PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

Humberto Gullo de Barros

Trigonometria: Fórmulas de Adição e Subtração de Arcos

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Carlos Frederico Borges Palmeira

Rio de Janeiro
Abril de 2014

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Humberto Gullo de Barros

Trigonometria: Fórmulas de Adição e Subtração de arcos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Frederico Borges Palmeira
Orientador
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. Débora Freire Mondaini
Departamento de Matemática -PUC-Rio

Prof. Dirce Uesu Pesco
Departamento de Matemática – UFF

Prof. José Eugênio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico PUC-Rio

Rio de Janeiro, 11 de abril de 2014

Humberto Gullo de Barros

Licenciou-se em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Foi professor da Secretaria Estadual de Educação e da rede particular de ensino. É Professor da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro. Leciona cálculo diferencial e integral no curso de engenharia e métodos quantitativos no curso de administração do Centro Universitário Augusto Motta (UNISUAM).

Ficha Catalográfica

Barros, Humberto Gullo de

Trigonometria : fórmulas de adição de arcos / Humberto Gullo de Barros ; orientador: Carlos Frederico Borges Palmeira. – 2014.

73 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2014.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Trigonometria. 3. Adição de arcos. 4. Demonstrações. 5. Círculo trigonométrico. 6. Fórmulas. 7. Função de Euler. I. Palmeira, Carlos Frederico Borges. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD:510

Aos meus filhos Matheus e Arthur, fontes de força e inspiração, requisitos que foram fundamentais para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Agradecimentos

Aos professores do Profmat – PUC-RIO, por me emprestarem com simplicidade um pouco de suas experiências de vida, as quais muito contribuíram para a consolidação deste trabalho. E, em especial, ao meu orientador Dr Sc Carlos Frederico Borges Palmeira.

Aos meus amigos de turma, por estarmos sempre unidos por uma grande amizade, apesar das dificuldades de percurso e, assim, contribuindo para o enriquecimento intelectual da equipe.

À Capes, ao Profmat e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

A todos os amigos e familiares que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram.

Resumo

Barros, Humberto Gullo de; Palmeira, Carlos Frederico Borges. **Trigonometria: Fórmulas de Adição e Subtração de Arcos**. Rio de Janeiro, 2014. 73p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Trata-se de uma proposta que visa orientar o professor de Matemática do Ensino Médio em relação às dificuldades encontradas no ensino-aprendizagem da Trigonometria. Mais especificamente, para facilitar, com demonstrações alternativas, o desenvolvimento das fórmulas de adição de arcos. Para o desenvolvimento desse trabalho, optou-se pela metodologia da pesquisa documental, na qual se buscou os subsídios para o desenvolvimento da proposta.

Palavras-chave

Trigonometria; Seno; Cosseno; Adição de arcos.

Abstract

Barros, Humberto Gullo de; Palmeira, Carlos Frederico Borges (Advisor). **Trigonometry: Angle Addition Formulas.** Rio de Janeiro, 2014. 73p. MSc. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

It is a proposal which aims to guide Mathematics High School teachers to cope with the difficulties faced in the teaching-learning process of trigonometry. More specifically, it will facilitate the development of arc addition formulas by the use of alternative statements. In order to improve this work, it was chosen the documentary research methodology, where the subsidies for the development of this proposal were searched.

Keywords

Trigonometry; Sine; Cossine; Adding Arcs.

Sumário

Lista de figuras

1 Introdução

A Trigonometria começa a fazer parte do conteúdo programático de Matemática a partir do 9º ano do ensino fundamental. E para o desenvolvimento de conteúdos mais elaborados é necessário amadurecer alguns conceitos em matemática, por isso a trigonometria se estende nos anos seguintes.

Uma das maiores dificuldades para os professores de matemática está em se fazer entender nas demonstrações de fórmulas. Talvez porque, usualmente, elas não sejam apresentadas nos livros didáticos de maneira simples, ou então são omitidas.

Pesquisas informais junto aos alunos e professores têm mostrado exemplos expressivos dessas dificuldades.

Alguns amigos professores apresentam as fórmulas de adição de arcos sem a devida demonstração em sala de aula. Justificam que tais demonstrações são longas, complicadas e até desmotivam a aprendizagem. Outros preferem apenas citá-las e criam rimas e canções para decorá-las.

A demonstração em matemática é uma das competências indicadas nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), para o ensino fundamental e para o ensino médio, como parte integrante do currículo da escola básica.

Este trabalho tem como objetivo minimizar as dificuldades no ensino-aprendizagem das fórmulas de adição de arcos na trigonometria, apresentando um material de consulta, principalmente para futuros professores, possibilitando a preparação de suas aulas com demonstrações alternativas das fórmulas de adição de arcos na trigonometria, que não constam, usualmente, em livros didáticos.

Para o desenvolvimento desse trabalho, optou-se pela metodologia da pesquisa documental, na qual se buscou os subsídios para o desenvolvimento da proposta, ou seja, buscar formas alternativas para o ensino-aprendizagem da adição de arcos na trigonometria.

Inicialmente, serão apresentados alguns conceitos e pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do tema.

A Trigonometria pode, para fins didáticos, ser subdividida. Temos, por exemplo, a Trigonometria no Triângulo Retângulo, a Trigonometria no Círculo Trigonométrico, a Trigonometria na Esfera, entre outros.

Após refletir sobre qual forma de abordagem seria utilizada neste Trabalho, optou-se por escrever sobre duas delas: A trigonometria no Triângulo Retângulo e depois sobre a trigonometria no Círculo Trigonométrico.

Historicamente, o seno e o cosseno foram introduzidos como *razões* entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo e estavam definidos somente para ângulos agudos.

Já no contexto do círculo trigonométrico, para introduzir o seno e o cosseno, tomamos como referência um círculo orientado S^1, de raio unitário, com centro na origem de um sistema de eixos cartesianos, e consideramos os ângulos centrais que possuem um dos lados no eixo horizontal e o outro definido por um segmento $\overline{OP}$, onde P é um ponto sobre a circunferência.

No círculo trigonométrico, o seno e o cosseno corresponderão às medidas das projeções do segmento $\overline{OP}$ sobre os eixos cartesianos.

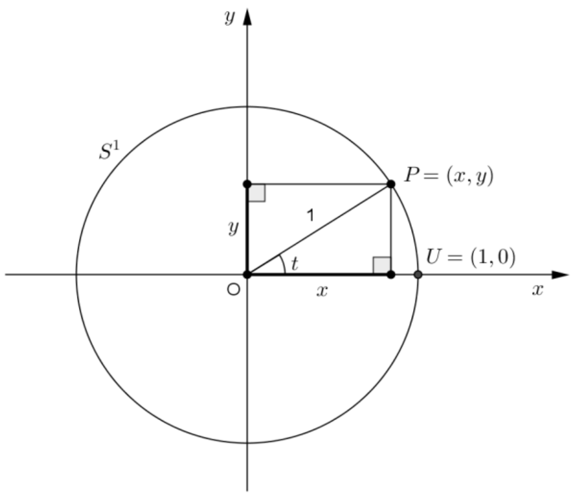

Figura 1: Seno e cosseno no círculo trigonométrico

Se P está no primeiro quadrante, os ângulos determinados são agudos e tudo ocorre como no contexto das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Se movermos P sobre a circunferência, obteremos ângulos obtusos, podemos ainda dar mais de uma volta completa no círculo e também percorrê-lo no sentido negativo (horário). Com a introdução da função de Euler, (que ainda será definida neste trabalho), os conceitos inicialmente construídos, ou seja, aqueles que usam o triângulo retângulo como referência e as definições limitadas a ângulos agudos serão estendidos. Assim, passaremos a tratar de seno e cosseno de números reais e generalizar todas as fórmulas de trigonometria.

De forma geral, todas as relações entre razões trigonométricas são na verdade expressões algébricas de propriedades geométricas envolvendo os triângulos retângulos, seus lados e seus ângulos.

Visando minimizar o que foi exposto, este **Trabalho de Conclusão de Curso** reúne diferentes maneiras de demonstrar as fórmulas de adição de arcos. Servindo como consulta para a preparação de futuras aulas de trigonometria.

Desta forma, busca-se responder a seguinte questão: **Como minimizar as dificuldades, no ensino-aprendizagem, das fórmulas de adição de arcos na trigonometria?**

2 A trigonometria no triângulo retângulo

A trigonometria foi inventada há mais de dois mil anos. Ela consiste, essencialmente, em associar a cada ângulo α, *definido como a união de um par de semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (Rezende; Queiroz, 2000, p. 21*), certos números como o $\cos\alpha$ (o cosseno de α) e o $\mathrm{sen}\alpha$ (o seno de α) . Até então, as relações métricas nos triângulos se restringiam em estabelecer fórmulas que relacionavam entre si comprimentos de segmentos (alturas, lados, bissetrizes, etc.). Já a Trigonometria relacionava ângulos com segmentos.

2.1 Conceitos e pré-requisitos

A base teórica na qual se fundamentou originalmente a Trigonometria foi a semelhança de triângulos, que garante que as definições de $\cos\alpha$ e $\mathrm{sen}\alpha$ são coerentes, isto é, independem de qual tenha sido o triângulo retângulo ABC escolhido.

2.1.1 Definição de seno e cosseno de um ângulo agudo

Dado um ângulo agudo α, constrói-se um triângulo retângulo ABC no qual $\alpha = B\hat{A}C$ seja um dos seus ângulos.

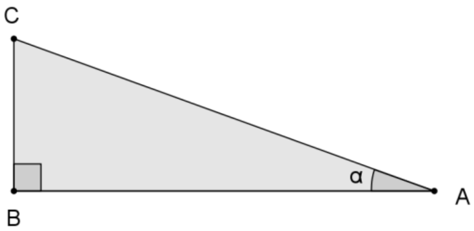

Figura 2: Seno e cosseno de um ângulo agudo

Se $\overline{AC}$ é a hipotenusa, define-se:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{e} \quad sen\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Se tivéssemos construído qualquer outro triângulo retângulo $AB'C'$ de modo análogo, ele seria semelhante a ABC por ter um ângulo agudo comum, logo $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$ e $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}}$.

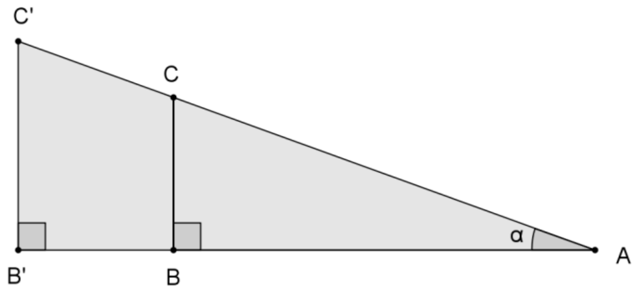

Figura 3: Seno e cosseno de um ângulo agudo

Assim, teríamos os mesmos valores para $\cos\alpha$ e $\text{sen}\,\alpha$. Portanto, de acordo com a definição acima, esses valores são números associados ao ângulo α que independem do triângulo retângulo ABC escolhido.

Veremos a seguir que é evidente, a partir da definição, que o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento e vice-versa. Daí a palavra cosseno (seno do complemento).

Pela lei angular de Thales: $\beta = 90^\circ - \alpha$ (β é o complemento de α)

$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos\alpha = \frac{c}{a}$

$\text{sen}\,\beta = \frac{c}{a}$ e $\cos\beta = \frac{b}{a}$

Logo: $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$ e $\cos\alpha = \text{sen}\,\beta$

$\text{sen}\,\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$

$\cos\alpha = \text{sen}\,(90^\circ - \alpha)$

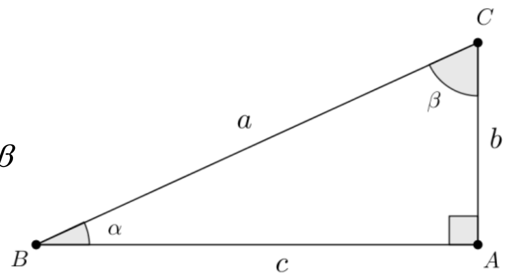

Figura 4: Seno e cosseno do complemento de um ângulo

Logo, construída uma tabela para os valores do seno de um ângulo agudo, podemos construir a dos cossenos.

Como já mencionamos, historicamente o seno e o cosseno foram introduzidos como *razões* entre lados de um triângulo retângulo, e estavam definidas para ângulos do intervalo (0° , 90°).

Entretanto para que possamos tratar das ferramentas adequadas a qualquer triângulo é necessário definir seno e cosseno para ângulos até 180º.

2.1.2 Definição de seno e cosseno de ângulos reto e obtuso

No caso do ângulo reto, definimos: sen 90º = 1 e cos 90º = 0.
Seja agora β um ângulo obtuso. Para definir as razões trigonométricas de β, vamos considerar seu suplemento $\alpha = 180º - \beta$.

Definimos:
$\text{sen}\beta = \text{sen}\,\alpha$ e $\cos\beta = -\cos\alpha$

As figuras a seguir permitem visualizar o seno e o cosseno de ângulos agudos ou obtusos. Nelas tomamos $\overline{AC} = 1$.

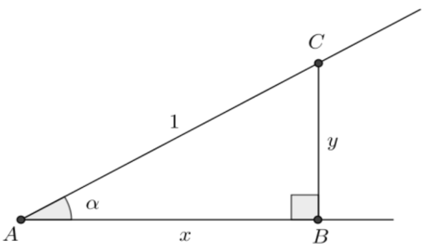

Figura 5: Seno e cosseno de um ângulo agudo

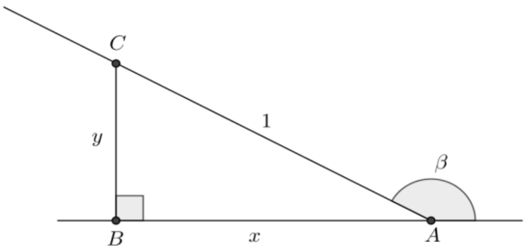

Figura 6: Seno e cosseno de um ângulo obtuso

Na *figura 5,* temos $\text{sen}\,\alpha = y$ e $\cos\alpha = x$

Na *figura 6*, temos $\text{sen}\beta = y$ e $\cos\beta = -x$

Assim, temos:

$$\text{sen}\beta = \text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}\beta = \text{sen}\,(180º - \beta)$$

$$\cos\beta = -\cos\alpha \Rightarrow \cos\beta = -\cos\,(180º - \beta)$$

2.1.3 Relação fundamental

Dado um ângulo agudo α, constrói-se um triângulo retângulo ABC no qual $\alpha = A\hat{B}C$ seja um dos ângulos. Com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, conforme figura a seguir:

Assim, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{c}{a}$$

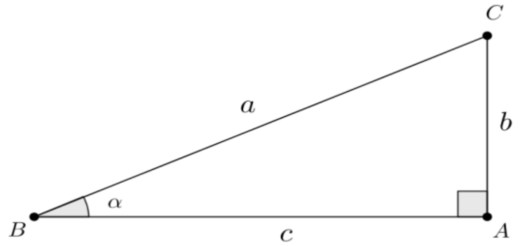

Figura 7: Relação fundamental

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Assim, podemos escrever: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

Logo, $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Podemos observar também que:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a.\text{sen}\,\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a.\cos\alpha$$

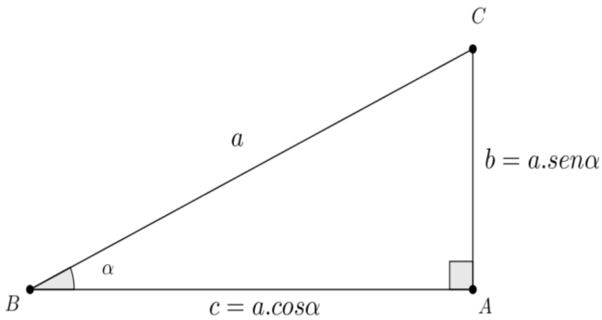

Figura 8: Catetos em função do seno ou cosseno e da hipotenusa

Assim, podemos escrever os catetos de um triângulo retângulo em função do seno e do cosseno de um ângulo agudo e da hipotenusa.

2.1.4 Lei dos cossenos

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$. Seja ainda $h = \overline{CH}$

a altura baixada de C sobre o lado $\overline{AB}$. Há duas possibilidades, ilustradas nas figuras, conforme o ponto H pertença ao segmento $\overline{AB}$ ou esteja sobre seu prolongamento.

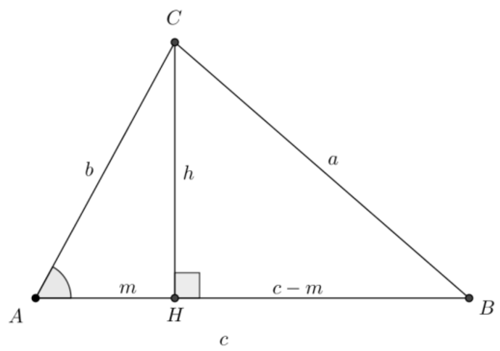

Figura 9: Lei dos cossenos- Triângulo acutângulo

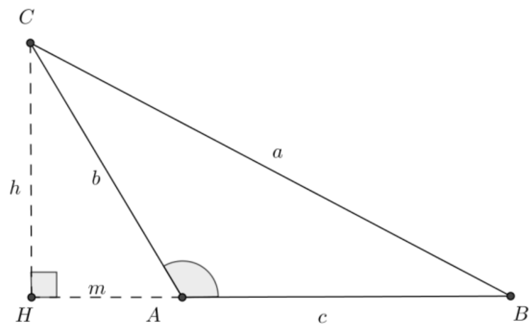

Figura 10: Lei dos cossenos - Triângulo obtusângulo

I) No primeiro caso, seja $m = \overline{AH} = b.\cos\hat{A}$. O Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos AHC e BHC fornece as igualdades:

$$b^2 = h^2 + m^2$$

e

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2 = h^2 + c^2 - 2.c.m + m^2$$

Mas como $m = b.\cos\hat{A}$

Temos : $a^2 = h^2 + c^2 - 2.c.b.\cos\hat{A} + m^2$

Comparando estas igualdades obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$$

II) No segundo caso, $m = \overline{AH} = b.\cos\left(180^{o} - \hat{A}\right) = -b.\cos \hat{A}$.

Novamente o Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos AHC e BHC nos dá:

$$b^2 = h^2 + m^2$$

e

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2 = h^2 + c^2 + 2.c.m + m^2$$

Mas como $m = -b.\cos \hat{A}$

Temos: $a^2 = h^2 + c^2 - 2.c.b.\cos \hat{A} + m^2$

Daí resulta, como antes, que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$$

Analogamente, tem-se também:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \hat{C}$$

Observe que, quando Â é um ângulo reto, a Lei dos Cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras.

Uma utilização importante da Lei dos Cossenos, é a de podermos, facilmente, obter os cossenos dos ângulos de um triângulo quando seus lados são conhecidos.

2.1.5 Lei dos senos

Mostraremos a seguir que, em todo triângulo, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual ao diâmetro do círculo circunscrito a esse triângulo.

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{BC} = a$,$\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Seja R o raio da circunferência circunscrita. Então:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

Demonstração:

Há duas possibilidades, ilustradas nas figuras, conforme o ponto H pertença ao segmento $\overline{AB}$ ou esteja sobre seu prolongamento.

I) No primeiro caso, traçando a altura h_1 do triângulo ABC relativa ao vértice C, temos:

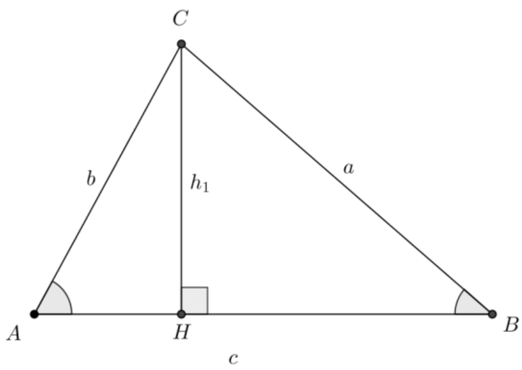

Figura 11: Lei dos senos- Triângulo acutângulo

No triângulo AHC, $h_1 = b.\operatorname{sen}\hat{A}$

No triângulo BHC, $h_1 = a.\operatorname{sen}\hat{B}$

Logo, $b.sen\hat{A} = a.sen\hat{B} \Rightarrow \dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$ (1)

Ainda no primeiro caso, traçando a altura h_2 do triângulo ABC relativa ao vértice A, temos:

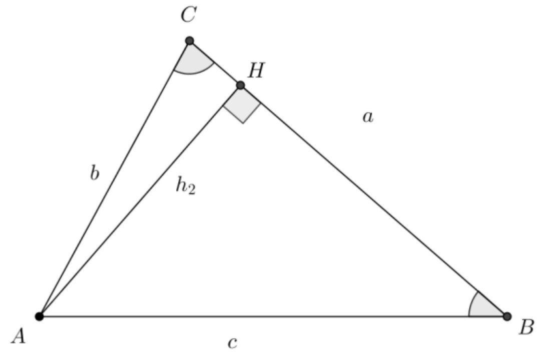

Figura 12: Lei dos senos- Triângulo acutângulo

No triângulo AHC, $h_2 = b.\operatorname{sen}\hat{C}$

No triângulo AHB, $h_2 = c.\operatorname{sen}\hat{B}$

Logo, $b.\operatorname{sen}\hat{C} = c.\operatorname{sen}\hat{B} \Rightarrow \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$ (2)

Comparando (1) e (2), temos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

II) No segundo caso, traçando a altura h_1 do triângulo ABC relativa ao vértice C, temos:

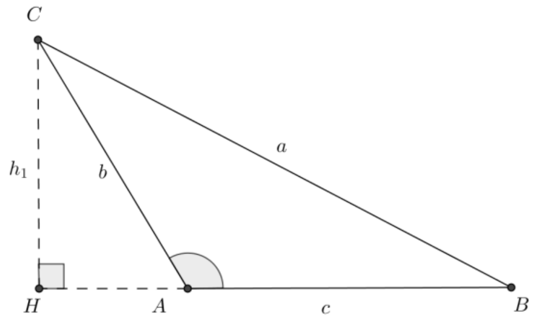

Figura 13: Lei dos senos- Triângulo obtusângulo

No triângulo AHC, $h_1 = b.\operatorname{sen}(180^{o} - \hat{A})$

Mas como sabemos que $\operatorname{sen}(180^{o} - \hat{A}) = \operatorname{sen}\hat{A}$,

Temos: $h_1 = b.\operatorname{sen}\hat{A}$

No triângulo BHC, $h_1 = a.\operatorname{sen}\hat{B}$

Logo, $b.\operatorname{sen}\hat{A} = a.\operatorname{sen}\hat{B} \Rightarrow \dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$ (3)

Ainda no segundo caso, traçando a altura h_2 do triângulo ABC, relativa ao vértice A, temos:

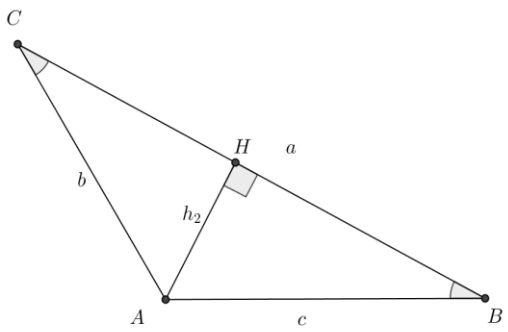

Figura 14: Lei dos senos-
Triângulo obtusângulo

No triângulo AHC, $h_2 = b.\text{sen}\,\hat{C}$

No triângulo AHB, $h_2 = c.\text{sen}\,\hat{B}$

Logo, $b.\text{sen}\,\hat{C} = c.\text{sen}\,\hat{B} \Rightarrow \dfrac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$ (4)

Comparando (3) e (4), temos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

Para completar a demonstração, ainda temos uma interpretação geométrica para a razão $\dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$:

Caso $\hat{B}$ seja um ângulo agudo, temos:

Seja $\overline{CD}$ um diâmetro.

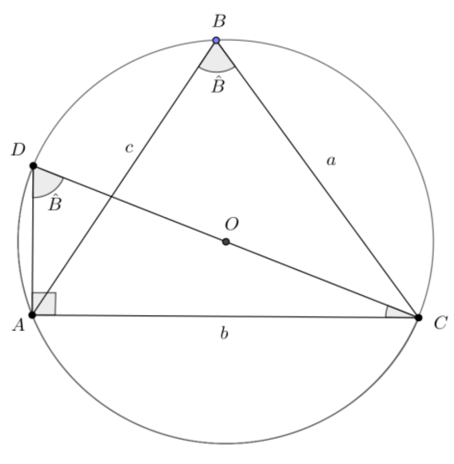

Figura 15: Lei dos senos

Os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são congruentes, pois ambos são ângulos inscritos na mesma circunferência e compreendem o mesmo arco AC.

Assim, no triângulo ADC,

$\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{b}{2R} \Leftrightarrow \dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = 2R$ = diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Analogamente,

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R$$

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{2R} \Leftrightarrow \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

Finalmente,

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

Caso $\hat{B}$ seja um ângulo obtuso, temos:

Seja $\overline{CD}$ um diâmetro.

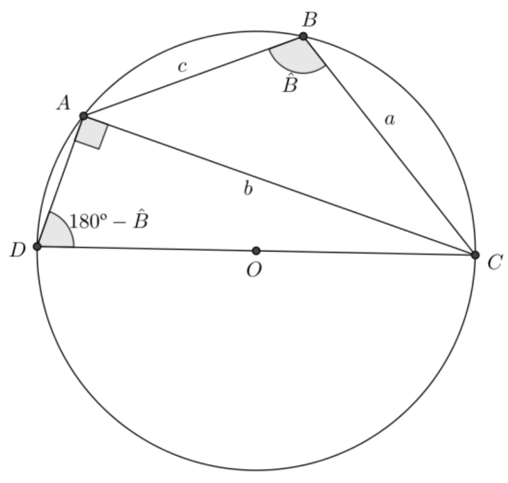

Figura 16: Lei dos senos

O ângulo $A\hat{B}C$, inscrito na circunferência acima, compreende o arco ADC. O ângulo $A\hat{D}C$, também inscrito na mesma circunferência, compreende o arco ABC.

Sendo o ângulo $A\hat{B}C$ igual a $\hat{B}$, temos que o ângulo $A\hat{D}C$ é igual a $180º-\hat{B}$, pois os arcos que eles compreendem são replementares (cuja soma é igual a 360º).

Assim, no triângulo ADC,

$\text{sen}\,(180º-\hat{B}) = \dfrac{b}{2R}$ = diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Mas como $\text{sen}\,(180º-\hat{B}) = \text{sen}\,\hat{B}$, temos:

$$\text{sen}\,(180º-\hat{B}) = \text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{2R} \Leftrightarrow \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = 2R$$

Analogamente,

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R$$

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{2R} \Leftrightarrow \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

Finalmente,

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

2.1.6 Área de um triângulo em função de dois lados e o ângulo formado por eles

Conhecemos bem a fórmula da área do triângulo como sendo o semiproduto da base pela altura. Expressaremos esta área como função de dois lados e o ângulo formado por eles.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Há duas possibilidades, ilustradas nas figuras, conforme o ponto H pertença ao segmento $\overline{AC}$ ou esteja sobre seu prolongamento.

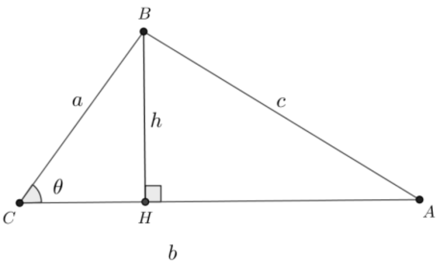

Figura 17: Área de um triângulo acutângulo

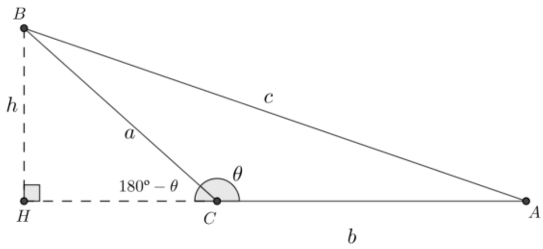

Figura 18: Área de um triângulo obtusângulo

Como mencionado inicialmente, sabemos que a área deste triângulo ABC deve ser calculada pela expressão: $Área = \dfrac{base \cdot altura}{2}$

Logo, $Área = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Podemos notar nas duas figuras que o triângulo formado pelos vértices BCH é um triângulo retângulo, e então podemos usar os conceitos trigonométricos.

Na figura 17, temos: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen}\theta$

Na figura 18, temos: $\operatorname{sen}(180º - \theta) = \operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen}\theta$

Como temos agora esta expressão para a altura do triângulo ABC , podemos substituí-la na nossa primeira fórmula para a área.

Assim, teremos: $Área = \dfrac{b \cdot h}{2} \Rightarrow Área = \dfrac{b \cdot a \cdot \operatorname{sen}\theta}{2}$

Logo, $Área = \dfrac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\theta}{2}$

Essa fórmula será usada na proposta 2, na demonstração da fórmula da adição de arcos no contexto da trigonometria no triângulo retângulo.

3 Demonstrações das fórmulas da adição de arcos no contexto da trigonometria no triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo, $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ estão definidos apenas para ângulos positivos agudos $0º < \alpha < 90º$. Há boas razões para estender ambas as definições a outros valores de ângulos, mas para fazê-las, mesmo para 0º e 90º ou até mesmo para ângulos obtusos, são exigidas definições adicionais, as quais foram apresentadas quando tratamos de seno e cosseno de ângulos obtusos.

Sem extensões apropriadas, as definições só permitem derivar fórmulas sujeitas às limitações de ângulos.

Estamos preocupados aqui, neste contexto, em apresentar as fórmulas, nas quais todos os ângulos envolvidos satisfaçam as limitações básicas inerentes ao triângulo.

Naturalmente, após a extensão das definições, as fórmulas permanecerão verdadeiras para todos os valores dos dois ângulos α e β, mas isto só será possível quando tratarmos de trigonometria no círculo trigonométrico.

Cada professor tem a sua demonstração favorita das importantes fórmulas $\operatorname{sen}(a \pm b)$ e $\cos(a \pm b)$. De qualquer forma, é sabido que deduzida uma delas, as outras podem ser obtidas por complemento, suplemento, etc.

3.1 Proposta 1 - Demonstração do seno da soma de arcos

Uma das mais simples e rápidas que se conhece é uma demonstração que se baseia, em primeiro lugar, na conhecida fórmula: $a = b.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{B}$, onde $a, b, c, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ são os lados e os ângulos respectivos de um triângulo.

Essa fórmula pode ser visualizada facilmente e diz apenas que o lado a é a soma (ou a diferença, se B ou C for obtuso) das projeções ortogonais dos lados b e c sobre o próprio a, como se vê nas figuras.

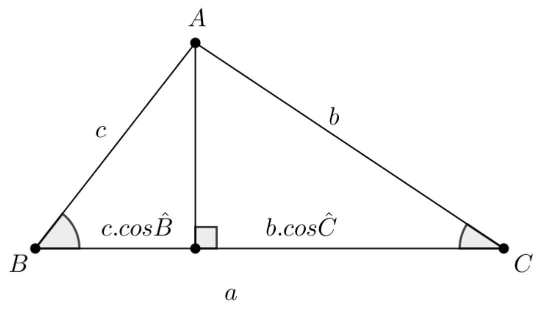

Figura 19: Demonstração do seno da soma de arcos

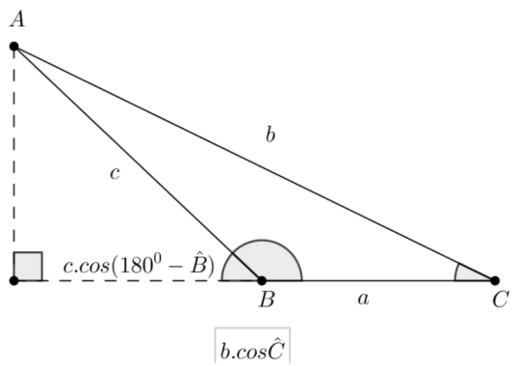

Figura 20: Demonstração do seno da soma de arcos

Na figura 19, temos: $a = b.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{B}$

Na figura 20, temos: $a = b.\cos\hat{C} - c.\cos.(180 - \hat{B})$

$$a = b.\cos\hat{C} - c.(-\cos\hat{B})$$
$$a = b.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{B}$$

Assim, sempre poderemos escrever : $a = b.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{B} \qquad (1)$

Por outro lado, a **Lei dos Senos** em um triângulo (que foi demonstrada anteriormente) afirma que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R \qquad (2)$$

Onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC

Segue-se de (2) que, num triângulo de diâmetro 1, ou seja, 2R=1, temos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 1$$

$$\Rightarrow a = \operatorname{sen}\hat{A} \quad , \quad b = \operatorname{sen}\hat{B} \quad , \quad c = \operatorname{sen}\hat{C}$$

Então, para um triângulo inscrito nesse círculo, a fórmula (1) se lê:

$$a = b.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{B}$$
$$\text{sen}\,\hat{A} = \text{sen}\,\hat{B}.\cos\hat{C} + \text{sen}\,\hat{C}.\cos\hat{B}$$

E como, finalmente, o ângulo $\hat{A}$ é o suplemento de $\hat{B}+\hat{C}$, ou seja, tem o mesmo seno, obtém-se a célebre fórmula:

$$\text{sen}\left(\hat{B}+\hat{C}\right) = \text{sen}\,\hat{B}.\cos\hat{C} + \text{sen}\,\hat{C}.\cos\hat{B}$$

Vale ressaltar que essa dedução é válida para $\hat{B}+\hat{C}$ < 180º. Isto é sempre verdade, pois $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180^{o}$.

3.2 Proposta 2: Outra demonstração do seno da soma de arcos

Como em qualquer triângulo a área é igual ao semiproduto de dois lados pelo seno do ângulo formado por eles, temos as seguintes relações para os três triângulos da figura abaixo:

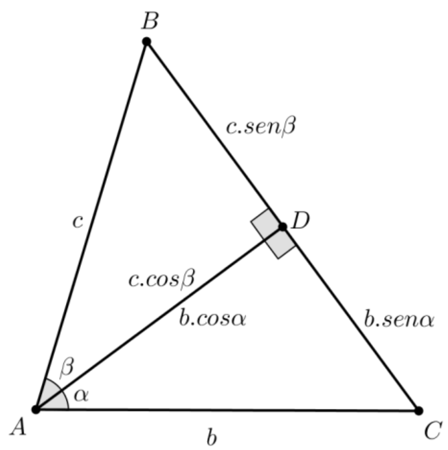

Figura 21: Outra demonstração do seno da soma de arcos

No triângulo ABC: $Área_{ABC} = \frac{1}{2}.b.c.\text{sen}\,(\alpha + \beta)$

No triângulo ABD: $Área_{ABD} = \frac{1}{2}.c.b.\cos\alpha.\text{sen}\beta$

No triângulo ACD: $Área_{ACD} = \frac{1}{2}.b.c\cos\beta.\text{sen}\alpha$

E como $Área_{ABC} = Área_{ABD} + Área_{ACD}$, temos:

$$\frac{1}{2}.b.c.\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}.c.b.\cos\alpha.\text{sen}\beta + \frac{1}{2}.b.c\cos\beta.\text{sen}\alpha$$

Simplificando, temos:

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\,\text{sen}\beta + \cos\beta.\,\text{sen}\alpha$$

Ou ainda:

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta + \text{sen}\beta.\cos\alpha$$

Vale ressaltar que esta demonstração supõe como limitação: $0° < \alpha + \beta < 180°$

3.3 Proposta 3: Uma demonstração do seno da soma e do seno da diferença de arcos

A demonstração a seguir supõe como limitação: $0° < a, b, a - b, a + b < 90°$

a) $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a.\cos b + \text{sen}\,b.\cos a$

b) $\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,a.\cos b - \text{sen}\,b.\cos a$

Para demonstrar a primeira parte, considera-se a figura (22) onde:

$\overline{OC} = 1,\ \ \overline{AB} \perp \overline{OC},\ \ \ A\hat{O}C = a$ e $B\hat{O}C = b$.

Temos então, $\overline{OA} = 1/\cos a,\ \ \overline{OB} = 1/\cos b,\ \ \overline{CA} = tg\ \ a,\ \ \overline{CB} = tg\ \ b$

Traçando $\overline{AD} \perp \overline{OB},$ temos que $\overline{AD} = \overline{OA}.\text{sen}\left(a+b\right).$

Usando novamente que $\overline{OB}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{OC}$, temos:

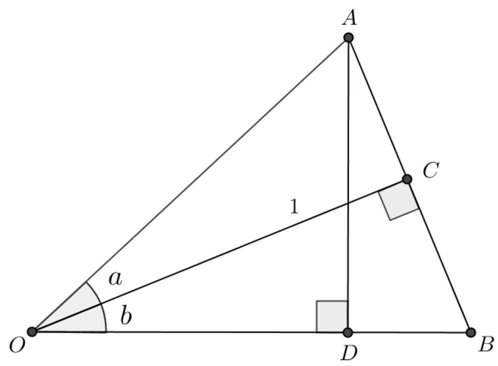

Figura 22: Uma demonstração do seno da soma de arcos

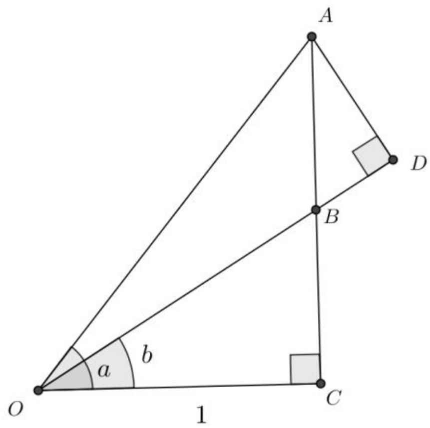

Figura 23: Uma demonstração do seno da diferença de arcos

$$\frac{1}{\cos b}.\frac{1}{\cos a}.\ \ \text{sen}\left(a+b\right) = \left(\text{tg}\, a + \text{tg}\, b\right).1$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}\left(a+b\right)}{\cos a.\cos b} = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a} + \frac{\text{sen}\, b}{\cos b} \quad \Rightarrow \frac{\text{sen}\left(a+b\right)}{\cos a.\cos b} = \frac{\text{sen}\, a.\cos b + \text{sen}\, b.\cos a}{\cos a.\cos b}$$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(a+b\right) = \text{sen}\, a.\cos b + \text{sen}\, b.\cos a$$

Ficando provada a primeira parte da proposição. A demonstração da segunda parte é inteiramente análoga, bastando considerar a figura 23.

3.4 Proposta 4: Uma demonstração do seno da diferença de arcos e do cosseno da diferença de arcos

Inicialmente, construímos um triângulo retângulo AEF de hipotenusa igual a 1 inscrito em um retângulo $ABCD$, conforme figura.

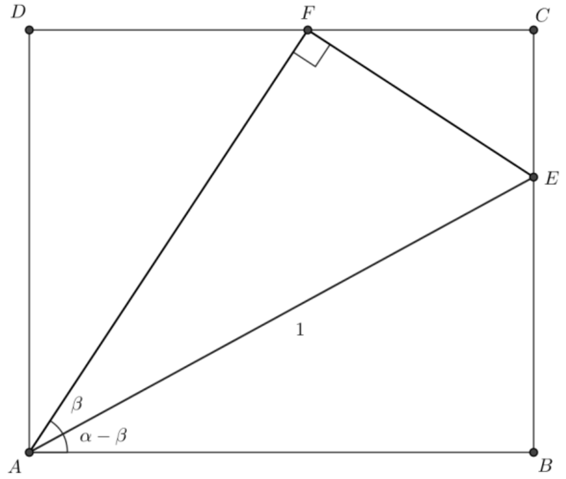

Figura 24: Uma demonstração do seno e do cosseno da diferença de arcos

Sendo os ângulos $E\hat{A}F = \beta$ e $F\hat{A}B = \alpha$, temos:

O ângulo $E\hat{A}B = \alpha - \beta$, então:

$\overline{AF} = \cos\beta$ e $\overline{EF} = \text{sen}\beta$

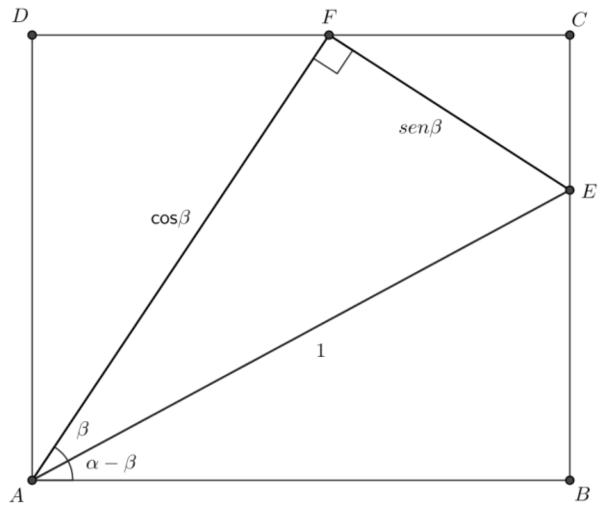

Figura 25: Uma demonstração do seno e do cosseno da diferença de arcos

E ainda, $\overline{AB} = \cos(\alpha - \beta)$ e $\overline{BE} = \text{sen}\,(\alpha - \beta)$

E como o ângulo $C\hat{E}F = \alpha$ e o ângulo $A\hat{F}D = \alpha$, temos:

$\overline{CE} = \text{sen}\beta.\cos\alpha$, $\overline{CF} = \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$, $\overline{FD} = \cos\alpha.\cos\beta$ e $\overline{AD} = \text{sen}\alpha.\cos\beta$

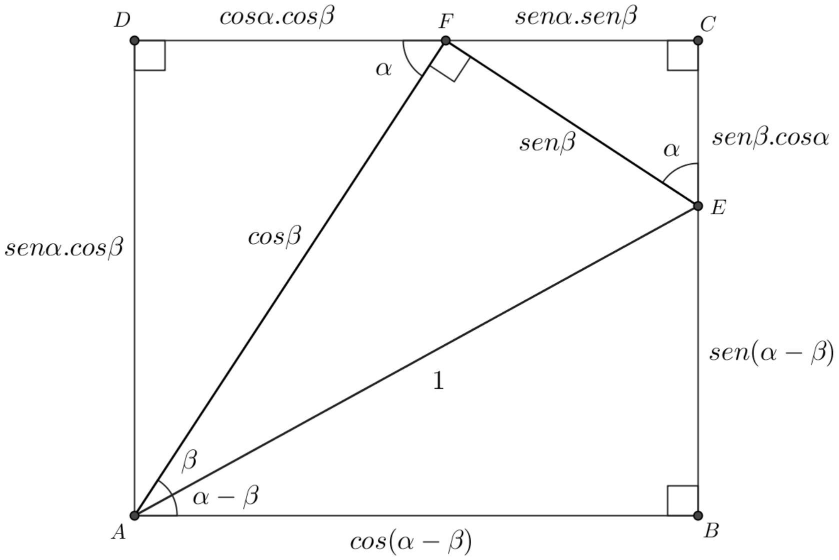

Figura 26: Uma demonstração do seno e do cosseno da diferença de arcos

E como $ABCD$ é um retângulo, as medidas dos lados opostos são iguais. Assim, temos:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$$

E

$$\text{sen}\,(\alpha-\beta) + \text{sen}\beta.\cos\alpha = \text{sen}\alpha.\cos\beta$$

Ou ainda:

$$\text{sen}\,(\alpha-\beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta - \text{sen}\beta.\cos\alpha$$

Vale ressaltar que esta demonstração supõe como limitação:

$$0^{\circ} < \alpha, \beta, \alpha-\beta < 90^{\circ}$$

3.5 Proposta 5: Uma demonstração do seno da soma de arcos e do cosseno da soma de arcos

Inicialmente, construímos um triângulo retângulo AEF de hipotenusa igual a 1 inscrito em um retângulo $ABCD$, conforme figura.

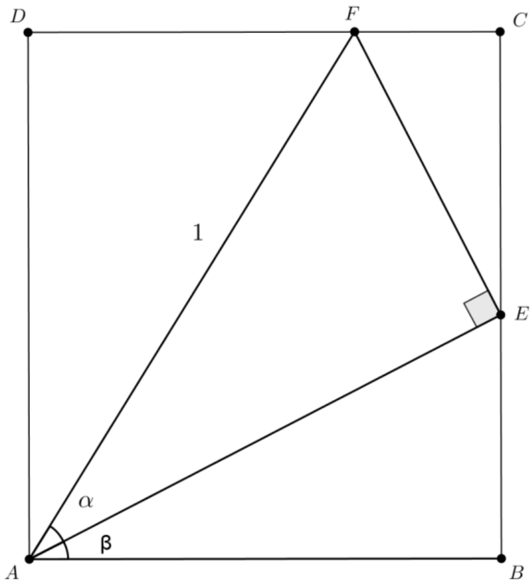

Figura 27: Uma demonstração do seno e do cosseno da soma de arcos

Sendo os ângulos $E\hat{A}F = \alpha$ e $B\hat{A}E = \beta$, temos:

$\overline{AE} = \cos\alpha$ e $\overline{EF} = \text{sen}\alpha$

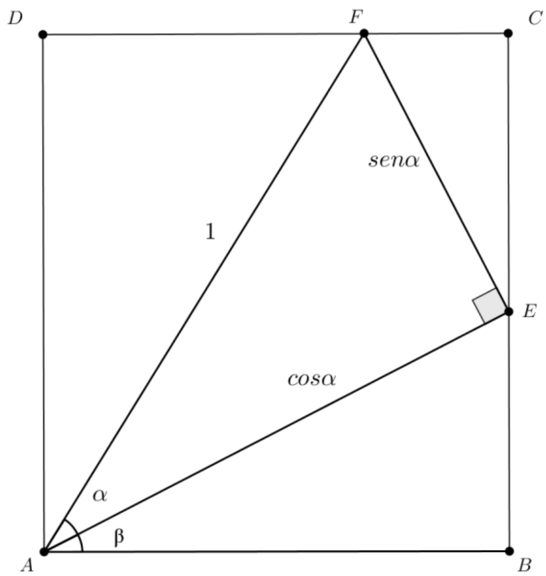

Figura 28: Uma demonstração do seno e do cosseno da soma de arcos

Além disso, $\overline{AB} = \cos\alpha.\cos\beta$ e $\overline{BE} = \text{sen}\beta.\cos\alpha$

E como o ângulo $C\hat{E}F = \beta$ e o ângulo $A\hat{F}D = \alpha + \beta$, temos:

$\overline{CE} = \text{sen}\alpha.\cos\beta$, $\overline{CF} = \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$, $\overline{FD} = \cos(\alpha+\beta)$ e $\overline{AD} = \text{sen}\,(\alpha+\beta)$

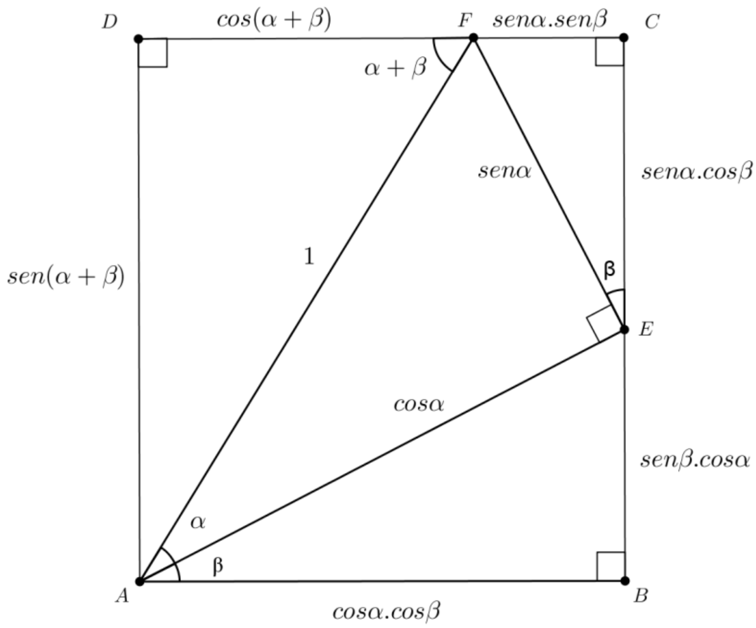

Figura 29: Uma demonstração do seno e do cosseno da soma de arcos

Como $ABCD$ é um retângulo, as medidas dos lados opostos são iguais. Assim, temos:

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta + \text{sen}\beta.\cos\alpha$$

E

$$\cos(\alpha+\beta) + \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta = \cos\alpha.\cos\beta$$

Ou ainda:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$$

Vale ressaltar que, nesta demonstração, as limitações são: $0^\circ < \alpha, \beta, \alpha+\beta < 90^\circ$

4 Trigonometria no círculo trigonométrico

Com o surgimento do cálculo infinitesimal e, posteriormente, da análise matemática, as noções básicas da trigonometria ganharam uma nova dimensão. Passaremos a tratá-la não somente no triângulo retângulo, mas também no círculo trigonométrico.

4.1 Conceitos e pré-requisitos

A partir dessa nova dimensão, passou a ser possível falar em cosseno e seno de um número real, em vez de cosseno e seno de um ângulo. Mas para isso, é indispensável considerar as funções $\cos(t)$ e $\operatorname{sen}(t)$ definidas para todo número real t. Essa transição é feita por meio de uma função E, que chamaremos **função de Euler**.

4.1.1 A função de Euler

O domínio da função de Euler é o conjunto $\Re$ dos números reais. Seu contra domínio é o círculo unitário do plano, representado por S^1. Assim, a cada número real t , a função E faz corresponder um ponto $E(t)$ do círculo S^1 .

Para definir precisamente o círculo S^1, introduzimos no plano um sistema de coordenadas cartesianas, de modo que todo ponto P do plano passa a ser representado como um par ordenado $P=(x,y)$, onde x é a sua abscissa e y sua ordenada.

Pelo teorema de Pitágoras, a distância do ponto $P=(x,y)$ ao ponto $W=(u,v)$ é $d_{\overline{PW}}=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$. Em particular, a distância de $P=(x,y)$ à origem $O=(0,0)$ é igual a $d_{\overline{PO}}=\sqrt{x^2+y^2}$.

O círculo unitário S^1 é, por definição, o conjunto dos pontos do plano cuja distância à origem é igual a 1. Assim, o ponto $P=(x,y)$ pertence a S^1 se, e somente se, $\sqrt{x^2+y^2}=1$ ou, o que é o mesmo, $x^2+y^2=1$.

A relação fundamental, $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ sugere que, para todo ângulo α, os números $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ sejam as coordenadas de um ponto do círculo de raio 1 e centro na origem de $\Re^2$.

Observamos que, para todo ponto $P=(x,y)\in S^1$, tem-se $-1\le x\le 1$ e $-1\le y\le 1$

Por exemplo, os pontos $(1,0),(0,1),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pertencem à curva S^1.

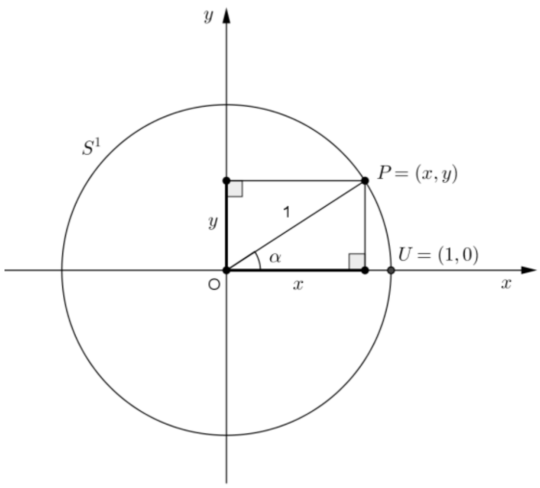

Figura 30: Círculo trigonométrico

Agora temos a definição da função E de Euler:

Dado o número real $t>0$, medimos no círculo S^1, a partir do ponto $U=(1,0)$, um arco de comprimento t, sempre percorrendo o círculo no sentido no sentido anti-horário (sentido positivo).

A extremidade final deste arco é o ponto que chamaremos de $E(t)$. Se $t<0$, $E(t)$ será a extremidade final de um arco de comprimento $|t|$, medido a partir do ponto $U=(1,0)$, no sentido horário (sentido negativo).

Como o comprimento de S^1 é igual a 2π, se tivermos $t>2\pi$ ou $t<-2\pi$, para descrevermos um arco de comprimento t a partir do ponto $U=(1,0)$,teremos de dar mais de uma volta ao longo de S^1. Em particular, se $t=2k\pi$, onde k é um número inteiro (positivo, negativo ou nulo), temos $E(2k\pi)=U$. Mais geralmente, para qualquer $t \in \Re$ vale $E(t+2k\pi)=E(t)$, quando k é um número inteiro qualquer.

Reciprocamente, se $t < t'$ em $\Re$ são tais que $E(t)=E(t')$, isto significa que, quando um ponto P varia de t a t' sua imagem $E(P)$ se desloca sobre S^1, no sentido positivo, a partir de t, dando um número inteiro k de voltas e retornando ao ponto de partida $E(t)=E(t')$.

A distância total percorrida é igual a $2k\pi$, logo $t'=t+2k\pi$, pois o comprimento do caminho percorrido por $E(P)$ é, por definição, igual à distância percorrida por P sobre a reta $\Re$.

Assim, temos $E(t)=E(t')$ se, e somente se, $t'=t+2k\pi$, com $k \in Z$. (Quando $t'>t$, vale $k>0$; quando $t'<t$ temos $k<0$).

Vale observar que, com essa definição, podemos ter $E(t)$ com $t<0$, ou seja, é permitido a um a ângulo ter medida negativa.

A função de Euler $E:\Re \to S^1$ pode também ser imaginada como um processo de enrolar a reta $\Re$, pensada como um fio inextensível, sobre o círculo S^1 (como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \Re$ caia sobre o ponto $U=(1,0) \in S^1$.

Com auxílio da função $E:\Re \to S^1$ podemos definir o cosseno e o seno de um número real t.

Dado $t \in \Re$, seja $E(t)=(x,y)$. Definiremos $\cos t = x$ e $\operatorname{sen} t = y$

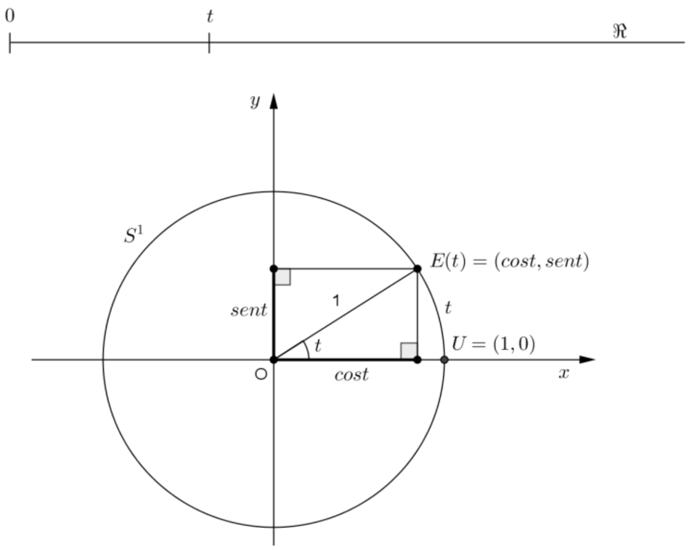

Figura 31: Função de Euler

Portanto, $x = \cos t$ é a abscissa e $y = \operatorname{sen} t$ é ordenada do ponto $E(t)$.

Como $E(t + 2k\pi) = E(t)$ quando k é um número inteiro qualquer, em particular, temos $\operatorname{sen}(t + 2k\pi) = \operatorname{sen}(t)$ e $\cos(t + 2k\pi) = \cos(t)$.

Todas as relações de $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ resultam dessa definição, uma vez que podemos associar um ponto do círculo, com coordenadas $E(t)$, a ângulos maiores que 90º.

Isto nos leva a definir a medida do ângulo pelo comprimento do arco orientado que a ele corresponde. Esta nova unidade é o radiano.

Dizemos que um ângulo α possui medida de 1 radiano, se, e somente se, o arco por ele subtendido tem comprimento igual ao raio do círculo que o contém.

O ângulo de 1 grau é aquele que subtende um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência.

Como a circunferência inteira tem 2π radianos e 360 graus, temos que $2\pi \ radianos = 360 graus$

Portanto, podemos pensar que o seno e o cosseno dependem apenas do comprimento desses arcos medidos em radianos.

Das funções seno e cosseno derivam as outras funções trigonométricas, a saber:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{e} \quad \operatorname{cossec} x = \frac{1}{senx}.$$

É importante observar que tais funções, sendo definidas por meio de quocientes, têm seus domínios restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero.

4.1.2 Interpretações geométricas:

4.1.2.1 Relação fundamental: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Essa relação decorre do fato de que o ponto P pertence ao círculo trigonométrico de raio unitário, onde suas coordenadas são $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

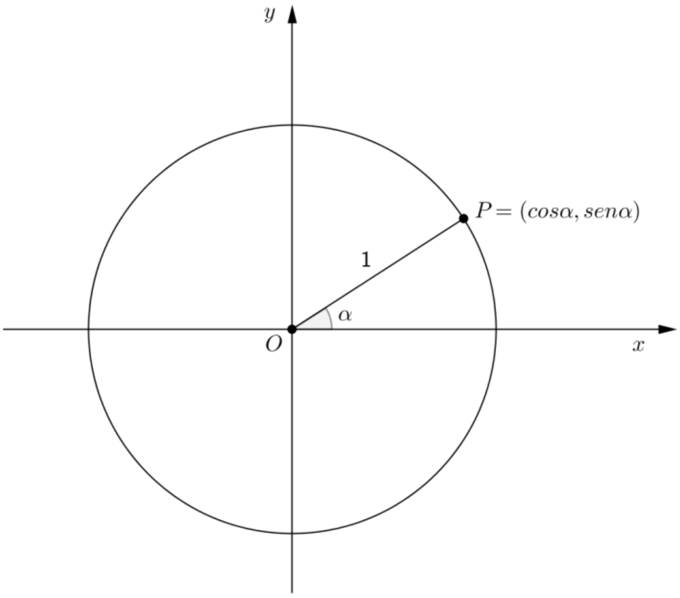

Figura 32: Relação fundamental

Assim, para todo x real, vale a relação: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

4.1.2.2 Seno e cosseno

$\overline{OR} = \operatorname{sen}\alpha$

$\overline{OQ} = \cos\alpha$

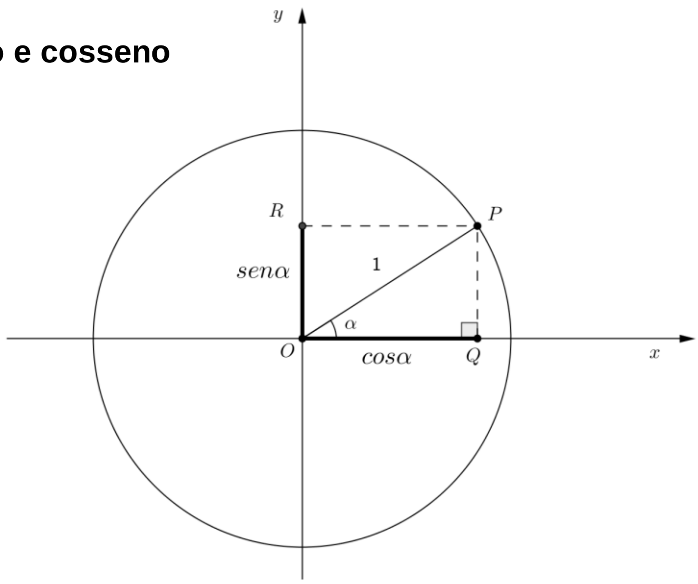

Figura 33: Seno e cosseno

4.1.2.3 Tangente e cotangente

Aplicando semelhança de triângulos, temos:

$\Delta OST \approx \Delta OQP$

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \frac{\overline{ST}}{1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Assim, temos: $\overline{ST} = \operatorname{tg}\alpha$

$\Delta ORP \approx \Delta OUV$

$$\frac{\overline{UV}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{RP}}{\overline{OR}} \Rightarrow \frac{\overline{UV}}{1} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Assim, temos: $\overline{UV} = \operatorname{cotg}\alpha$

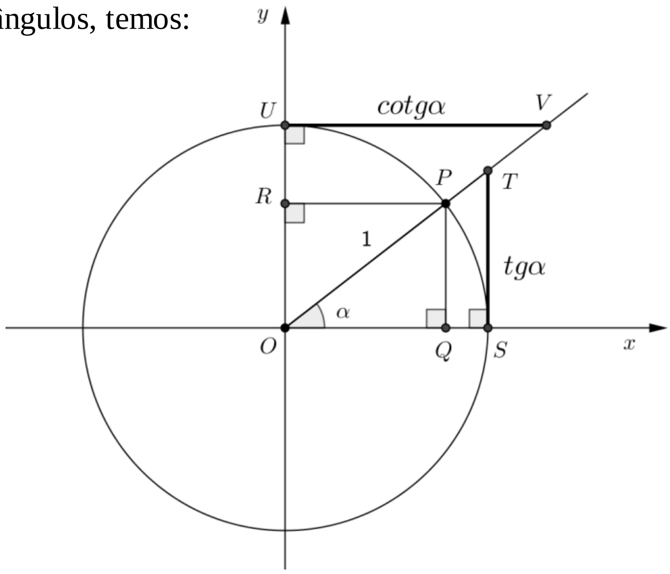

Figura 34: Tangente e cotangente

4.1.2.4 Secante e cossecante

Aplicando semelhança de triângulos, temos:

$\Delta OSP \approx \Delta OPQ$

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \frac{\overline{OS}}{1} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Assim, temos: $\overline{OS} = \sec\alpha$

$\Delta OUP \approx \Delta OPR$

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} \Rightarrow \frac{\overline{OU}}{1} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Assim, temos: $\overline{OU} = \operatorname{cossec}\alpha$

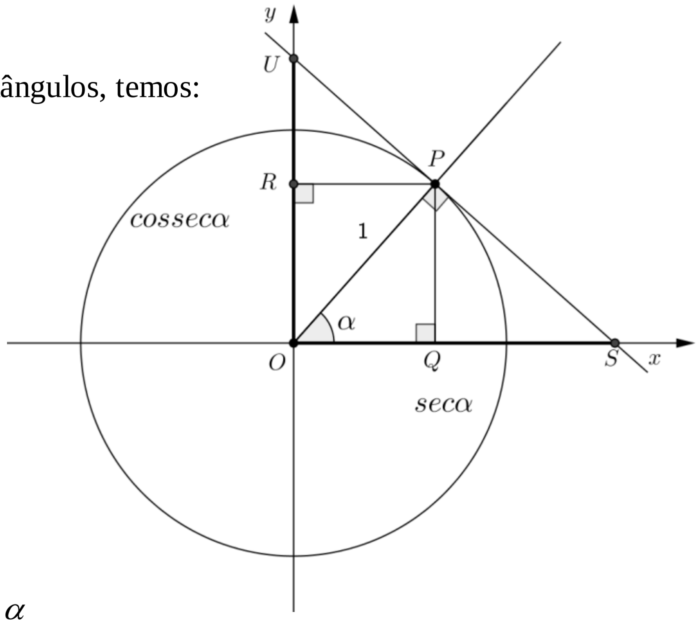

Figura 35: Secante e cossecante

4.1.3 Corolário

Para todo $x \neq \frac{k\pi}{2}$ real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, valem as relações:

$$(I) \quad \mathrm{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$(II) \quad 1 + \mathrm{cotg}^2 x = \mathrm{cossec}^2 x$$

$$(III) \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$$

$$(IV) \quad \mathrm{sen}^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$$

Demonstrações:

$$Como \quad \mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}} = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}, \quad segue \quad que:$$

$$(I) \quad \mathrm{tg}^2 x + 1 = \frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(II) \quad 1 + \mathrm{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\mathrm{sen}^2 x} = \frac{\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x}{\mathrm{sen}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x} = \mathrm{cossec}^2 x$$

$$(III) \quad \cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$$

$$(IV) \quad \mathrm{sen}^2 x = \cos^2 x . \frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x . \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x} . \mathrm{tg}^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$$

4.1.4 Simetrias no círculo trigonométrico

4.1.4.1 Redução ao 1° quadrante

Dado um arco α com extremidade no 1^o quadrante, existem três outros, cada um com extremidades num dos quadrantes, que têm, com exceção do sinal, o mesmo seno e o mesmo cosseno do arco α .

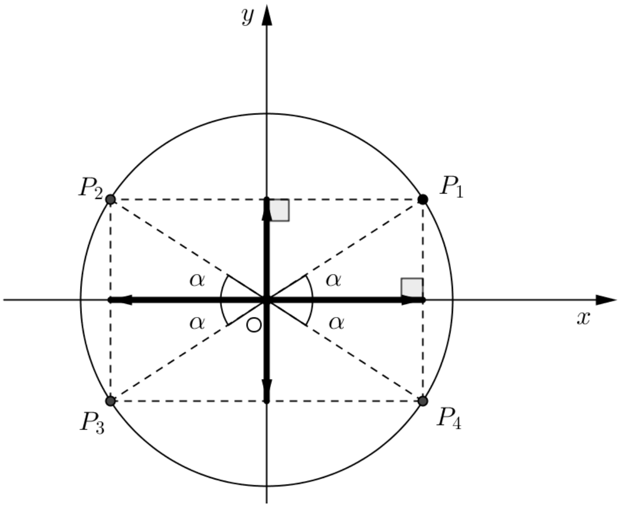

Figura 36: Simetrias no círculo trigonométrico

4.1.4.2 Redução do 2° ao 1° quadrante

Seja P_2 um ponto situado na extremidade de um arco pertencente ao 2º quadrante do círculo trigonométrico. E seja P_1 o ponto do círculo, simétrico de P_2 em relação ao eixo dos senos. Conforme a figura 37, temos:

$AP_2 + P_2A' = \pi$ (no sentido anti-horário)

E como $AP_1 = P_2A'$, vem:

$AP_2 + AP_1 = \pi$.

Logo, se $AP_1 = \alpha$,então $AP_2 = \pi - \alpha$.

É imediato que:

$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(\pi - \alpha)$

E

$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$

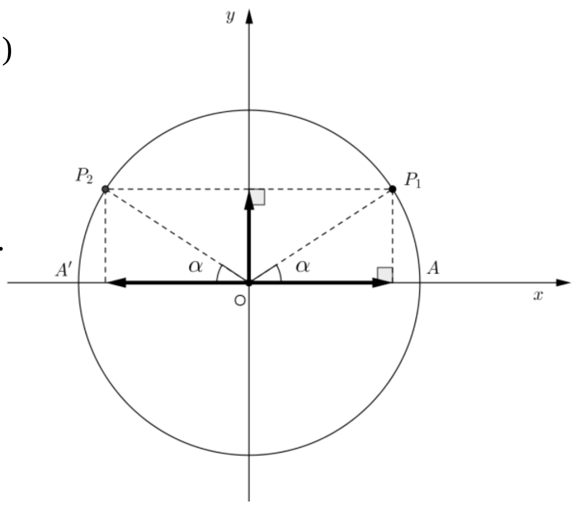

Figura 37: Redução do 2° ao 1° quadrante

Estas equações coincidem com as definições de seno e cosseno de ângulo obtuso, dadas anteriormente quando tratamos de trigonometria no triângulo.

Levando-se em conta as relações fundamentais, temos que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)}{-\cos(\pi-\alpha)} = -\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = -\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)$$

$$\sec\alpha = -\sec(\pi-\alpha)$$

$$\operatorname{cossec}\alpha = \operatorname{cossec}(\pi-\alpha)$$

Assim, por exemplo, temos:

$$\operatorname{sen}115° = \operatorname{sen}(180°-115°) = \operatorname{sen}65°$$

$$\cos130° = -\cos(180°-130°) = -\cos50°$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{4\pi}{5} = -\operatorname{cotg}\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right) = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{5}$$

4.1.4.3 Redução do 3° ao 1° quadrante

Seja P_3 um ponto situado na extremidade de um arco pertencente ao 3º quadrante do círculo trigonométrico. E seja P_1 o ponto do círculo, simétrico de P_3 em relação ao centro. Conforme a figura 38, temos:

$AP_3 - AP_1 = \pi$ (no sentido anti-horário)

E como $AP_1 = A'P_3$, vem:

$AP_3 - AP_1 = \pi$.

Logo, se $AP_1 = \alpha$,então $AP_3 = \pi + \alpha$

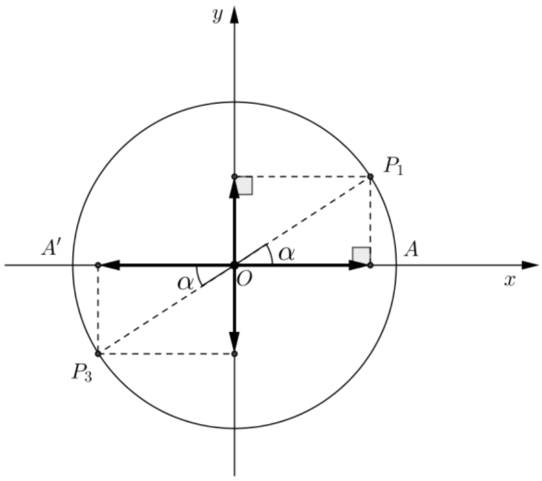

Figura 38: Redução do 3° ao 1° quadrante

É imediato que:

$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen}(\pi + \alpha)$

E

$\cos \alpha = -\cos(\pi + \alpha)$

Em consequência temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\operatorname{sen}(\pi + \alpha)}{-\cos(\pi + \alpha)} = \operatorname{tg}(\pi + \alpha) \quad ,$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg}(\pi + \alpha) \quad ,$$

$$\sec \alpha = -\sec(\pi + \alpha) \quad ,$$

$$\operatorname{cossec} \alpha = -\operatorname{cossec}(\pi + \alpha) \quad .$$

Assim, por exemplo, temos:

$$\operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen}(180° + 30°) = -\operatorname{sen} 30°$$

$$\cos 225° = -\cos(180° + 45°) = -\cos 45°$$

$$\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$$

$$\sec \frac{7\pi}{6} = -\sec\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sec \frac{\pi}{6}$$

4.1.4.4 Redução do 4° ao 1° quadrante

Seja P_4 um ponto situado na extremidade de um arco pertencente ao 4º quadrante do círculo trigonométrico. E seja P_1 o ponto do círculo, simétrico de P_4 em relação ao eixo dos cossenos. Conforme a figura 39, temos:

$AP_4 + P_4A = 2\pi$ (no sentido anti-horário).

Como $AP_1 = P_4A$, vem:

$AP_4 + AP_1 = 2\pi$,

Logo, se $AP_1 = \alpha$, então $AP_4 = 2\pi - \alpha$.

É imediato que:

$\text{sen}\, x = -\text{sen}\,(2\pi - \alpha)$

E

$\cos x = \cos(2\pi - \alpha)$

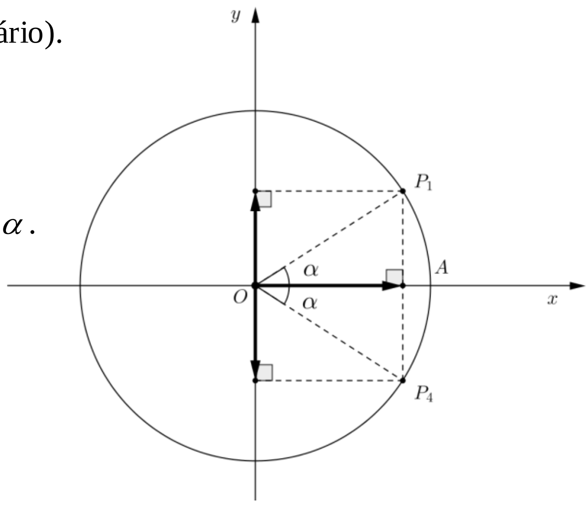

Figura 39: Redução do 4° ao 1° quadrante

Em consequência temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\text{sen}\,(2\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)} = -\text{tg}\,(2\pi-\alpha) \quad ,$$

$$\text{cotg}\,\alpha = -\text{cotg}\,(2\pi-\alpha) \quad ,$$

$$\sec\alpha = \sec(2\pi-\alpha) \quad ,$$

$$\text{cossec}\,\alpha = -\text{cossec}\,(2\pi-\alpha) \quad .$$

Assim por exemplo, temos:

$$\text{sen}\,280° = -\text{sen}\,(360° - 280°) = -\text{sen}\,80°$$

$$\cos 340° = \cos(360° - 340) = \cos 20°$$

$$\text{tg}\,\frac{11\pi}{6} = -\text{tg}\left(2\pi - \frac{11\pi}{6}\right) = -\text{tg}\,\frac{\pi}{6}$$

$$\text{cossec}\,\frac{5\pi}{3} = -\text{cossec}\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = -\text{cossec}\,\frac{\pi}{3}$$

4.1.5 Fórmula da distância entre dois pontos

Consideram-se os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ da figura. A distância entre esses pontos é $\overline{AB}$, hipotenusa do triângulo sombreado. O cateto $\overline{AC}$ mede $x_B - x_A$ e o cateto $\overline{BC}$ mede $y_B - y_A$.

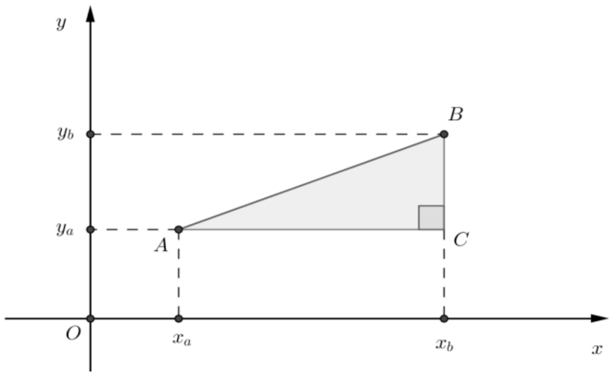

Figura 40: Fórmula da distância entre dois pontos

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, tem-se:

$$d\overline{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Então a fórmula da distância entre $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é:

$$d\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Essa fórmula é válida para quaisquer pontos A e B do plano cartesiano, e podemos utilizá-la sem necessidade de recorrer a figuras. Por exemplo, a distância entre os pontos $A(2,3)$ e $B(7,15)$ pode ser encontrada da seguinte maneira:

$$d\overline{AB} = \sqrt{(7-2)^2 + (15-3)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

Essa fórmula será útil nas demonstrações 6.3 , 6.4 e 6.5

Cabe ressaltar que o aluno do 1º ano do ensino médio, enquanto está aprendendo trigonometria, desconhece essa fórmula, pois ainda não lhe foi ensinado o conteúdo de geometria analítica, que está previsto para as séries seguintes. Porém, a apresentação desta fórmula é trivial, pois os alunos já conhecem o Teorema de Pitágoras.

5 Demonstrações das fórmulas da adição de arcos no contexto da trigonometria no círculo trigonométrico

Os conceitos inicialmente construídos, tendo o triângulo retângulo como referência serão estendidos agora. Passaremos a tratar de seno e cosseno de números reais e será possível generalizar as fórmulas de trigonometria.

Para melhor compreensão do leitor, faremos uso de arcos no primeiro quadrante em algumas demonstrações. A generalização das fórmulas se dá através das reduções ao primeiro quadrante.

Vale ressaltar que, as medidas dos ângulos assinalados nas figuras a seguir são determinadas apenas a menos de um múltiplo inteiro de 2π, pois $P = E(t)$ implica $P = E(t + 2k\pi)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por exemplo, o ângulo de 7π radianos é também o ângulo de $\pi + 2.3\pi$ radianos. O que corresponde a um arco que dá três voltas completas no círculo trigonométrico e tem sua extremidade no ponto que coincide com o arco de π radianos, portanto, os ângulos de 7π e π são côngruos e consequentemente possuem os mesmos senos e cossenos.

Em particular, teremos $\operatorname{sen}(t + 2k\pi) = \operatorname{sen}(t)$ e $\cos(t + 2k\pi) = \cos(t)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.1 Proposta 6: : Uma demonstração do cosseno da soma de arcos e do seno da soma de arcos.

Sejam os arcos AP com determinação a e PQ com determinação b. O arco AQ tem determinação ($a + b$).

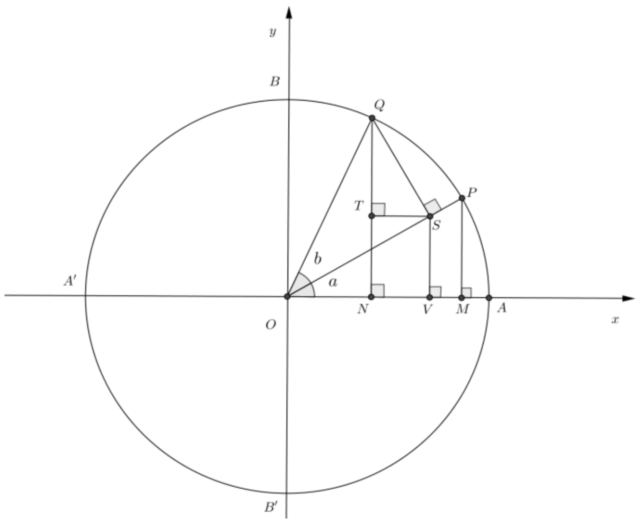

Figura 41: Uma demonstração do cosseno e do seno da soma de arcos

Observando as construções geométricas no círculo trigonométrico de raio unitário acima, podemos deduzir que os triângulos *OMP, OVS e QTS* são retângulos e semelhantes. Então podemos construir algumas relações:

$\cos a = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OP}.\cos a$, mas como $\overline{OP} = 1$, temos: $\overline{OM} = \cos a$ (1)

$\cos b = \frac{\overline{OS}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \overline{OS} = \overline{OQ}.\cos b$, mas como $\overline{OQ} = 1$, temos: $\overline{OS} = \cos b$ (2)

$\text{sen } a = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{MP} = \overline{OP}.\text{sen } a$, mas como $\overline{OP} = 1$, temos: $\overline{MP} = \text{sen } a$ (3)

$\text{sen } b = \frac{\overline{SQ}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \overline{SQ} = \overline{OQ}.\text{sen } b$, mas como $\overline{OQ} = 1$, temos: $\overline{SQ} = \text{sen } b$ (4)

$\cos(a+b) = \frac{\overline{ON}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \overline{ON} = \overline{OQ}.\cos(a+b)$, mas como $\overline{OQ} = 1$, temos: $\overline{ON} = \cos(a+b)$ (5)

$\text{sen } (a+b) = \frac{\overline{NQ}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \overline{NQ} = \overline{OQ}.\text{sen } (a+b)$, mas como $\overline{OQ} = 1$, temos: $\overline{NQ} = \text{sen } (a+b)$ (6)

Agora que já construímos algumas relações principais, vamos às demonstrações:

I) $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \text{sen} a.\text{sen} b$

- No triângulo OVS, temos: $\cos a = \frac{\overline{OV}}{\overline{OS}} \Rightarrow \overline{OV} = \cos a.\overline{OS}$,substituindo (2) nessa relação, temos: $\overline{OV} = \cos a.\cos b$ (7)

- No triângulo QTS, temos: $\text{sen } a = \frac{\overline{TS}}{\overline{SQ}} \Rightarrow \overline{TS} = \text{sen } a.\overline{SQ}$,substituindo (4) nessa relação, temos: $\overline{TS} = \text{sen } a.\text{sen } b$ (8)

Observando o círculo trigonométrico da figura 41, notamos que:

$\overline{ON} = \overline{OV} - \overline{NV}$ e também $\overline{NV} = \overline{TS}$. Logo,

$\overline{ON} = \overline{OV} - \overline{TS}$

Substituindo as relações (5) , (7) e (8) na igualdade acima, obteremos:

$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \text{sen}\, a.\text{sen}\, b$

II) $\text{sen}(a+b) = \text{sen}a.\cos b + \text{sen}b.\cos a$

- No triângulo OVS, temos: $\text{sen}a = \dfrac{\overline{VS}}{\overline{OS}} \Rightarrow \overline{VS} = \text{sen}a.\overline{OS}$,substituindo (2) nessa relação, temos: $\overline{VS} = \text{sen}a.\cos b$ (9)

- No Triângulo QTS, temos: $\cos a = \dfrac{\overline{TQ}}{\overline{SQ}} \Rightarrow \overline{TQ} = \overline{SQ}.\cos a$,substituindo (4) nessa relação, temos: $\overline{TQ} = \text{sen}b.\cos a$ (10)

Observando o círculo trigonométrico da figura 41, notamos que:
$\overline{NQ} = \overline{NT} + \overline{TQ}$ e também $\overline{NT} = \overline{VS}$. Logo,

$\overline{NQ} = \overline{VS} + \overline{TQ}$

Substituindo as relações (6) , (9) e (10) na igualdade acima, obteremos:

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a.\cos b + \text{sen}\, b.\cos a$

5.2 Proposta 7: Uma demonstração do cosseno da diferença de arcos e do seno da diferença de arcos

Sejam os arcos AQ com determinação a, PQ com determinação b. O arco AP possui determinação $(a-b)$.

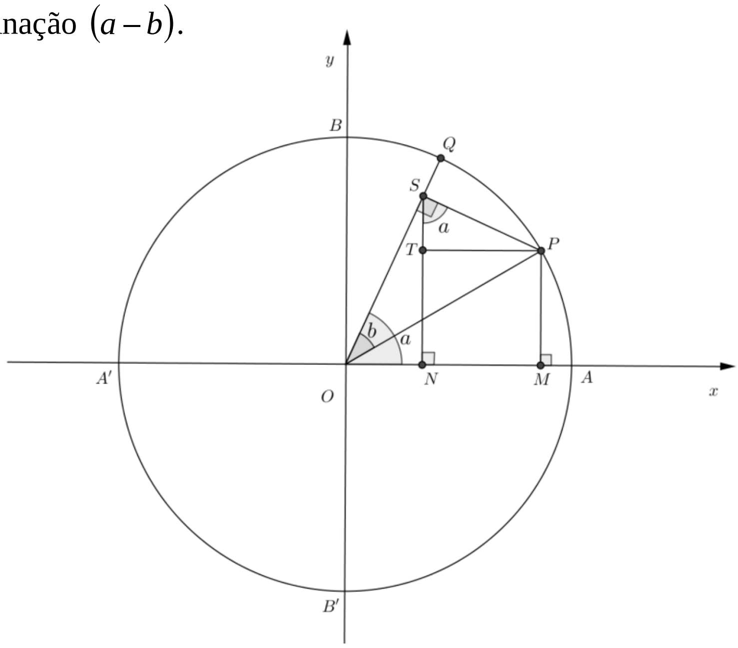

Figura 42: Uma demonstração do cosseno e do seno da diferença de arcos

Observando as construções geométricas no círculo trigonométrico de raio unitário acima, podemos construir algumas relações:

$\cos b = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OS} = \overline{OP}.\cos b$, mas como $\overline{OP} = 1$, temos: $\overline{OS} = \cos b$ (1)

$\text{sen} b = \frac{\overline{SP}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{SP} = \overline{OP}.\text{sen} b$, mas como $\overline{OP} = 1$, temos: $\overline{SP} = \text{sen} b$ (2)

$\text{sen}\,(a-b) = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{MP} = \overline{OP}.\text{sen}\,(a-b)$, mas como $\overline{OP} = 1$, temos: $\overline{MP} = \text{sen}\,(a-b)$ (3)

$\cos(a-b) = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OP}.\cos(a-b)$, mas como $\overline{OP} = 1$, temos: $\overline{OM} = \cos(a-b)$ (4)

Agora que já construímos algumas relações principais, vamos às demonstrações:

I) $\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\text{sen}a.\text{sen}b$

- No triângulo ONS, temos: $\cos a=\dfrac{\overline{ON}}{\overline{OS}}\Rightarrow \overline{ON}=\cos a.\overline{OS}$,substituindo (1) nessa relação, temos: $\overline{ON}=\cos a.\cos b$ (5)

- No Triângulo TPS, temos: $\text{sen}a=\dfrac{\overline{TP}}{\overline{SP}}\Rightarrow \overline{TP}=\text{sen}a.\overline{SP}$,substituindo (2) nessa relação, temos: $\overline{TP}=\text{sen}a.\text{sen}b$ (6)

Observando o círculo trigonométrico da figura 42, notamos que:
$\overline{ON}=\overline{OM}-\overline{NM}$ e também $\overline{NM}=\overline{TP}$. Logo,

$\overline{ON}=\overline{OM}-\overline{TP}$

Substituindo as relações (4) , (5) e (6) na igualdade acima, obteremos:

$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\text{sen}a.\text{sen}b$

II) $\text{sen}\,(a-b)=\text{sen}a.\cos b-\text{sen}b.\cos a$

- No triângulo ONS, temos: $\text{sen}a=\dfrac{\overline{NS}}{\overline{OS}}\Rightarrow \overline{NS}=\text{sen}a.\overline{OS}$,substituindo (1) nessa relação, temos: $\overline{NS}=\text{sen}a.\cos b$ (7)

- No Triângulo TPS, temos: $\cos a=\dfrac{\overline{TS}}{\overline{SP}}\Rightarrow \overline{TS}=\overline{SP}.\cos a$,substituindo (2) nessa relação, temos: $\overline{TS}=\text{sen}b.\cos a$ (8)

Observando o círculo trigonométrico da figura 42, notamos que:

$\overline{NT} = \overline{NS} - \overline{TS}$ e também $\overline{NT} = \overline{MP}$. Logo,

$\overline{MP} = \overline{NS} - \overline{TS}$

Substituindo as relações (3) , (7) e (8) na igualdade acima, obteremos:

$$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}a.\cos b - \text{sen}b.\cos a$$

5.3 Proposta 8: Outra demonstração do cosseno da diferença de arcos

Conhecida a fórmula da distância entre dois pontos, vamos deduzir a fórmula de $\cos(a-b)$**:**

Marcamos no círculo trigonométrico os arcos:

AP de determinação a

AQ de determinação b

AR de determinação $a-b$

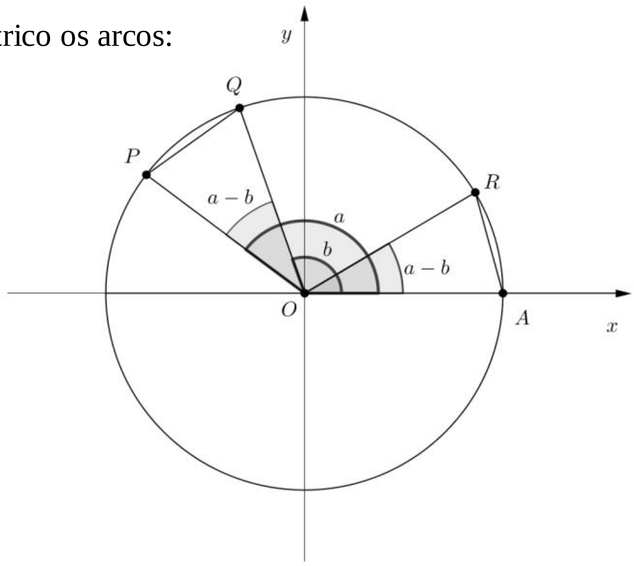

Figura 43: Outra demonstração do cosseno da diferença de arcos

Percebe-se que as coordenadas de A são $(1,0)$, as de P são $(\cos a, \text{sen}\, a)$, as de Q são $(\cos b, \text{sen} b)$ e as de R são $[\cos(a-b), \text{sen}(a-b)]$.

Percebe-se ainda que $\overline{AR}$ tem medida $a-b$ e que $\overline{QP}$ tem essa mesma medida $a-b$. Por isso a distância entre A e R é igual à distância entre P e Q.

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$\overline{AR}=\sqrt{[\cos(a-b)-1]^2+[\operatorname{sen}(a-b)-0]^2}$$

$$\overline{AR}=\sqrt{\cos^2(a-b)-2\cos(a-b)+1+\operatorname{sen}^2(a-b)}$$

Pela relação trigonométrica fundamental sabemos que:

$$\operatorname{sen}^2(a-b)+\cos^2(a-b)=1$$

Então:

$$\overline{AR}=\sqrt{2-2\cos(a-b)}\,.$$

A distância entre os pontos P e Q é:

$$\overline{PQ}=\sqrt{(\cos b-\cos a)^2+(\operatorname{sen}b-\operatorname{sen}a)^2}$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{\cos^2 b-2\cos a\cdot\cos b+\cos^2 a+\operatorname{sen}^2 b-2\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b+\operatorname{sen}^2 a}$$

Como $\cos^2 a+\operatorname{sen}^2 a=1$ e $\cos^2 b+\operatorname{sen}^2 b=1$, temos:

$$\overline{PQ}=\sqrt{2-2\cos a\cdot\cos b-2\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b}\,.$$

Vemos que as distâncias $\overline{AR}$ e $\overline{PQ}$ são iguais. Logo:

$$\sqrt{2-2\cos(a-b)}=\sqrt{2-2\cos a\cdot\cos b-2\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b}$$

Elevando ao quadrado:

$$2-2\cos(a-b)=2-2\cos a\cdot\cos b-2\text{sen}a\cdot\text{sen}b$$

$$-2\cos(a-b)=-2\cos a\cdot\cos b-2\text{sen}a\cdot\text{sen}b$$

$$2\cos(a-b)=2\cos a\cdot\cos b+2\text{sen}a\cdot\text{sen}b$$

Então a fórmula da diferença de arcos é:

$$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\text{sen}a\cdot\text{sen}b$$

5.4 Proposta 9: Mais outra demonstração do cosseno da diferença de arcos

Conhecida a fórmula da distância entre dois pontos e a Lei dos Cossenos, vamos deduzir uma fórmula para $\cos(a-b)$**:**

Marcamos no círculo trigonométrico os arcos $AP > AQ$.

AP de determinação a

AQ de determinação b

PQ de determinação $a-b$

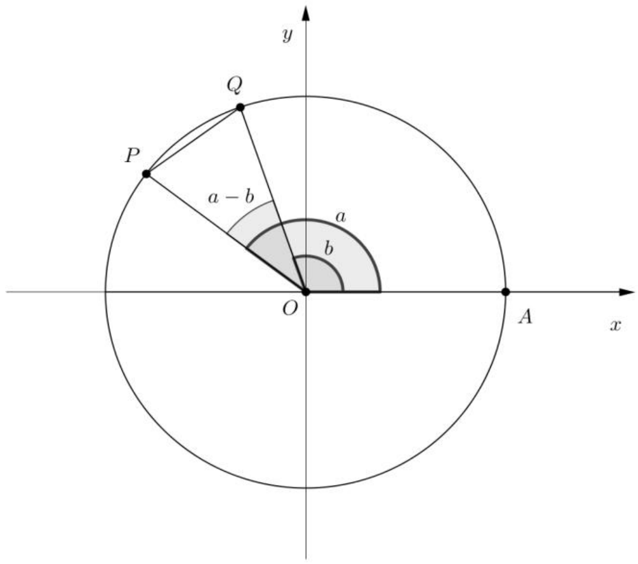

Figura 44: Mais outra demonstração do cosseno da diferença de arcos

Assim, na figura acima, poderemos escrever, pela Lei dos Cossenos, para o triângulo OPQ:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2.\overline{OP}.\overline{OQ}.\cos(a-b) \quad (1)$$

Ora, $\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$ (raio do círculo trigonométrico, portanto, unitário). (2)

$\overline{PQ}$ = distância entre os pontos $P(\cos a, \text{sen}a)$ e $Q = (\cos b, \text{sen}b)$.

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$\overline{PQ}^2 = (\cos^2 a - \cos^2 b) + (\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b) \quad (3)$$

Assim, substituindo os elementos conhecidos (2) e (3) na fórmula acima (1), vem:

$$(\cos^2 a - \cos^2 b) + (\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b) = 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos(a-b)$$

Desenvolvendo, temos:

$$\cos^2 a - 2.\cos a.\cos b + \cos^2 b + \text{sen}^2 a - 2.\text{sen}a.\text{sen}b + \text{sen}^2 b = 2 - 2.\cos(a-b)$$

Lembrando que $\cos^2 a + \text{sen}^2 a = \cos^2 b + \text{sen}^2 b = 1$ (Relação Fundamental da Trigonometria), vem, substituindo:

$$1 + 1 - 2.\cos a.\cos b - 2.\text{sen}a.\text{sen}b = 2 - 2.\cos(a-b)$$

Simplificando, fica:

$$-2(\cos a.\cos b + \text{sen}a.\text{sen}b) = -2.\cos(a-b)$$

Donde finalmente podemos escrever a fórmula do cosseno da diferença de dois arcos <u>a</u> e <u>b</u>:

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}a \cdot \text{sen}b$$

5.5 Proposta 10: Outra demonstração do cosseno da soma de arcos:

Esta demonstração será dividida em duas partes. Na primeira, demonstraremos o cosseno da soma de arcos para números positivos e na segunda, para números negativos. Assim, a demonstração será válida para quaisquer números reais.

1ª parte: Sejam P, Q e R os pontos do círculo associados aos ângulos a, $a+b$ e $-b$, respectivamente.

Em relação ao sistema cartesiano xOy as coordenadas desses pontos são:

$P = (\cos a, \text{sen} a)$

$Q = (\cos(a+b), \text{sen}(a+b))$

$R = (\cos b, -\text{sen} b)$

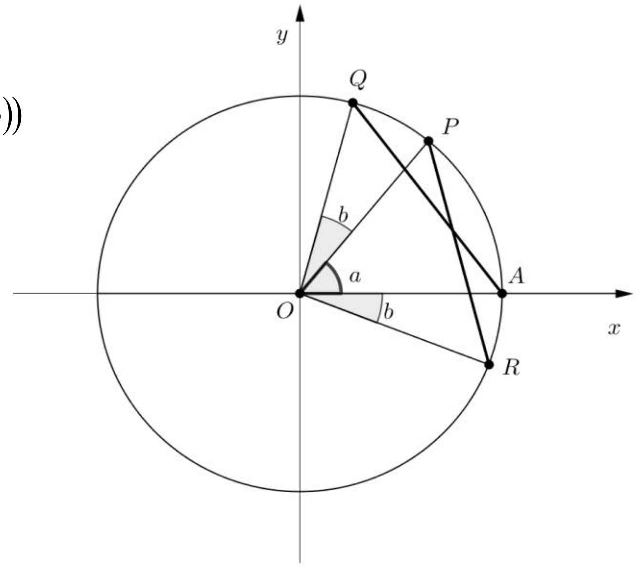

Figura 45: Outra demonstração do cosseno da soma de arcos

Os arcos AQ e RP tem a mesma medida $(a+b)$, portanto, os segmentos $\overline{AQ}$ e $\overline{RP}$ têm o mesmo comprimento. Aplicando então a fórmula de distância entre dois pontos da Geometria Analítica, temos:

$$d\overline{AQ}^2 = (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 =$$

$$= [\cos(a+b) - 1]^2 + [\text{sen}(a+b) - 0]^2 =$$

$$= \cos^2(a+b) - 2.\cos(a+b) + 1 + \text{sen}^2(a+b) =$$

$$= 2 - 2.\cos(a+b)$$

$$d\overline{RP}^2 = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 =$$
$$= [\cos a - \cos b]^2 + [\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b]^2 =$$
$$= \cos^2 a - 2.\cos a.\cos b + \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a + 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b$$
$$= 2 - 2.\cos a.\cos b + 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

$$d\overline{AQ}^2 = d\overline{RP}^2 \Rightarrow 2 - 2.\cos(a+b) = 2 - 2.\cos a.\cos b + 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

E, então vem a fórmula:

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

2ª parte: Sejam P, Q e R os pontos do círculo associados aos ângulos $-a$, $-a-b$ e b, respectivamente.

Em relação ao sistema cartesiano xOy as coordenadas desses pontos são:

$$P = (\cos(-a), \operatorname{sen}(-a)) \Rightarrow P = (\cos a, -\operatorname{sen} a)$$

$$Q = (\cos(-a-b), \operatorname{sen}(-a-b)) \Rightarrow Q = (\cos[-(a+b)], \operatorname{sen}[-(a+b)])$$

$$Q = (\cos(a+b), -\operatorname{sen}(a+b))$$

$$R = (\cos b, \operatorname{sen} b)$$

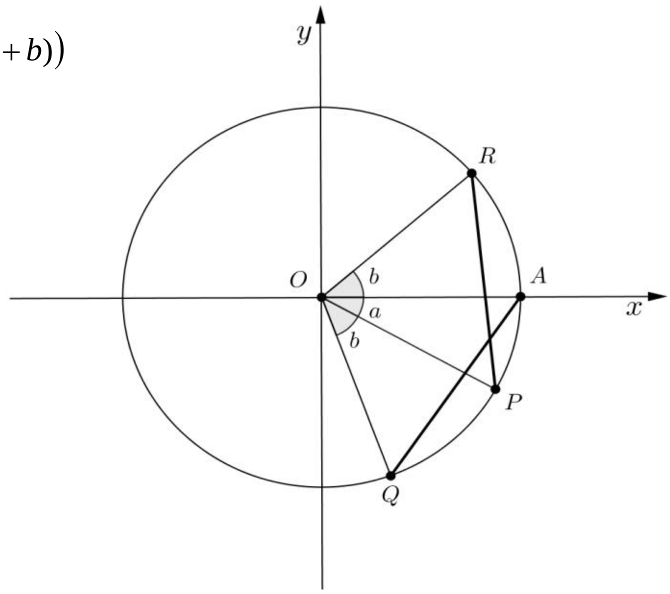

Figura 46: Outra demonstração do cosseno da soma de arcos

Os arcos AQ e RP tem a mesma medida $(a+b)$, portanto, os segmentos $\overline{AQ}$ e $\overline{RP}$ têm o mesmo comprimento. Aplicando então a fórmula de distância entre dois pontos da Geometria Analítica, temos:

$$
\begin{aligned}
d\overline{AQ}^2 &= (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 = \\
&= [\cos(a+b) - 1]^2 + [-\operatorname{sen}(a+b) - 0]^2 = \\
&= \cos^2(a+b) - 2.\cos(a+b) + 1 + \operatorname{sen}^2(a+b) = \\
&= 2 - 2.\cos(a+b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\overline{RP}^2 &= (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 = \\
&= [\cos a - \cos b]^2 + [-\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b]^2 = \\
&= \cos^2 a - 2.\cos a.\cos b + \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a + 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b \\
&= 2 - 2.\cos a.\cos b + 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b
\end{aligned}
$$

$$d\overline{AQ}^2 = d\overline{RP}^2 \Rightarrow 2 - 2.\cos(a+b) = 2 - 2.\cos a.\cos b + 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

e então vem a fórmula:

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

Agora temos uma demonstração do cosseno da soma de arcos válida para quaisquer números reais.

Essa demonstração pode ainda ser melhor verificada caso sejam construídas as figuras no *Geogebra* ®, que é um software gratuito de matemática dinâmica (encontrado no site www.geogebra.im-uff.mat.br , para download) . Poderemos, assim, movimentar os pontos P, Q e R sobre o círculo, situando-os em qualquer quadrante e fazendo variar os ângulos conforme queira. Verificaremos que os segmentos $\overline{AQ}$ e $\overline{RP}$ permanecerão com o mesmo comprimento. Logo, utilizaremos a fórmula da distância entre dois pontos onde quer que estejam os pontos P, Q e R no círculo e para qualquer ângulo observado. Concluiremos então que a demonstração é válida para quaisquer números reais.

6 Generalização das fórmulas

Foram demonstradas, de diferentes maneiras, as quatro fórmulas: Seno da soma, seno da diferença, cosseno da soma e cosseno da diferença de ângulos.

A última demonstração da seção anterior é válida para quaisquer números reais. E conforme mencionado anteriormente, demonstrada uma das fórmulas de adição de arcos, as outras são facilmente obtidas através de manipulações algébricas. Diante disso, obteremos as demais fórmulas a partir do cosseno da soma de dois arcos e com a mesma validade, isto é, válidas para todos os números reais . Assim, obteremos a generalização das fórmulas. São elas:

6.1 “Cosseno da diferença”

Cabe aqui observar que, para determinarmos a fórmula do cosseno da diferença de arcos, basta tomarmos $b < 0$ e aplicarmos a fórmula do cosseno da soma de arcos. Assim, temos:

$$\cos(a-b) = \cos[a+(-b)] = \cos a.\cos(-b) - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen}(-b) =$$
$$= \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.(-\operatorname{sen} b)$$

Então: $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$

De posse das duas fórmulas: Cosseno da soma e da diferença de arcos, obtemos as demais como consequência.

6.2 “Seno da soma”

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos b + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\operatorname{sen} b$$

Então: $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a.\cos b + \operatorname{sen} b.\cos a$

6.3 “Seno da diferença”

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}[a+(-b)]=\operatorname{sen}a.\cos(-b)+\operatorname{sen}(-b).\cos a=$$

$$=\operatorname{sen}a.\cos b+(-\operatorname{sen}b).\cos a$$

Então: $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}a.\cos b-\operatorname{sen}b.\cos a$

6.4 “Tangente da soma”

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\operatorname{sen}a.\cos b+\operatorname{sen}b.\cos a}{\cos a.\cos b-\operatorname{sen}a.\operatorname{sen}b}=$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}a.\cos b+\operatorname{sen}b.\cos a}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\cos a.\cos b-\operatorname{sen}a.\operatorname{sen}b}{\cos a.\cos b}}$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}a.\cos b}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\cos a.\cos b}{\cos a.\cos b}}+\frac{\dfrac{\operatorname{sen}b.\cos a}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\operatorname{sen}a.\operatorname{sen}b}{\cos a.\cos b}}$$

Então: $\operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a.\operatorname{tg}b}$

Esta fórmula só é aplicável se: $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ e $a+b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

6.5 “Tangente da diferença”

$$\operatorname{tg}(a-b)=\operatorname{tg}[a+(-b)]=\operatorname{tg}\frac{\operatorname{tg}a\ .\ \operatorname{tg}(-b)}{1-\operatorname{tg}a\ .\ \operatorname{tg}(-b)}$$

Então: $\operatorname{tg}(a-b)=\dfrac{\operatorname{tg}a\ .\ \operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\ .\ \operatorname{tg}b}$

Esta fórmula é aplicável se: $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ e $a-b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

7 Fórmulas de multiplicação

Veremos como ficam as fórmulas de adição para arcos iguais.

Deduziremos as fórmulas do seno, cosseno e tangente de $2a \ \ e \ \ 3a$, conhecidos $\operatorname{sen} a$, $\cos a$ e $\operatorname{tg} a$.

Façamos $2a = a + a$ e apliquemos as fórmulas de adição:

7.1 Cos (2a)

I) $\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a.\cos a - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

$\cos 2a = 2.\cos^2 a - 1$

Então: $\cos 2a = 1 - 2.\operatorname{sen}^2 a$

7.2 Sen (2a)

II) $\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen}(a+a) = \operatorname{sen} a.\cos a + \operatorname{sen} a.\cos a$

Então: $\operatorname{sen} 2a = 2.\operatorname{sen} a.\cos a$

7.3 Tg (2a)

III) $\operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg}(a+a) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \ . \ \operatorname{tg} a}$

Então: $\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2.\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$

Fazendo $3a = 2a + a$ e aplicando as fórmulas de adição, temos:

7.4 Cos (3a)

$I)\quad \cos(3a) = \cos(2a + a) = \cos 2a.\cos a - \operatorname{sen}2a.\operatorname{sen}a =$

$= (2.\cos^2 a - 1)\cos a - (2.\operatorname{sen}a.\cos a)\operatorname{sen}a =$

$= (2.\cos^2 a - 1)\cos a - 2\operatorname{sen}^2 a.\cos a =$

$= (2.\cos^2 a - 1)\cos a - 2.(1 - \cos^2 a)\cos a =$

$2.\cos^3 a - \cos a - 2.\cos a + 2\cos^3 a =$

$4.\cos^3 a - 3.\cos a$

Então: $\cos(3a) = 4.\cos^3 a - 3.\cos a$

7.5 Sen (3a)

$II)\quad \operatorname{sen}(3a) = \operatorname{sen}(2a + a) = \operatorname{sen}2a.\cos a + \operatorname{sen}a.\cos 2a =$

$= (2.\operatorname{sen}a.\cos a).\cos a + \operatorname{sen}a(1 - 2.\operatorname{sen}^2 a) =$

$= 2.\operatorname{sen}a.(1 - \operatorname{sen}^2 a) + \operatorname{sen}a.(1 - 2\operatorname{sen}^2 a) =$

$2.\operatorname{sen}a - 2.\operatorname{sen}^3 a + \operatorname{sen}a - 2.\operatorname{sen}^3 a =$

$3.\operatorname{sen}a - 4.\operatorname{sen}^3 a$

Então: $\operatorname{sen}(3a) = 3.\operatorname{sen}a - 4.\operatorname{sen}^3 a$

7.6 Tg (3a)

$$III)\quad \operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg}(2a + a) = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a\ .\ \operatorname{tg} a} = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} + \operatorname{tg} a}{1 - \dfrac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.\operatorname{tg} a} =$$

$$\frac{2.\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a.(1 - \operatorname{tg}^2 a)}{(1 - \operatorname{tg}^2 a) - 2.\operatorname{tg} a\ .\ \operatorname{tg} a}$$

Então: $\operatorname{tg} 3a = \dfrac{3.\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3.\operatorname{tg}^2 a}$

8 Fórmulas de divisão

Vamos deduzir fórmulas para calcular $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Sabemos que $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ e $\cos 2a = 1 - 2.\operatorname{sen}^2 a$, portanto, fazendo $2a = x$, teremos:

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

$$\cos x = 1 - 2.\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Assim, temos deduzidas as fórmulas do $\cos^2\frac{x}{2}$, $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$ e $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$.

Para obtermos os valores do $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ devemos saber previamente o valor de x, para podermos determinar a que quadrante pertence o valor de $\frac{x}{2}$ e assim, determinarmos os sinais corretos dessas fórmulas.

9 Tangente do arco metade

Vamos deduzir fórmulas para calcular $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$ conhecida a $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Das fórmulas de multiplicação, temos:

$$\operatorname{sen} 2a = 2.\operatorname{sen} a.\cos a = 2.\operatorname{sen} a.\frac{\cos^2 a}{\cos a} = 2.\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}.\frac{1}{\sec^2 a} = \frac{2.\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}^2 a}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2.\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$$

Fazendo $2a = x$ e $a = \frac{x}{2}$, temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2.\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2.\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Notando que $\cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$, temos:

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Uma utilidade destas três últimas fórmulas é nos permitir a substituição de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$ por uma única função $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, para obtermos as primitivas no estudo de cálculo diferencial e integral.

Esse tipo de substituição é frequentemente utilizado, também, na resolução de equações trigonométricas.

10 Transformação em produto

Em Álgebra Elementar, tem grande importância prática os recursos para transformar um polinômio em produto de outros polinômios (fatoração).
Assim por exemplo, temos:

$x^2 - 2x = x(x-2)$	fator comum em evidência
$x^2 - a = (x+2)(x-2)$	diferença de quadrados
$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$	trinômios quadrados perfeitos
$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$	soma de cubos
$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$	diferença de cubos
$x3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$	polinômios cubos perfeitos

Muitas vezes aplicaremos esses recursos à Trigonometria, recorrendo a transformações como:

$$\operatorname{sen}^2 x - 2.\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 2)$$
$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = (\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

Além dos recursos algébricos, a Trigonometria dispõe de fórmulas que permitem completar uma fatoração.

Assim , no exemplo acima, podemos fatorar:

$\operatorname{sen} x + \cos x$ e $\operatorname{sen} x - \cos x.$

Vamos deduzir agora as fórmulas para transformar somas e diferenças trigonométricas em produtos.

Sabemos que:

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b \quad (1)$$
$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b \quad (2)$$
$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a.\cos b + \operatorname{sen} b.\cos a \quad (3)$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a.\cos b - \operatorname{sen} b.\cos a \quad (4)$$

Logo:

(1) + (2): $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2.\cos a.\cos b$

(1) - (2): $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$

(3) + (4): $\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2.\operatorname{sen} a.\cos b$

(3) - (4): $\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2.\operatorname{sen} b.\cos a$

Estas relações são denominadas fórmulas de Werner.

Fazendo nas fórmulas de Werner:

$\begin{cases} a+b = p \\ a-b = q \end{cases}$ portanto, $a = \dfrac{p+q}{2}$ e $b = \dfrac{p-q}{2}$

Obtemos as fórmulas de transformação em produto:

$$\cos p + \cos q = 2.\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2.\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}.\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2.\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2.\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$$

Temos ainda que:

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} + \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p.\cos q + \operatorname{sen} q.\cos p}{\cos p.\cos q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p.\cos q}$$

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} - \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p.\cos q - \operatorname{sen} q.\cos p}{\cos p.\cos q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p.\cos q}$$

11 Conclusão

O objetivo principal do trabalho é minimizar as dificuldades no ensino-aprendizagem das fórmulas de adição de arcos na trigonometria, apresentando demonstrações alternativas, que não constam, usualmente, em livros didáticos, ou então são omitidas.

Após as aulas de trigonometria que ministrei, sobre o assunto, foi constatado que as críticas e os comentários dos alunos da turma foram negativos. Segundo eles, as aulas tornaram-se longas, monótonas e de difícil aprendizagem. Numa segunda oportunidade, foram aplicadas as técnicas contidas nesse trabalho. O interesse pela disciplina aumentou juntamente com o dinamismo da aula. Como não foi necessário recorrer a nenhum conteúdo ainda não visto pelos alunos, o fluxo ensino-aprendizagem transcorreu de modo satisfatório. As aulas se tornaram muito mais simples e de fácil entendimento.

As demonstrações das fórmulas da adição de arcos no contexto da trigonometria no triângulo retângulo foram muito bem aceitas pelos alunos, porém não eram suficientes para demonstrar o caso geral. Para isto, utilizei a proposta 10 contida nesse trabalho, e ainda, com o auxílio do *Geogebra* ® , pudemos visualizar ainda melhor que a demonstração do cosseno da soma de arcos era válida para quaisquer números reais. As demais fórmulas foram facilmente obtidas através de manipulações algébricas.

Como algumas demonstrações contidas nesse trabalho não constam em livros didáticos adotados na maioria das escolas, e haja vista os pontos apresentados acima, pode-se concluir que este trabalho tornará as aulas mais simples e de fácil compreensão, servindo de base para consulta de futuros professores e contribuindo para que haja uma melhoria na qualidade do ensino no Brasil.

12 Referências bibliográficas

[1] BIANCHINI, Edwaldo & PACCOLA, Herval : Matemática, Editora Moderna, São Paulo, 1990 , v.1.

[2] BUCCHI, Paulo: Curso Prático de Matemática, Editora Moderna, São Paulo, 1998.

[3] DANTE, Luiz Roberto : Matemática : Contexto & Aplicações. São Paulo. Editora Ática, 2000.

[4] DO CARMO, Manfredo Perdigão, MORGADO, Augusto César & Wagner, Eduardo : Trigonometria e Números Complexos, Coleção do professor de matemática. Rio de Janeiro. 1992.

[5] NETTO, Scipione di Pierro : Matemática, Editora Ática, 2. Ed. , São Paulo 1984 , v.1.

[6]REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim. Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas. Campinas: Editora da UNICAMP; São Paulo: Imprensa Oficial, 2000.

[7]PAIVA, Manoel Rodrigues : Matemática, Editora Moderna, 1.ed. , São Paulo, 1999. v.1.

[8]REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, São Paulo, SBM, 1992 / 1993 / 1995 v. 21 / 23 / 27

[9] http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities

[10] http://pt.scribd.com/doc/220418986/MA11-Unidade-18

[11] http://pt.scribd.com/doc/220418986/MA11-Unidade-19

[12] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Algebra/SineInRhombus.shtml

[13] http://www.cut-the-knot.org/triangle/SinCosFormula.shtml

[14] http://www.cut-the-knot.org/triangle/SinCosFormula2.shtml

[15] http://www.geogebra.im-uff.mat.br