}\widehat{BAC}$  ou  $\widehat{CAF} = 2 \cdot \widehat{BAF}$ ) decorre, portanto, do fato de  $AB \parallel CE \perp BC$  e  $\overline{AC} = \overline{CM} = \overline{FM} = \overline{EM}$ .



**Figura 5:** Trisseção sem a *Conchoide*.

Essa construção inspirou a elaboração de questões interessantes, propostas em conceituados livros de Geometria (ver [4, p. 98] e [5, p. 110]). Geralmente é

apresentada uma figura com todas as características dadas acima, apenas omitindo o segmento  $CM$ , cobrando uma relação entre as medidas de  $\widehat{B\hat{A}F}$  e  $\widehat{C\hat{A}F}$ . Para completar o enunciado, é dito que  $\overline{EF} = 2 \cdot \overline{AC}$ . Para quem não conhece a situação, essa é uma informação aparentemente desconexa. Daí, quando é traçado o segmento  $CM$  e aparecem os triângulos isósceles, o mistério acaba.

Foram capturadas as questões abaixo como exemplo. Em cada uma a solução se torna simples quando comparamos com o modelo trisector de Nicomedes.

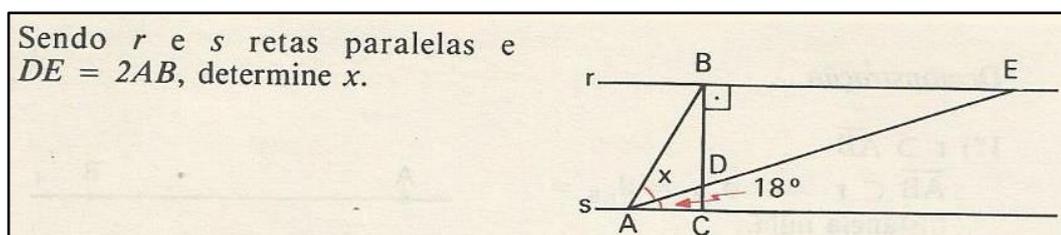


Figura 6: Questão em [4].

Com a mesma simplicidade, a mediana  $BM$ , relativa ao lado  $DE$  determina um triângulo isósceles  $ABM$  ( $\overline{AB} = \overline{BM}$ ). Daí então,  $\widehat{B\hat{A}D} = 2 \cdot \widehat{C\hat{A}D} = 36^\circ$ .

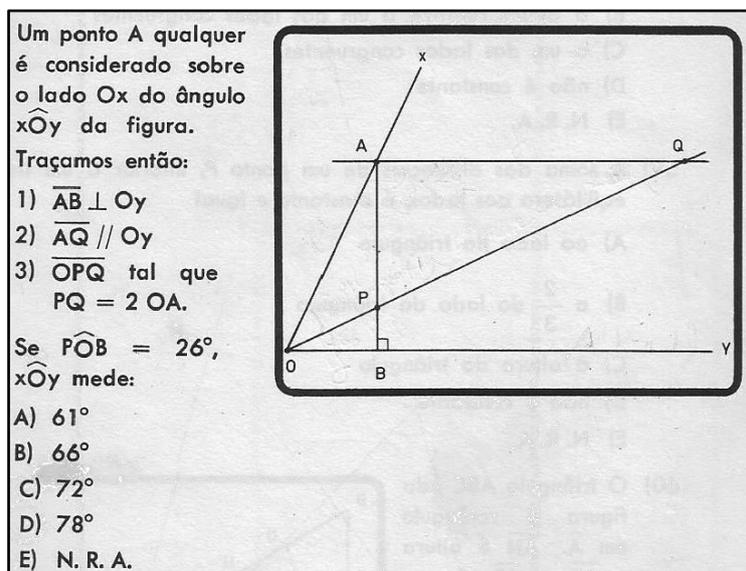


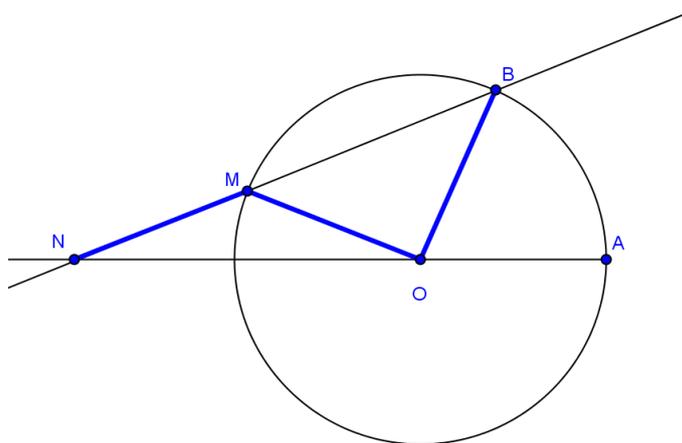
Figura 7: Questão em [5].

Para resolvê-la, basta traçar a mediana relativa à hipotenusa  $PQ$ . Assim,  $\widehat{A\hat{O}B} = 3 \cdot \widehat{P\hat{O}B} = 78^\circ$  (opção D).

### 3.2. As soluções de Arquimedes<sup>1</sup>

Os trabalhos de Arquimedes são obras-primas de exposição matemática. Além de exibirem grande originalidade, habilidade computacional e rigor nas demonstrações, são escritos numa linguagem altamente acabada e objetiva. [6]

Uma das soluções de Arquimedes consistia em trissectar o ângulo  $A\hat{O}B$  utilizando a construção *neusis*<sup>2</sup>, fazendo coincidir o vértice do ângulo com o centro da circunferência e marcando os pontos  $A$  e  $B$  sobre a mesma. A seguir, devem ser determinados os pontos  $M$  e  $N$ , o primeiro sobre a circunferência e o segundo no prolongamento de  $OA$  de modo que  $\overline{MN} = \overline{OM} = \overline{OB}$ . É importante ressaltar o quanto era imprecisa essa técnica, tendo em vista a necessidade de ajuste visual, com o auxílio de uma régua na qual eram feitas marcações auxiliares (passando a ser, de alguma forma, graduada), até chegar ao modelo idealizado.



**Figura 8:** A trissecção através de *neusis*.

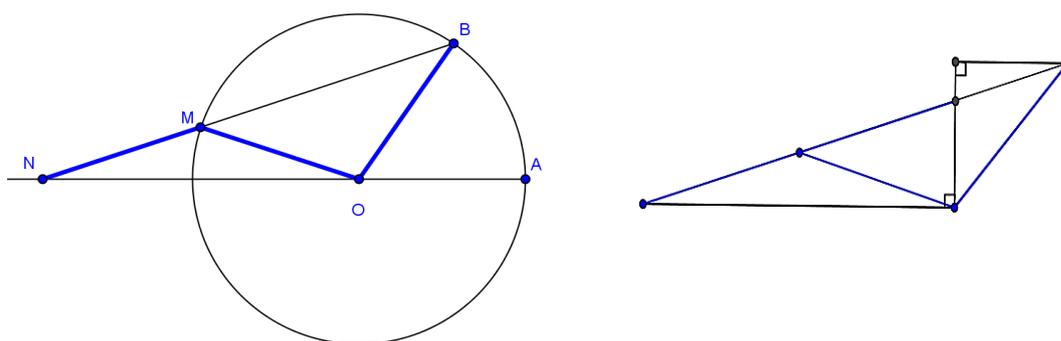
Pelo teorema do ângulo externo, aplicado nos triângulos  $OMN$  e  $ONB$ , respectivamente:  $O\hat{M}B = O\hat{N}M + M\hat{O}N$  e  $A\hat{O}B = O\hat{N}M + O\hat{B}M$ . Além disso,  $O\hat{N}M = M\hat{O}N$  e  $O\hat{M}B = O\hat{B}M$ , já que  $\overline{MN} = \overline{OM} = \overline{OB}$ . Daí, então, decorre

<sup>1</sup> Arquimedes de Siracusa viveu de 287 a.C. a 212 a.C. e foi um brilhante cientista grego ao qual foram atribuídas diversas descobertas e a famosa expressão: *Eureka!*

<sup>2</sup> Em uma construção *neusis* deve-se ajustar um determinado segmento entre duas curvas dadas, com a exigência de que o segmento passe por um ponto fixo, através de uma régua graduada.

que  $\widehat{OMB} = 2 \cdot \widehat{ONM}$ , logo,  $\widehat{AOB} = 3 \cdot \widehat{ONM}$ , concluindo que o ângulo  $\widehat{ONM}$  representa a trisseção de  $\widehat{AOB}$ .

Mais uma vez a figura 5 utilizada por Nicomedes está envolvida no processo, mesmo de forma não muito evidente. Comparando as duas figuras, pode-se ter uma visão mais clara da proximidade dos raciocínios geométricos empregados nas demonstrações.

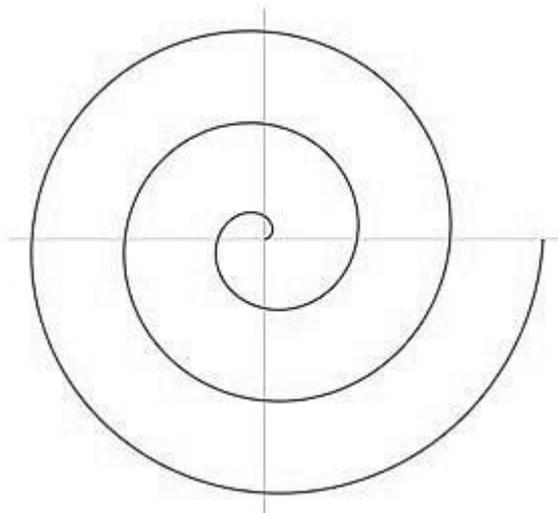


**Figura 9:** Comparação entre as figuras de Arquimedes e Nicomedes.

A outra solução teve como base a espiral de Arquimedes. Valorizando aspectos da Física, uma das áreas de atuação de seu criador, essa espiral pode ser definida conforme a citação:

Fisicamente o espiral de Arquimedes pode ser descrito como o lugar geométrico dos pontos  $P$  de uma reta que gira em torno do centro  $O$  com velocidade angular constante e o ponto  $P$  se desloca sobre a reta e a partir de  $O$  com velocidade constante em relação a essa reta. [7]

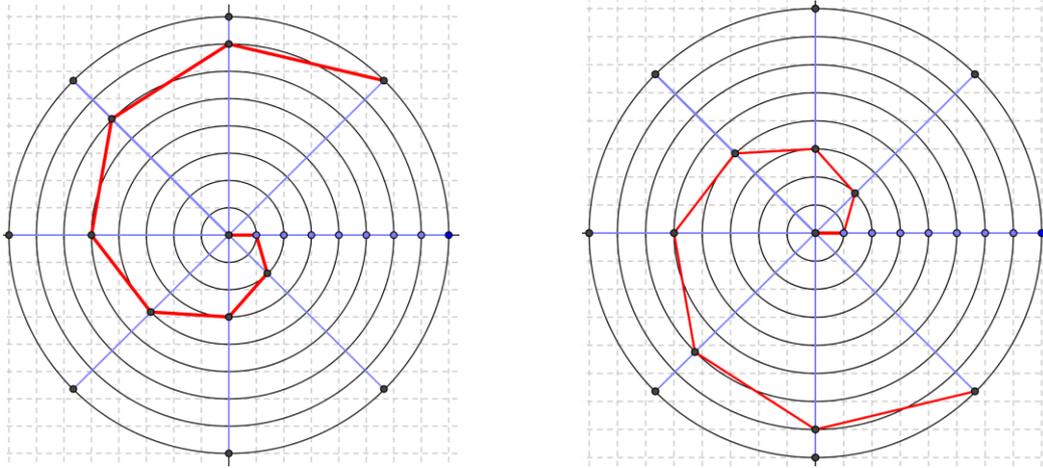
Porém, na época de Arquimedes, não havia recursos para executar o movimento contínuo do ponto. Até mesmo hoje, os computadores provocam a ilusão de continuidade pela grande quantidade de pontos utilizados para construção. Mas ainda é realizada de forma discreta, como na época de sua concepção.



**Figura 10:** Espiral de Arquimedes construída com recursos computacionais.

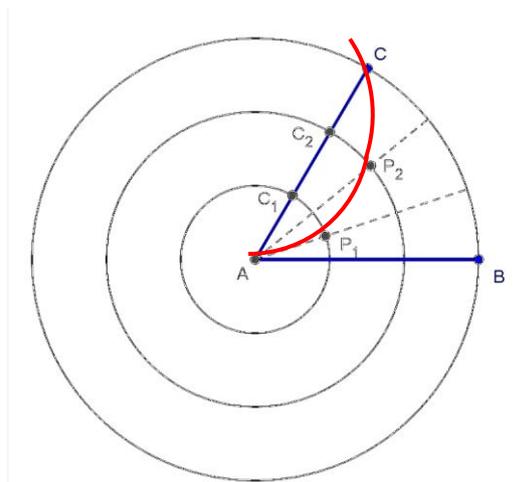
O método de construção consiste primeiramente em dividir uma circunferência em  $n$  partes iguais, traçando os raios nos pontos divisores. Em seguida, deve-se fazer o mesmo com um dos raios traçados, obtendo  $n$  segmentos congruentes. Traçam-se, então, circunferências concêntricas passando pelos pontos divisores do raio tomado inicialmente. A espiral é a linha obtida, a partir do centro comum, ligando com segmentos de reta os pontos de intersecção dos raios traçados com as circunferências obtidas, sequencialmente, para a direita (dextrógira) ou esquerda (levógira).

Nas figuras apresentadas adiante foram traçados segmentos de reta para destacar a precariedade da construção inicial. Porém, de forma bastante intuitiva, havia um esforço no sentido de aumentar significativamente o número de divisões, tendendo para o que atualmente se define melhor com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.



**Figura 11:** Espirais de Arquimedes com segmentos de retas.

A trissecção do ângulo  $\widehat{BAC}$ , feita com o uso da espiral de Arquimedes, inicia-se com a marcação dos pontos  $C_1$  e  $C_2$  dividindo  $AC$  em três partes iguais. Mas, pela definição da espiral, os comprimentos dos arcos entre dois pontos são proporcionais aos dos segmentos que unem suas extremidades. Por isso, com centro em  $A$  e raios  $AC_1$  e  $AC_2$  são traçados dois arcos de circunferência, cujas intersecções com a espiral ocorrem nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. Prolongando os segmentos  $AP_1$  e  $AP_2$  são obtidos três ângulos de mesma medida.



**Figura 12:** Trissecção através da espiral de Arquimedes.

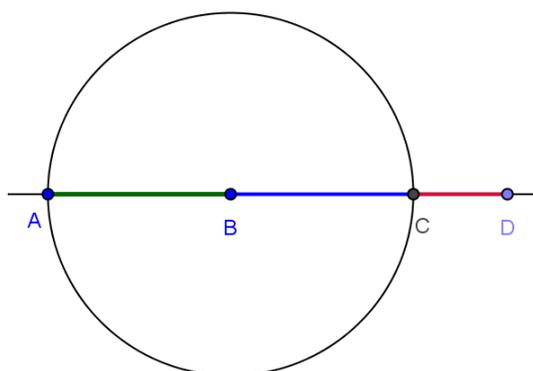
### 3.3. A impossibilidade da trissecção

Durante séculos foram empregados métodos diversos para a trissecção de ângulos. Pela incansável busca sem resultados contundentes, muitos geômetras já admitiam ser essa uma tarefa impossível com o uso de apenas régua não graduada e compasso.

Um grande passo para se chegar à prova dessa impossibilidade veio da Geometria Analítica, apresentada aos matemáticos do século XVII pelo francês René Descartes (1556-1650). Com ela foi possível, a tradução das propriedades das figuras planas em equações, cujas soluções são obtidas a partir das quatro operações fundamentais da aritmética e da raiz quadrada. Era a tentativa de unificar a Geometria e a Aritmética.

Dessa tentativa vem o conceito de número *construtível*, correspondente ao comprimento de um segmento construído através de um número finito de operações com régua e compasso executadas a partir de um segmento tomado como unidade.

De antemão, adicionar ou subtrair medidas de comprimentos na linha reta utilizando régua não graduada e compasso são as operações mais simples e, certamente, não carecem de demonstração. Considerando os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  distintos e colineares, com  $\overline{AB} = a$  e  $\overline{BD} = b$  (sendo  $a$  e  $b$  construtíveis e  $b > a$ ) então,  $\overline{AD} = a + b$  e  $\overline{CD} = b - a$  podem ser construídos conforme sugere a figura:

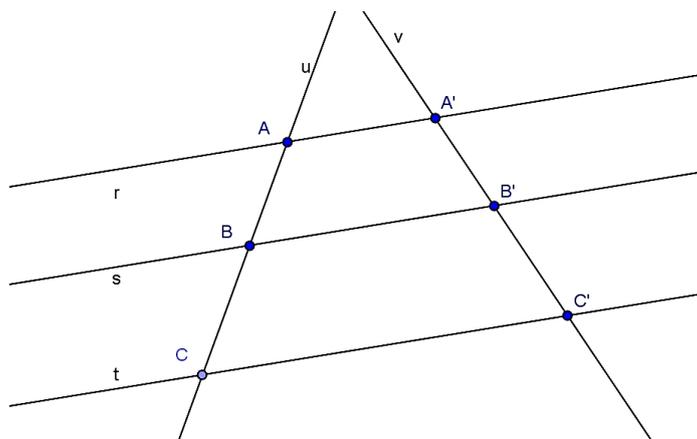


**Figura 13:** Adição e subtração com régua e compasso.

A multiplicação e a divisão decorrem da aplicação do Teorema de Tales<sup>3</sup>. Tomando as paralelas distintas  $r$ ,  $s$  e  $t$ , intersectadas pelas transversais  $u$  e  $v$ , marcam-se os pontos de intersecção  $A$ ,  $B$  e  $C$  sobre  $u$  e  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  sobre  $v$ , respectivamente. Tomando  $\overline{AB}$  como unidade ( $\overline{AB} = 1$ ), obtém-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

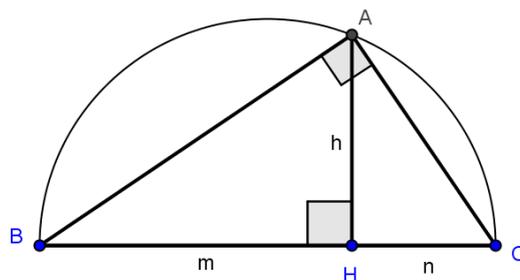
logo,  $\overline{B'C'} = \overline{BC} \cdot \overline{A'B'}$  e, conseqüentemente,  $\overline{A'B'} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$  ou  $\overline{BC} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}}$ .



**Figura 14:** Teorema de Tales.

Para a construção da raiz quadrada, pode-se levar em conta a média geométrica das projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa, que corresponde à altura a ela relativa. Assim, considere-se o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , inscreva-se em uma semicircunferência de diâmetro  $BC$ . Sendo  $H$  a projeção ortogonal de  $A$  sobre  $BC$ , considerem-se:  $\overline{AH} = h$ ,  $\overline{BH} = m$  e  $\overline{CH} = n$ . Das relações métricas no triângulo retângulo tem-se:  $h^2 = m \cdot n$  e, sabendo que  $h > 0$ , obtém-se  $h = \sqrt{m \cdot n}$ .

<sup>3</sup> “Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos **quaisquer** de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.” [4, p. 185]



**Figura 15:** Construção da raiz quadrada.

Para construir uma raiz cujo índice seja uma potência de 2, aplica-se sucessivamente a construção acima, gerando irracionais algébricos. Na tabela a seguir, são apresentados alguns números construtíveis:

$m$	$n$	$h^2 = m.n.$	$h (h > 0)$
1	1	$h^2 = 1.1 = 1 \Rightarrow h = \pm \sqrt{1}$	1
2	1	$h^2 = 2.1 = 2 \Rightarrow h = \pm \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	1	$h^2 = \sqrt{2}.1 = \sqrt{2} \Rightarrow h = \pm \sqrt{\sqrt{2}}$	$\sqrt[4]{2}$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$h^2 = \sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6} \Rightarrow h = \pm \sqrt{\sqrt{6}}$	$\sqrt[4]{6}$

**Tabela 1:** Exemplos de números construtíveis.

Uma prova por indução pode ser feita tomando-se dois números construtíveis da forma  $m = a^{2^{-t}}$  e  $n = b^{2^{-k}}$ , com  $a, b \in \mathbb{R}_+$ ;  $k, t \in \mathbb{N}$ . Substituindo em  $h^2 = m.n$  tem-se  $h^2 = a^{2^{-t}}.b^{2^{-k}}$ , ou seja,  $h = \sqrt{a^{2^{-t}}.b^{2^{-k}}} = a^{2^{-t}.2^{-1}}.b^{2^{-k}.2^{-1}}$  portanto  $h = a^{2^{-(t+1)}}.b^{2^{-(k+1)}}$ , que também é um número construtível, pois o produto de dois construtíveis também é construtível. Além disso, para  $n = 1$ , são obtidos os irracionais que podem ser representados na forma de radical com índice igual a uma potência de 2.

Segundo Sousa [8], os números construtíveis são números algébricos<sup>4</sup> cujo grau é uma potência de 2. De acordo com essa denominação,  $\sqrt{5}$  é um número

<sup>4</sup> Um número real é dito *algébrico* se for raiz de uma equação polinomial da forma  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$ , e cujos coeficientes são números inteiros não simultaneamente todos nulos. O menor  $n$  nestas condições diz-se o *grau* do número algébrico.



mediana relativa ao lado  $AG$ . Nessas condições  $H$  é ponto médio desse segmento e, por isso  $\overline{GH} = \frac{\overline{EG} + \overline{AE}}{2} = \frac{1+y}{2}$ , logo  $\overline{DH} = \overline{GH} + \overline{DG} = 1 + \frac{1+y}{2} = \frac{3+y}{2}$ .

Substituindo na proporção acima tem-se  $\frac{a}{y} = \frac{x}{2} = \frac{\frac{3+y}{2}}{x}$ , donde vêm as relações:  $x^2 = 3 + y$  e  $x \cdot y = 2a$ . Daí,  $x \cdot (x^2 - 3) = 2a$  e, portanto  $x^3 - 3x - 2a = 0$ .

Para cada valor de  $a$ , fica determinado um ângulo  $C\hat{A}F$  a trissectar. Como a proposta inicial mencionava um ângulo de  $60^\circ$ , deve ser considerado  $a = \frac{1}{2}$ . Assim a equação a ser resolvida é  $x^3 - 3x - 1 = 0$  cujas possíveis raízes racionais<sup>5</sup> seriam  $+1$  e  $-1$ . Mas  $x = 1$  e  $x = -1$  não são raízes dessa equação, o que, segundo o teorema já enunciado, garante que as raízes dessa equação não são construtíveis. Com isso, chega-se à conclusão de que o ângulo  $C\hat{A}F$  não pode ser trissectado.

A título de curiosidade, tomando  $a = 0$  na equação  $x^3 - 3x - 2a = 0$ , os pontos  $A$  e  $F$  da figura 14 coincidem e  $B\hat{A}C$  passa a ser reto. Assim é possível obter raízes construtíveis em  $x^3 - 3x = 0$ , que são  $0$ ,  $-\sqrt{3}$  e  $+\sqrt{3}$ . Esta é a prova de que é possível trissectar um ângulo de  $90^\circ$ .

---

<sup>5</sup> O Teorema das raízes racionais para uma equação algébrica de coeficientes inteiros garante que, se existirem, as raízes racionais da mesma são números da forma  $\frac{p}{q}$  onde  $p$  é divisor do termo independente e  $q$ , divisor do coeficiente do termo de maior grau. A sua prova não faz parte dos objetivos deste trabalho, mas pode ser encontrada nos livros didáticos de Ensino Médio.

## 4

# CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO ENSINO DE GEOMETRIA

### 4.1. O pensar geométrico e a resolução de problemas

A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. [1]

Resolver problemas é uma atividade inerente a qualquer estudo em Matemática. Seja para compreender melhor o mundo, desenvolver técnicas para contar ou medir, fazer inferências, modelar fenômenos, subsidiar pesquisas em outros ramos das ciências e, inegavelmente, pelo prazer de vencer desafios.

“[...] o verdadeiro prazer em estudar Matemática é o sentimento de alegria que vem da resolução de um problema, quanto mais difícil um problema, maior a satisfação.” (Thomas Butts, apud [7], p.15).

Polya [10], afirma que resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. A resolução de problemas é a realização específica da inteligência, dom específico do ser humano. Por esse motivo, todo professor de Matemática tem como primeira obrigação fazer o máximo possível para desenvolver em seus alunos a habilidade de resolver problemas. Mas não se pode ensinar o que não se aprendeu.

Os dez mandamentos de Polya para professores citados em palestras e artigos do emérito professor Elon Lages Lima [9] são:

1. Tenha interesse por sua matéria.
2. Conheça sua matéria.
3. Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles.
4. Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.

5. Dê aos seus alunos não apenas informação, mas *know-how*, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.
6. Faça-os aprender a dar palpites.
7. Faça-os aprender a demonstrar.
8. Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão - procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta.
9. Não desvende o segredo de uma vez - deixe os alunos darem palpites antes - deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível.
10. Sugira; não os faça engolir à força.

À luz desses mandamentos cuja aplicação serve para qualquer situação de ensino, o professor de Matemática deve orientar sua prática docente motivando-se para motivar seus alunos. Implementando uma aprendizagem dinâmica, sem contentar-se com atitudes passivas. Valorizar o trabalho metódico, sem dar respostas prontas, aceitar sugestões e buscar em cada problema aspectos que possam ser úteis em outras situações, fomentam a autonomia intelectual.

Os problemas de Geometria não se traduzem apenas na descoberta de um valor que atenda à proposta de um enunciado. Muito antes disso é preciso conceber a figura, reconhecer suas características, interpretar suas propriedades, enfim, uma sequência de raciocínios que pode até não ser percebida, mas é certamente necessária. Além do mais, o processo de construção das figuras antes e durante a resolução do problema, já evidencia a utilização de técnicas e habilidades, estabelecendo relações entre formas e medidas capazes de solucionar a questão. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [10], ensinar Geometria no Ensino Médio deve possibilitar que essas questões aflorem e possam ser discutidas e analisadas pelos alunos.

Para compreender melhor as dificuldades apresentadas pelos alunos, o casal de holandeses, Pierre e Dina van Hiele (apud [11]), realizou estudos no sentido de classificar a aprendizagem de Geometria em cinco diferentes níveis. A identificação do nível correspondente ao desenvolvimento apresentado pelo aluno e subsidia o planejamento da atividade docente, visando facilitar a transição de um nível para o outro.

Na tabela a seguir, é feita uma descrição sucinta das habilidades adquiridas e características apresentadas em cada nível. A expectativa é que um aluno, ao terminar o Ensino Médio, tenha atingido o nível 4 dessa escala.

Nível	Habilidade	Características
1	Visualização	Reconhece visualmente uma figura geométrica, tem condições de aprender o vocabulário geométrico e ainda não reconhece as propriedades de uma determinada figura.
2	Análise	Identifica as propriedades de uma determinada figura, e não faz inclusão de classes.
3	Dedução Informal	Já é capaz de fazer a inclusão de classes, acompanhar uma prova informal, mas não é capaz de construir uma outra.
4	Dedução Formal	É capaz de fazer provas formais, e raciocina num contexto de um sistema matemático completo.
5	Rigor	É capaz de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas. É neste nível que as geometrias não euclidianas são compreendidas.

**Tabela 2:** Teoria van Hiele

Outros pesquisadores argumentam que os níveis de van Hiele não são discretos, e sim, contínuos. Por isso sugerem dividir em níveis a aquisição dos conceitos, propondo uma hierarquia resultante de avaliações. No entanto, as discussões a respeito de avaliação fogem ao escopo deste trabalho.

#### 4.2. Problemas de Geometria pouco geométricos

É comum encontrarmos, no cotidiano escolar, listas e mais listas de exercícios de Geometria nas quais o menos importante é o conhecimento geométrico de fato. Na maioria das vezes há uma exaustiva repetição de aplicações de fórmulas em detrimento de uma verdadeira análise de propriedades geométricas, visualização de particularidades das figuras e, principalmente a construção de elementos auxiliares, responsáveis por algumas resoluções brilhantes, de alto teor geométrico, pouco cálculo e livre do algebrismo.

Uma prática pedagógica que privilegia apenas alguns temas matemáticos em detrimento de outros certamente trará graves consequências para a construção dos saberes matemáticos pelos alunos.[24]

Um bom exemplo disso ocorre nas aulas iniciais sobre aplicações do Teorema de Pitágoras. Elas se transformam em uma repetitiva, e por vezes exaustiva, resolução de equações. Inicialmente são dadas as medidas dos catetos para cálculo da medida da hipotenusa e, em seguida, as medidas de um cateto e da hipotenusa para que seja determinada a medida do outro cateto. Na fase seguinte desse “treinamento”, as medidas dos lados do triângulo retângulo são dadas na forma de expressões algébricas e se faz necessário um grande esforço para aplicar a fórmula, desenvolver os produtos notáveis, resolver uma equação (geralmente do 2º grau), determinar a incógnita, verificar se a solução da equação atende às condições iniciais do problema.

Por vezes, essa última etapa fica sem o merecido destaque pelo desgaste do aluno. O momento de análise das propriedades geométricas, da condição de existência da figura e a consolidação geométrica do problema são deixados de lado e a atenção maior é dada à parte algébrica.

A forma lógica dedutiva que a Geometria utiliza para interpretar as formas geométricas e deduzir propriedades dessas formas é um exemplo de como a Matemática lê e interpreta o mundo à nossa volta.[10]

É indiscutível a importância do algebrismo na resolução. O que se questiona aqui é o desvio do foco geométrico. Questões de Geometria com muitos cálculos costumam desmotivar boa parte dos alunos que até demonstram interesse, principalmente quando a plasticidade das figuras é atrativa, mas ficam frustrados quando a parte geométrica é o menos importante na resolução. Além disso, a simples memorização de fórmulas ou relações nem sempre indica o grau de compreensão: o que pode acontecer é a redução da essência do assunto a um nível inferior.

Mais uma vez o pragmatismo rouba a cena e mascara, através de resultados em avaliações pouco significativas, a realidade da construção do conhecimento por parte do aluno. Tornou-se uma rotina da prática docente a tentativa de mostrar todas as possíveis questões a serem contempladas nas avaliações e, por sua vez, os discentes muitas vezes conseguem lograr sucesso pela repetição exaustiva de modelos, sem a preocupação com questionamentos e muito menos com a busca de novos caminhos.

Não se trata de abandonar a tarefa metódica de fixar conteúdos através de uma sistemática dedicação aos estudos. Mas a aprendizagem em Matemática se

torna menos significativa quando se afasta do cunho investigativo, deixando de ser Ciência. Certamente esse é um dos motivos para o número de estudantes interessados em seguir carreira na Matemática ser cada vez menor.

### 4.3. A demonstração em Geometria

Não faz muito tempo que diversos livros didáticos do Ensino Fundamental deixavam a parte de Geometria para os últimos capítulos. Essa era a grande desculpa de alguns professores para não trabalharem esses conteúdos, deixando-os para o próximo período e definitivamente esquecendo deles no ano seguinte.

A geometria é praticamente excluída do currículo escolar ou passa a ser, em alguns casos restritos, desenvolvida de uma forma muito mais formal a partir da introdução da Matemática Moderna, a qual se dá justamente quando se acirra a luta pela democratização das oportunidades educacionais, concomitante à necessidade de expansão da escolarização a uma parcela mais significativa da população. [24]

Mesmo atualmente quando, na maior parte dos livros didáticos, Geometria, Álgebra e Aritmética são trabalhadas ao longo de toda obra, a atenção dispensada às demonstrações geométricas ainda é pequena. A priorização no emprego de fórmulas na memorização e mecanização de processos ainda é bastante frequente.

A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços.[10]

Intuitivamente, é possível abstrair algumas propriedades geométricas das figuras. Conjecturar a respeito delas já faz parte de um processo científico que só irá se completar após a consolidação do conhecimento. Sob esse aspecto, a demonstração formal é decisiva, confirmando a Matemática como base para todas as outras ciências exatas. Além disso, presta valiosos serviços em outras áreas do conhecimento.

O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas ideias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares.[10]

Para Fetissov [12], a Geometria apresenta três etapas de evolução ao longo da História: se inicia de forma subconsciente, passa por um estágio científico e atinge o ápice quando assume o caráter demonstrativo. A Geometria subconsciente é observada até mesmo nas noções mais básicas de ocupação territorial, comparação de distâncias, formas, áreas e volumes. Já a fase científica, se justifica pelo emprego de algum tipo de metodologia, se manifesta através de procedimentos empíricos, de ensaio e erro, como na Geometria dos egípcios e babilônios. Por fim, a fase demonstrativa surge na Geometria dos gregos se define a partir da construção axiomática proposta por Euclides, cuja compilação do conhecimento geométrico mais significativo acumulado até aquele momento, obedeceu a uma argumentação lógica de formalidade inusitada para a época.

A descoberta de geometrias não euclidianas na primeira metade do século XIX passou a exigir maior rigor nas demonstrações. Cada vez mais o caráter intuitivo cedeu lugar a uma construção axiomática, marcada pela preocupação com a formalização do discurso lógico.

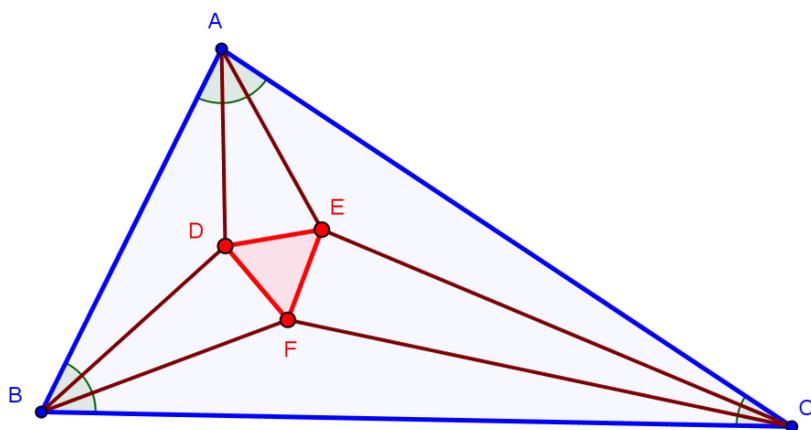
No entanto, somente em 1899 o matemático alemão David Hilbert (1862-1943) publicou a primeira sistematização formal da Geometria. Na obra *Fundamentos de Geometria* o autor preenche as falhas lógicas de Euclides, evitando as armadilhas da intuição e construindo um sistema geométrico euclidiano grandemente aprimorado.

Assim, a demonstração de uma proposição geométrica tem por objetivo a comprovação de sua validade. Consiste, portanto, em um conjunto de raciocínios feitos a partir de axiomas e verdades já demonstradas anteriormente, fundamentando cada passo no sentido de se chegar a uma conclusão irrefutável. Deixa de lado o caráter indutivo, que leva a conclusões gerais por meio do exame de numerosos casos particulares e assume definitivamente o caráter dedutivo, pois verdades mais amplas passam a ser aplicadas a casos mais particulares.

## 5 O TRIÂNGULO DE MORLEY

O matemático britânico Frank Morley (1860-1937), membro da *American Mathematical Society*<sup>1</sup>, instituição da qual foi presidente no período entre 1919 e 1920, desenvolveu estudos em Geometria e Álgebra. Em 1899 conjecturou a respeito do triângulo equilátero cujos vértices são obtidos a partir da intersecção de trissetrizes adjacentes dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Tal conjectura permaneceu durante alguns anos como curiosidade matemática até que algumas demonstrações pudessem confirmá-la como teorema.

**“Em qualquer triângulo, os três pontos de intersecção das trissetrizes adjacentes formam sempre um triângulo equilátero.”**



**Figura 17:** Triângulo de Morley

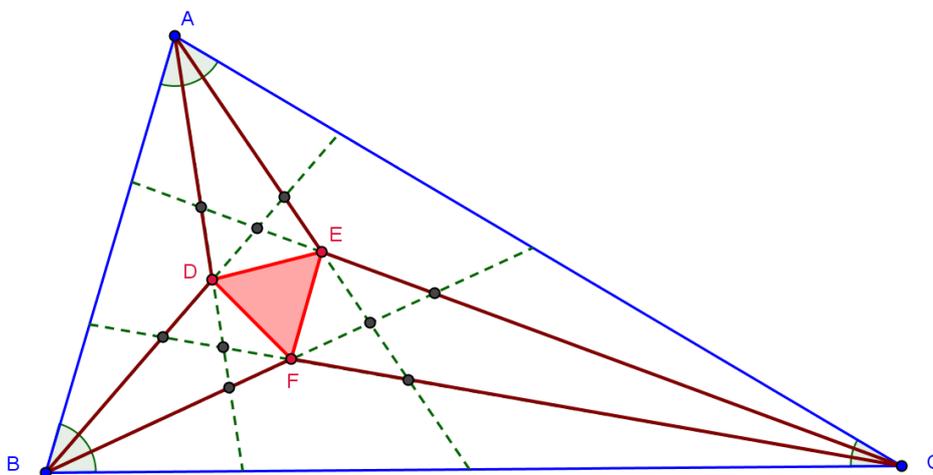
O triângulo de Morley, em sua primeira versão apenas considerava trissetrizes internas de ângulos de um triângulo. Porém, hoje existem diversas generalizações que utilizam ângulos externos e até mesmo extensões a outros polígonos.

---

<sup>1</sup> Sociedade Americana de Matemática: associação de matemáticos profissionais dedicados à pesquisa e ao ensino de Matemática, de maneira análoga à SBM (Sociedade Brasileira de Matemática).

A construção desse triângulo apenas com régua não graduada e compasso não é possível, tendo em vista a trissecção dos ângulos já citada anteriormente. Porém, a prova do teorema não tardou por esse motivo. A dificuldade na construção servia muito mais como desculpa do que propriamente como entrave.

Na concepção mais completa, as seis trissetrizes se intersectam em doze pontos distintos. Perceber a formação de um triângulo equilátero com vértices em apenas três não é tão simples quanto pode parecer.



**Figura 18:** Os doze pontos de intersecção da trissetrizes de Morley.

A construção do triângulo de Morley com a utilização do GeoGebra está descrita no APÊNDICE II. Inegavelmente, a utilização do recurso computacional facilita não só a construção, mas principalmente a visualização.

Mas, mesmo antes de serem conhecidos os recursos computacionais, já havia diversas demonstrações. Uma das mais completas sob o ponto de vista geométrico trata das propriedades de ângulos formados entre retas paralelas e transversais, congruência de figuras planas, inscrição em uma circunferência e muito outros conceitos e propriedades costumeiramente tratados em aulas de Geometria.

O avanço da Geometria Analítica, criando a possibilidade da construção em um sistema de coordenadas retangulares foi um dos fatores preponderantes para a descoberta de novas relações entre as medidas dos lados e dos ângulos do triângulo. Determinar as equações das trissetrizes e seus pontos de intersecção

podia até não ser tarefa simples, mas se apresentava como uma boa estratégia para chegar à prova.

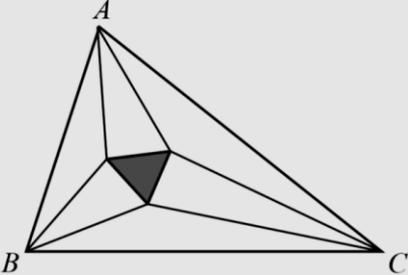
A utilização da Trigonometria ratificou as demonstrações já existentes. Assim, aplicando-se algumas identidades, transformações trigonométricas, as leis dos senos e dos cossenos chega-se a uma prova que possibilita resgatar conteúdos do Ensino Médio, porém com maior profundidade.

No próximo capítulo foi destacada a aplicação do Teorema de Morley em uma questão olímpica e, logo depois, algumas demonstrações são apresentadas, enfatizando a possibilidade de aplicação no Ensino Básico.

## 6 UMA QUESTÃO OLÍMPICA

Na 1ª fase da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) de 2012, foi proposta uma questão aos alunos de Nível 3 (Ensino Médio) envolvendo o Triângulo de Morley. O enunciado dava os esclarecimentos básicos a respeito da figura, cobrando aplicações de conceitos comumente trabalhados no Ensino Básico. Abaixo está a cópia fiel da questão da prova:

**22)** O teorema de Morley diz que, ao traçarmos as retas que dividem cada ângulo interno de um triângulo  $ABC$  em três ângulos iguais, obtemos um triângulo equilátero chamado *triângulo de Morley de  $ABC$* , como o que está destacado na figura a seguir:



Qual é a medida do lado do triângulo de Morley de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2?

A)  $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$                       B)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$                       C)  $\sqrt{6} - 2$   
D)  $2 - \sqrt{3}$                               E)  $2\sqrt{3} - \sqrt{6}$

**Figura 19:** Teorema de Morley na OBM 2012.

A solução da banca valoriza aspectos fundamentais do pensar geométrico. Primeiramente, em se tratando de um triângulo retângulo isósceles, a simetria de alguns elementos é de grande importância. Além disso, os ângulos obtidos nas trissecções facilitam a aplicação de relações trigonométricas.

22) (A)

Pela simetria da figura, temos que  $\widehat{EDB} = \widehat{FDC}$ . Pelo Teorema de Morley, temos que  $\widehat{EDF} = 60^\circ$ . Além disso,  $\widehat{BDC} = 150^\circ$ , pois  $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = 15^\circ$ . Daí, teremos que  $\widehat{EDB} = 75^\circ$ , donde o triângulo  $BED$  é retângulo em  $E$ . A hipotenusa  $BC$  do triângulo  $ABC$  é igual a  $2\sqrt{2}$ . Traçando a altura relativa à base do triângulo isósceles  $BDC$ , temos que  $BD = \frac{\sqrt{2}}{\cos 15^\circ}$  e no triângulo  $BED$ , temos que  $ED = BD \cdot \sin 15^\circ$  e daí  $ED = \sqrt{2} \tan 15^\circ = \sqrt{2}(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ .

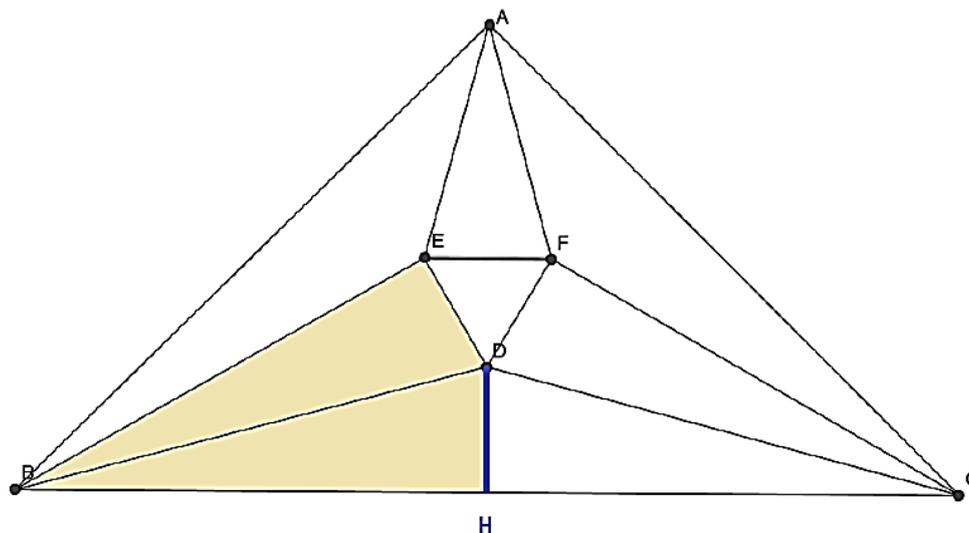
Observação: Usando a fórmula  $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$ , temos que

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

**Figura 20:** Resolução da questão 22, nível 3, da OBM (1ª fase – 2012).

A resolução acima pode ter alguns passos suprimidos se for visualizada a congruência dos triângulos  $BED$  e  $BHD$ , determinado pela altura  $DH$ , traçada a partir do ponto  $D$  no triângulo  $BDC$  (pelo caso ALA<sup>1</sup>). A figura a seguir ilustra melhor a situação proposta.

<sup>1</sup> Um dos casos de congruência de triângulos é referenciado pela sigla ALA, significando que há nos triângulos considerados, um lado congruente entre dois ângulos respectivamente congruentes.



**Figura 21:** Triângulos  $BDE$  e  $BHE$  congruentes.

Essa intervenção permite concluir que  $\overline{ED} = \overline{DH} = \sqrt{2} \cdot \tan 15^\circ$ . Daí segue a resolução da banca, inserindo o valor da tangente do ângulo de  $15^\circ$ .

Temas importantes da Matemática, que foram abordados em competições olímpicas, pouco conhecidos da maioria dos estudantes e professores, são costumeiramente tratados em publicações da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Confirmando essa observação, em 2013 foi publicada uma demonstração do Teorema de Morley em artigo da Revista EUREKA! N° 37 e nele, além de ser ressaltada a beleza do teorema, a sua descoberta é considerada até certo ponto inusitada, pois já se esperava terem sido obtidos os resultados mais relevantes sobre triângulos há alguns séculos. [14]

Nesse artigo, os autores utilizaram a Trigonometria como principal recurso para a demonstração. Porém, citam a existência de muitas outras possibilidades de aplicação para esse fim. No capítulo seguinte há duas dessas demonstrações, nas quais se pretende utilizar conteúdos inerentes ao Ensino Básico, mas com um pouco mais de profundidade.

## 7

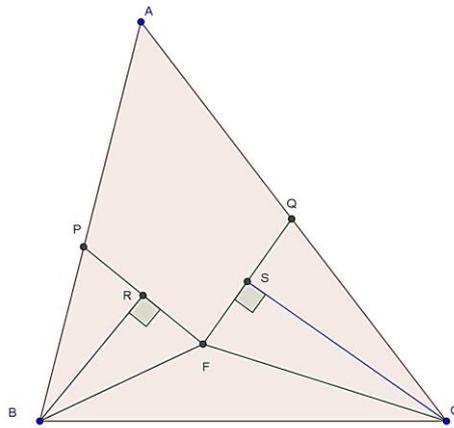
# DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE MORLEY

### 7.1. Através da Geometria Euclidiana Plana

Observando a prova de Dan Sokolowsky publicada na *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática* [15], foi feita uma demonstração que se vale apenas da Geometria Euclidiana Plana. A opção pela apresentação de diversas figuras tem por objetivo facilitar a visualização das propriedades aplicadas, sem a necessidade de retorno ao enunciado.

Inicialmente, se faz necessário provar o seguinte lema:

**Lema:** Para um triângulo qualquer  $ABC$ , no qual as medidas dos ângulos internos são dadas por  $\widehat{BAC} = 3\alpha$ ,  $\widehat{ABC} = 3\beta$  e  $\widehat{ACB} = 3\gamma$ , se  $BF$  e  $CF$  são trissetrizes adjacentes ao lado  $BC$ , então os segmentos  $FP$  e  $FQ$ , perpendiculares às outras trissetrizes de mesma origem que as primeiras, formam entre si um ângulo cuja medida é igual a  $120^\circ - 2\alpha$ .



**Figura 22:** Um lema importante.

#### Demonstração

Sendo  $\widehat{BFC} = 180^\circ - (\beta + \gamma)$ ,  $\widehat{BFP} = 90^\circ - \beta$  e  $\widehat{CFQ} = 90^\circ - \gamma$ , então:

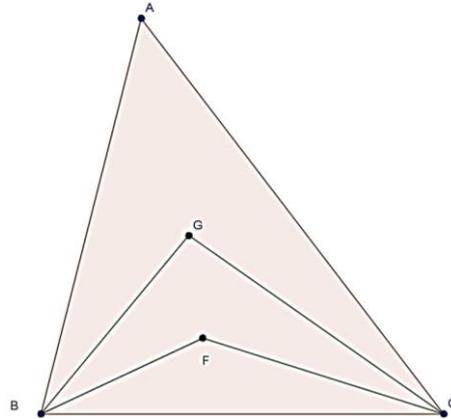
$$\widehat{PFQ} = 360^\circ - [180^\circ - (\beta + \gamma) + 90^\circ - \beta + 90^\circ - \gamma] = 2(\beta + \gamma).$$

Mas,  $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$ , ou seja,  $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$  e daí decorre que:

$$(\beta + \gamma) = 60^\circ - \alpha \text{ e, finalmente, } \widehat{PFQ} = 2(60^\circ - \alpha) = 120^\circ - 2\alpha.$$

A seguir, passo a passo conduz-se a demonstração do Teorema de Morley propriamente dita:

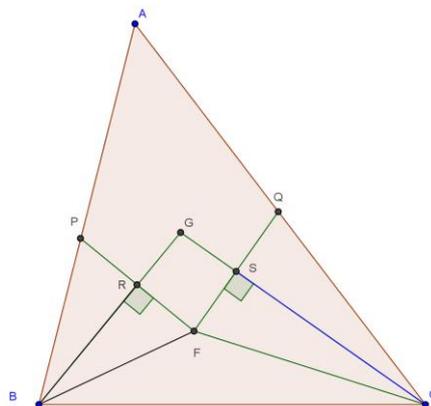
**Passo 1:** Dado um triângulo  $ABC$ , constroem-se as trissetrizes de  $\hat{A}BC$  e de  $\hat{A}CB$ , assim obtendo os pontos  $F$  e  $G$ . Assim,  $\overline{BF}$  e  $\overline{CF}$  são, respectivamente, bissetrizes de  $\hat{CBG}$  e  $\hat{BCG}$ , portanto,  $F$  é incentro do triângulo  $BCG$ .



**Figura 23:** Demonstração geométrica – Passo 1.

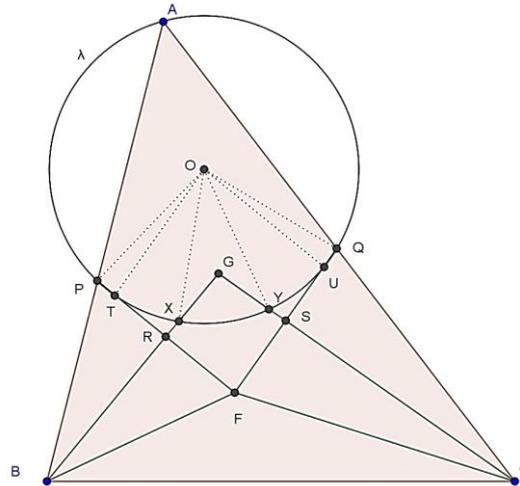
**Passo 2:** Traçando  $\overline{PF}$  e  $\overline{QF}$ , respectivamente perpendiculares a  $\overline{BG}$  e  $\overline{CG}$ , obtém-se os pontos  $R$  e  $S$ , médios desses segmentos e, conseqüentemente, as mediatrizes  $\overline{BG}$  e  $\overline{CG}$ .

Mas,  $F$  é incentro do triângulo  $BCG$ , logo  $\overline{PR} = \overline{RF} = \overline{FS} = \overline{QS}$  e, obviamente,  $\overline{PF} = \overline{QF}$ .



**Figura 24:** Demonstração geométrica – Passo 2.

**Passo 3:** Traçando uma circunferência  $\lambda$  definida pelos pontos  $A$ ,  $P$  e  $Q$ , obtém-se os pontos  $X$  e  $Y$ , respectivamente, sobre  $\overline{BG}$  e  $\overline{CG}$ . Também são obtidos  $T$  e  $U$  em  $\overline{PR}$  e  $\overline{QS}$ , respectivamente. Sendo  $O$  o centro de  $\lambda$ , tem-se  $P\hat{O}Q = 6\alpha$  e  $\overline{OP} = \overline{OT} = \overline{OX} = \overline{OY} = \overline{OU} = \overline{OQ}$ .



**Figura 25:** Demonstração geométrica – Passo 3.

**Passo 4:** Sendo  $\overline{OP} = \overline{OQ}$  e  $\overline{PF} = \overline{QF}$ , ligando os pontos  $O$  e  $F$ , são obtidos, pelo caso LLL<sup>1</sup>, os triângulos congruentes  $OPF$  e  $OQF$ . Neles, os ângulos internos opostos ao lado  $OF$  são dados por:

$O\hat{P}F = O\hat{Q}F = 180^\circ - (3^\alpha + 60^\circ - \alpha) = 120^\circ - 2\alpha$  e, conseqüentemente,  $OF$  é bissetriz de  $P\hat{F}Q$  e de  $P\hat{O}Q$ .

Logo,  $P\hat{F}Q = O\hat{P}F = O\hat{Q}F$  e  $P\hat{F}O = Q\hat{F}O = 60^\circ - \alpha$ .

Analogamente,  $OTF$  e  $OUF$  também são triângulos congruentes e sendo  $OPT$  e  $OQU$  triângulos isósceles, tem-se:

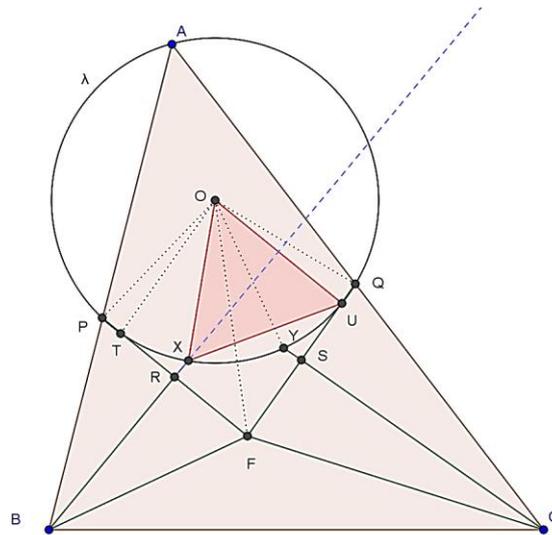
$$O\hat{T}F = O\hat{U}F = 180^\circ - (120^\circ - 2\alpha) = 60^\circ + 2\alpha.$$

Daí pode-se concluir que  $OU$  e  $PF$  são paralelos e  $F\hat{O}U = F\hat{O}T = 60^\circ - \alpha$ , então  $F\hat{O}U = F\hat{O}T = T\hat{F}O = U\hat{F}O$  e assim, o quadrilátero  $OTFU$  é um losango, pois  $\overline{FT} = \overline{FU} = \overline{OT} = \overline{OU}$ .

Além disso,  $OPFU$  é um trapézio isósceles ( $OU \parallel PF$  e  $P\hat{F}U = O\hat{P}F$ ), portanto, a semirreta  $\overline{BR}$  é mediatriz tanto de  $PF$ , quanto de  $OU$  e daí, então tem-se  $\overline{OX} = \overline{XU} = \overline{OU}$ , ou seja, o triângulo  $OXU$  é equilátero.

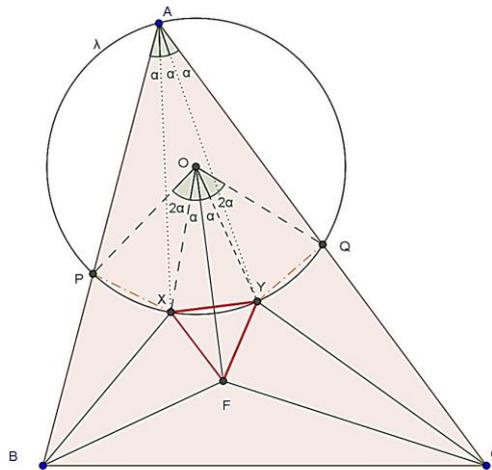
Mas, se  $F\hat{O}U = 60^\circ - \alpha$  e  $X\hat{O}U = 60^\circ$ , então  $F\hat{O}X = \alpha$ .

<sup>1</sup> Caso de congruência segundo o qual os lados de dois triângulos têm medidas respectivamente iguais.



**Figura 26:** Demonstração geométrica – Passo 4.

**Passo 5:** Construindo-se um ponto  $Y$  nas mesmas condições impostas ao ponto  $X$ , pela simetria em relação ao segmento  $OF$ , pode-se afirmar que  $X\hat{O}Y = 2\alpha$  e, então, os pontos  $X$  e  $Y$  trissectam o arco  $PQ$ .



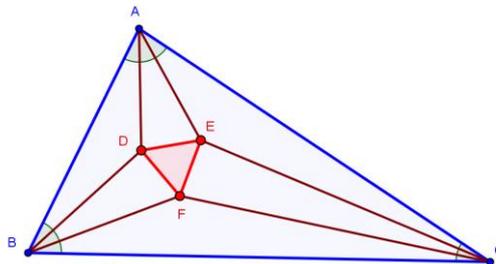
**Figura 27:** Demonstração geométrica – Passo 5.

Decorre desse fato que  $AX$  e  $AY$  são trissetrizes de  $B\hat{A}C$  e  $\overline{PX} = \overline{XY} = \overline{YQ}$ . Como  $X$  e  $Y$  foram construídos sobre mediatrizes, tem-se  $\overline{FX} = \overline{YF} = \overline{XY}$ . Logo,  $X$ ,  $Y$  e  $F$  são os vértices do triângulo de Morley.

## 7.2. Através das Relações Trigonômétricas

Outra demonstração pode ser feita com aplicações de relações trigonométricas, tema frequente nas aulas do Ensino Médio. Trata-se de aplicar basicamente a Lei dos Senos, a Lei dos Cossenos, adição de arcos e as transformações em produto. O desenvolvimento a seguir, se baseia no artigo publicado na revista EUREKA! [18].

A figura 17, apresentada anteriormente, será o ponto de partida. Nela, serão considerados ângulos  $\widehat{BAC} = a$ ,  $\widehat{ABC} = b$  e  $\widehat{ACB} = c$ .



Inscribendo  $ABC$  em uma circunferência de raio  $R$ , pela Lei dos senos, pode-se afirmar que:  $\frac{\overline{BC}}{\text{sen } a} = 2R$ , ou seja,  $\overline{BC} = 2R \cdot \text{sen } a$ . (1)

Fazendo uso da identidade trigonométrica demonstrada no Apêndice III,  $\text{sen } a = 4 \text{sen } \frac{a}{3} \cdot \text{sen } \frac{\pi+a}{3} \cdot \text{sen } \frac{2\pi+a}{3}$ , substituindo em (1), decorre que:

$$\overline{BC} = 8R \cdot \text{sen } \frac{a}{3} \cdot \text{sen } \frac{\pi+a}{3} \cdot \text{sen } \frac{2\pi+a}{3}.$$

No triângulo  $BCF$ , onde  $\widehat{BFC} = \pi - \left(\frac{b+c}{3}\right) = \pi - \left(\frac{\pi-a}{3}\right) = \frac{2\pi+a}{3}$ . Novamente pela Lei dos Senos, tem-se:

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } \frac{2\pi+a}{3}} = \frac{\overline{BF}}{\text{sen } \frac{c}{3}} \Rightarrow \frac{8R \cdot \text{sen } \frac{a}{3} \cdot \text{sen } \frac{\pi+a}{3} \cdot \text{sen } \frac{2\pi+a}{3}}{\text{sen } \frac{2\pi+a}{3}} = \frac{\overline{BF}}{\text{sen } \frac{c}{3}}$$

$$\text{logo, } \overline{BF} = 8R \cdot \text{sen } \frac{a}{3} \cdot \text{sen } \frac{\pi+a}{3} \cdot \text{sen } \frac{c}{3}.$$

Analogamente, Repetindo o processo para o triângulo  $ABD$ , tem-se:

$$\overline{BD} = 8R \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi+c}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{a}{3}.$$

Para simplificar os cálculos, faz-se  $k = 8R \cdot \operatorname{sen} \frac{a}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{3}$  e, assim são obtidos:  $\overline{BF} = k \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi+a}{3}$  e  $\overline{BD} = k \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi+c}{3}$ . Com essas medidas, aplica-se a Lei dos Cossenos no triângulo  $BDF$ :

$$\overline{DF}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{BF} \cdot \overline{BD} \cdot \cos \frac{b}{3}$$

$$\overline{DF}^2 = \left( k \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi+a}{3} \right)^2 + \left( k \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi+c}{3} \right)^2 - 2 \cdot \left( k \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi+a}{3} \right) \cdot \left( k \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi+c}{3} \right) \cdot \cos \frac{b}{3}$$

$$\overline{DF}^2 = k^2 \cdot \left( \operatorname{sen}^2 \frac{\pi+a}{3} + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi+c}{3} \right) - k^2 \cdot 2 \cdot \left( \operatorname{sen} \frac{\pi+a}{3} \right) \cdot \left( \operatorname{sen} \frac{\pi+c}{3} \right) \cdot \cos \frac{b}{3}$$

$$\overline{DF}^2 = k^2 \cdot \left( \frac{1 - \cos \frac{2\pi+2a}{3}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{2\pi+2c}{3}}{2} \right) - k^2 \left[ \left( \cos \frac{a-c}{3} \right) - \left( \cos \frac{2\pi+a+c}{3} \right) \right] \cdot \cos \frac{b}{3}$$

$$\overline{DF}^2 = k^2 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\cos \frac{2\pi+2a}{3} + \cos \frac{2\pi+2c}{3}}{2} \right) + \left( \cos \frac{2\pi+a+c}{3} \right) \cdot \cos \frac{b}{3} - \left( \cos \frac{a-c}{3} \cdot \cos \frac{b}{3} \right) \right]$$

$$\overline{DF}^2 = k^2 \cdot \left[ 1 - \left( \cos \frac{2\pi+a+c}{3} \cdot \cos \frac{a-c}{3} \right) + \left( \cos \frac{2\pi+a+c}{3} \right) \cdot \cos \frac{b}{3} - \left( \cos \frac{a-c}{3} \cdot \cos \frac{b}{3} \right) \right]$$

$$\overline{DF}^2 = k^2 \cdot \left[ 1 - \left( \cos \frac{2\pi+\pi-b}{3} \cdot \cos \frac{a-c}{3} \right) + \left( \cos \frac{2\pi+\pi-b}{3} \right) \cdot \cos \frac{b}{3} - \left( \cos \frac{a-c}{3} \cdot \cos \frac{b}{3} \right) \right]$$

$$\overline{DF}^2 = k^2 \cdot \left[ 1 - \left( \cos \left( \pi - \frac{b}{3} \right) \cdot \cos \frac{a-c}{3} \right) + \cos \left( \pi - \frac{b}{3} \right) \cdot \cos \frac{b}{3} - \left( \cos \frac{a-c}{3} \cdot \cos \frac{b}{3} \right) \right]$$

$$\overline{DF}^2 = k^2 \cdot \left[ 1 + \cos \frac{b}{3} \cdot \cos \frac{a-c}{3} - \cos \frac{b}{3} \cdot \cos \frac{b}{3} - \left( \cos \frac{a-c}{3} \cdot \cos \frac{b}{3} \right) \right]$$

$$\overline{DF}^2 = k^2 \cdot \left[ 1 - \cos^2 \frac{b}{3} \right] = k^2 \cdot \left[ \operatorname{sen}^2 \frac{b}{3} \right]$$

Como  $\overline{DF} > 0$ , tem-se  $\overline{DF} = k \cdot \operatorname{sen} \frac{b}{3}$ .

Mas,  $k = 8R \cdot \operatorname{sen} \frac{a}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{3}$  e assim:  $\overline{DF} = 8R \cdot \operatorname{sen} \frac{a}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{b}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{3}$ .

Fazendo as mesmas aplicações partindo, respectivamente, dos triângulos  $ABD$  e  $ACE$ , obtém-se  $\overline{DE} = \overline{EF} = 8R \cdot \operatorname{sen} \frac{a}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{b}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{3}$ .

Logo,  $\overline{DE} = \overline{DF} = \overline{EF}$  e daí decorre que  $DEF$  é equilátero.

## 8 EXTENSÕES DO TEOREMA DE MORLEY

### 8.1. Em paralelogramos

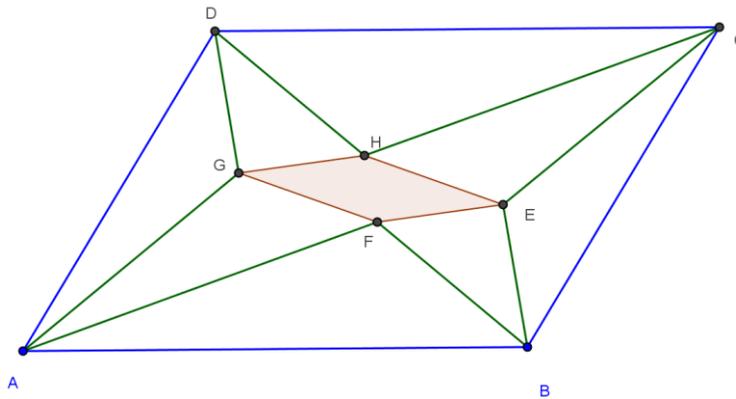
Analogamente ao que acontece em triângulos, as trissetrizes adjacentes dos ângulos internos, podem formar, no interior de um paralelogramo, outro paralelogramo. A prova desse fato decorre da congruência dos triângulos de bases paralelas e congruentes, pelo caso ALA:

- $ABF \equiv CDH$ , então  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ,  $\overline{BF} = \overline{DH}$  e  $\overline{AF} = \overline{CH}$  e
- $ADG \equiv CBE$ , então  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ,  $\overline{AG} = \overline{CE}$  e  $\overline{DG} = \overline{BE}$ .

Daí, como cada ângulo interno foi trissectado, por transitividade das medidas dos lados, decorrem as congruências, pelo caso LAL<sup>1</sup>, dos triângulos:

- $BEF \equiv DGH$ , então  $\overline{BE} = \overline{DG}$ ,  $\overline{BF} = \overline{DH}$  e  $\overline{FE} = \overline{GH}$  e
- $AFG \equiv CHE$ , então  $\overline{AF} = \overline{CH}$ ,  $\overline{AG} = \overline{CE}$  e  $\overline{FG} = \overline{EH}$ .

Como  $\overline{FE} = \overline{GH}$  e  $\overline{FG} = \overline{EH}$ , o quadrilátero  $EFGH$  é um paralelogramo.

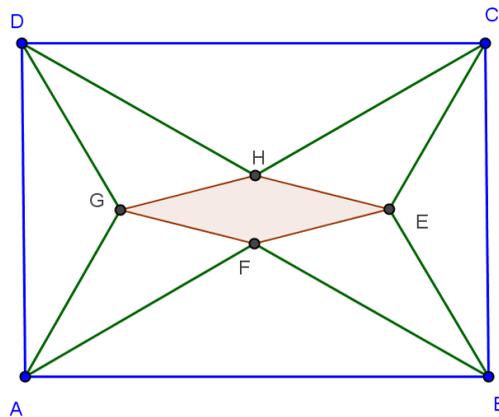


**Figura 28:** Teorema de Morley em um paralelogramo.

<sup>1</sup> Caso de congruência de triângulos, referenciado pela sigla LAL, significando que há nos triângulos considerados, um ângulo congruente entre dois lados respectivamente congruentes.

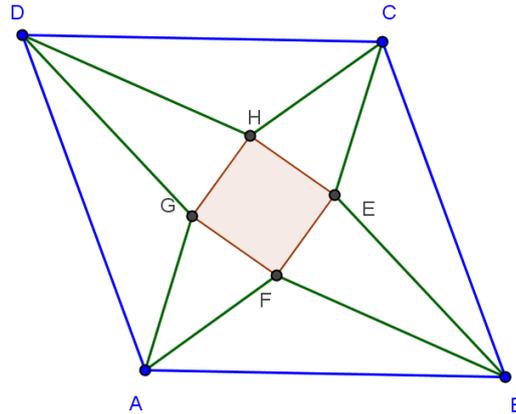
Para os diversos tipos de paralelogramos, o resultado pode ser um losango ou até mesmo um retângulo. As provas desses casos são similares à apresentada acima.

Se  $ABCD$  é retângulo, a trisseção gera ângulos de  $30^\circ$ . As trissetrizes adjacentes aos lados opostos são congruentes e formam quatro triângulos congruentes  $ABF$ ,  $BCE$ ,  $CDH$  e  $ADG$ . Consequentemente  $EF = FG = GH = EH$ , logo  $EFGH$  é losango.



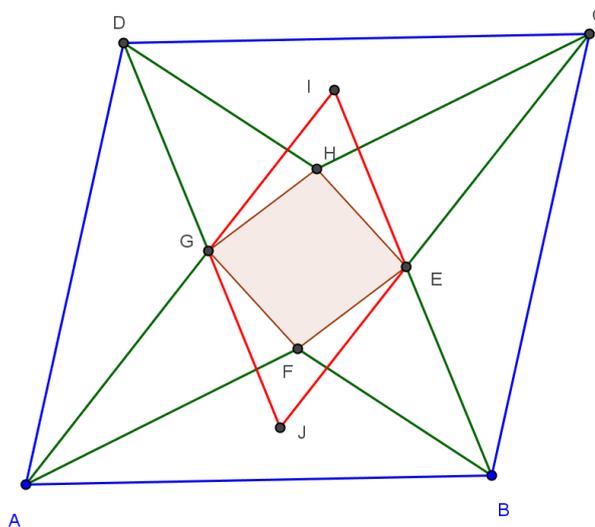
**Figura 29:** Losango formado pelas trissetrizes em um retângulo.

Por outro lado, se  $ABCD$  é losango, os quatro lados são bases dos triângulos congruentes formados com as trissetrizes a eles adjacentes ( $ABF$ ,  $BCE$ ,  $CDH$  e  $ADG$ ). Além disso, as trissetrizes adjacentes ao mesmo vértice formam triângulos isósceles congruentes dois a dois ( $AFG$  com  $CEH$  e  $BEF$  com  $DGH$ ). Mas, em cada vértice de  $EFGH$  são formados quatro ângulos com medidas respectivamente iguais às dos que se formam nos demais. Assim,  $EFGH$  é um quadrilátero equiângulo e, portanto, um retângulo. Vale notar que, no caso do quadrado, as trissetrizes adjacentes a cada lado se intersectam nos vértices de outro quadrado.



**Figura 30:** Retângulo formado pelas trissectrizes em um losango.

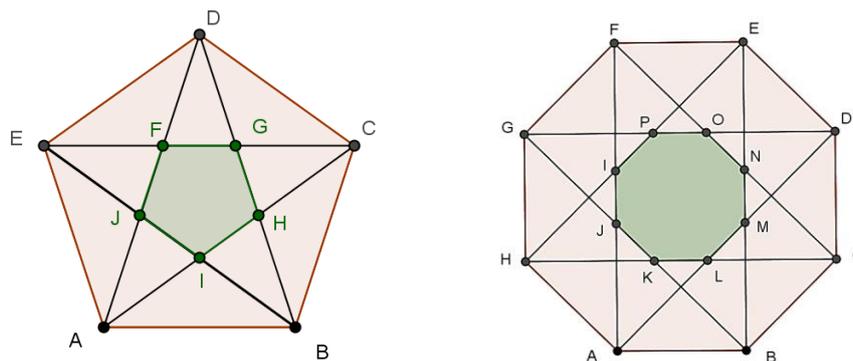
Em se tratando de paralelogramo, as trissectrizes não adjacentes ao mesmo lado, mas de vértices consecutivos, ainda assim seriam formados paralelogramos. A seguir aparece uma ilustração desse fato.



**Figura 31:** Paralelogramos formados por trissectrizes.

## 8.2. Em polígonos regulares

Além dessa generalização, quando são considerados polígonos regulares pode-se demonstrar o fato de as intersecções de trissectrizes dos ângulos internos formarem polígonos a eles semelhantes. O pentágono e o octógono ilustram bem esse fato.

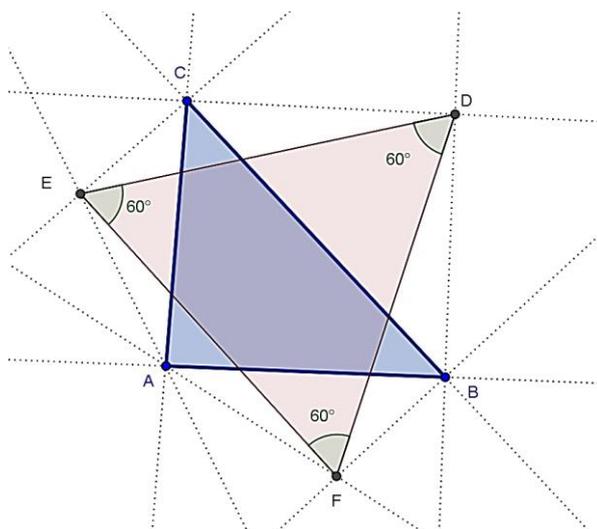


**Figura 32:** As trissetrizes no pentágono e no octógono.

### 8.3. Para as trissetrizes dos ângulos externos do triângulo

Quando são traçadas as trissetrizes dos ângulos externos de um triângulo, surgem novas configurações geométricas geradoras de triângulos equiláteros. A configuração mais simples se dá quando são tomados os pontos de intersecção das trissetrizes externas adjacentes a cada lado do triângulo original.

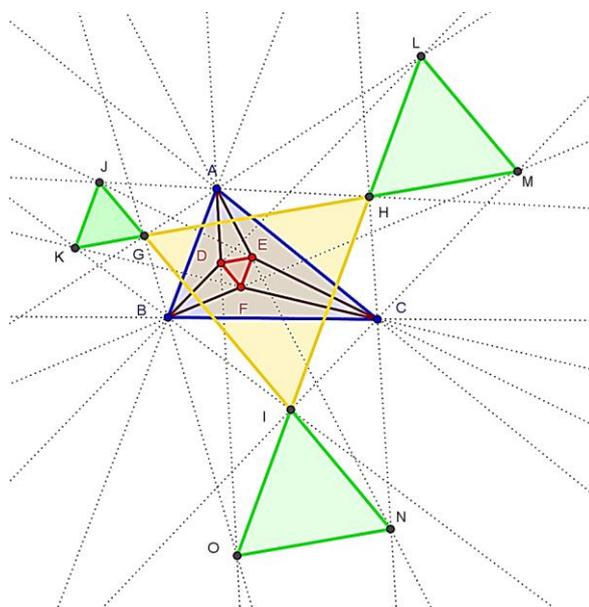
Na figura a seguir, aparece sobreposto ao triângulo original  $ABC$ , o triângulo  $DEF$  cujos vértices são intersecções de trissetrizes externas adjacentes a cada lado. A construção no GeoGebra exhibe os ângulos de  $60^\circ$  obtidos, mostrando que  $DEF$  é um triângulo equilátero.



**Figura 33:** Triângulo de Morley com trissetrizes externas.

De forma surpreendente, combinando intersecções de trissetrizes internas e externas, outros triângulos equiláteros são determinados. Abaixo aparecem cinco triângulos equiláteros:

- $DEF$ , com vértices nas intersecções de trissetrizes internas adjacentes a cada um dos lados;
- $GHI$ , com vértices nas intersecções de trissetrizes externas adjacentes a cada um dos lados;
- $GJK$ ,  $HLM$  e  $ION$  cada um deles com um vértice na intersecção de duas trissetrizes externas e outros dois nas intersecções de uma trissetriz interna com uma trissetriz externa.



**Figura 34:** Cinco triângulos equiláteros formados por trissetrizes.

Para finalizar, vale o registro a respeito da referência de alguns matemáticos ao Teorema de Morley, como “O Milagre de Morley”. Não só pela construção improvável de triângulos equiláteros, ou mesmo pela impossibilidade da trisseção dos ângulos com régua não graduada e compasso, quanto mais pela riqueza matemática das demonstrações<sup>2</sup> ou aplicabilidade pedagógica, mas principalmente, pela beleza de todo esse conjunto.

<sup>2</sup> Em <http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml> há diversas demonstrações do Teorema de Morley, porém algumas são de frágil argumentação.

## 9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme a proposta inicial, foram feitas abordagens adequadas a diferentes níveis de ensino e maturidade em Matemática como um todo e, mais especificamente, em Geometria. Partindo de um dos três problemas clássicos, foram tratadas questões relativas à impossibilidade da trisseção de um ângulo e algumas das ideias mais engenhosas desenvolvidas para esse fim.

De forma bem superficial, com foco em Geometria, foram abordadas algumas questões relativas à aprendizagem, ao desenvolvimento de habilidades e competências no estudo da Matemática. A ênfase na resolução de problemas, diferentemente do repetitivo treinamento realizado em algumas aulas de Matemática, abre caminhos para a motivação e, principalmente, permite a criação de estratégias de resolução em novos problemas. Além disso, foi feita uma crítica aos problemas de Geometria cuja resolução privilegia pouco conteúdo genuinamente geométrico em detrimento de aplicações exaustivas de cálculos e desenvolvimentos algébricos.

Com a definição do Triângulo de Morley foram feitas considerações a respeito de suas propriedades e das relações entre seus elementos. Com isso foi citada uma questão olímpica e sua resolução, priorizando os aspectos geométricos.

Por fim, foram apresentadas demonstrações que utilizam conteúdos adequados a diversos níveis de ensino. Estendendo a outras figuras as propriedades do triângulo de Morley, surgem belas aplicações nos paralelogramos e até mesmo nos polígonos regulares em geral. Até mesmo quando são consideradas apenas trissetrizes de ângulos externos, ou ao combinar interseções com as de ângulos internos, surgem novos triângulos equiláteros, conforme citado no corpo do texto.

## 10 BIBLIOGRAFIA

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC, 1997.
- [2] CARVALHO J. P. de. *Os três problemas clássicos da matemática grega, Bienal SBM*, 2004.
- [3] CARVALHO, J. B. P. de, e ROQUE, T. M. *Tópicos de História da Matemática*, Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [4] DOLCE O. e POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 9*, São Paulo: Atual, 1993.
- [5] MORGADO A. C., e WAGNER e JORGE, M. *Geometria I*, Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1973.
- [6] SOUSA J. M. de, “Prof2000,” 11 02 2002. Disponível em: <<http://www.prof2000.pt/users/miguel/histmat/af22/materiais/imp/texto15.htm>> Acesso em 28 janeiro 2014.
- [7] CARVALHO A. M. F. T. de, PIRES M. N. M. e Gomes, M. T. *Fundamentos Teóricos do Pensamento Matemático*, Curitiba: ESDE BRASIL S.A., 2009.
- [8] POLYA, G., *Sobre a resolução de problemas de matemática na high school*, em *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar*, São Paulo: Atual, 1997, pp. 1-12.
- [9] LIMA E. L. *Dez mandamentos para professores, RPM*, vol. 5, pp. 2-10.
- [10] BRASIL. Secretaria de Ensino Médio, *PCN+ Ensino Médio*, Brasília: SEM/MEC.
- [11] RODRIGUES, A. C. *O modelo de van Hiele de desenvolvimento do pensamento*, Brasília: UCB, 2007.
- [12] FETISSOV A. I. *A Demonstração em Geometria*, São Paulo: Atual, 1994.
- [13] MORLEY, FRANK. Disponível em:<<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Morley.html>>. Acesso em 16 janeiro 2014.

- [14] FILHO, D. C. D; CUNHA M. A. C. E BARROS, A. D. S. *Teorema de Morley: o que os triângulos ainda podem nos revelar*, EUREKA, vol. 37, pp. 22-27, 2013.
- [15] CONDE, J. M. “TEOREMA DE MORLEY,” *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática*, vol. 14, pp. 3-4.
- [16] FERREIRA, E. S. *Nicomede e os três problemas clássicos gregos*, Revista Brasileira de História da Matemática, vol. 10, n. 20, pp. 193-231, outubro/2010-março/2011.
- [17] STEWART, I. *Almanaque das curiosidades matemáticas*, Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.
- [18] KRULIK, S. *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar*, São Paulo: Atual, 1997.
- [19] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*, Rio de Janeiro: SBM, 2004.
- [20] LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*, Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- [21] NETO, A. C. M. *Geometria - Coleção PROFMAT*, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [22] JÚNIOR, L. P. d. S. *Construções Geométricas Por Régua e Compasso e Números Construtíveis*, abril 2013. Disponível em: <<http://bit.profmtat-sbm.org.br/>>. Acesso em 17 janeiro 2014.
- [23] SMYTH R. *Morley's Miracle*. Disponível em: <<http://www.cut-the-not.org/triangle/Morley/Smyth2.shtml>>. Acesso em 08 fevereiro 2014.
- [24] PAVANELLO, R. M. *Geometria e construção de conceitos aritméticos: investigando algumas inter-relações*. Disponível em:< [http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_23/geometria.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/geometria.pdf)>. Acesso em fevereiro de 2014

## APÊNDICE I

A seguir são listados os passos para a construção da *Conchoide* de Nicomedes no GeoGebra. Há outras construções possíveis, mas a simplicidade é o diferencial dessa aqui apresentada.

PASSO	AÇÃO	FERRAMENTA	ÍCONE
1º)	Traçar um segmento $AB$ qualquer	segmento definido por dois pontos	
2º)	Traçar uma reta $r$ , perpendicular a $AB$ , passando por $B$ .	reta perpendicular	
3º)	Marcar um ponto $C$ sobre a reta $r$ .	ponto em objeto	
4º)	Traçar a reta $\overleftrightarrow{AC}$ .	reta definida por dois pontos	
5º)	Determinar uma circunferência centrada em $C$ , de raio qualquer.	círculo dados centro e raio	
6º)	Marcar os pontos de intersecção da reta $\overleftrightarrow{AC}$ com a circunferência ( $P$ ).	intersecção de dois objetos	
7º)	Definir os ponto $P$ e $Q$ como lugares geométricos em relação a $C$ .	lugar geométrico	

**Tabela 3:** Construção da *Conchoide* de Nicomedes.

## APÊNDICE II

A construção do Triângulo de Morley no GeoGebra utiliza alguns recursos que, como já foi demonstrado, vão além da simples utilização de régua não graduada e compasso. Para trissectar os ângulos internos é utilizada uma ferramenta de rotação de um elemento em torno de um ponto, dado o ângulo de rotação.

A seqüência de construção é a seguinte:

PASSO	AÇÃO	FERRAMENTA	ÍCONE
1º)	Construir um triângulo qualquer	polígono	
2º)	Traçar as retas suporte dos lados	reta definida por dois pontos	
3º)	Marcar os ângulos internos do triângulo	ângulo	
4º)	Rotacionar as retas suporte em torno de cada vértice de um ângulo correspondente á terça parte de cada	girar em torno de um ponto por um ângulo	
5º)	Determinar os vértices do triângulo interior na intersecção de trissetrizes adjacentes a cada lado	intersecção entre dois objetos	
6º)	Construir o triângulo interior com vértices nos pontos obtidos	polígono	
7º)	Construir os segmentos que ligam os vértices dos dois triângulos	segmento definido por dois pontos	
8º)	Esconder as retas suporte dos lados e das trissetrizes	“clicar” com o botão direito sobre cada elemento e desmarcar a opção “exibir objeto”	

**Tabela 4:** Construção do triângulo de Morley no GeoGebra.

## APÊNDICE III

A demonstração da identidade  $\operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen} \frac{x}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi+x}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi+x}{3}$  parte das relações:

- I.  $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} a$ ;
- II.  $\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a$ ;
- III.  $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left( \frac{a-b}{2} \right)$ ;
- IV.  $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{a-b}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left( \frac{a+b}{2} \right)$ .

Inicia-se com a relação  $\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a$  (II) e, colocando  $4 \operatorname{sen} a$  em evidência, obtém-se:  $\operatorname{sen} 3a = 4 \operatorname{sen} a \cdot \left( \frac{3}{4} - \operatorname{sen}^2 a \right)$ . Mas,  $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e, portanto,  $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$ .

Daí, por substituição, decorre que:  $\operatorname{sen} 3a = 4 \operatorname{sen} a \cdot \left( \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}^2 a \right)$

$$\operatorname{sen} 3a = 4 \operatorname{sen} a \cdot \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} a \right) \cdot \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} - \operatorname{sen} a \right)$$

$$\operatorname{sen} 3a = 4 \operatorname{sen} a \cdot \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} a \right) \cdot \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} - \operatorname{sen} a \right)$$

$$\operatorname{sen} 3a = 4 \operatorname{sen} a \cdot \left[ 2 \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi+a}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left( \frac{\pi-a}{2} \right) \right] \cdot \left[ 2 \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi-a}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left( \frac{\pi+a}{2} \right) \right]$$

Tomando os fatores alternadamente, pode-se aplicar a relação (I):

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 3a &= 4 \operatorname{sen} a \cdot \left[ 2 \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi+a}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left( \frac{\pi+a}{2} \right) \right] \cdot \left[ 2 \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi-a}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left( \frac{\pi-a}{2} \right) \right] = \\ &= 4 \operatorname{sen} a \cdot \left[ \operatorname{sen} 2 \cdot \left( \frac{\pi+a}{2} \right) \right] \cdot \left[ \operatorname{sen} 2 \cdot \left( \frac{\pi-a}{2} \right) \right] = 4 \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} + a \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} - a \right) \end{aligned}$$

Fazendo  $a = \frac{x}{3}$ , chega-se a  $\operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen} \frac{x}{3} \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} + \frac{x}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{x}{3} \right)$  ou

$$\operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi+x}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi-x}{3} \right).$$

Mas, pela redução ao 1º quadrante:  $\operatorname{sen} \left( \frac{\pi-x}{3} \right) = \operatorname{sen} \left( \pi - \frac{\pi-x}{3} \right) = \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi+x}{3} \right)$ .

Finalmente é obtido o resultado:  $\operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen} \frac{x}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi+x}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi+x}{3}$ .