Universidade Estadual de Santa Cruz

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

Colegiado PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

NÚMERO ÁUREO E O ENSINO BÁSICO

por

Lucas Santos de Carvalho[†]

Mestrado Profissionalizante em Matemática - Ilhéus - BA

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes obtido através da SBM.

C331 Carvalho, Lucas Santos de
Número áureo e o ensino básico / Lucas Santos de Carvalho. – Ilhéus, BA: UESC, 2013.
25 f.: il.

Orientador: Vinicius Augusto Takahashi Arakawa.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Geometria – Estudo e ensino. 3. Álgebra – Estudo e ensino. 4. Segmento áureo. 5. Software educacional. 6. Tecnologia educacional. I. Título.

CDD 510.07

Lucas Santos de Carvalho

NÚMERO ÁUREO E O ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 17 de abril de 2013.

Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa – Orientador, UESC

Prof. Dra. Mariana Pinheiro Gomes da Silva, UESC

Prof. Dr. Fabíolo Moraes Amaral, IFBA - Campus Eunápolis

Ilhéus - 2013

Agradecimentos

Meus mais profundos agradecimentos à Força Suprema e Criadora da existência, que nos concedeu a propriedade intelectiva para que possamos expandi-la, de modo que, segundo Albert Einstein: "a mente que se abre a uma nova ideia, jamais voltará ao seu tamanho original".

À minha mãe que me inspira com ações dignas de uma guerreira do bem. Ao meu pai por ser exemplo de homem na mais ampla acepção da palavra. À minha esposa por todo seu amor e carinho, além de ter sido a principal motivadora nesta minha empreitada rumo ao título de Mestre, desde a inscrição no processo seletivo para ingressar no PROFMAT.

Ao meu orientador Professor Dr. Vinicius Arakawa, que esteve me apoiando de uma forma sublime, disponibilizando o seu melhor na estruturação deste trabalho.

A todos os colegas e professores da turma PROFMAT 2011-2013 UESC, em especial ao Professor Doutor Sérgio Mota Alves, que desde a obtenção do resultado final do processo seletivo, consumi muito de seu tempo, sendo sua atenção à minha pessoa, e ao curso como um todo, fator crucial para que eu pudesse prosseguir nesta trajetória, o que ocorreu melhor, muito melhor, do que o esperado por mim.

À ***Capes*** *e a SBM pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.*

Muito obrigado!

Resumo

A Proporção Áurea consiste numa ideia matemática voltada ao belo, harmônico, divino. Resultante desta proporção, o Número de Ouro é irracional e nos permite vislumbrar maravilhas que a natureza nos oferece, obras arquitetônicas milenares inspiradas no retângulo de ouro, trabalhos artísticos clássicos etc. A famosa sequência de Fibonacci também nos apresenta este número intrigante. É possível realizar algumas atividades geométricas e algébricas dentro de um contexto matemático cabível no Ensino Médio, em especial com o uso do software gratuito GeoGebra. Tudo isso, e pouco mais, será desenvolvido neste trabalho.

Palavras-Chave: Proporção Áurea, Número de Ouro, Número Irracional, Geometria, Ensino Médio, GeoGebra.

Abstract

The golden rate consists on a mathematical idea facing the beautiful, harmonious, divine. Resulting from this proportion, the golden number is irrational and allows us to glimpse the wonders that nature offers us, ancient architectural works inspired by the golden rectangle, classic art works, etc. The famous Fibonacci sequence also gives us several intriguing properties of this number. It is possible to conduct some geometric and algebraic activities within high school context and college, especially with the use of the free software GeoGebra. All this, and a little more, will be explained in this paper.

Key Words: Golden proportion, golden number, irrational number, geometry, high school, GeoGebra.

Sumário

Introdução

A descoberta, por parte dos pitagóricos, de um diferenciado número, como o é o Número de Ouro, nos viabiliza uma compreensão mais apurada dos números irracionais.

Fundamentado na Proporção Áurea, desenvolvimentos geométricos são apresentados, explorados, afirmados e demonstrados no âmbito da Geometria Euclidiana Plana. A ideia do infinito se revela com vislumbre, em meio a uma proporção considerada divina. O Retângulo Áureo, a Espiral Áurea e o Triângulo de Ouro, associados a convergência ao Número de Ouro verificada pela sequência determinada pela razão entre um termo e o seu antecessor na sequência de Fibonacci, nos oportuniza transcorrer por conceitos geométricos absolutamente cabíveis no Ensino Médio.

Constatar que a natureza está repleta de imagens que dão alusão ao Número de Ouro, incita a concepção do belo e harmônico. De fato, uma abrangência transcendental. Não é a toa que o número irracional $\varphi \approx 1,6180$ (Número de Ouro) está na categoria de números irracionais transcendentais.

Em meio à sua riqueza geométrica, trabalhar com atividades envolvendo a informática é pertinente, em especial fazendo uso do software livre GeoGebra. Com auxílio deste último, alguns modelos nos permitem a determinação da secção áurea de modo fácil e estimulante. Ferramenta essencial para execução de possíveis projetos com alunos do Ensino Médio, em prol de uma melhor compreensão desta singular proporção que nos conduz ao "Número de Deus".

No primeiro capítulo, fazemos um convite a uma breve história matemática a respeito do Número Áureo, assim como sua determinação geométrica e algébrica. Desenvolvemos um estudo sobre a seção áurea, triângulo áureo, sequência de Fibonacci, entre outros estudos que envolvem tal número.

No Capítulo 2, apresentamos algumas curiosidades acerca do Número Áureo, tanto no sentido matemático quanto no sentido arquitetônico, biológico, artístico, entre outras áreas.

No Capítulo 3, discutimos algumas atividades utilizando o software GeoGebra para que seja implementado no Ensino Médio envolvendo construções geométricas acerca do Número de Ouro, concluindo assim que atividades lúdicas ilustradas por esse número em diversas áreas da ciência ajudem os alunos a se aproximarem da matemática de uma forma saudável e prazerosa. Apresentamos como atividade futuras a implementação de todas as observações feitas nas atividades com alunos do ensino médio nos próximos semestres.

Capítulo 1

A Proporção Áurea e o Número de Ouro

Neste capítulo, iremos discorrer acerca de aspectos históricos, geométricos e algébricos, além de enfatizar uma famosa sequência numérica, a Sequência de Fibonacci. No que tange a história, abordaremos sobre uma possível descoberta dos números irracionais pelos pitagóricos. A geometria e a álgebra são os aspectos puramente matemáticos e conceituais pertinentes à razão áurea. A Sequência de Fibonacci permite-nos perceber uma convergência ao Número de Ouro.

1.1 Uma breve história

Pitágoras de Samos (Séc. V a.C.) é um dos matemáticos de maior renome na história. Inspirada neste, uma sociedade de estudiosos da época foi estabelecida, voltada essencialmente a questões matemáticas. Os componentes dessa sociedade denominavam-se pitagóricos, pois faziam parte da chamada Escola Pitagórica.

Os pitagóricos se organizavam sob a égide de regras rígidas e inflexíveis. Não se admitiam questionamentos sem fundamentação teórica plausível. Para eles (os pitagóricos), o mundo, e tudo que nele há, era regido por números, contagens, medições... pela comensurabilidade. Mas, o que é comensurável? Matematicamente, podemos dizer que se entende por comensurável a todo comprimento do qual é possível obter a medida a partir de uma unidade de referência, uma grandeza. Vejamos um exemplo:

Consideremos um segmento $\overline{AB}$ abaixo como uma unidade de referência, que atribuiremos o valor u. Em seguida, determinemos a medida do segmento $\overline{AD}$. Ou seja, quantas vezes o segmento $\overline{AB}$ "cabe" no segmento $\overline{AD}$?

Figura 1.1: Comensurabilidade.

Pela Figura 1.1, é possível "inserir" o segmento $\overline{AB}$ cinco vezes no segmento $\overline{AD}$. Assim, temos que $\overline{AD} = 5\overline{AB} = 5u$.

Quando se faz referência a Pitágoras, é natural que pensemos em um teorema cuja autoria lhe foi atribuída: o Teorema de Pitágoras (em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos). Por tal teorema, costuma-se motivar a ideia da incomensurabilidade por intermédio de um triângulo retângulo isósceles de catetos medindo 1 (uma unidade), cada.

Seja um triângulo retângulo isósceles PQR, reto em Q. Por hipótese, tem-se $PQ = QR = 1$. Daí, pelo Teorema de Pitágoras vem: $PR^2 = 1^2 + 1^2$ o que implica que $PR^2 = 2$, portanto $PR = \sqrt{2}$. O comprimento da hipotenusa é a raiz quadrada de 2, cujo resultado é considerado incomensurável, impossível de ser medido por qualquer instrumento, pois não há como determinar com precisão quantas vezes a unidade "cabe"na hipotenusa. Sabemos que isso ocorre devido ao resultado não ser um número inteiro e nem a razão entre inteiros. Acredita-se que a ideia do conjunto dos números irracionais se originou na percepção da incomensurabilidade.

Mas, será que, de fato, a incomensurabilidade foi constatada a partir da raiz quadrada de 2? Alguns registros permitem-nos acreditar que o primeiro número irracional a ser verdadeiramente "descoberto" foi o Número de Ouro.

Os pitagóricos tinham um símbolo que o identificava: o Pentagrama. De um pentágono regular, obtemos o pentagrama traçando todas suas diagonais. Verificou-se que a razão entre uma diagonal e um dos lados do pentágono é um número cuja parte decimal é infinita e não é periódica. Isto causou impacto na Escola Pitagórica, pois em meio a um regime ríspido, que só se compreendia a razão entre dois inteiros, romperam-se paradigmas para aceitar essa verdade. Percebeu-se, também, que as diagonais se intersectam segundo a mesma proporção: a Proporção Áurea.

O número resultante da razão supracitada é aproximadamente 1,6180 ou 0,6180, dependendo da divisão que é feita. Anos mais tarde, tal razão foi designada como sendo o Número de Ouro, que é o tema do nosso trabalho.

1.2 Determinação do Número de Ouro via geometria e álgebra

1.2.1 Definição

Seja um segmento de reta $\overline{AB}$. Queremos encontrar um ponto C pertencente a $\overline{AB}$, de modo que $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ com $\overline{AC} > \overline{CB}$. Ou seja, dividir um segmento em duas parte, uma maior e outra menor, de modo que a razão entre a parte maior e a parte menor é igual a razão entre o segmento todo e a parte maior.

Ressaltamos que a proporção áurea também pode ser entendida como $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$. Isto soa como uma obviedade matemática, mas o primeiro caso tem como constante de proporcionalidade o valor aproximado $1,6180$, sendo que no segundo caso o valor aproximado é $0,6180$. Usualmente, a razão áurea é conhecida como sendo o primeiro valor, porém alguns autores citam o outro valor também como sendo áureo.

A partir desse momento, iremos considerar a razão áurea da seguinte forma: o valor $1,6180... = \varphi$ (Phi minúsculo) e $0,6180... = \phi$ (Phi maiúsculo). Temos que $\phi = \frac{1}{\varphi}$. O motivo de utilizarmos esta letra grega será abordado no capítulo 2.

Vamos agora resolver o problema para determinarmos o valor algébrico de φ. Consideremos $\overline{AC} = a$ e $\overline{CB} = b$, com $a > b$.

Figura 1.2: Segmento Áureo

Veja a Figura 1.2. Por construção, temos que $a/b = (a+b)/a = \varphi \approx 1,6180$. Mas, como ter certeza de que isso é sempre possível? De fato, fixando b como constante, vamos encontrar o valor de a em função de b. Daí vem:

$$a/b = (a+b)/a \Rightarrow a^2 = ab + b^2 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0.$$

Por Bhaskara, temos:

$$\Delta = (-b)^2 - 4.1.(-b^2) = b^2 + 4b^2 = 5b^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = b\sqrt{5}.$$

Assim,

$$a = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = b(1+\sqrt{5})/2 \;\; ou \;\; a = b(1-\sqrt{5})/2.$$

Como $a > 0$ e $b > 0$, pois são medidas de segmentos, concluímos que $a = b(1+\sqrt{5})/2$ ou seja, $a/b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

Portanto, o Número de Ouro φ é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Não esqueçamos que a Razão Áurea poderia ser considerada como b/a, que seria o inverso de $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Deste modo, tem-se que $b/a = \phi = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,6180$.

1.2.2 Secção Áurea e Autopropagação

Seccionamos um segmento $\overline{AB}$ em duas partes de módulo distintos, cuja razão entre a parte maior e a parte menor é o Número de Ouro, e a esta razão denominamos de Razão Áurea. Desta forma, realizamos uma Secção Áurea. Esta seção tem a propriedade da autopropagação, isto é, podemos seccionar a parte maior em duas partes de módulos distintos segundo a Proporção Áurea, de modo que:

Proposição 1.1 *Se um segmento $\overline{AB}$ é seccionado por um ponto C segundo a proporção áurea, de modo que $\overline{AC} = a$ e $\overline{CB} = b$, com $a > b$, então:*

(i) $b > a/2$,

(ii) $b > a - b$.

Prova.

De fato, o primeiro item vem de $a = b\varphi < 2b$, pois $\varphi < 2$. Logo, $a < 2b$ o que é equivalente a $b > a/2$. Para provarmos o item (ii) basta verificar que $a/2 > a - b$. Com efeito,

$$a/2 > a - b \Leftrightarrow a > 2a - 2b \Leftrightarrow a - 2a > -2b \Leftrightarrow -a > -2b \Leftrightarrow 2b > a \Leftrightarrow b > a/2$$

Assim, $b > a/2 > a - b$. Portanto, por transitividade, $b > a - b$.

■

Com essa proposição, podemos afirmar, matematicamente, a autopropagação da secção áurea.

Obsevação 1.2 *Seja um ponto C pertencente ao segmento $\overline{AB}$ tal que $\overline{AC} = a > \overline{CB} = b$ e $a = b\varphi$. Então, seccionando o segmento $\overline{AC}$ por um ponto D, segundo a secção áurea, tal que $\overline{DC} = \overline{CB} = b$, e $\overline{AD} = a - b$, tem-se $a/b = b/(a - b)$. Ver Figura 1.3:*

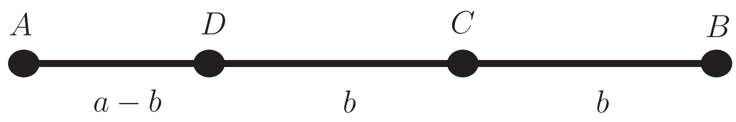

Figura 1.3: Autopropagação.

Verifiquemos que os novos segmentos verificam a proporção áurea: sabemos que $a/b = \varphi = (a+b)/a$, o que é equivalente a $a^2 - b^2 = ab$. Assim, basta provarmos que $(a+b)/a = b/(a-b)$. Com efeito, $(a + b)/a = b/(a - b)$ é equivalente a $a^2 - b^2 = ab$.

1.2.3 Retângulo Áureo

Um ente geométrico indispensável neste bojo é o Retângulo Áureo. Deste, é possível construir a Espiral de Ouro.

Definição 1.3 *Um retângulo de base a e altura b é dito Áureo quando $a/b = \varphi$, para $a > b$, ou $a/b = \phi$, para $a < b$. Concentremo-nos em φ, ou seja, onde a base maior que a altura.*

Pela autopropagação, podemos construir novos Retângulos Áureos a partir do primeiro, infinitamente, e com área cada vez menor.

Iniciamos com um retângulo R_1 de base a e altura b, seguido de um retângulo R_2 de base b e altura $a - b$, daí vem um retângulo R_3 de base $a - b$ e altura $2b - a$, seguindo de modo infinito, onde um retângulo R_{n+1} de base a_{n+1} e altura b_{n+1} tal que $a_{n+1} = b_n$ e $b_{n+1} = a_n - b_n$. Se chamarmos de A_n a área do retângulo R_n, teremos que $A_n > A_{n+1}$ pois $A_{n+1} = a_{n+1}b_{n+1} = b_n(a_n - b_n) = a_nb_n - b_n^2 < a_nb_n = A_n$. Veja a Figura 1.4.

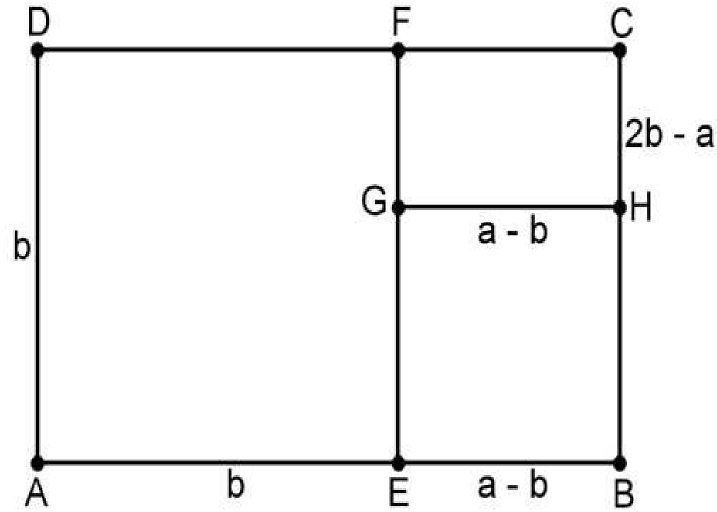

Figura 1.4: Retângulo Áureo

1.2.4 Triângulo Áureo

Definição 1.4 *Todo triângulo isósceles ABC, com base BC e ângulos da base $\widehat{B} = \widehat{C} = 72^o$, é chamado de triângulo áureo.*

Proposição 1.5 *A bissetriz de qualquer um dos ângulos da base intersecta o lado o oposto segundo a proporção áurea. Isto é, a bissetriz do ângulo $\widehat{B}$ intersecta o lado AC em um ponto P tal que $\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} = \varphi$. De modo análogo, a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$ em relação ao lado AB.*

Prova.

Consideremos o triângulo ABC da definição de modo que $\overline{BC} = a$, e $\overline{AC} = \overline{AB} = b$.

Traçando a bissetriz do ângulo $\widehat{B}$, obtemos mais dois triângulos: PAB e BCP.

O triângulo PAB é isósceles de base AB, pois a medida do ângulo $\widehat{A} = 36^o$ por hipótese e o ângulo $P\widehat{B}A = 36^o$ pela bissetriz do ângulo $\widehat{B}$. Assim, temos que $\overline{AP} = \overline{PB}$.

O triângulo BCP é isósceles de base PC, pois a medida do ângulo $\widehat{C} = 72^o$ por hipótese, e a medida do ângulo $C\widehat{P}B = 72^o$, pois pela soma dos ângulos internos de um triângulo a medida do ângulo $A\widehat{P}C = 108^o$, que é suplementar do ângulo $C\widehat{P}B$. Assim, $\overline{PB} = \overline{BC} = a$.

Por transitividade, $\overline{AP} = a$. Por hipótese, $\overline{AP} + \overline{PC} = \overline{AC} = b$. Então, $\overline{PC} = b - a$.

Sabemos que em um triângulo qualquer, o lado maior é oposto ao ângulo maior. No triângulo BPC, temos que BC é oposto a um ângulo de 72º, sendo que PC é oposto a um ângulo de 36º. Ou seja, $\overline{BC} > \overline{PC}$, então $a > b - a$.

Pelo caso de congruência AA (ângulo-ângulo), os triângulos ABC e BCP são semelhantes. O ângulo $\widehat{C}$ é comum a ambos, temos por hipótese que a medida do ângulo $\widehat{B} = 72^{o}$ e já concluímos anteriormente que $C\widehat{P}B = 72^{o}$. Daí, pela proporcionalidade de triângulos semelhantes, vem: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PB}}$, isto é $b/a = a/(b-a) = \varphi$. Portanto, $\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} = \varphi$.

∎

Veja a Figura 1.5 para a visualização.

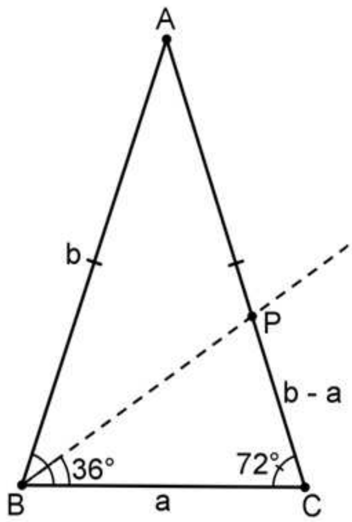

Figura 1.5: Triângulo Áureo

▶ Autopropagação do triângulo áureo

O triângulo de Ouro também se autopropaga infinitamente. A cada bissetriz traçada, obtemos um novo triângulo isósceles com ângulos da base medindo 72º. Aproveitando o exemplo dito inicialmente, é fácil ver que do triângulo isósceles ABC com ângulos da base medindo 72º obtemos o triângulo isósceles BCP de base CP com $\widehat{C} = \widehat{P} = 72^{o}$, ou seja, BCP é um triângulo de ouro. Assim, obtém-se triângulos áureos seguidamente, sem fim.

▶ O número φ e o cosseno de 36º

Consideremos o triângulo PAB da demonstração desenvolvida do triângulo áureo. Traçando a altura relativa a base AB, intersectamos esta última por um ponto M, tal que o triângulo AMP é retângulo em M. Sabemos que a hipotenusa $\overline{AP} = a$. E, $\overline{AQ} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{b}{2}$. Por trigonometria, temos $\cos 36^o = \frac{b/2}{a} = \frac{b}{2a} = \frac{\varphi}{2}$. Logo, $\varphi = 2\cos 36^o$.

1.2.5 Espiral de Ouro

A cada retângulo R_{n+1} obtido a partir do retângulo R_n, um quadrado de lado b_n é destacado. A Espiral de Ouro é construída de modo que suas partes são arcos que correspondem a $1/4$ da circunferência de raio b_n.

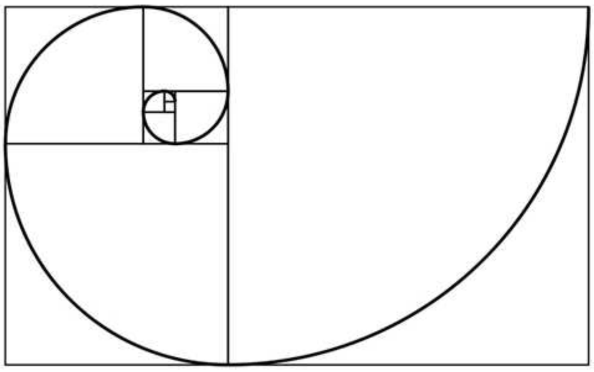

Figura 1.6: Espiral de Ouro.

Na Figura 1.6, podemos visualizar o Retângulo Áureo e a Espiral de Ouro:

A Espiral de Ouro pode ser visualizada por software. A equação $r(t) = \varphi^{\frac{2t}{\pi}}$, em coordenadas polares, exibe a Espiral. O desenvolvimento dos cálculos que precedem esta conclusão pode ser visto no livro [6] (Capítulo 3, subitem 3.3). O retângulo áureo e a espiral.

A Figura 1.7 mostra a plotagem da curva através do software gratuito Winplot, com $-4\pi < t < 2\pi$.

1.3 Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa, italiano filho de Bonacci (e por isso foi chamado de Fibonacci), em suas buscas pelo conhecimento, teve papel preponderante na forma como os números

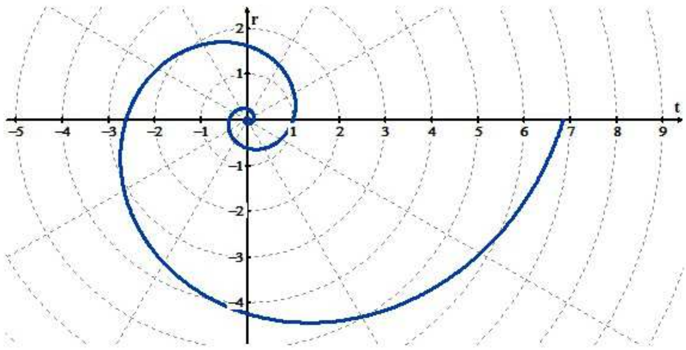

Figura 1.7: Plotagem da curva.

são utilizados hoje, pois considerou ser aprazível o modelo hindu-arábico de numeração, o qual é esmagadoramente mais usado em todo o mundo até os dias de hoje.

A contribuição de Fibonacci pertinente ao Número de Ouro se deu a partir da seguinte questão: Considerando que um casal de coelhos se torna adulto após dois meses, que a cada mês todo casal sempre procrie (apenas) outro casal de coelhos, que nenhum coelho morra, e lembrando que só é possível procriar na fase adulta, quantos casais de coelhos haverá após 12 meses? Daí surgiu a Sequência de Fibonacci. Cada mês é um termo da sequência e seu valor respectivo corresponde à quantidade de casal de coelhos.

No primeiro mês tem-se 1 casal, no segundo mês também (o casal de coelhos ainda não está adulto), no terceiro mês tem-se o casal inicial e um casal de filhotes, ou seja, dois casais, no quarto mês teremos 3 casais e assim sucessivamente. Deste modo, a segue a sequência: 1, 1, 2, 3, 5, ... Para responder à pergunta raiz, precisa-se saber qual o 12º termo desta sequência.

Foi verificado que o termo seguinte é a soma dos dois antecessores. Para facilitar nossos cálculos, a Sequência de Fibonacci é definida recursivamente: Sejam $u_1 = 1$ e $u_2 = 1$ os dois primeiros termos da sequência, e u_n o n-ésimo termo. Então, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, com $n > 2$. Deste modo, podemos seguir com a sequência até o 12º termo: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Portanto, após 12 meses haverá 144 casais de coelhos! Mas, que esta sequência tem a ver com o Número de Ouro? A sequência determinada pela razão entre um termo da sequência de Fibonacci e o seu termo antecessor, converge para φ.

Seja a sequência $x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Assim, $x_1 = \frac{1}{1} = 1$, $x_2 = \frac{2}{1} = 2$, $x_3 = \frac{3}{2} = 1,5$, $x_4 = \frac{5}{3} \approx 1,666$, $x_5 = \frac{8}{5} = 1,6$, $x_6 = \frac{13}{8} = 1,625$, $x_7 = \frac{21}{13} \approx 1,6153$, $x_8 = \frac{34}{21} \approx 1,6190$ e assim por diante.

Percebemos heuristicamente que os termos ímpares determinam uma subsequência crescente que se aproxima cada vez mais do Número de Ouro, e os termos pares formam uma subsequência decrescente que se aproxima de $\varphi = 1,6180....$ Mostra-se que a sequência x_n converge para φ . Esta conclusão está devidamente demonstrada no capítulo 4 do livro [6].

Os números da sequência de Fibonacci aparecem na natureza, conforme veremos no capítulo seguinte.

Capítulo

2

Algumas constatações do Número de Ouro

Neste capítulo, apresentaremos, através de imagens e citações, algumas constatações do Número de Ouro em situações da vida real, da qual nos restringiremos à natureza, arte e arquitetura. O número φ poderá ser observado em espirais áureas ou pela sequência de Fibonacci que aparecem na natureza, como pela proporção de ouro utilizada ao longo da história na arte e na arquitetura.

2.1 Natureza

2.1.1 Flores

Verifica-se que em muitas flores contém a quantidade de pétalas é igual a algum termo da Sequência de Fibonacci. Sempre que possível, contar o número de pétalas que possamos nos deparar torna-se uma sondagem bastante curiosa.

Vejamos alguns exemplos tirados pelo orientador Prof. Dr. Vinicius Arakawa, ilustrados nas Figuras 2.1.

As sementes do girassol são distribuídas segundo a espiral de ouro. Em geral, são 34 espirais voltadas para o sentido horário e 55 para o sentido anti-horário.

Veja a Figura 2.2 para a visualização das sementes do girassol.

Figura 2.1: Flores de 5, 8, 13 e 21 pétalas.

2.1.2 Crescimento das árvores

As árvores crescem numa proporção segundo a sequência de Fibonacci. Inicialmente 1 galho, seguido de apenas 1 novamente, depois 2 galhos, 3 galhos, 5 galhos, 8... Conforme podemos averiguar na Figura 2.3:

2.1.3 Náutilus

O molusco náutilus vive em uma concha que cresce segundo a proporção áurea. A Figura 2.4 apresenta esta concha aberta de maneira que é possível identificar a espiral áurea.

Figura 2.2: Sementes do girassol.

Figura 2.3: Crescimento das árvores.

2.2 Arte

Muitas são as inferências acerca do número φ presentes na arte por medições das quais é possível certificar-se a proporção áurea. Dentre as obras, destacam-se o Homem Vitruviano e a Monalisa, ambas de autoria do pintor Leonardo da Vinci, o qual concluímos que utilizou-se da Matemática na execução de produtos provenientes de seu intelecto. A seguir, imagens dessas clássicas produções artísticas.

O Homem Vitruviano pode ser visualizado na Figura 2.5. Em uma dessas figuras é possível observar partes enumeradas de 1 a 17, de modo que razão áurea aparece. Considera-se como principal secção áurea no Homem Vitruviano a distância da ponta da cabeça até o umbigo que está para a distância do umbigo até o calcanhar segundo a proporção áurea.

A Monalisa é uma obra clássica que foi criada com base na proporção de ouro. Na

Figura 2.4: Nautilus.

Figura 2.6 temos a Monalisa com um retângulo áureo e a espiral de ouro.

2.3 Arquitetura

Do mesmo modo que ocorre na arte, o Número de Ouro aparece na arquitetura segundo sondagens que concluem a presença efusiva de retângulos de ouro em construções feitas pelos homens. Inclusive, eis a razão pela qual o Número Irracional pautado neste trabalho foi batizado pela letra grega φ (Phi): o Parthenon. Este último é um destaque arquitetônico da história da Grécia Antiga, feito com muito esmero, primando pela beleza e harmonia em suas proporções, pois tratava-se do templo da deusa Atena, cuja autoria é do grego Phídias. Portanto, a letra φ é uma homenagem a Phídias. Segue na Figura 2.7 imagens do Parthenon:

Podemos notar a proporção de ouro em outras construções civis, como as pirâmides do Egito. A razão entre a altura de uma das faces e a metade da do lado da base, resulta no Número de Ouro.

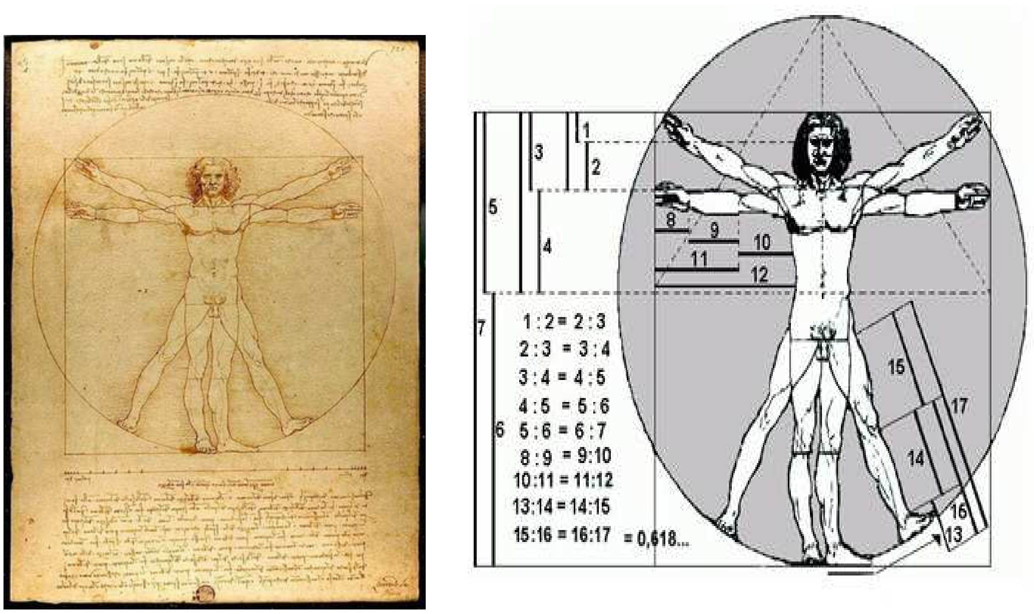

Figura 2.5: Homem Vitruviano.

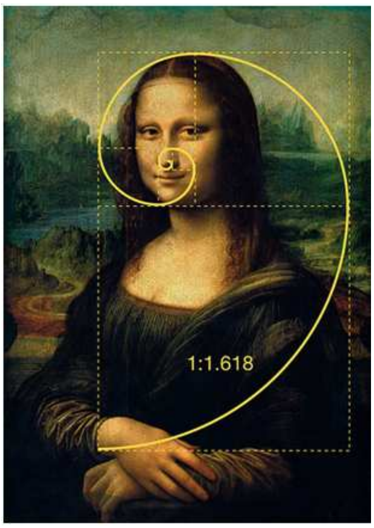

Figura 2.6: Monalisa.

Figura 2.7: Parthenon.

Figura 2.8: Pirâmides.

Capítulo 3

A Proporção Áurea e Construções no GeoGebra

Neste capítulo apresento duas maneiras de ser obtida a proporção áurea. Limitar-me-ei a desenvolver a construção com o uso do software gratuito GeoGebra, que considero muito útil e simples de usar, e pelo fato de ser gratuito facilita desenvolver atividades com o mesmo em casa ou na escola. A demonstração das afirmações ficam a cargo do leitor, não sendo esta a ênfase deste capítulo. São demonstrações fáceis de serem discorridas com base em desigualdade triangular e teorema de Pitágoras. Além disso, cabe como um excelente exercício tentar executar os passos utilizando-se de régua e compasso, o que também não será exibido neste capítulo. Não é um curso de GeoGebra com detalhes iniciais para um leigo em grau elevado no que tange o uso de softwares, mas penso ser possível a execução dos passos pela maioria absoluta dos estudantes de Ensino Médio que tenham acesso à informática, podendo, talvez, ser necessário criar um contato prévio com explorações do software antes de tentar iniciar os passos.

Obsevação 3.1 *O GeoGebra utilizado neste trabalho é a versão 4.2.13.*

Obsevação 3.2 *Optamos por não exibir os eixos coordenados. Para tal, basta clicar com o botão direito do mouse sobre qualquer parte da "Janela de Visualização" e com o botão esquerdo clicar em "Eixos". Não vimos necessidade para o objetivo deste capítulo.*

Obsevação 3.3 *Costumamos formatar os segmentos, retas, semirretas e/ou círculos com a espessura 5, e o tamanho dos pontos 4. Colocamos todos os itens na cor preta.*

Obsevação 3.4 *Aumentamos o tamanho da fonte para 28 pt, para que as imagens pudessem ser melhor visualizadas. Para alterar tamanho da fonte, devemos clicar em "Opções", seguido de "Tamanho da Fonte".*

3.1 Construção a partir de um quadrado qualquer

1º passo: Construir um quadrado ABCD qualquer.

Sabemos que o quadrado é um polígono regular. Para construir um polígono regular, é preciso clicar em "Polígono" seguido de "Polígono Regular", clicar em um espaço em branco conveniente na "Janela de Visualização" para obter o ponto A, clica novamente para obter o ponto B, quando será aberta uma janela para que se possa determinar o número de vértices, que em nosso caso como se trata de um quadrado, são 4 vértices. O quadrado obtido pode ser personalizado a gosto, seja em espessura ou cor das linhas, cor da região quadrada, cor e tamanho do ponto, etc. Basta clicar com o botão direito do mouse sobre alguma parte do quadrado e em seguida clicar com o botão esquerdo em "Propriedades". Observe que é possível redimensionar o quadrado, bem como transladá-lo, com os recursos "Mover" e "Mover Janela de Visualização". Veja a Figura 3.1.

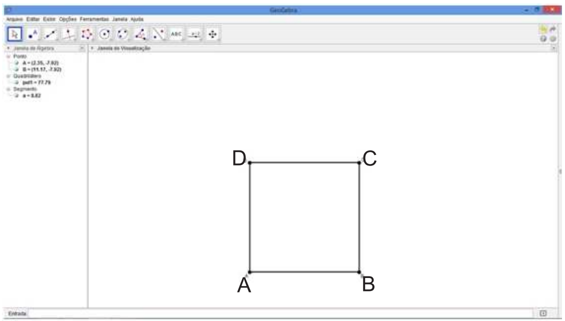

Figura 3.1: 1º Passo

2º passo: Traçar um segmento CE, de modo que o ponto E é o ponto médio do segmento AD.

Para exibir o ponto E, devemos clicar na opção "Novo Ponto"que tem um ponto azul e a letra A como ícone, e depois clicar em "Ponto Médio ou Centro". Observe que o ícone desta opção mudará, pois fica sempre o último recurso utilizado da lista. Feito isso, basta clicar por sobre o segmento AD. Depois, clica na opção "Reta definida por Dois

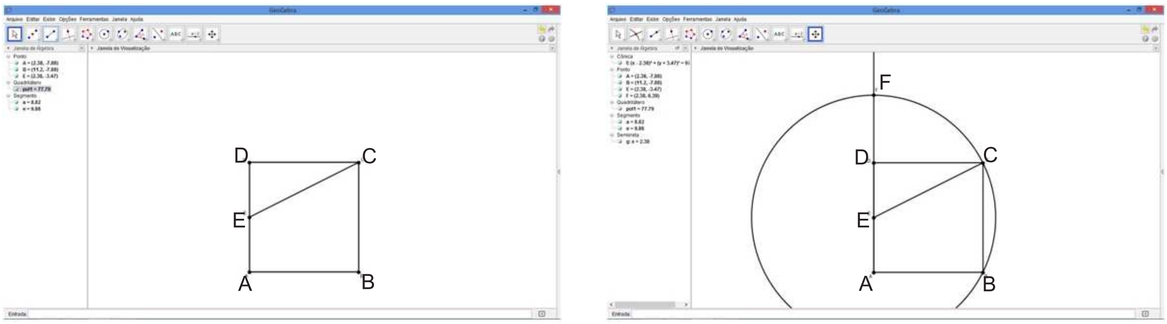

Figura 3.2: 2º e 3º Passo

Pontos"que tem exatamente isto como ícone, e seleciona "Segmento definido por Dois Pontos". Por fim, clica no ponto C e no ponto E que o segmento será determinado. Veja Figura 3.2.

3º passo: Obter o ponto F de modo que o ponto D pertença ao segmento EF, e o comprimento $\overline{EF} = \overline{EC}$.

Clicar na opção "Círculos dados centro e Um de seus Pontos". Os recursos envolvendo círculos servem para realizar o trabalho que seria feito com um compasso em um desenvolvimento manuscrito. Pois bem! Este é a opção que queremos. Agora, devemos clicar primeiro no ponto que queremos determinar como centro, no caso o ponto E. Em seguida, clicamos em C, o que determina que o segmento EC é o raio. Agora, na opção "Segmento definido por Dois Pontos"vamos selecionar a alternativa "Semirreta Definida por Dois Pontos", e clicar nos pontos A e D. Por fim, recorramos a opção "Ponto Médio ou Centro" e selecionemos "Interseção de Dois Objetos". Vamos clicar no círculo e na semirreta obtidos até que se perceba que ambos estejam selecionados simultaneamente. O ponto F foi determinado. Veja Figura 3.2.

4º passo: Determinar o quadrado FDGH, de maneira que o ponto G pertença ao segmento CD.

A construção do quadrado é similar ao primeiro passo, mas dessa vez após selecionar a opção "Polígono Regular", vamos clicar nos pontos F e D, nesta ordem, pois do contrário o ponto G não pertencerá ao segmento DC.

Pronto! Temos que o ponto G secciona o segmento CD segundo a proporção áurea. Isto é, $\frac{\overline{DG}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DG}} = \varphi$. Veja Figura 3.3. Para que seja confirmado, podem-se traçar os segmentos $\overline{DG}$ e $\overline{GC}$, observando que na coluna "Janela de Álgebra"é informado o comprimento de cada segmento traçado. Utilizando-se da calculadora, efetuamos a divisão entre esses valores, e resultará em um número muito próximo ao Número de Ouro.

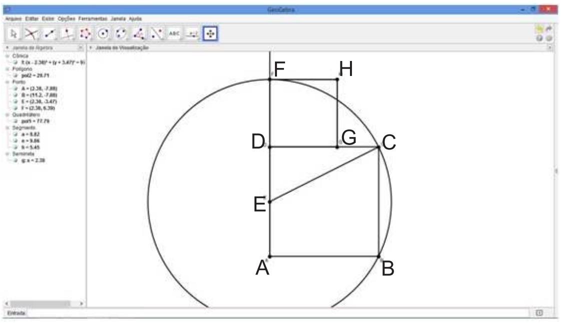

Figura 3.3: 4º Passo

3.2 Construção a partir de um segmento qualquer

1º passo: Determinar um segmento AB qualquer, e o ponto médio C deste segmento.

Seguindo as últimas modificações feitas, basta clicar na opção "Semirreta Definida por Dois Pontos" e selecionar a opção "Segmento definido por Dois Pontos" e marcar os dois pontos que definem o segmento. Agora, cliquemos em "Interseção entre Dois Objetos" e selecionemos "Ponto Médio ou Centro". Em seguida, vamos clicar no seguimento AB construído. Veja Figura 3.4

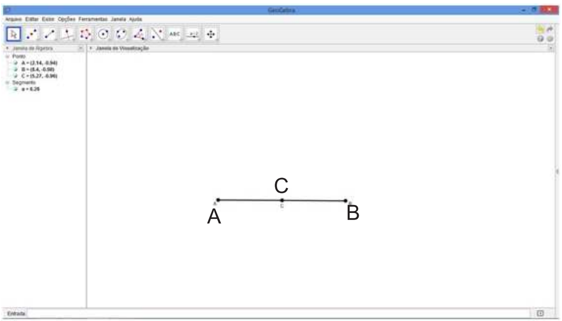

Figura 3.4: 1º Passo

2º passo: Construir uma circunferência de centro em B e raio BC, de modo análogo ao que foi feito no 3º passo de 3.1. Veja Figura 3.5.

3º passo: Determinar uma reta perpendicular ao segmento AB, passando por B. Selecionar a opção "Reta Perpendicular", clicar no segmento AB e em seguida no ponto B. Veja Figura 3.5.

4º passo: Determinar o ponto D de interseção entre a reta perpendicular e o círculo

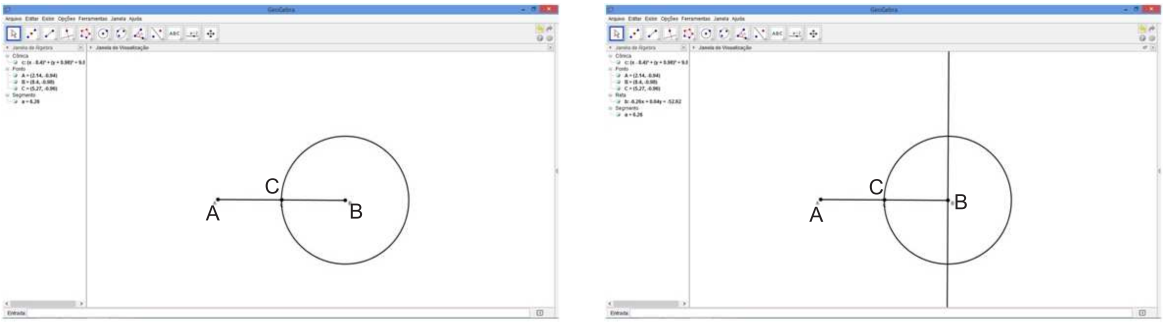

Figura 3.5: 2º e 3º Passo

de modo análogo ao 3º passo de 3.1. Como há dois pontos de interseção, é preciso definir qual deles será o ponto D almejado. Neste caso, é possível escolher qualquer um, mas opto pelo de cima. Veja Figura 3.6.

5º passo: Construção do segmento AD e do círculo de centro em D e raio DB, determinando do ponto E de interseção entre o segmento AD e o círculo de centro em D construído. Procedimento já explicitado. Veja Figura 3.6.

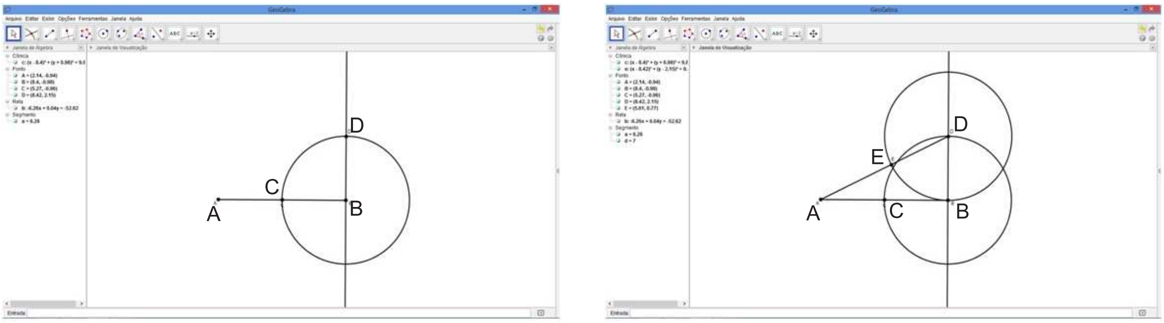

Figura 3.6: 4º e 5º Passo

6º passo: Construir o círculo de centro em A e raio AE, e determinar o ponto F de interseção entre o segmento AB e o círculo de centro em A construído. Veja Figura 3.7.

Pronto! O ponto F divide o segmento AB tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \varphi$. Para confirmação, procede-se de modo análogo a construção anterior.

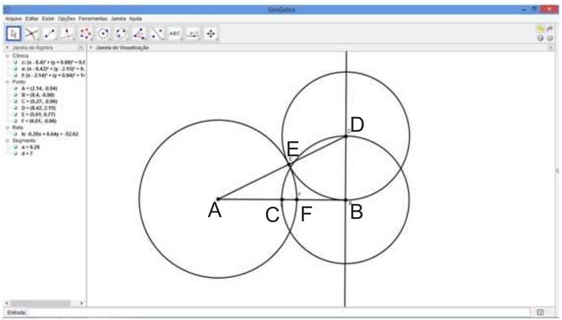

Figura 3.7: 6º Passo

3.3 Conclusão

Percebe-se que discorrer sobre um número irracional destacável, como o é o Número de Ouro, implica em uma matemática rica em geometria e álgebra, mas que vai além de um conceito matemático puro por si só. O número de ouro é pouco difundido/trabalhado nas licenciaturas em matemática, sendo que um aluno do Ensino Médio, em linhas gerais, ingressa nesse nível de aprendizagem escolar tendo ao menos escutado algo acerca dos números irracionais e sabe o que significa razão e proporção. Sendo assim, compreendo ser relevante a apresentação deste número a alunos desse nível de formação.

São estímulos à aprendizagem interdisciplinar aspectos como: presença na natureza (Espiral de Ouro em molusco, a quantidade de pétalas de uma flor associada a termos da sequência de Fibonacci), constatação de Retângulos Áureos na arte e arquitetura, etc.

O desenvolvimento algébrico com equação do 2º grau. A busca por saber qual a exata divisão que se deve fazer em um segmento para que ocorra a proporção áurea, fazendo uso do software matemático GeoGebra, gratuito e simples de usar, caracterizando o lúdico e moderno no ensino-aprendizagem de matemática. São aspectos do Número de Ouro que atrai a atenção, incita a curiosidade, torna o conhecimento matemático mais prazeroso, especialmente em adolescentes nos tempos atuais.

3.4 Sobre projetos futuros

Durante o período que foi pensado no tema deste trabalho até o término, não foi possível realizar alguma atividade prática com alunos do Ensino Médio. Acredito que se houvera feito, enriqueceria de modo significativo este trabalho. Contudo, tenho pretensões de criar e executar atividade(s) acerca do tema e coletar reações e resultados. Provavelmente a maioria das atividades que penso em realizar requisitarão o uso do GeoGebra, o qual apresentarei aos alunos e os incentivarei a baixar e explorar.

O tema em pauta, uma vez que praticamente sequer se ouve falar nas licenciaturas, é também cabível em cursos de formação de professores. Contudo, com uma abordagem mais aprofundada que no Ensino Médio, obviamente!

Uma ideia em fase inicial, portanto não amadurecida, relacionada a atividades com os alunos do Ensino Médio, seria dividir a sala em equipes para que cada uma pesquise sobre um tipo de constatação do Número de Ouro. Realizariam um trabalho escrito e uma apresentação. Além disso, cada equipe ficaria responsável por encontrar maneiras diferentes de obter a secção áurea utilizando-se do GeoGebra. Caso não seja viável aos alunos fazerem uso do computador na escola, eles me apresentam os passos por escrito e eu exibiria em sala de aula.

Aplicar a ideia do Número de Ouro no Ensino Médio associado ao GeoGebra não é tarefa fácil. Existe todo um conteúdo programático padrão a ser cumprido, exige acesso a informática, um preparo em termos puramente matemáticos e no contexto do uso de software. Eis um desafio!

Referências Bibliográficas

[1] Belussi, G.M., *Número de ouro.* Disponível em: < http : //www.mat.uel.br/geometrica/artigos/ST − 15 − TC.pdf >. Acesso em: 18 de novembro de 2012.

[2] Carvalho, J. J. de, *Razão áurea.* Disponível em < http : //www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/Monografia$_J$urandir.pdf >. Acesso em: 18 de novembro de 2012.

[3] Ferrer, J. V., *O número de ouro na arte, arquitetura e natureza: beleza e harmonia.* Disponível em < http : //www.cienciaengalego.org/drupal6/sites/default/files/numero_de_ouro.pdf >. Acesso em: 18 de novembro de 2012.

[4] Garcia, V.C., *O número de ouro como instrumento de aprendizagem significativa no estudo dos números irracionais.* Disponível em < http : //www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias − digitais − II/modulo − IV/ numero_de_ouro2.pdf >. Acesso em: 18 de novembro de 2012.

[5] Ribordy, L., *Arquitetura e geometrias sagradas pelo mundo: à luz do número de ouro.* São Paulo, Madras, 2012.

[6] Zahn, M., *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2011.