Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Curso de Mestrado Profissional em Matemática

Alexandre Maia Ferreira

RESGATE DA INSERÇÃO DAS NOÇÕES ELEMENTARES DO CÁLCULO (EM PARTICULAR, DAS NOÇÕES DE LIMITE) DURANTE O ENSINO MÉDIO

Vitória
2014

Alexandre Maia Ferreira

RESGATE DA INSERÇÃO DAS NOÇÕES ELEMENTARES DO CÁLCULO (EM PARTICULAR, DAS NOÇÕES DE LIMITE) DURANTE O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da UFES, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Etereldes Gonçalves Júnior

Doutor em Matemática - IMPA-RJ

Vitória

2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

F383r Ferreira, Alexandre Maia, 1983-
Resgate da inserção das noções elementares do cálculo (em particular, das noções de limite) durante o ensino médio / Alexandre Maia Ferreira. – 2014.
122 f. : il.

Orientador: Etereldes Gonçalves Júnior.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Cálculo. 2. Integrais (Matemática). 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. GeoGebra (Software). I. Gonçalves Junior, Etereldes. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"Resgate da Inserção das Noções Elementares do Cálculo (em Particular, das Noções de Limite) Durante o Ensino Médio"

Alexandre Maia Ferreira

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 25/04/2014 por:

Etereldes Gonçalves Junior
Orientador - UFES

Julia Shaetzle Wrobel
Examinador Interno - UFES

Duilio Tadeu da Conceição Junior
Examinador Externo - UFRRJ

A minha esposa Taniara e aos meus pais Luiza e Miguel.
Aos colegas e amigos, pelo incentivo, pela ajuda e pela paciência.

Resumo

Este trabalho é uma alternativa de retorno da abordagem de assuntos ligados ao Cálculo Diferencial e Integral, de forma intuitiva e construtiva, durante o Ensino Médio. O desenvolvimento desse material inicia com a realização de uma pesquisa histórica sobre a evolução do estudo de limite, derivada e integral, em seguida é feito um levantamento de dados entre professores e graduandos sobre os impactos (vantagens/desvantagens) que o resgate do repasse de ideais correlatas do Cálculo proporcionaria. Com o intuito de justificar a restauração proposta, foi realizado um mapeamento dos conteúdos que necessitam de enfoque de noções intuitivas do Cálculo nos principais livros didáticos utilizados tradicionalmente nas escolas capixabas públicas e particulares. Foi questionada entre professores a melhor série, a visão dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o currículo básico, a existência de cursos de formação e material didático específico para realização de tal iniciativa assim como foi avaliada a situação em que é possível inserir tais conceitos sem causar danos e comprometimento ao ensino/aprendizagem dos alunos. Após a análise dos assuntos principais que requerem o uso de noções de Cálculo, de uma maneira geral, montou-se a proposta de sequencia didática com atividades, estratégias e metodologias desenvolvidas e apresentadas de maneira construtiva e intuitiva.

Palavras-chaves: Cálculo, Limite, Derivada, Integral, GeoGebra.

Abstract

This work is an alternative return of the issues related to Differential and Integral Calculus approach, intuitive and constructive way, during high school. The development of this material starts with doing historical research on the evolution of the study of limit, derivative and integral, then it is a survey of data between faculty and graduate students about the impacts (advantages/disadvantages) that the transfer of redemption ideals related calculation would provide. In order to justify the proposed restoration, a mapping of the contents that require focus on intuitive notions of calculus in the main textbooks used traditionally in public and private schools capixabas was performed. It was questioned from the grade teachers, the vision of the National Curriculum Parameters (PCN), the core curriculum, the availability of training courses and specific teaching materials for conducting such an initiative as well as the situation in which you can enter these concepts was evaluated harmlessly and commitment to teaching/learning of students. After analyzing the main issues that require the use of concepts of Calculus, in general, was set up to draft sequence with didactic activities, strategies and methodologies developed and presented in a constructive and intuitive way.

Keywords: Calculus, Limit, Derivative, Ingegral, GeoGebra.

Agradecimentos

A princípio, gostaria de agradecer a Deus por me proporcionar uma vida saudável (repleta de sabedoria, inteligência e amizade), uma família majestosa, amigos magníficos e uma esposa formidável a qual amo muito.

Em segundo plano e em caráter especial, gostaria de agradecer aos meus pais (Luiza e Miguel), que são a razão do meu viver, a minha avó (Salviana), que é uma lutadora e uma educadora incansável, a minha esposa (Taniara), que realizou mudanças significativas na minha vida e, além disso, meus agradecimentos a todos os meus professores da educação básica até o ensino superior pelo aprendizado, pela educação, pela paciência, pelo incentivo e pela dedicação fervorosa para que o sucesso até aqui conquistado fosse possível.

Enfim, gostaria de agradecer ao meu orientador (Dr. Etereldes), aos professores do PROFMAT e a todos os amigos (alunos e colegas de profissão) que colaboraram de forma direta (Professores: Rubens e Solano) e/ou indireta para a realização dessa dissertação.

Serei eternamente grato a todos sem distinção e sempre estarei à disposição para retribuir os gestos de carinho, de incentivo e de força a mim repassados nos momentos difíceis, conturbados e desanimadores.

"A pior ditadura não é a que aprisiona o homem pela força, mas sim pela fraqueza, fazendo-o refém de suas próprias necessidades.".

Júlia Lícia

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 INTRODUÇÃO

Há pontos específicos na educação básica em que a ideia intuitiva de limite, de derivada e de integral está presente? Como são tratados os casos em que é necessário mencionar as noções de limite ou de integral para discutir uma consequência natural de um assunto elementar? Como os livros didáticos tratam o assunto? Qual a visão dos professores diante do tema? Como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) lidam com a situação? Em que estados brasileiros nota-se a presença e a aplicabilidade de tais noções elementares do Cálculo? Como as consequências imediatas dessa postura/apresentação pré-matura estão interferindo no rendimento dos cursos de Cálculo no nível superior? De que maneira podemos introduzir e abordar esse peculiar assunto sem causar constrangimentos e traumas em nossos alunos? Em que contexto histórico se deu o processamento das ideias de limite? Tais ideias são largamente empregadas no nosso dia-a-dia? Como explorar as noções de limite, de derivada e de integral via softwares de geometria dinâmica (especificamente, o GeoGebra)? Como explorar as noções de limite via planilhas eletrônicas (Microsoft Excel)? O que é limite e como introduzir sem exageros e formalidades de maneira que os alunos consigam acompanhar tal abstração? Qual a ordem cronológica dos fatos: surgiu o Cálculo Integral ou primeiro o Cálculo Diferencial? Como propor a inserção de limite nos estudo das derivadas? O que é derivada? Só se aprende derivada, se souber limite? Como interligar a definição de limite com a noção de integral? O que é integral? Qual foi a evolução histórica (limite, derivada e integral)? Quais principais precursores (país, cidade natal, século, data, problematização, etc.)? Que/Qual percentual de alunos aprendeu alguma noção de limite, de derivada ou de integral durante a educação básica? Quais as vantagens em ensinar as noções de limite, de derivada e de integral na educação básica, em particular no ensino médio?

Diante de tantos questionamentos, surge a necessidade de respondê-los por meio de uma reflexão acerca dos pontos destacados na pesquisa desenvolvida na presente dissertação. Inicialmente foi feita uma pesquisa entre os alunos que estão ingressando/cursando na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) e no Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) sobre o estudo das noções elementares do Cálculo durante as fases da educação básica. Quem estudou? Em que série se consolidou tal aprendizado?

Há conceitos básicos que utilizam as noções de limite, de derivada e de integral? Quais vantagens obteriam caso tivessem uma base melhor e satisfatória de tais ideias intuitivas durante o ensino básico? Em segundo momento, os professores foram questionados sobre as vantagens/desvantagens em propor o ensino das noções de limite, de derivada e de integrais durante a educação básica.

Em seguida, foi feita uma averiguação que, de fato existem conteúdos da educação básica que necessitam de uma abordagem mais específica das noções de limite, de derivada e de integral, tais como: a representação decimal/fracionária das dízimas periódicas, ao somar os infinitos termos de uma progressão geométrica de razão especial $(0 < |q| < 1)$, ao estudar a capitalização contínua, ao analisar comportamentos gráficos de uma função para valores muito grande e/ou pequeno do domínio de uma função (função 1º grau, 2º grau, exponencial e logarítmica), ao calcular da medida da área de uma região plana qualquer com lados curvos, além das inúmeras aplicações no estudo da Física (emprego da hipérbole equilátera na relação entre pressão e volume de um gás em condições isotérmicas e do conceito de velocidade instantânea).

Uma busca nos livros de História da Matemática com o intuito de desvendar as maneiras e o contexto sobre os quais se deu o desenvolvimento das noções intuitivas de limite, de derivada e de integral até chegar ao clímax da notação atual e padrão formal ensinado na disciplina de Cálculo nas universidades. Nesse ínterim, pretendeu-se propor uma viagem no tempo ao longo dos séculos em busca de momentos cruciais em que se desenvolveu/aplicou as noções elementares do Cálculo.

Após mapear as diversas situações problema que serviram de motivação para o desenvolvimento das noções intuitivas do Cálculo, foi realizada uma conferência nos livros didáticos mais utilizados na educação básica, especificamente na 3ª etapa, o Ensino Médio, com o intuito de investigar como o assunto é introduzido, em que conteúdos são discutidos e qual a linguagem utilizada (notação usual).

Uma pesquisa com graduandos e com professores foi realizada com o intuito de averiguar se os mesmos trabalham as noções intuitivas de limite, de derivada e de integral no ensino básico e como o fazem. Quais são suas angústias, temores, dificuldades, sugestões, etc.? Há cursos de capacitação/formação de professores nesse sentido? Seria necessário criar um algoritmo, tipo uma receita de bolo, um guia didático, um manual pedagógico de direcionamento de trabalho que norteasse e ensinasse aos professores com sugestões de abordagem do tema em estudo? Em geral, os professores possuem conhecimentos na área de utilização/aplicação da teoria de limite, de derivada e de integral para empregar em suas aulas a utilização de softwares de geometria dinâmica e softwares que trabalham com planilha eletrônica de estudos?

Tendo em mãos o mapeamento dos conteúdos que necessitam de um enfoque das noções intuitivas de limite, de derivada e de integral, a opinião dos professores e dos graduandos, a visão apresentada nos livros didáticos e nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), a evolução histórica e suas situações-problema, foi possível articular a sequência didática que, de acordo com a nossa visão, facilitaria o entendimento e minimizaria a distância entre o concreto e o abstrato, isto é, reduziria a margem de abstração que tais noções requerem. Nesse sentido, o foco da pesquisa tem como meta a introdução das noções intuitivas de limite, de derivada e de integral de acordo com a série do Ensino Médio em que se pretende inserir tais conceitos. Também é válido ressaltar que há conteúdos do Ensino Fundamental que necessitam de um enfoque das noções de Cálculo, por exemplo, o estudo das dízimas periódicas, a demonstração completa do Teorema de Tales e a definição de área de uma região retangular. Nesse ínterim, o presente trabalho propõe uma metodologia de introdução desses conceitos empregando e entrelaçando as noções elementares de limite.

Para a 1ª série do Ensino Médio, a abordagem algébrica foi realizada a partir do estudo de funções e suas implicações e do estudo de sequências (em particular séries geométricas convergentes dízimas periódicas) que apresentam características peculiares que necessitam do estudo das noções de limite. Em seguida, foi proposta uma aplicação desses conceitos numa situação-problema presente no estudo de matemática financeira (especificamente no estudo de juros compostos), isto é, foi realizada uma reprodução e uma análise do problema proposto por Jacques Bernoulli sobre capitalização contínua, ou seja, as implicações sobre a evolução de crescimento de um capital depositado, a juros compostos, ser acrescido de juros subdividindo constantemente o intervalo de correção. Já a abordagem geométrica, a ser apresentada tanto no 1º ano quanto no 2º ano, conforme o plano de curso pré-estabelecido pela unidade escolar, se deu por intermédio do estudo de áreas de figuras planas, em especial aquelas que apresentam lados curvilíneos.

Ainda na 1ª série do Ensino Médio, foi realizada uma análise comportamental de gráficos de funções fazendo um paralelo com os gráficos presentes no estudo de conceitos da disciplina de Física com o intuito particular de explicar o que significa e como se calcula a área sob o gráfico de uma curva qualquer que relacionam duas variáveis com grau de dependência (função de uma variável). E também foi realizada uma análise da desintegração radioativa de uma substância que consiste num problema interdisciplinar amplamente discutido na Química.

Para a 2ª série ou 3ª série do Ensino Médio, de acordo com currículo escolar básico adotado, a introdução das noções elementares do Cálculo foi realizada em paralelo ao estudo de geometria espacial momento em que houve uma revisão do estudo de áreas de figuras planas poligonais e a introdução do cálculo da área de uma figura plana que contenha algum lado curvilíneo. Posteriormente, tais ideias foram aplicadas para demonstrar as áreas superficiais e volumes de corpos redondos especiais (cilindros, cones e esferas) utilizando como fonte e direção de trabalho o método dos indivisíveis proposto por Kepler e Cavalieri.

Enfim, a abordagem das noções elementares do Cálculo na 3ª série do Ensino Médio foi construída de maneira correlacionada com o estudo (definições e propriedades) das cônicas (parábolas e hipérboles).

2 VANTAGENS E DESVANTAGENS DA INSERÇÃO

O objetivo da presente pesquisa foi investigar nesse particular espaço amostral que percentual de graduandos teve contato com as noções elementares de Cálculo durante a educação básica, questionando quão significante foi tal experiência e quais vantagens/desvantagens obtiveram/obteriam com o contato pré-liminar com noções intuitivas do Cálculo. Além disso, entrevistas foram feitas com professores (rede estadual e privada) que atuam no Ensino Médio e com professores que lecionam/lecionaram a disciplina de Cálculo I (limite, derivada e integral) e de Física Geral I, oportunidade em que a visão dos mesmos será analisada diante da problemática aqui retratada.

A pesquisa foi realizada com parte da turma de 2012 do PROFMAT-UFES via envio do questionário por e-mail dos quais apenas dez alunos retornaram respondidos os questionários. Também participaram os vinte e quatro alunos da turma de ingresso ao PROFMAT 2014 via questionário impresso o qual foi aplicado no dia 22 de Fevereiro de 2014 na sala 32 do Centro de Ciências Exatas (CCE) da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES). Além desses professores mestrandos, responderam aos questionários: parte (dez alunos) de uma turma de graduandos (futuros e atuais professores de matemática) pertencentes ao curso de Licenciatura Plena em Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo (IFES); uma mínima (apenas oito) amostra de professores que atuam no Ensino Médio da rede estadual especificamente nas escolas da Serra Sede (EEEFM Professor João Loyola e EEEFM Clóvis Borges Miguel); uma pequena amostra de professores que atuam somente nas faculdades particulares e com alunos graduandos em engenharia da Faculdade de Aracruz (FAACZ) que estavam praticamente concluindo o estudo da disciplina de Cálculo e Física I.

Para discentes, foi articulado um questionário alternativo/discursivo composto de perguntas pertinentes às experiências com o estudo de Cálculo I e em particular, das noções de limite na educação básica e as vantagens/desvantagens que a aprendizagem de tais conceitos lhe renderia. A pesquisa foi realizada com uma pequena amostra de alunos dos cursos de Licenciatura Plena em Matemática (IFES) e de Engenharia Mecânica

(FAACZ).

Já para os docentes, foi pensado um questionário com escalas de classificação em que o professor repassaria dados históricos de suas experiências com a disciplina de Cálculo I desde a graduação até a realidade encontrada em sua sala de aula, caso seja professor da disciplina de Cálculo I, com o intuito de questionar quais as facilidades/dificuldades que a aprendizagem das noções de limite e outras noções básicas do Cálculo poderiam produzir. A pesquisa foi realizada com professores da UFES, do IFES e de algumas escolas particulares que lecionaram/lecionam a disciplina de Cálculo I em qualquer curso superior.

De acordo com uma análise geral dos dados da pesquisa foi possível constatar que a maioria dos professores, seja da rede pública ou privada, atuantes na educação básica (Ensino Fundamental e Médio) embora tenha recebido orientação/preparação específica que os formassem de maneira satisfatória para inserir noções intuitivas de limite e ideias correlatas do Cálculo nessa fase de ensino, ainda não faz ideia de como aplicar tais conceitos caso os mesmos sejam implementados no currículo básico. Além disso, em uma conversa informal (bate-papo após o preenchimento dos questionários) com um grupo atuante na rede estadual foi possível constatar que há dificuldade de ensinar a matemática elementar quanto mais os tópicos que remetem o uso de citação de ideias avançadas cujo grau de abstração é mais acentuado. Segundo os professores, os alunos chegam ao Ensino Médio com nível de aprendizagem abaixo do ideal, com defasagens gritantes em aritmética básica (operações elementares) e com problemas de domínio da língua portuguesa naquilo que concerne à interpretação de enunciados e compreensão de teorias. Foi de consenso comum entre os professores pesquisados que o trabalho é pertinente e de fundamental importância para sanar problemas como os altos índices de reprovação na disciplina de Cálculo e Física I. Também consentiram que, caso tal pesquisa influenciasse uma mudança no currículo básico da rede estadual de ensino, haveria necessidade de um curso específico e produção de um material suplementar que os orientasse. Além disso, um seleto grupo informou que hoje seria possível repassar algumas orientações somente no 3º ano após a aplicação da prova do ENEM, período em que os alunos praticamente estão aprovados e teoricamente já estudaram toda a matemática elementar dos níveis fundamental e médio. Caso contrário, veem atualmente viabilidade de aplicação do estudo proposto somente em turmas olímpicas de matemática.

Os dados específicos da pesquisa podem induzir uma reflexão drástica de que os cursos superiores de formação de professores de matemática embora repassem aos seus alunos fundamentos necessários e suficientes para que os mesmos estejam habilitados para trabalhar com a proposta presente nesse trabalho, a totalidade dos professores questionados não se sente seguro para repassar noções elementares do Cálculo a alunos da educação básica. E mais, a maioria dos professores é favorável quanto à grade curricular e quanto à adequação e suficiência das disciplinas de Cálculo durante a fase de graduação. Um verdadeiro paradoxo.

Segundo os professores pesquisados, a assimilação e o ensino/aprendizagem dos graduandos poderiam ser melhorados via curso específico de pré-Cálculo ou propondo estratégias motivadoras durante o Ensino Médio. Ainda afirmaram estarem cientes da distância enorme entre o modelo de ensino ofertada pelas Licenciaturas e a realidade dos alunos em sala de aula, além disso, comentaram que a aversão relativa ao ensino de tópicos do Cálculo durante o Ensino Médio é explicada devido a experiências/aprendizagens deficitárias durante a fase de graduação naquilo que tange a metodologia diferenciada (estratégias, didática, interesse/motivação do professor em ensinar e utilização de recursos didáticos, etc.).

A partir da pesquisa também foi possível conjecturar que a realidade atual dos cursos de Cálculo pode ser melhorada com uma fuga ao modelo tradicional de ensino. Nesse ínterim, faz-se necessário que os professores universitários estejam mais atentos à didática de ensino, ao planejamento de suas aulas, à variação de metodologias de aprendizagem via recursos computacionais disponíveis e via alternativas modernas que favoreçam um aumento no rendimento escolar universitário com uma consequente redução dos índices de reprovação na disciplina de Cálculo. É impossível repassar noções elementares do Cálculo para os alunos da educação básica se a formação que os professores recebem não é satisfatória ao ponto de que haja segurança e domínio do tema. Para isso, é necessário ampliar o leque de discussão das políticas públicas educacionais com uma proposta de reformulação dos PCN, com proposição de cursos de capacitação de professores convenientes e em horários adequados e com a produção de um material didático específico adequado à realidade da educação básica. É válido ressaltar que a retomada do ensino de Cálculo vem acontecendo desde a década de 90, mas com a preocupação de que esse posicionamento não venha a sobrecarregar o currículo e nem esteja distante da realidade do nível elementar, o Ensino Médio, a ser apresentada e incluída a ideia do presente trabalho.

Caso haja educadores contrários a presente proposta com a justificativa de que o currículo básico já está abarrotado de conteúdos e de ser um instrumento imutável, seria interessante promover uma formação completa sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais e sobre o currículo básico adotado com o intuito de explicar aos professores que há muito interpretação equivocada dos PCN dado que os mesmos devem servir como elemento norteador, indicador das habilidades e competências necessárias para garantir o mínimo de aprendizagem significativa e sem que seja um instrumento impositivo (dono da verdade, deus do universo, etc.), ou seja, quem faz o currículo de Matemática é o professor atrelado ao plano pedagógico da escola e matrizes do ENEM.

Para encerrar a análise relativa aos dados da pesquisa, é válido salientar que muitos professores consideraram o questionário longo e tedioso. Essa aversão inicial pode representar uma justificativa aparente de que a postura dos professores quanto à mudança/saída do estado de platô atual sempre será uma barreira à produção de conhecimentos. A presente pesquisa, cujos dados estão tabulados no anexo A, foi realizada com 38 professores atuantes na rede publica e privada com experiência no mercado. Parte desses professores (10) ainda estavam em fase de conclusão do curso de Licenciatura no IFES. De acordo com os dados da pesquisa, foi possível inferir que muitos desses professores não possuem o hábito de realizar leituras de revistas especializadas (Revista do Professor de Matemática (RPM), Revista Cálculo), de livros da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), de artigos de seminários de discussão de educação matemática e nem possuem interesse na participação em simpósios, bienais, cursos de capacitação, cursos de verão, etc.. Nesse ínterim, é bom citar que aqueles poucos professores que participaram de forma remunerada do multicurso de matemática promovido pela Secretaria Educação do Espírito Santo (SEDU) informaram que não houve qualquer menção aos tópicos atuais de discussão do retorno das noções elementares do Cálculo ao currículo básico. Já aqueles que estiveram presentes no Programa de Aperfeiçoamento de Professores do Ensino Médio (PAPEM) relataram que houve alguma citação breve do assunto durante as aulas de vídeo conferência e em problemas propostos nas oficinas no período vespertino.

A outra tabela que consta no anexo B dessa dissertação representa a tabulação dos dados da pesquisa realizada com uma amostra (32 alunos) de alunos (graduandos) do curso de engenharia mecânica da FAACZ.

Inicialmente é interessante citar que participaram da pesquisa 32 alunos, em sua maioria graduandos do sexo masculino, estudantes do curso de Engenharia Mecânica da Faculdade de Aracruz (FAACZ) e desse total, é importante citar que 31 graduandos estão na faixa etária abaixo dos 30 anos.

De acordo com os dados analisados, foi possível verificar que a faculdade disponibiliza aos seus alunos um curso de nivelamento (pré-Cálculo) com o intuito de apresentar aos alunos uma ajuda considerável para iniciarem o estudo de Cálculo e para minimizar a distância que há entre a matemática elementar promovida na educação básica e a matemática superior, principalmente as noções elementares de limite, deriva e integral. Nesse curso de nivelamento foram apresentadas aos alunos situações problema que necessitavam de emprego de noções do Cálculo. A partir da exposição de problemas concretos próximos da realidade dos alunos, foi possível introduzir de maneira construtiva tópicos que exigiram o emprego de limite, de derivada e integral.

Segundo a maioria dos alunos o referido curso de pré-Cálculo ofertado contribui para melhorar o rendimento em todos os aspectos e responderam que, caso a introdução das ideias difundidas no curso de nivelamento tivessem sido realizadas durante o ensino médio, haveria uma melhora considerável no ensino/aprendizagem.

Ao questionar sobre a sequência da história da evolução do Cálculo, foi possível constatar que quase a totalidade dos alunos não tiveram uma introdução histórica da evolução do Cálculo, pois a maioria deles (20 alunos) afirmou que a evolução do Cálculo está em conformidade com a sequência apresentada nos livros didáticos. Também foi possível perceber que o ensino de Física I ocorreu simultaneamente com o ensino de Cálculo I, o que é uma realidade questionada nos principais cursos de exatas das instituições pública e privada do Estado do Espírito Santo. Afinal, como a ementa do curso de Física I requer o conhecimento de um conjunto de aplicações e propriedades do Cálculo, seria lógico que tal curso fosse realizado após a introdução das ideias de limite, derivada e integral.

De acordo com a pesquisa contatou-se que quase todos os alunos (27) estudaram via livros didáticos específicos de Cálculo de autores com bastante bagagem e profundos conhecedores do Cálculo (James Stewart e George B. Thomas, 11ª e 5ª edição, respectivamente). Do total de alunos entrevistados, 5 alunos afirmaram ter estudado Cálculo via apostilas, notas de aulas e vídeo aula.

Segundo a visão dos graduandos, para realizar a introdução das noções elementares do Cálculo, faz-se necessário que os alunos tenham uma base adequada de ensino/aprendizagem acumulada das séries anteriores, inclusive no Ensino Fundamental. Quanto ao aspecto conteúdos do Ensino Médio que exigem a inserção das noções elementares do Cálculo, os graduandos citaram Funções, Sequências, Áreas e volumes em geral. Já no estudo da Física, mencionaram o estudo de velocidades, acelerações e trabalho.

Quanto aos índices de aprovação, é válido ressaltar que dos 32 entrevistados, somente 6 ficaram reprovados em Cálculo I. A explicação para esse índice excelente de aprovação pode ser justificativa pelo repasse das noções elementares do Cálculo via curso de nivelamento. Também é válido ressaltar que a formação dos docentes regentes das disciplinas que fizeram o uso das ideias de Cálculo para os graduandos partícipes da presente pesquisa varia da titulação mínima de especialistas até doutores.

As aulas de Cálculo na FAACZ são muito ecléticas, porém arcaicas / obsoletas / tradicionais e remetem a ideia de que a maioria dos seus professores prefere um curso de Cálculo que exija uma boa formação baseada numa conciliação do processo demonstrativo/aplicativo dos teoremas e proposições do Cálculo. Também afirmaram, de maneira quase unânime e satisfatória, sobre as facilidades que a utilização dos recursos didáticos (softwares de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas) proporcionaria e favoreceria o ensino/aprendizagem dos estudantes dessa instituição. Em contrapartida, 26 desses alunos responderam não ter recebido trabalhos de abordagem de modelagem matemática de uma situação real cotidiana, ou melhor, a maioria desses alunos afirmou que ainda não sabem o que é modelagem matemática.

Quanto à experiência desses alunos ao serem expostos à teoria de limites com todas as suas formalidades, foi possível constatar que o curso de nivelamento de preparação para o estudo de Cálculo contribui de forma satisfatória para melhorar o rendimento/entendimento da maior parte dos graduandos. Esse curso de pré-Cálculo foi uma forma de preencher a lacuna deixada pela educação básica, principalmente pelo Ensino Médio, em que, segundo dados da pesquisa, não houve citação das noções intuitivas de limite nem muito menos ideias correlatas do Cálculo, deriva e integral. Nesse ínterim, a maioria dos alunos afirmou que os livros didáticos existentes na educação básica ou são insuficientes quanto ao repasse ou não abordam as noções de intuitivas do Cálculo. E mais, um percentual considerável dos entrevistados afirmou jamais ter ouvido qualquer citação básica das noções de limite, deriva e integral durante o Ensino Médio.

Essas informações vêm ao encontro da nossa proposta a qual propõe um resgate da inserção das noções intuitivas e ideias elementares do Cálculo durante o Ensino Médio com a finalidade de preparar o aluno para ingressar no estudo de Cálculo e com o intuito de justificar proposições elementares com argumentos satisfatórios sem fuga, desculpa ou enrolo. Essa inserção deve ser direcionada e atrelada à evolução histórica do Cálculo, com um material específico devido à insuficiência dos materiais didáticos existentes no mercado e com atividades interdisciplinares no estudo de Física e Química, principalmente. E mais, deve existir um curso específico de preparação aos professores da educação básica/superior e a inclusão das noções elementares do Cálculo nos PCNEM com intuito de estimular/ratificar o repasse das ideias e de contribuir para elevar o rendimento dos estudantes no estudo de Cálculo em cursos superiores posteriores, pois assim os educadores receberão a formação necessária para trabalharem com maior destreza e segurança via recursos didáticos disponíveis (softwares educacionais, quadro multimeios, laboratórios de matemática, jogos matemáticos, etc.).

3 DADOS HISTÓRICOS DA EVOLUÇÃO DO CÁLCULO

Figura 3.1: Parte do Papiro de Rhind, British Museum. Registro mais antigo de ideias que usavam preceitos rudimentares do Cálculo.

Fonte: www.matematica.br/historia/prhind.html[34]

A evolução do Cálculo, da origem intuitiva (ideias remotas) até o rigoroso padrão adotado nos livros atuais, foi marcada pelas contribuições de diversos estudiosos, dentre os quais pode-se citar, em ordem cronológica de destaque: Ahmes (ou Ahmose escriba egípcio), babilônicos, Hípias, Zenão (ou Zeno de Eléia), Eudóxio (ou Eudoxos), Demócrito, Arquimides, Papus, Kepller, Descartes, Fermat, Roberval, Torricelli, Cavalieri, Wallis, Barrow, Newton, Leibnitz, família Bernoulli, De Moivre, Taylor, Maclaurin, Euler, Clairaut, D'Alembert, Lambert, Lagrange, Laplace, Legendre, Monge, Carnot, Gauss, Fourier, Poisson, Bolzano, Cauchy, Abel, Galois, Jacobi, Dirichlet, Weierstrass e Riemann. É válido ressaltar que outros personagens fizeram contribuições favoráveis e que não foram mencionados para não haver fuga ao escopo principal dessa pesquisa. Além disso, os personagens destacados foram formidáveis e providenciais para o desenvolvimento, aprimoramento, potencialidade, aplicabilidade, formalidade e padronização lógica do Cálculo.

A partir do século $XVII$ é que se evidenciou a evolução formal no desenvolvimento do Cálculo, apesar de suas noções intuitivas serem encontradas por volta de 1650 a.C., isto é, dezessete séculos anteriores aos tempos da era cristã foi encontrado no papiro Rhind, cuja cópia foi realizada pelo escriba Ahmes (ou Ahmose), evidências de que os egípcios descobriram, de maneira correta, que o volume de uma pirâmide de base quadrada equivale a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma retangular de mesma base e mesma altura. É válido ressaltar que não havia demonstração de tal relação, nem deveria, pois para checar a veracidade com rigor e precisão é necessário empregar as noções de infinitesimais pertencentes ao Cálculo. Além dos indícios encontrados nesse papiro, também foram descobertos tabulas cuneiformes babilônicas que destacam problemas relacionados ao Cálculo, especificamente no algoritmo iterativo empregado para calcular a raiz quadrada de um número racional e na mensuração de figuras planas.

Conforme BOYER [4] (1992, p.2):

> (...) Já no século $XVII$ a.C. os babilônicos aplicaram sua álgebra admiravelmente flexível a uma ampla gama de problemas práticos, incluindo mensuração de figuras. Conhecendo o teorema de Pitágoras, acharam corretamente a diagonal de um quadrado, até o equivalente a meia dúzia de casas decimais. Tomavam a área do círculo geralmente como o triplo da área do quadrado sobre ao raio, ma em pelo menos uma ocasião usaram para uma aproximação melhor, $3\frac{1}{8}$. (...)

Embora egípcios e babilônicos, em nível mais acentuado, tenham deixado evidente a habilidade em álgebra, não se pode dizer o mesmo em relação à lógica empregada. Nesse sentido, de preocupação com o rigor lógico a partir de princípios básicos, destacam-se os trabalhos desenvolvidos na Grécia desde a descoberta da incomensurabilidade por Hípias (c. de 425 a.C.), perpassando pelos quatro paradoxos propostos pelo filósofo Zenão de Eléia (c. de 450 a.C.), que indicavam a existência de um processo infinito, e pelo brilhante trabalho de Eudóxio (ou Eudoxo, cerca 370 a.C.), que propôs uma técnica de comprovação de validade de uma proposição, o método da Exaustão, o qual é considerado um prenúncio mais próximo do Cálculo por parte de estudiosos gregos, até o ápice das experiências, argumentos (redução ao absurdo duplo) e métodos bastante precisos desenvolvidos por Arquimedes ($287-212$ a.C.) para obter suas demonstrações rigorosas das fórmulas de áreas e volumes em que frequentemente figuravam séries infinitas.

> Consideradas duas grandezas desiguais, se da maior subtraímos uma grandeza maior que sua metade, e da que resta uma grandeza maior que sua metade, e se este processo é repetido continuamente, restará uma grandeza que será menor que a menor das grandezas consideradas. (BOYER [4], 1992, p. 4)

Segundo BOYER [4] (1992, p. 4), de maneira geral, eis uma das citações mais elementares das noções de limites "se A é a maior das duas grandezas dadas (positivas) a e A, e se $u_n = \frac{A}{2^n}$, então $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 < a$".

De acordo BOYER [4]:

> Deve-se notar que, enquanto a notação moderna recorreu ao símbolo de infinito, a linguagem antiga cuidadosamente evitava qualquer referência aberta a um processo infinito. As duas formulações, no entanto, não estão distantes quanto a seu significado. Para mostrar que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, deve-se demonstrar que, dado um número ϵ positivo, mesmo que pequeno (o equivalente da grandeza menor a na proposição de Euclides), pode-se achar um inteiro N (o equivalente da frase de Euclides se este processo é repetido continuamente) tal que para $n > N$ vale a relação $u_n < \epsilon$. O Cálculo de Euclides (derivado, presumivelmente de Eudóxio) pode ter sido menos efetivo que o de Newton e Leibniz dois milênios mais tarde, mas em termos de ideias básicas, não estava muito longe do conceito de limite usado rudemente por Newton e aprimorado no século XIX. (1992, p. 5).

O último matemático dos tempos medievais a realizar contribuições favoráveis à evolução do Cálculo foi Papus (c. de 320 d.C). A partir daí houve um declínio, um verdadeiro breu secular e histórico de difusão/emancipação/evolução/ativação dos conceitos do Cálculo. Somente aparecerá novamente discussão próxima à teoria do Cálculo nos tempos modernos por meio dos trabalhos de Nicole Oresme no século XIV e Regiomontanus no século XV.

O século XVI foi o período de reativação do desenvolvimento dos conceitos principais do Cálculo. Destacam-se nessa empreitada os trabalhos de Simon Stevin $(1548 - 1620)$ e Luca Valerio (cerca de $1552 - 1618$), que evitaram a dupla *reduction ad absurdum* do método da exaustão e fizeram uso de um método que fazia uma passagem direta ao limite. Aliás Stevin, o Arquimedes Holandês, foi o primeiro a demonstrar numericamente que uma sequencia de números tendia a um valor limite ao analisar proposições relacionadas ao estudo de pressão de fluidos, embora admitir mais credibilidade ao tratamento geométrico.

Nessa linha de defesa, observe o relato EVES [11]:

> (...)"Stevin usava esse método em seu trabalho no campo da hidrostática, para determinar a força exercida pela pressão de um fluido sobre um dique vertical. Basicamente, sua ideia consistia em dividir o dique em faixas horizontais e então fazer cada uma girar em torno de suas bordas superior e inferior, até que elas se tornassem paralelas ao plano horizontal. Fundamentalmente é esse o método usado loje em dia em nossos textos elementares de Cálculo. (2004 [11], p.424).

Além de Stevin, Johann Kepler $(1573-1630)$ e Galileu Galilei $(1564-1642)$ foram pioneiros a evitar os rigores do método da exaustão apesar de utilizar incessantemente os métodos de Arquimedes. Devido a tal atitude foram os responsáveis pela mudanças/modificações no panorama da análise infinitesimal (infinitamente grande e infinitamente pequeno). Nesse sentido, é válido ressaltar que Kepler, heurístico demasiadamente para ganhar tempo e economizar trabalho, utilizou a adição de grandezas infinitamente pequenas quando imaginou o volume de cada barril de vinho formado por uma enorme quantidade de secções circulares com altura tendendo a zero e ainda segundo EVES [11] (2004, p. 424) "considerava uma circunferência como um polígono regular de um número infinito de lados"e a partir desse raciocínio pode-se estendê-lo para caracterizar uma esfera como uma reunião de infinitas pirâmides com as peculiaridades de serem delgadas e com vértice coincidente com o centro da esfera.

O século $XVII$, época em que se destacaram os trabalhos elaborados por Cavalieri, Torricelli $(1608-1647)$, Roberval $(1602-1675)$, Descartes, Fermat, Wallis, Barrow, Newton e Leibniz, houve uma considerável produtividade do desenvolvimento da matemática com a criação da geometria analítica e evolução das técnicas de quadratura e/ou cubatura as quais são empregadas a curvas e sólidos específicos ou famílias de curvas. É válido ressaltar que o conceito de limite não foi utilizado pelos célebres nomes citados, nem sequer reconheciam e perceberam a necessidade da fundamentação de tal teoria. Dentre os diversos estudos de destaque potencial nesse período, mencionaremos a contribuição de Bonaventura Cavalieri $(1598-1647)$ com seu brilhante método dos indivisíveis (Geometria indivisibilibus) em que nos apresenta as prévias dos atuais princípios de Cavalieri, ferramentas essenciais para o Cálculo Integral moderno e os estudos de René Descartes $(1596-1650)$ e Pierre de Fermat (de 1509 até 1608 ou $1601-1665$) com contribuições pontuais para a fundamentação e para o desenvolvimento da Geometria Analítica.

Após o desenvolvimento do campo da geometria analítica, as bases do Cálculo moderno estavam prontas para se tornar cada vez mais evidentes e direcionadas à resolução dos dois problemas fundamentais do Cálculo: encontrar retas tangentes a curvas e determinar valores exatos para áreas de regiões limitadas, pelo menos em parte, por curvas (problemas de quadratura). Nesse sentido, faz-se necessário citar as contribuições de grande magnitude de um francês Fermat, três ingleses John Wallis $(1616-1703)$, Isaac Barrow $(1630-1677)$, Isaac Newtow $(1642-1727)$ e um alemão Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646-1716)$ para o que futuramente seria batizado de Cálculo Diferencial e Integral. É válido ressaltar que tanto o Newton quanto o Leibniz, de maneira independente, foram os responsáveis pelo desenvolvimento das bases notáveis do Cálculo moderno e por isso são considerados responsáveis pela invenção.

Note que em momento algum foi destacada a necessidade de utilização da teoria de limite. Embora tal conceito tenha sido negligenciado em diversos trabalhos é importante destacar que Newton foi o pioneiro no reconhecimento do papel fundamental que o limite iria desempenhar no desenvolvimento de problemas relativos ao Cálculo (tangências, quadraturas e afins). Tal afirmativa pode ser constatada em seu Livro I do Principia Mathematica (1687) na qual há uma tentativa de formular um conceito de limite. De acordo com BOYER [3]:

> Quantidades, e as razões de quantidades, as quais em qualquer tempo finito convergem continuamente para igualdade, e antes do final daquele tempo se aproximam entre si por qualquer dada diferença, tornam-se iguais no final. (BOYER [3], 1996, p. 274)

O desenvolvimento da matemática e em particular as aplicações do Cálculo durante o século $XVIII$, XIX e XX é repleto de histórias esplêndidas e momentos de contribuições memoráveis à expansão da aplicabilidade das teorias relacionadas ao estudo de Cálculo. Vários são os nomes que se destacaram: membros da família Bernoulli, G. F. A. de LHospital $(1661-1704)$, Johann I $(1667-1748)$, Nicolas I $(1687-1759)$ e Daniel $(1700-1782)$, Brook Taylor $(1685-1731)$, Leonhard Euler $(1707-1783)$, e Alexis Claude Clairaut $(1713-1765)$, Colin Maclaurin $(1698-1746)$, Jean Le Rond D'Alembert $(1717-1783)$, Joseph-Louis Lagrange $(1736-1813)$, etc.. Dentre os célebres citados, os quais não estabeleceram uma fundamentação rigorosa para o Cálculo, é válido destacar, na corrida pela formalização do conceito de limite (pilar básico do Cálculo ensinado nos dias de hoje), uma definição especial, como a que foi posta na célebre Encyclopédie

(1751 – 1776) em que D'Alembert ponderou que para definir a derivada precisamente era necessário entender as noções de limite primeiro:

> Uma quantidade é o limite de uma outra quantidade quando a segunda puder se aproximar da primeira dentro de qualquer precisão dada, não importa quão pequena, apesar da segunda quantidade nunca exceder a quantidade que ela aproxima. (D'ALEMBERT, 1772, apud FINNEY; WEIR; GIORDANO, 2002 [12])

No final do século $XVIII$ e durante todo o século XIX, foi o período de contribuições dos renomados: Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), Bernhard Bolzano (1781 – 1848), Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), Niels Henrik Abel (1802–1829), Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) e Karl Weierstrass (1815 – 1897). Nesse período, em que houve um estudo cuidadoso e rigoroso em busca da definição de limite, destacaremos o trabalho desenvolvido por Cauchy (aluno de Lagrange na Escola Politécnica) e Weierstrass. O primeiro, embora tenha deixado de lado a preocupação com alguns detalhes técnicos, foi responsável por apresentar a definição mais próxima de limite que conhecemos atualmente. Já o segundo, restabeleceu o conceito original de limite proposto por Cauchy com tratamento estritamente aritmético e utilizando apenas valores absolutos e desigualdades. Weierstrass além de corrigir os descuidos e erros de Cauchy, formulou a definição de limite empregada nos diversos livros de Cálculo da era moderna na matemática e continuou suas contribuições estabelecendo todo o rigor aritmético adotado no Cálculo e na análise matemática.

Segundo BOYER [3], é creditada a Cauchy a introdução de limite de maneira aperfeiçoada quando publicou em 1821 em seu *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*: "Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, chegando a diferir dele tão pouco quanto se deseje, este último é chamado limite de todos os outros". Já a Weierstrass, de acordo Boyer, coube o trabalho de explicar, de maneira elegante e precisa, substituir as ideias vagas de aproximação na definição de limite de Cauchy-Bolzano por ideias que utilizavam "épsilon-delta"com uma linguagem puramente numérica:

> (...) Diz-se que L é um limite da função $f(x)$ para o valor $x = a$ se, dado qualquer número positivo ϵ , existe um número positivo δ tal que $|f(x)L| < \epsilon$ para qualquer x que verifique $0 < |xa| < \delta$. (BOYER [4], 1992, p. 27).

De acordo com o levantamento histórico realizado, é possível constatar que, por diversos séculos, o conceito de limite foi um tanto vago, confuso, filosófico, intuitivo, indefinido, impreciso, imperceptível, negligenciado, dentre outros inúmeros adjetivos correlacionados. A matemática moderna foi desfrutar das noções de limite somente durante o período europeu intitulado de Iluminismo, final do século $XVIII$ e início do século XIX. Já a definição formal (rigorosa, lógica e correta) apresentada nos livros de Cálculo atuais foi formalizada por volta do ano 1856 (há uns 160 anos).

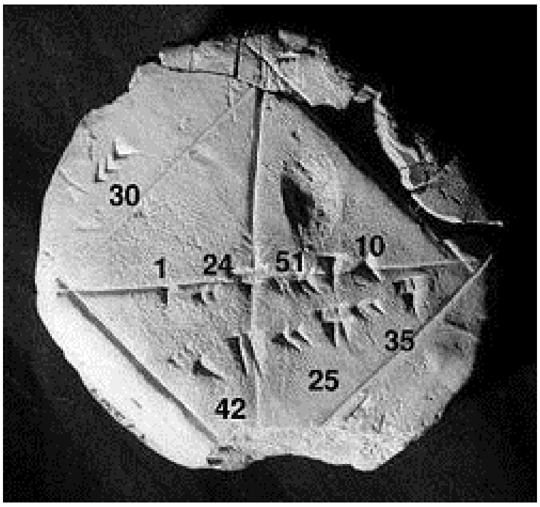

Figura 3.2: Tabuleta de argila babilônica com inscrições. A diagonal mostra uma aproximação da raiz quadrada de 2 com seis casas decimais: $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1.414212...$. Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Matemática$_{b}abilnica$[35]

4 MAPEAMENTO DE CONCEITOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Segundo os anais da história da Matemática, a constatação da presença das noções de limite iniciou desde os tempos antigos até o desenrolar da invenção/evolução/aplicação do Cálculo (séculos: $XVII$, $XVIII$, XIX). De acordo com BOYER [4] tal descoberta já impressionava e tirava o sono de estudiosos gregos:

> (...) Foi um choque para a comunidade matemática grega tomar conhecimento de que há coisas como segmentos de reta incomensuráveis e que a ocorrência dessa situação é espantosamente comum isto é, que conceitos afins ao Cálculo aparecem nas mais elementares situações. Os diálogos de Platão mostram que os matemáticos da época ficaram profundamente pertubados com essa descoberta. (BOYER [4], 1992, p. 3)

Ainda nessa linha, assim se pronunciou EVES [11]:

> (...) Esses conceitos têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que talvez seja correto dizer que sem algum conhecimento deles dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta. (EVES [11], 2004, p. 417).

É importante ressaltar que a ordem do desenvolvimento histórico do Cálculo foi diferente da ordem apresentada nos livros, textos e cursos básicos sobre o assunto, isto é, houve inicialmente o surgimento do Cálculo Integral e muito tempo depois, apareceram os conceitos ligados ao Cálculo Diferencial. Segundo EVES [11]:

> (...) A ideia de integração teve origens em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES [11], 2004, p. 417).

Assim é possível verificar uma gama de assuntos da educação básica, em particular nas fases finais do Ensino Fundamental e durante o Ensino Médio, que evocam as ideias correlatas do Cálculo e em particular, as noções de limite. Embora, seja possível constatar a presença das noções de limite e de integral no Ensino Fundamental, há um consenso de que não é pedagogicamente correto destacar a presença de tais conceitos nessa fase dado que um número considerável de alunos ainda não possui maturidade (manipulação algébrica sólida, poder de abstração consolidado, domínio amplo da aritmética, etc.) suficiente para compreender tamanho grau de abstração/exigência. Caso haja alunos com tal capacidade, é recomendado propor em aulas especiais direcionadas didaticamente com a linguagem de assimilação própria bem próxima dos alunos. Nesse ínterim, a presença da noção intuitiva de limite e ideais correlatas de integral pode ser destacada de forma construtiva e com grau de abstração passível de entendimento em, pelo menos, três pontos específicos estudados no Ensino Fundamental: a primeira abordagem pode ser inserida a partir do momento em que o professor inicia o estudo dos números racionais (dízimas periódicas); o segundo enfoque pode ser aplicado ao demonstrar de maneira completa o Teorema de Tales e a terceira citação deve ocorrer ao estudar áreas de figuras planas, principalmente ao apresentar/provar a área de uma região retangular. A exibição desses tópicos direcionada ao Ensino Fundamental pode ser conferida ao realizar a leitura do capítulo referente às sequencias didáticas sugeridas posteriormente nessa dissertação.

Na ordem cronológica e didática dos livros atuais de matemática do Ensino Médio, nota-se a necessidade de introdução das noções de limite já na 1ª série. Ao estudar a representação decimal de números racionais infinitos e periódicos, já se faz uso implícito do conceito de limite. Nessa mesma linha, ao apresentar os números irracionais e reais também é necessário em diversos pontos citar a ideia de limite. Em seguida, há necessidade de mencionar a referida teoria, ao estudar as minúcias de uma função, seja ela qual for, principalmente, ao realizar a análise gráfica. Também é possível verificar a aplicabilidade de limite ao estudar sequências, em particular e em maior grau ao estudar a soma de uma série convergente (progressão geométrica com razão (q) definida por ($0 < |q| < 1$). Além disso, pode-se adaptar a referida soma numa aplicação prática, usual e diária que consiste no estudo de capitalização contínua em Matemática Financeira (definição do número de Euler). É possível promover atividades interdisciplinas com a Física e com a Química. Relativamente à primeira, justifica-se a correspondência durante o estudo de Mecânica (velocidade e aceleração instantânea, trabalho realizado por uma força, etc.). Enquanto a segunda, a associação pode ser feita durante o estudo de Desintegração Radioativa. Ao estudar Geometria plana, é possível embutir às noções de limite ao inserir o conceito de grandezas incomensuráveis, ao demonstrar o Teorema de Tales e consequentemente ao aplicá-lo ao estudo de semelhança de triângulos e finalmente ao introduzir o estudo de áreas de figuras planas (círculo e suas partes, segmento parabólico, hipérboles, etc.), em particular aquelas que apresentam pelo menos um lado curvilíneo.

Durante a 2ª série ou fase final da 1ª, há necessidade de menção a ideia de limite no estudo de funções exponenciais e logarítmicas, além de aparecer ao estudar áreas superficiais e volumes de sólidos geométricos. Também nota-se indício, ao estudar o cálculo de determinantes, ao discutir sistemas lineares, ao resolver problemas de contagem (somatórios de séries específicas) pertencentes à análise combinatória e ao investigar determinadas probabilidades associadas a problemas básicos. De maneira interdisciplinar, constata-se a necessidade de ênfase no estudo do trabalho realizado por um gás numa transformação isotérmica (Lei de Boyle), por exemplo.

Já na 3ª série, é possível incrementar o estudo de Geometria Analítica, Cônicas e Polinômios com uma abordagem que evoque o emprego das noções intuitivas do Cálculo (limite, derivada e integral). Além disso, é possível promover atividades suplementares que apliquem as ideias correlatas do Cálculo em tópicos do estudo de eletricidade (campo elétrico, potência, corrente, etc.).

5 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

A importância do estudo de limites, derivadas e integrais pode ser verificada ao analisar os números relativos às grades dos cursos ofertados pelas universidades federais e por algumas faculdades particulares. Por exemplo, a Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) oferece 90 cursos de graduação (total de 4975 vagas anuais) e desses há uma variedade de cursos cujas ementas empregam direta ou indiretamente noções elementares de Cálculo, tais como: Física, Química, Estatística, Matemática, Ciências Biológicas, Administração, Arqueologia, Medicina, Farmácia, Ciências Contábeis, Ciências Econômicas, Engenharias, Arquitetura e Urbanismo, Psicologia, Agronomia, Zootecnia, Sistemas de Informação, Desenho Industrial, Tecnologia Mecânica, Oceanografia e Ciência da Computação. Dentre os cursos de bacharelados e licenciaturas distribuídos em turnos (Diurno, Vespertino e Noturno) e espalhados pelo Campus da UFES, mais de 50% necessita do conhecimento de ideias correlatas do Cálculo, isto é, mais da metade dos futuros profissionais a serem formados pela UFES precisam estudar implícita ou explicitamente noções de limite, derivada e integral.

Somente os dados relatados no parágrafo anterior seriam suficientes para justificar o retorno do emprego de noções intuitivas do Cálculo no Ensino Médio, porém há outros fatores que reforçam a temática abordada nesse trabalho. De acordo com informações fornecidas pelos meios regulamentadores da educacional nacional de nível superior na área de Engenharias há uma redução (nos vestibulares do país) no número de inscritos em cursos de exatas e aumento constante da evasão dos alunos matriculados em cursos que envolvam o emprego de elementos do Cálculo, em particular os de engenharia devido à dificuldade encontrada pelos alunos via análise preliminar da grade curricular do curso pretendido,e em parte, pelo fato de não receber orientações sobre tópicos correlatos do cálculo diferencial e integral no ensino fragmentado e desmotivador promovido pela maioria das escolas brasileiras há séculos, em geral, não estar sendo realizado um trabalho interdisciplinar, significativo e com respaldo de preparação para o ingresso futuro no ensino superior.

Uma proposta de mudança desse panorama preocupante pode ser realizada via inclusão de conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio fato que proporcionaria aos alunos aulas motivadoras, interdisciplinares e mais próximas da realidade dos alunos com uma discussão mais ampla, natural, generalizada e contextualizada de conteúdos do próprio Ensino Médio. Entretanto, para que essa inclusão ocorra, é necessário que os cursos de Licenciatura em Matemática formem professores capazes de lidar com essa realidade. Sendo assim, o Cálculo Diferencial e Integral deve ser apresentado aos licenciandos como uma disciplina básica, porém ampla e integradora, propiciando aos futuros professores uma visão mais geral e segura dos conteúdos do Ensino Médio. É importante salientar que há estados brasileiros que apresentam noções de Cálculo em seus currículos escolares básicos do Ensino Médio.

Antes de iniciar as considerações quanto à existência ou não das noções intuitivas de limite e ideias correlatas do Cálculo nos livros dos diversos autores renomados cujos livros didáticos são amplamente adotados, para tornar completa a breve discussão histórica e embasada pela opinião de diversos autores, é salutar a realização de um diagnóstico informal da situação em que se encontram os cursos de que necessitam do emprego da disciplina de Cálculo em suas grades curriculares. Além disso, faremos uma reflexão do ensino de matemática no Brasil.

Segundo a LDB [30], o Ensino Médio é a "etapa final da educação básica"(Art.35) e o mesmo deve possuir um currículo com a característica da terminalidade, isto é, segundo o PCNEM (2000) [20] o Ensino Médio deve ser capaz de:

> (...) assegurar a todos os cidadãos a oportunidade de consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental; aprimorar o educando como pessoa humana; possibilitar o prosseguimento de estudos; garantir a preparação básica para o trabalho e a cidadania; dotar o educando dos instrumentos que o permitam "continuar aprendendo", tendo em vista o desenvolvimento da compreensão dos "fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos"(Art.35, incisos I a IV). (PCNEM [21], 2000, p. 9).

Fazer com que haja continuação dos estudos posteriormente em níveis superiores é uma meta arrojada uma vez que os resultados das avaliações institucionais como o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), cujas provas são produzidas pelo governo federal, indicam um índice de fracasso ao término do ensino médio, pois uma parcela considerável dos formandos apresentam dificuldades básicas na compreensão de conceitos e procedimentos fundamentais quanto às operações aritméticas e compreensão geral via interpretação. Contudo, ainda se faz necessário propor algo que facilite a vida desses alunos, pois aqueles que ingressam no ensino superior, em especial aos cursos que necessitam de uma veia na área de exatas, vão se deparar com a disciplina de Cálculo que requer o domínio amplo da matemática básica para conseguir acompanhar o grau de abstração a ser introduzido por meio da compreensão das noções iniciais de limite, derivada e integral.

De acordo com NIETO (2005, p.7) [36] "é certo que uma reforma deveria ser iniciada nos ensinos fundamental e médio, no entanto, esse aluno está chegando ao curso superior e nós, professores universitários, não podemos enviá-los de volta". E mais, é possível constatar que a situação vem se agravando nos últimos anos devido às dificuldades de aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental e Médio, evidenciadas pelos resultados das avaliações sob a coordenação do INEP, tais como as provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA). Essa conjuntura implica diretamente na avaliação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, pois os alunos com pouca bagagem de matemática básica certamente produzirão rendimentos aquém das possibilidades, contribuindo para o aumento dos índices de reprovação na referida disciplina. Isso nos conduz ao seguinte raciocínio: Por que não incluir na preparação dos alunos do Ensino Médio tópicos que façam a conexão com os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (um curso de nivelamento pré-cálculo)? Por que não criar estratégias didáticas que promovam a interdisciplinaridade e transforme o aprendizado dos conteúdos mais sofisticado? Com absoluta certeza, é notório entre os professores e alunos, via análise de questionários acessíveis em anexos, que tais iniciativas podem tornar o extenso currículo menos complexo, mais lógico e ainda repleto de conteúdos não fragmentados e com significados respaldados nas diversas contextualizações e interdisciplinaridades disponíveis e acessíveis ao dia-a-dia do aluno. Isto é, é possível ensinar tópicos intuitivos de limite, derivada e integral durante o Ensino Médio tanto na Matemática, quanto na Física e Química, porém é necessário realizar mudanças nos PCN, no currículo básico escolar, capacitar professores e produzir material suplementar que preencha as lacunas encontradas nos principais livros didáticos utilizados atualmente.

Num artigo publicado na RPM, o professor Geraldo ÁVILA [1] faz o seguinte questionamento sobre a inclusão de tópicos do Cálculo no Ensino Médio:

> Por que não ensinamos Cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o Cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o Cálculo no ensino? Por que? Como fazer isso? (ÁVILA [1], 1991, p.1).

É válido ressaltar que uma introdução ao Cálculo Diferencial e Integral já esteve presente no currículo escolar básico. Segundo CARVALHO (1996) [5] a participação ocorreu em dois momentos distintos: em 1891, com a reforma proposta por Benjamim Constant no início da República, foi a primeira oportunidade em que houve constatação da presença; e a segunda iniciou em 1942 durante a Reforma Capanema ocorrida no governo de Getúlio Vargas permanecendo oficialmente até 1961. Durante as décadas de 60 e 70, influenciado pelo movimento da Matemática Moderna, o ensino brasileiro sofreu mudanças consideráveis, dentre elas a exclusão do Cálculo do programa básico de ensino.

Também é importante citar que até nos dias atuais ainda encontra-se alguns livros didáticos do Ensino Médio que fazem menção a tópicos relativos ao Cálculo, embora sejam negligenciados por parte dos professores e gestores com o pretexto de que ampliariam o já extenso currículo e, além disso, a linguagem empregada é inacessível aos estudantes, isto é, quando há presença no livro didático, não ocorre inclusão no currículo escolar básico. Na verdade, o que se faz, nos dias atuais nas escolas de Ensino Médio das redes pública e privada, é um verdadeiro curso pré-ENEM (curso pré-vestibular) extensivo aos três anos de estudo no Ensino Médio com o intuito de promover a instituição com índices de aprovação em faculdades e universidades do país em detrimento ao estímulo a um ensino construtivo, significativo e passível de ser aproveitável em estudos posteriores no ensino superior ou tecnológico. Imagine como reagiria um professor enclausurado nesse sistema de ensino que prioriza conteúdos fragmentados e sem significados, ao ser questionado com uma pergunta simples do tipo: "O que é limite, derivada e integral? Onde aplico tais ideias?"Muitos colegas de profissão já responderam assim: "Quando você estudar Cálculo, você saberá. Ou então: "Isso você só aprende na faculdade". Essa atitude com absoluta certeza desapontaria demais o aluno ávido pelo conhecimento e talvez até sepultaria uma mente prodigiosa apta ao desenvolvimento do Cálculo.

Ainda nesse sentido, observe a opinião de ÁVILA (1991, p.1-9) [1], o qual defende que "o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções"e ainda destaca a importância do estudo da derivada na continuidade do estudo de funções, em especial as polinomiais, e as suas variadas aplicações científicas, principalmente no estudo do movimento na Física.

Antes da compreensão do conceito de derivada, é necessário compreender e dominar as noções de limite, pois a derivada é uma aplicação de limite e sua definição atual utiliza as noções de limite. O domínio de parte das propriedades decorrentes do estudo de derivadas fará com que o entendimento de determinadas propriedades relativas ao estudo de funções, tanto na Matemática quanto na Física, seja compreendida com mais argumentos, de maneira mais coerente, contextualizada e interdisciplinar.

Nessa linha, é imprescindível mencionar o artigo "Cálculo no Segundo Grau", publicado na RPM n. 20, do professor Roberto Costallat DUCLOS (1992) [10] que segue e apoia a linha de defesa do professor ÁVILA sobre a possibilidade de difusão de novas ideias e, sobretudo, pela gama de aplicabilidade de seus métodos.

De acordo com os argumentos exposto pelo professor Geraldo ÁVILA [1] na RPM 18, é possível introduzir o Cálculo Integral no Ensino Médio de modo a incitar o interesse e a curiosidade, desde que seja de maneira intuitiva dando ênfase as ideias e aplicações em detrimento das técnicas e suas propriedades. Ele ainda faz uma crítica àqueles que opinam de forma contrária:

> A ideia de que os programas de matemática são extensos e não comportariam a inclusão do cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados. (ÁVILA [1], 1991, p. 1-9).

Após exibir o panorama da educação matemática nacional e citar as contribuições favoráveis da apresentação das noções do Cálculo Diferencial e Integral que remetem a ideia de limite, é válido repassar ao leitor do presente trabalho os elementos norteadores da referida pesquisa, ou seja, uma lista dos livros didáticos e dos seus respectivos autores com o intuito de criar uma simbologia numérica, isto é, uma legenda de associação de cada livro segundo o número indicado no rol abaixo com intuito de evitar repetições desnecessárias:

1. Matemática Contexto & Aplicações de Luiz Roberto DANTE [9] (Dante) - Editora: Ática, 2010;

2. Matemática de Manoel PAIVA [23] Editora: Moderna, 2009;

3. Matemática Coleção Novo Olhar de Joamir Roberto de SOUZA [25] Editora: FTD, 2010.

4. Matemática Ciência e Aplicações de Gelson IEZZI [15], Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeira Editora: Saraiva, 2010;

5. Matemática Completa de José Ruy GIOVANNI [29] e José Roberto Bonjorno (Giovanni e Bonjorno) Editora: FTD, 2005;

6. A Matemática do Ensino Médio Coleção do Professor de Matemática de Elon Lages LIMA [17], Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado Editora: SBM, 2006 (6ª edição);

7. Fundamentos de Matemática Elementar (vol. 8) Editora: Atual, 1993 (diversos autores);

8. Noções de Cálculo (vol. 9) - Série Matemática por assunto de Nilson José Machado. Editora: Scipione, 1988;

9. Cálculo de Geraldo Ávila. Editora: LTC, 1988;

10. Cálculo de James Stewart (vol. I) Editora: Pioneira, 2003 (4ª Edição).

Os livros didáticos que foram analisados possuem publicações em três volumes foram numerados de 1 até 6. Já os livros que possuem volume único integrado ou livros específicos de coleções divididos por assunto, conforme a preferência do autor, foram numerados de 7 até 10. Quantos aos primeiros (de 1 a 6), foi feito uma analise minuciosa tanto dos conteúdos quanto dos guias de orientação do professor. Já os últimos (de 7 até 10) foram citados simplesmente como sugestão de uma leitura mais refinada e com o intuito de repassar aos professores uma oportunidade de enriquecer seus conhecimentos com um material didático de qualidade. A escolha dos livros de 1 a 6 é justificada pelo fato de que a maioria desses autores está ou já esteve presente de forma maçante nas escolas públicas e particulares brasileiras.

A análise realizada nos livros consiste numa investigação específica e minuciosa em busca de pontos (conteúdos) que façam menção as noções elementares e intuitivas do Cálculo (limite, derivada e integral).

Dentre todos os livros analisados, destaca-se o livro do DANTE (1) como o mais completo em todos os aspectos (definições mais rigorosas, maior número de demonstrações, conteúdo contextualizada e interdisciplinar, etc.), porém é válido ressaltar que a linguagem adotada não é tão simples, assim como os exercícios propostos possuem grau de dificuldade mais acentuado. Além disso, consiste no material didático que mais se aproxima do propósito desse trabalho, ou seja, de explicar e/ou justificar os fatos/conteúdos/teoremas com argumentos satisfatórios e com ideias intuitivas/interdisciplinas/contextualizadas/construtivas sem receio de abordar tópicos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral.

No livro (1), volume 1, a presença das noções intuitivas de limite pode ser verificada no estudo de dízimas periódicas, na apresentação do número irracional e, no estudo do gráfico da função logarítmica, na soma dos termos de uma progressão geométrica infinita e no cálculo da área do círculo. Também é notável a presença das noções de derivada ao trabalhar com taxa de variação da função quadrática e consequente aplicação no Movimento Uniformemente Variado (MUV). Nesse ínterim, também ocorre menção elementar do estudo de integral via área sob o gráfico de uma função do 1º grau. No volume 2 da referida da obra, a ideia de limite está presente no estudo da área da superfície esférica. Já no volume 3, há um estudo completo das noções elementares de derivada via razão incremental e via aplicações em problemas da Física. É válido ressaltar que tais noções motivaram algumas atividades presentes na sequência didática a ser apresentada nesse trabalho. O manual do professor embora seja pedagógico, com excelentes dicas de atividades utilizando diversas metodologias, recursos didáticos, softwares educacionais e sugestões de revistas, livros e filmes atrelados ao ensino de matemática, não possui formação/capacitação alguma que oriente o professor a trabalhar com ideias correlatas do Cálculo.

O volume 1 do livro (2) há apenas uma citação direta das ideias de limite ao introduzir a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Já no volume (2) uma citação indireta das noções elementares de limite ao explicar a área do círculo. Quanto ao volume 3, não há menção alguma das noções elementares do Cálculo. A propósito, o manual destinado aos professores como suporte de preparação para suas aulas não apresenta tópicos do Cálculo e há diversos pontos de erros conceituais.

A partir da avaliação do volume 1 do livro (3), foi possível verificar que há somente um breve comentário no estudo de soma dos termos de uma progressão geométrica das noções de limite. E mais, não existe citação no volume 2 e no volume 3, temos apenas um comentário ao calcular a área da superfície da esfera. O guia pedagógico não menciona elementos do cálculo, embora promova inúmeras situações em que o emprego das noções de cálculo poderia se explorada de maneira lúdica, criativa, interdisciplinar e contextualizada.

No livro (4), volume 1, também existe uma abordagem de limite no estudo de soma dos termos de uma progressão geométrica. Enquanto no volume 2, há um prelúdio das ideias de limite atreladas as noções de integral quando aborda a área do círculo e quando explora a área da superfície esférica. Em relação ao volume 3 não há citações intuitivas de limite, derivada e integral. Embora a quantidade de abordagens de ideias correlatas do Cálculo seja pífia, o manual pedagógico está coberto de estratégias inovadoras que podem ser exploradas e incrementadas de noções de limite, deriva ou até mesmo integral.

Também no volume 1 do livro (5), foi possível constatar que as ideias de limite estão sendo difundidas ao inserir a soma dos termos de uma progressão geométrica. Já no volume 2 da referida obra, o autor faz referencia as noções de limite e de integral ao provar o volume da esfera. Enquanto o volume 3 apresenta um estudo das noções elementares de limite e de derivadas assim como suas propriedades e aplicações. Embora haja capítulos específicos que abordam tópicos do Cálculo de maneira simplória e pouco significativa, o manual pedagógico do professor mostrou-se deficiente quanto ao direcionamento do trabalho para incitar as ideias correlatas do Cálculo. É bom salientar que a obra analisada é a coleção de três volumes mais antiga, anterior a mudança do novo ENEM e talvez isso seja uma justificativa para o emprego de limite e derivadas em detrimento ao modelo padronizado dos livros publicados de 2009 em diante que supervalorizam as atividades em favor de situações problema tipo ENEM.

Enfim, o livro (6), volume 1 da Coleção Professor de Matemática (SBM) destinada a professores que atual no ensino médio, apresenta citações das noções intuitivas de limite e de derivadas com excesso de rigor e abstração ao estudar a continuidade da função proporcionalidade via limite de uma sequencia e ao estudar de forma interdisciplinar o MUV via razão incremental (noção intuitiva de derivada). Também há citação das ideias de derivadas ao citar ao estudar as funções polinomiais via método de Newton e ainda há citação das noções de limite no estudo de funções exponenciais e logarítmicas via justificativa do comportamento de gráficos e estabelecimento no número de Euler. Já no volume 2 da referida coleção, há citação de limite durante o estudo de soma dos termos de uma progressão geométrica infinita e menção intuitiva de integral ao propor o volume de corpos redondos (cilindros, cones e esferas). E finalmente no volume 3, ocorre uma menção ao estudo derivada via equações algébricas. É válido ressaltar que não há guia de orientação para os professores, pois o próprio livro trata-se de uma guia de reflexão crítica em relação à abordagem precária de matemática encontrada nos principais livros didáticos do país. O nível dos exercícios dos três volumes é de grau elevadíssimo e os idealizadores do referido material são professores do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA RJ), o que certamente explica a fundamentação precisa, a preocupação com o rigor da linguagem e o grau de abstração existentes nas proposições, demonstrações, aplicações e exercícios dos livros em questão.

Assim, foi possível avaliar que todos os livros analisados exibiram as noções elementares do Cálculo somente durante o estudo da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita e em alguns casos de cálculo da área de círculos, área superficial e volume de uma esfera. Apenas os livros (1) e (5) possuem apresentação de elementos do Cálculo de maneira sistêmica e conceitual, porém a metodologia não é conveniente e a linguagem empregada está distante da realidade da educação pública da rede estadual do Espírito Santo. Essas considerações refletem o caráter defendido nos PCNEM [21], que não fazem menção a necessidade de repassar aos alunos elementos essenciais do Cálculo, e no currículo básico estadual que apresenta excesso de conteúdo e ausência/deficiência de atividades que estimulem a modelagem matemática e o estudo dirigido de noções intuitivas de limite, derivada e integral.

A partir da análise dispostos de forma tabular a seguir, é possível inferir de maneira resumida e simplificada as conclusões obtidas a partir da análise dos livros didáticos investigados e numerados de 1 a 6.

Tabela 5.1: Análise dos livros didáticos escolhidos.

	LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS					
	DANTE	PAIVA	JOAMIR	IEZZI	GIOVAN	SBM
CONCLUSÕES IMEDIATAS	1	2	3	4	5	6
Há menção das noções elementares de limite?	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM
Há menção das noções elementares de derivada?	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	SIM	SIM
Há menção das noções elementares de integral?	SIM	NÃO	NÃO	SIM	NÃO	NÃO
No manual pedagógico do professor, existe orientação sobre a inserção de noções elementares do Cálculo?	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NPM
Abordam as noções elementares de Cálculo de maneira contextualizada, intuitiva e construtiva?	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	SIM
Abordam as noções elementares de Cálculo de maneira interdisciplinar?	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	SIM
Dedicam capítulos exclusivos para as noções elementares do Cálculo?	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	SIM	NÃO
Há exercícios de fixação que exploram de modo investigativo as noções de Cálculo?	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	SIM
Há alguma atividade de exploração das noções de Cálculo via software de geometria dinâmica ou planilha eletrônica?	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO

NPM = NÃO POSSUI MANUAL

6 ABORDAGEM/CONDUTA DOS PROFESSORES

De acordo com a análise dos dados coletados, é possível constatar que a maioria dos professores atuantes no nível básico da educação está negligenciando o ensino das noções intuitivas de limite e ideias correlatas do Cálculo em detrimento ao cumprimento do currículo pré-estabelecido pela rede a qual trabalham e/ou em virtude de direcionamento de trabalho visando melhores resultados na prova do Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES) e ENEM. Isso se justifica por inúmeros fatores: formação deficiente durante a graduação, baixo nível de aprendizagem dos alunos (déficit herdado de um Ensino Fundamental tradicional, arcaico, obsoleto e negligente), inexistência de material didático de orientação específica, ausência de participação do tema em estudo no currículo básico norteador e inexistência de cursos de capacitação para aprimorarem seus conhecimentos.

Segundo a opinião geral dos professores que responderam os questionários, os cursos de licenciaturas em Matemática poderiam explorar de maneira mais diversificada as ideias correlatas do Cálculo. É consensual que a maioria dos professores mestre/doutores das universidades federais poderia aprimorar sua didática com o intuito de melhorar a exposição/apresentação de determinados conteúdos e, além disso, sugeriram que a apresentação de conteúdos correlacionados ao Cálculo seja realizada por meio de estratégias diferenciadas (recursos didáticos e modelagem matemática). Isso pode contribuir de maneira significativa para melhorar os níveis de aprendizagem durante a fase de graduação e ao mesmo tempo servir de estímulo para estudos posteriores. É certo que a realidade "vem melhorando"ultimamente devido exigências impostas pelas políticas governamentais em melhorar os altos e absurdos índices de reprovação na disciplina de Cálculo I, mas em contrapartida os setores responsáveis pela validação de complementações (licenciaturas curtas) e alguns cursos de Licenciatura a distância sejam mais rigorosos ao avaliar o conceito dessas graduações para que a formação desses professores seja qualidade excelente, ao ponto de acumular bagagem de estágio e conhecimento específico suficiente para explorar ao máximo a capacidade de seus alunos. A realidade vivenciada nos editais de contratação de professores de designação temporária, seja da secretaria de educação municipal ou estadual do Espírito Santo, aparenta nos remeter a ideia de que o título é mais importante do que o conteúdo, o objeto de estudo analisado. Esse dado é um fator que contribui indiretamente para a redução da procura de alunos para as licenciaturas na UFES e IFES. Por exemplo, o curso de Matemática no processo seletivo [1] UFES 2013/2014 ofereceu 50 vagas das quais apenas 27 alunos conseguiram obter notas que os capacitassem para prosseguir o curso.

Aqueles professores que relataram citação das noções elementares do Cálculo em pontos específicos do Ensino Médio informaram que fazem apenas uma abordagem superficial sem embasamento teórico, com pouca mobilidade metodológica e sem respaldo curricular. Também relataram que os poucos cursos de capacitação que existem ocorrem em horários e dias não convenientes (recesso e/ou férias, finais de semana, etc.). Quanto ao respaldo curricular, os professores argumentaram que os PCNEM não apresentam menção alguma à introdução das ideias intuitivas do Cálculo. E caso houvesse uma mudança nesse documento, haveria necessidade de curso de formação/capacitação com material didático autoexplicativo e focado na realidade da educação básica dado que os referidos docentes não fazem ideia de como realizar a introdução de tais conceitos no modelo educacional vigente.

Os docentes também nos disseram que, caso fossem questionados sobre algum ponto que requeresse citação de noções elementares do Cálculo, a priori deixariam a discussão de forma particular com o aluno que promoveu a pergunta ou então daria uma desculpa qualquer de que tais noções serão discutidas posteriormente no Ensino Superior somente para os privilegiados que estudarão a disciplina de Cálculo.

Os dados da pesquisa servem para uma reflexão sobre a situação do ensino de matemática, embora o espaço amostral esteja concentrado nas escolas da Grande Vitória, pode ser que esteja dissipada ao redor do estado. Isso pode ser um obstáculo à inserção de elementos intuitivos do Cálculo durante o Ensino Médio, pois é um tema bastante discutível e não dispomos de um modelo de educação pronto que resolva os problemas men-

[1] Observação: o processo seletivo da UFES para o curso de Matemática é diferente dos demais, pois o aluno é pré-aprovado para a 2ª etapa e em seguida deve cursar durante o próximo semestre duas disciplinas Matemática Básica I e II com a prerrogativa de obter rendimento mínimo de média final de 5,0 pontos em cada disciplina, caso contrário o aluno não está apto para prosseguir no curso de Matemática e o mesmo é eliminado do certame.

cionados. Talvez tal negligência tenha como consequência agravante rendimentos pífios por parte da maioria dos estudantes, evasão universitária e fuga aos cursos que requerem conhecimento prévio de Cálculo, porém o universo estatístico analisado não é suficiente para tal conclusão, mas sim para uma reflexão. As propostas a seguir têm a pretensão de preencher as lacunas deixadas pelos livros didáticos quanto ao repasse de noções elementares de limite, derivada e integral durante a educação básica. Assim como promover uma orientação para os professores da educação básica por intermédio de atividades práticas, construtivas, contextualizadas e interdisciplinares. É válido ressaltar que o referido trabalho já é realizado em determinados estados brasileiros (São Paulo, Minas Gerais, Rio Grande do Sul e Paraná) e, além disso, na França, Portugal e Espanha, o Cálculo Diferencial e Integral é conteúdo do currículo mínimo comum obrigatório na educação básica. Nos estados brasileiros que fazem referência as noções de Cálculo no Ensino Médio, a inclusão do tema é inserida de maneira indireta, transversal e interdisciplinar de acordo com as dúvidas e o grau de abstração que o assunto requer. A implementação de nossa proposta é uma tentativa de reduzir o grande abismo entre a educação básica e o ensino superior. Além disso pretendemos contribuir para o aumento da procura por cursos de exatas nos vestibulares, para a considerável melhora no rendimento universitário dos alunos que cursavam disciplinas de Cálculo e para a promoção de um ensino/aprendizagem mais significativo, concreto, interdisciplinar, contextualizado e motivador.

Embora as noções de limite, derivada e integral não estejam presentes de forma direta e obrigatória no currículo mínimo de conteúdos do Ensino Médio, no currículo escolar paulista (2011) há uma argumentação excelente de defesa do ensino de noções de Cálculo na 3ª etapa da educação básica na qual os autores trabalham com a ideia de que havendo uma boa razão para fazer algo, sempre será possível arquitetar uma maneira de fazê-lo ("quem tem um porque, arruma um como"). Por exemplo, há uma orientação de trabalhar, com uma escala de aprofundamento adequada ao grau de conhecimento do aluno em questão, tópicos do Cálculo Diferencial por meio da análise de problemas cotidianos (presentes em jornais e revistas) que medem a rapidez com que uma grandeza cresce ou decresce em relação à outra (o que futuramente aprenderão como derivada). Além disso, orientam que o trabalho com o Cálculo Integral deve ser ealizado a partir de uma aproximação de uma grandeza variável por uma série de valores constantes (como se fosse constante em pequenos intervalos).

7 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Com o intuito de realizar o resgate do repasse das noções elementares do Cálculo, o presente trabalho estará repleto de atividades que de forma direta e/ou indireta citarão as ideias intuitivas de limite, de derivada e de integral.

De fato, há uma gama considerável de pontos da educação básica, em particular, durante o Ensino Médio, que necessitam de abordagem específica das noções elementares do Cálculo e em caráter especial às noções intuitivas de limite. De fato, há uma gama considerável de pontos da educação básica, em particular, durante o Ensino Médio, que necessitam de abordagem específica das noções elementares do Cálculo e em caráter especial às noções intuitivas de limite. Além disso, os dados das pesquisas realizadas revelaram às dificuldades que muitos professores possuem/teriam para expor o tema, também foi visto que há mais pontos favoráveis que desvantajosos em propor o resgate da inserção de tais conceitos durante o Ensino Médio e para finalizar, foram constatadas as deficiências existentes nas diversas literaturas disponíveis.

Assim, a principal meta desse trabalho consiste em propor situações práticas em que há a necessidade de empregar e justificar o ensino das noções intuitivas de limite e ideias correlatas do Cálculo na educação básica, em especial durante o Ensino Médio. Com o intuito de ajudar colegas de profissão, tentamos propor abordagens do ensino das noções intuitivas de limite, de derivada e de integral por meio de softwares de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas de maneira que tais conceitos sejam introduzidos passo a passo (algo bem construtivo). Pretendemos gerar um ambiente de reflexão sobre a importância de justificar determinados tópicos da matemática elementar com maior precisão e, além disso, fornecer subsídios garantidos por lei para continuidade de estudos posteriores. A resolução de cada situação problema será feita, sempre que possível, a partir dos métodos propostos por POLYA (1995) [28], os quais podem ser expressos em quatro passos:

1. Compreender o problema: Nesse 1º passo é importante fazer perguntas, identificar qual é a incógnita do problema,verificar quais são os dados e quais são as condições entre outros.

2. Construção de uma estratégia de resolução: Nesse 2º passo devemos encontrar as

conexões entre os dados e a incógnita, caso seja necessário considerando problemas auxiliares ou particulares.

3. Execução da estratégia: Freqüentemente, o 3º passo é considerado o mais fácil do processo de resolução de um problema. Contudo, a maioria dos principiantes tende a pular esta etapa prematuramente e acabam se dando mal.

4. Revisão da solução: O 4º passo consiste numa análise minuciosa da solução obtida, em que é feita a verificação dos resultados, dos argumentos utilizados e da escrita matemática, além de ser uma etapa excelente para oportunizar uma reflexão sobre a possibilidade de uma resolução de modo diferente.

Nesse ínterim, é necessário ter uma preocupação contínua em realizar uma boa interpretação dos exercícios, seguida de uma atenciosa coleta de dados, chegando ao ponto de encontrar a melhor estratégia para solucionar a questão e, após aplicar a melhor técnica (ou a mais conveniente) de resolução, finalizar a atividade por meio de uma revisão da solução realizada com ênfase e detalhamento de valores obtidos, assim como o estudo do significado semântico, algébrico ou geométrico, é uma técnica excelente e sugerimos que se torne prática diária de professores e alunos.

MACHADO (2008) [19], professor e autor de livros de matemática elementar/superior, afirma em seu artigo "Cálculo Diferencial e Integral na Educação Básica", que a presença das ideias básicas do Cálculo é inserida em no dia-a-dia a partir do momento em que há o estudo analítico do comportamento de grandezas variando com o tempo. Note o relato de MACHADO (2008, p.1):

> "É do diálogo entre a permanência e a variação, juntamente com a busca de uma forma de caracterização da rapidez com que uma grandeza varia com outra, que nascem as duas ideias fundamentais do Cálculo: a integral e a derivada". (MACHADO, 2008 [19], p.1)

7.1 NOÇÕES INTUITIVAS DE LIMITE NO ENSINO FUNDAMENTAL

Embora contrarie as expectativas da maioria dos professores de matemática atuantes nessa etapa da educação básica, é possível inserir ideias fundamentais e construtivas de limite em diversos pontos do ensino fundamental, porém há três ocasiões específicas em que o emprego das noções intuitivas de limite faz-se necessário para completar o entendimento e maximizar o ensino/aprendizagem dos alunos: no estudo da representação decimal das dízimas periódicas, no estudo da demonstração completa do Teorema de Tales e no estudo de área de áreas de figuras planas, em particular a partir da área de um retângulo.

7.1.1 Dízimas Periódicas

Em geral, as dízimas periódicas são introduzidas a partir do 7º ano durante o estudo da representação decimal dos números racionais. Um número racional pode ser representado por um número decimal exato (dízima exata), que possui um número finito de casas à direita da vírgula, ou por um número decimal infinito e periódico (dízima periódica), que possui um número infinito de casas à direita da vírgula. Em outras palavras, uma dízima periódica é uma representação numérica em que há uma sequência finita de algarismos que se repetem indefinidamente.

Por definição, os números racionais são aqueles que podem ser representados por uma fração, isto é, números da forma $\frac{p}{q}$, com p e q números inteiros e $q \neq 0$. As frações que geram dízimas periódicas são denominadas de frações geratrizes.

Para transformar uma fração ($\frac{a}{b}$),cujo denominador apresente apenas fatores 2 ou 5, em um número decimal pode-se aplicar o seguinte método. Considere $b = 2^x \cdot 5^y$, com $x < y$. Em seguida multiplique tanto o numerador quanto o denominador por 2^{y-x}, isto é:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 2^{y-x}}{2^x \cdot 5^y \cdot 2^{y-x}} = \frac{a \cdot 2^{y-x}}{2^y 5^y} = a \cdot 2^{y-x} 10^{-y}.$$

Isso é equivalente a calcular o número $a \cdot 2^{y-x}$ e escrevê-lo após as x casas decimais após a vírgula. Note que, o caso $x > y$ é análogo ao anterior, porém o fator multiplicativo será 5^{y-x} . Por exemplo,

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5^{2-1}}{2^2 \cdot 5 \cdot 5^{2-1}} = \frac{35}{100} = 0,35.$$

A aplicação desse procedimento para denominadores particulares que produzem frações decimais nem sempre produz um número finito de casas após a vírgula. Um exemplo simplório seria a tentativa de escrever a representação decimal da fração geratriz $\frac{1}{3}$. Note que:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{1}{10}.\frac{10}{3} = \frac{1}{10}.\frac{3 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{1}{10}.(3 + \frac{1}{3}) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}.\frac{1}{3} = 0,3 + \frac{1}{10}.\frac{1}{3}.$$

Repetindo o processo, tem-se:

$$\frac{1}{3} = 0,3 + \frac{1}{10}.\frac{1}{3} = 0,3 + \frac{1}{10}.(0,3 + \frac{1}{10}.\frac{1}{3}) = 0,3 + 0,03 + \frac{1}{100}.\frac{1}{3}.$$

Observe que novamente apareceu a fração original um terço e é evidente que o mesmo acontecerá nas próximas iterações. Isto significa que para a representação decimal de um terço é necessário infinitas casas decimais à direita da vírgula. Assim concluí-se que:

$$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\overline{3} = 0,3 + 0,03 + 0,003 + (...).$$

Note que, é importante que o professor interfira com questionamentos sobre a regularidade dos elementos que surgem nessa soma e com a solicitação do Cálculo para um número particular de parcelas dessa soma. A finalidade dessa tarefa é mostrar ao aluno que um terço é igual a uma soma de infinitos termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = 0,3$ e cuja razão $q = 0,1$ (série convergente). Para calcular essa soma é necessário empregar as noções intuitivas de limite e isso será realizado posteriormente nesse trabalho. Note ainda que ao multiplicar a ambos os membros pelo número 3, tem-se:

$$3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,333... \Rightarrow 1 = 0,999... = 0,\overline{9}.$$

Para que os alunos familiarizem-se com o procedimento anterior que utiliza a ideia de infinito, de processo indefinido, proponha atividade de requeiram a determinação da representação decimal, por exemplo, para as frações $\frac{3}{11}$ e $\frac{1}{7}$. Note que, o grau de dificuldade aumenta e aguça a curiosidade do aluno. Veja o resultado para a fração:

$$\frac{3}{11} = \frac{3 \cdot 10}{11 \cdot 10} = \frac{1}{10}.\frac{30}{11} = \frac{1}{10}.(\frac{2 \cdot 11 + 8}{11}) = \frac{1}{10}.(2 + \frac{8}{11}) = \frac{2}{10} + \frac{1}{10}.\frac{8}{11}.$$

Não apareceu explicitamente a fração $\frac{3}{11}$ na primeira iteração, porém na segunda etapa, tem-se: $\frac{3}{11} = \frac{3 \cdot 10}{11 \cdot 10} = \frac{1}{10}.\frac{30}{11} = \frac{1}{10}.(\frac{2 \cdot 11+8}{11}) = \frac{1}{10}.(2 + \frac{8}{11}) = \frac{2}{10} + \frac{1}{10}.\frac{8}{11} = 0,2 + \frac{1}{10}.\frac{80}{110} = 0,2 + \frac{1}{100}.(\frac{7 \cdot 11+3}{11}) = 0,2 + 0,07 + \frac{1}{100}.\frac{3}{11} = 0,27 + \frac{1}{100}.\frac{3}{11}$.

Ou seja: $\frac{3}{11} = 0,27 + \frac{1}{100} \cdot (0,27 + \frac{1}{100} \cdot \frac{3}{11}) = \cdots = 0,272727... = 0,\overline{27}$.

Espera-se com essas atividades que os estudantes consigam assimilar o caráter periódico e infinito das dízimas.

Em geral, uma dízima periódica simples de período k é um número que possui expansão decimal do seguinte modo: $a, b_1b_2b_3...b_k = a, \overline{b_1b_2b_3...b_k}$. E toda dízima periódica representa um número racional, isto é, possui representação fracionária dada por:

$$a, b_1b_2b_3...b_k = a, \overline{b_1b_2b_3...b_k} = a + 0, \overline{b_1b_2b_3...b_k}.$$

Considere que:

$$r = 0, \overline{b_1b_2b_3...b_k}.$$

Daí segue que:

$$10^r \cdot r = 10^r \cdot (0, \overline{b_1b_2b_3...b_k}).$$

$$\Rightarrow 10^k \cdot r - r = (b_1b_2b_3...b_k, \overline{b_1b_2b_3...b_k})$$

$$\Rightarrow 10^k \cdot r - r = (b_1b_2b_3...b_k, \overline{b_1b_2b_3...b_k})$$

$$\Rightarrow (10^r - 1)r = b_1b_2b_3...b_k$$

$$\Rightarrow r = \frac{b_1b_2b_3...b_4}{10^k - 1} = \frac{b_1b_2b_3...b_k}{999...9}.$$

Logo, tem-se:

$$a, b_1b_2b_3...b_k = a, \overline{b_1b_2b_3...b_k} = a + 0, \overline{b_1b_2b_3...b_k} = a + \frac{b_1b_2b_3...b_k}{\underbrace{999\cdots9}_{\text{k repetições de 9}}}.$$

Exemplo motivacional: Determine a fração geratriz da dízima periódica $5, 777\cdots$.

1º modo: Desenvolvendo raciocínio similar a demonstração.

$$r = 5, 777...$$

$$\Rightarrow 10r = 57, 777...$$

$$\Rightarrow 10r - r = 57, 777... - r$$

$$\Rightarrow 9r = 52$$

$$\Rightarrow r = \frac{52}{9}.$$

2º modo: Aplicando o algoritmo demonstrado.

$$5, 777... = 5, \overline{7} = 5 + 0, \overline{7} = 5 + \frac{7}{9} = \frac{52}{9}.$$

A recíproca da demonstração acima também é verdadeira, ou seja, todo número racional é representado por uma dízima periódica. A demonstração desse fato é obtida por intermédio do algoritmo de divisão de Euclides.

7.1.2 Completude na demonstração do Teorema de Tales

Considere a proposição a seguir proposta por um rico comerciante, Tales, da cidade grega de Mileto por volta do V a.C. conhecida como Teorema de Tales: um conjunto de retas paralelas entre si (feixe de paralelas) cortado por duas transversais (r e s), forma sobre elas segmentos correspondentes proporcionais, isto é, a razão entre dois segmentos quaisquer determinados pelo feixe sobre a reta r, por exemplo, AB e CD, é igual à razão de seus correspondentes sobre a reta s, $A'B'$ e $C'D'$, ou seja:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

A demonstração desse teorema em geral não é realizada nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Já nos livros de Ensino Médio é apenas apresentada uma parte da validade para segmentos comensuráveis. Diante desse fato consumado, eis que surge o questionamento: Por que os livros didáticos do Ensino Médio não apresentam a demonstração para segmentos não comensuráveis?

A explicação para a omissão da segunda parte da prova pode ser justificada pelo fato de que a manipulação com números irracionais requer emprego de completude dos números reais e com certeza o grau de abstração necessário pode estar além das possibilidades de entendimento do aluno. E mais, é necessário utilizar noções intuitivas de limite para completar o raciocínio.

A seguir, é apresentada de forma completa a demonstração do Teorema de Tales.

1ª parte da demonstração: Sejam r, s, t e z retas paralelas e a e b retas transversais.

Suponha que AB e CD sejam comensuráveis e que exista um segmento u (unidade de medida comum entre os segmentos AB e CD) tal que $AB = mu$ e $CD = nu$ $(m, n \in N\ )$, isto é, o segmento u cabe m vezes dentro de AB assim como cabe n vezes no segmento CD.

Logo, a razão $\frac{AB}{CD} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n}(I)$.

Agora, pelos pontos que dividem AB e CD em m e n partes congruentes ao segmento de medida u, trace retas paralelas ao feixe com o intuito de subdividir os segmentos $A'B'$ e $C'D'$ em m e n partes iguais a w. A partir dessa consideração, tem-se a razão $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{mw}{nw} = \frac{m}{n}(II)$.

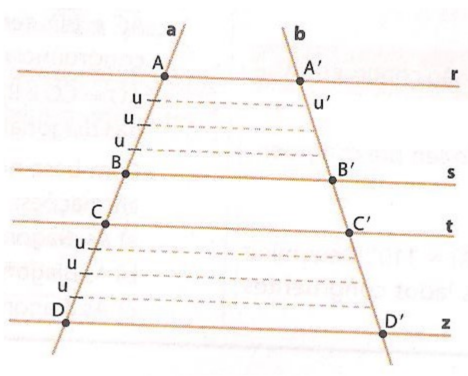

Figura 7.1: Feixe de retas paralelas cortado por transversais.

Fonte: DANTE [9], 2010, vol.1, p. 404.

Daí, concluí-se a partir das relações (I) e (II) que: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$, conforme queríamos demonstrar.

2ª parte da demonstração: Sejam a_1, i e j retas paralelas e r e s retas transversais.

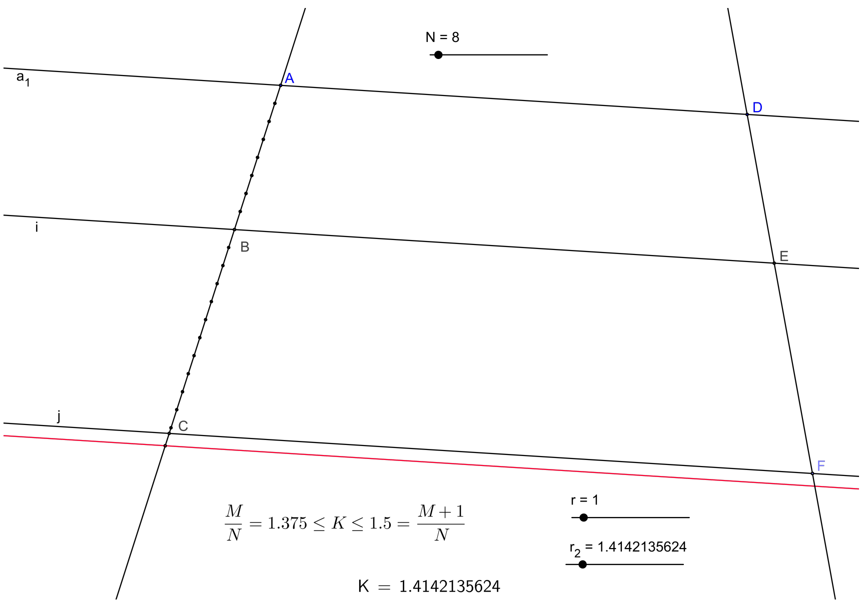

Figura 7.2: Feixe de retas paralelas cortado por transversais.

Fonte: GeoGebra

Suponha agora que os segmentos AB e BC sejam incomensuráveis. Por comodidade, suponha que AB seja menor do que BC (caso contrário o raciocínio será desenvolvido a partir de BC) e divida AB em m partes congruentes com o segmento $u = \frac{1}{m}AB$. Como $u < AB$ (dado que a parte é menor do que o todo) e como $AB < BC$, então $u < BC$.

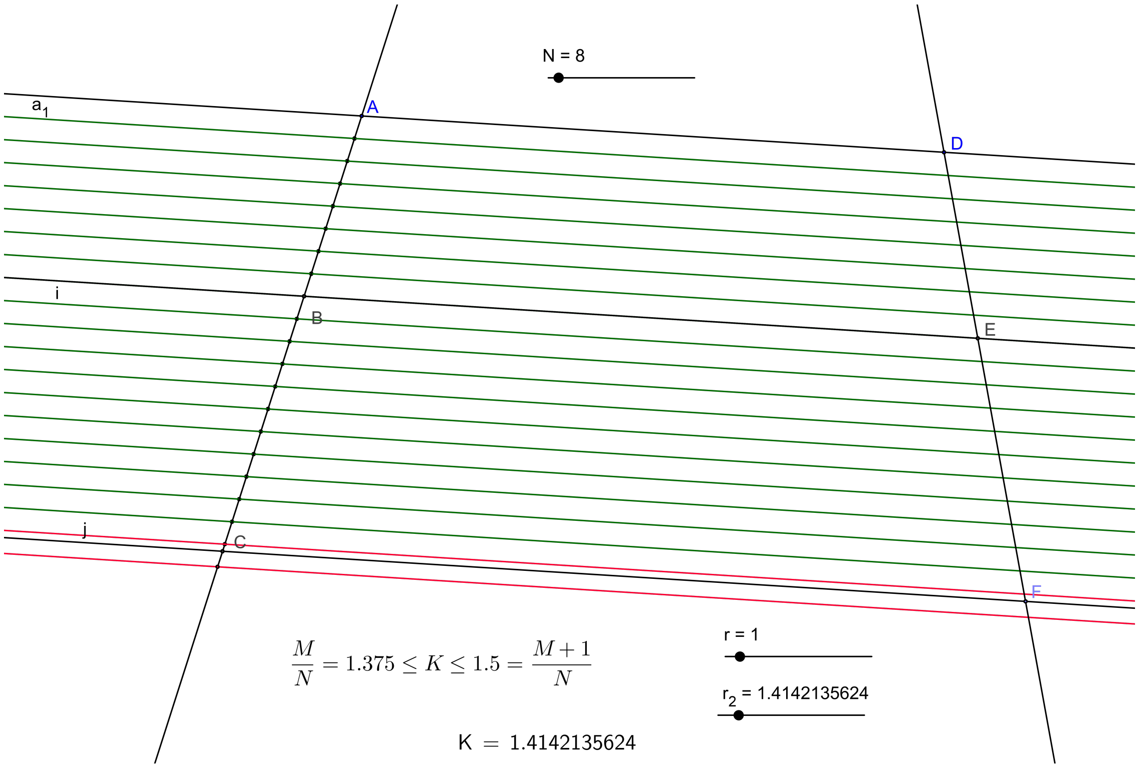

Figura 7.3: Teorema de Tales envolvendo segmentos incomensuráveis.

Fonte: GeoGebra

Pela propriedade Arquimediana (dadas duas magnitudes quaisquer de mesma natureza, a e b, existe sempre um número inteiro n tal que $na > b$) existe um número inteiro n tal que $mu > BC$. Existindo um número com essa propriedade, existirá uma infinidade porque Nu também será maior do que BC, para qualquer $N > n$. Nesse ínterim, pode-se considerar que n é o menor dos números inteiros para os quais $mu > BC$. Assim sendo $(n-1)u$ deverá ser menor do que BC, ou seja, $(n-1)u < BC < nu$. Como $mu = AB$, segue que $\frac{n-1}{m} < \frac{BC}{AB} < \frac{n}{m}$. Em outras palavras, a relação entre os incomensuráveis BC e AB está compreendida entre os racionais $\frac{n-1}{m}$ e $\frac{n}{m}$. Pelas extremidades dos m segmentos em que AB foi dividido, traçando-se paralelas ao feixe, o segmento DE ficará dividido em m partes congruentes com o segmento $w = \frac{1}{m}DE$, ou seja, $DE = mw$. Pelas extremidades dos n segmentos congruentes com u sobre o segmento BC, trace as paralelas ao feixe. Sobre a reta s ficarão determinados n segmentos congruentes a w. Denomine de K_n e K_{n+1} as extremidades dos segmentos, a partir de C, formados, respectivamente, por $(n-1)$ e n segmentos congruentes a u. Sejam K'_n e K'_{n+1} seus correspondentes sobre a reta s.

Observe a situação descrita geometricamente na figura a seguir.

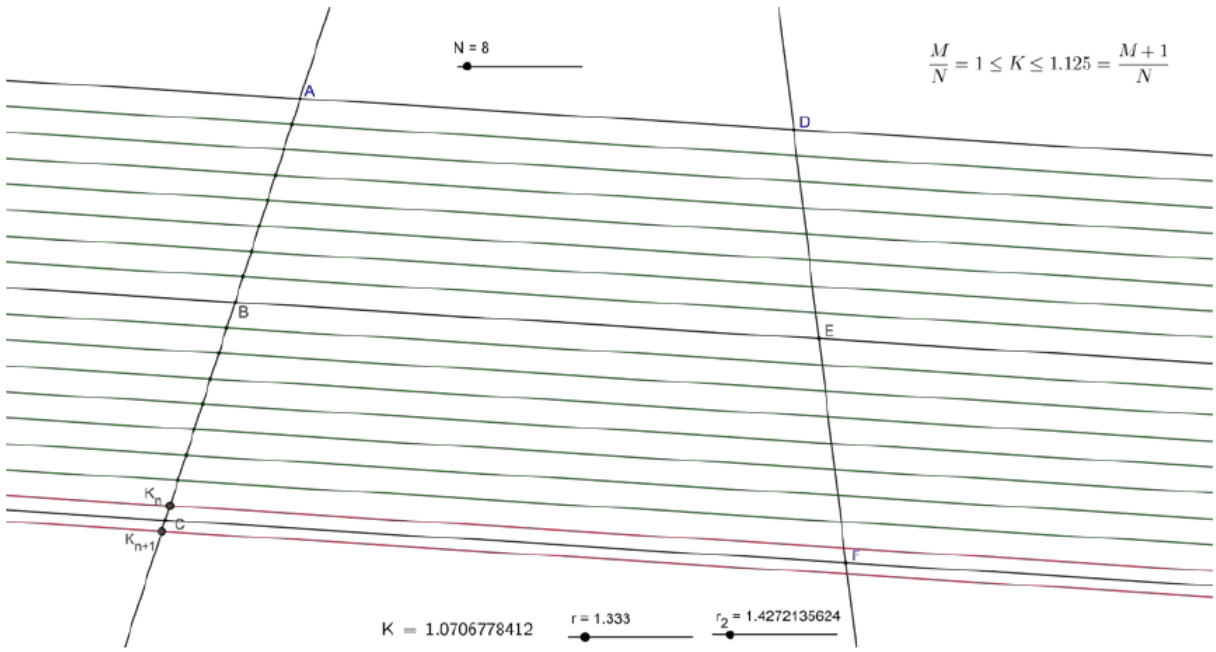

Figura 7.4: Segmentos incomensuráveis (Aproximações por falta e por excesso).

Fonte: GeoGebra

Note, a partir da figura anterior, que C está entre K_n e K_{n+1}. Agora resta mostrar que seu correspondente (F) está entre K'_n e K'_{n+1}. É notório que F não pode coincidir com K'_n ou K'_{n+1}, pois nesses casos DE e EF seriam comensuráveis e por consequência AB e BC também seriam, o que contrariaria a hipótese imposta. O ponto F, correspondente de C, não pode estar entre E e K'_n, pois nesse caso K_n e K'_n estariam em semiplanos opostos em relação à reta $K_nK'_n$ de tal modo que a reta $K_{n+1}K'_{n+1}$ cruzaria a reta $K_nK'_n$, o que é um absurdo, pois ambas são paralelas. Com raciocínio análogo, descarta-se a possibilidade de K'_{n+1} estar entre E e F. Logo, $(n-1)w < EF < nw$. Como $DE = mw$, então $\frac{n-1}{m} < \frac{EF}{DE} < \frac{n}{m}$. O que acabou de ser mostrado, prova que AB e BC, sobre a reta r, são incomensuráveis e a relação entre eles está entre $\frac{n-1}{m}$ e $\frac{n}{m}$, os segmentos DE e EF sobre s também são incomensuráveis e sua relação está entre aqueles dois racionais. Assim, nesse ínterim, denomina-se $\frac{n-1}{m}$ e $\frac{n}{m}$, respectivamente, de aproximações por falta e por excesso das relações $\frac{BC}{AB}$ e $\frac{EF}{DE}$. Note que a diferença entre tais aproximações é $\frac{1}{m}$ e pode ser feita tão pequena quanto se queira. Em outras palavras, $\frac{BC}{AB}$ e $\frac{EF}{DE}$ podem ser espremidas entre dois números racionais tão próximos quanto se queira até chegar ao ápice intuitivo de que tais razões são iguais. Para completar a demonstração é necessário mostrar que tanto o conjunto das aproximações racionais por falta não tem máximo como o conjunto das aproximações racionais por excesso não tem mínimo. Essa demonstração pode ser encontrada com maior riqueza de detalhes em GARBI (2010, p.115) [29].

7.1.3 Demonstração do Teorema de Tales usando áreas

Em geral, o estudo de áreas é posterior ao estudo de congruência e semelhança de triângulos. Embora seja comum nos livros didáticos apresentar o estudo de áreas assim como suas propriedades no final do curso de Geometria, em WAGNER (1992) [31] há antecipação da inserção das noções de áreas.

Uma das vantagens de realizar tal inversão na apresentação dos conteúdos consiste no fato de evitar a análise da comensurabilidade dos segmentos em questão.

A seguir, será exposta a demonstração via áreas.

Sejam B' e C' os pontos dos lados AB e AB', respectivamente, do triângulo ABC, conforme ilustra a figura a seguir.

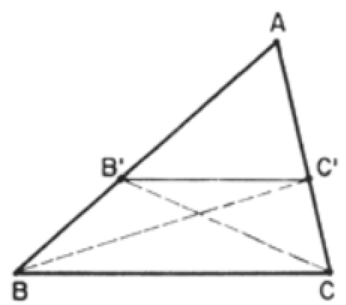

Figura 7.5: Triângulo ABC em que BC e $B'C'$ são lados paralelos.

Fonte: RPM [31], n. 21, p.7.

Analisando a figura anterior, segue que os segmentos BC' e CB' são paralelos, ou seja, $B'C'//BC$, e partir daí, é possível concluir que os triângulos $B'C'B$ e $B'C'C$ têm mesma área, dado que possuem mesma base $(B'C')$ e alturas relativas a essa base também iguais. Acrescentando a esses triângulos o triângulo $AB'C'$, concluímos que os triângulos ABC' e ACB' também possuem a mesma área. Portanto, segue que:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{S(AB'C'}{S(ABC')} = \frac{S(AC'B'}{S(ACB')} = \frac{AC'}{AC}.$$

7.1.4 Cálculo da medida da área de um retângulo

Os livros didáticos da educação básica não apresentam o cálculo da medida da área (S) da região retangular de maneira construtiva, dinâmica e com explicações convincentes de que a superfície retangular é dada pelo produto entre a medida da base (b) e a medida da altura (h). Os autores optam pela abordagem via repasse da fórmula sem o devido cuidado de demonstrar sua validade para todos os números reais, isto é: $S = b \cdot h$.

Para demonstrar a validade da referida fórmula, é necessário utilizar um procedimento análogo ao utilizado na prova completa do Teorema de Tales exibido na atividade anterior, isto é, primeiro é mostrado a validade para números racionais e depois é estendida para números irracionais. É válido ressaltar que o foco dessa atividade é direcionado para destacar a necessidade de implementar noções intuitivas de limite para concluir a fórmula de cálculo da área do retângulo.

Considere um retângulo de lados m e n, números naturais, particionado em $m \cdot n$ quadrados de lado 1, em que $m = 6$ e $n = 5$. Note que o retângulo é composto por $m \cdot n = 6 \cdot 5 = 30$ quadrados.

Em seguida, considere um retângulo de lados $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$, com $(m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N})$. A partir de $n_1 n_2$ cópias desse novo retângulo, monta-se um retângulo maior de lados m_1 e m_2. Adicionando áreas iguais, concluí-se que a área do retângulo dado originalmente é igual a $\frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$.

Finalmente, toma-se um retângulo de lados a e b reais positivos, e, para $k \in \mathbb{N}$, números racionais x_k, y_k, u_k, v_k tais que $x_k < a < y_k$, $u_k < b < v_k$ e $y_k - x_k$, $u_k - v_k < \frac{1}{k}$. Sendo S a área do retângulo de lados a e b, um argumento análogo ao feito para quadrados garante que S e ab pertencem ambos ao intervalo $(u_k x_k, y_k v_k)$ e, daí, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$|A - ab| < v_k y_k - u_k x_k$$
$$\Rightarrow v_k y_k - u_k x_k = (v_k - u_k)y_k + (y_k - x_k)u_k < \frac{1}{k}(y_k + u_k)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{k}(y_k + u_k) = \frac{1}{k}((y_k - x_k) + 2x_k + (v_k - u_k) + 2u_k) < \frac{1}{k}(\frac{2}{k} + 2a + 2b)$$
$$\Rightarrow |A - ab| < \frac{1}{k}(\frac{2}{k} + 2a + 2b).$$

A figura a seguir ilustra o retângulo mn em que $m = 6$ e $n = 5$.

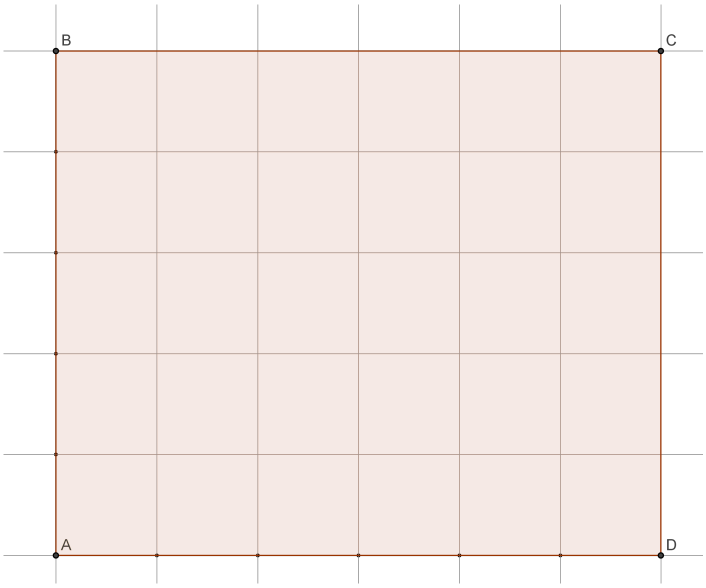

Figura 7.6: Retângulo 6 x 5.

Fonte: GeoGebra

Note que, quanto maior o valor de n, as aproximações por falta $(x_k u_k)$ e por excesso $(v_k y_k)$ indicam intuitivamente que a área do retângulo de lados a e b tenderá para $S = ab$, isto é:

$$x_k u_k < ab < v_k y_k$$
$$\Rightarrow \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{n} < \frac{(k+1)}{n} \cdot \frac{(m+1)}{n}$$
$$\Rightarrow km(\frac{1}{n})^2 < ab < (km + k + m + 1)(\frac{1}{n})^2$$
$$\Rightarrow 0 < ab - km(\frac{1}{n})^2 < (k + m + 1)(\frac{1}{n})^2.$$

Quanto maior o valor de n (n tendendo ao infinito), melhor será a aproximação da área (correspondente à soma de todos os retângulos de medidas $\frac{k}{n}$ e $\frac{m}{n}$) da pretendida do retângulo dada por $S = ab$.

A figura a seguir representa um retângulo 100 e 80, em que a base e a altura, respectivamente, foram subdivididas em $100(na)$ e $80(nb)$ partes com a mesma unidade de comprimento.

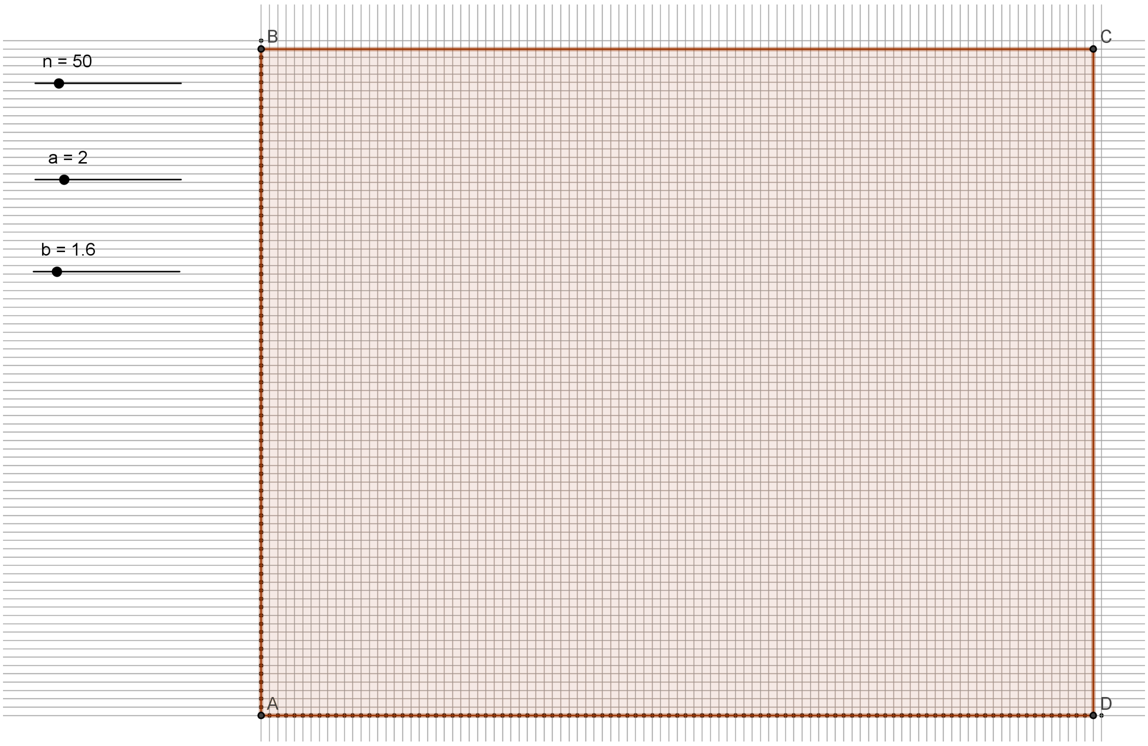

Figura 7.7: Retângulo 100 x 80.

Fonte: GeoGebra

7.2 NOÇÕES DE LIMITE EM PARALELO AO ESTUDO DE FUNÇÕES

Inicialmente, sugere-se a apresentação de algumas situações problema que abordam de forma embutida as noções intuitivas de limite de forma prática. Inclusive o presente trabalho possui a preocupação em mostrar aos alunos a simbologia moderna utilizada em detrimento das expressões e locuções de tendência. Observe:

- a) Se o câmbio do dólar americano tende a estabilizar em torno de R$ 2,33, então o valor pago por 100 dólares estabiliza em torno de R$ 233,00. Logo, podemos falar que o limite (valor pago por 100 dólares) é igual a R$ 233,00, quando o valor pago por 1 dólar tende a R$ 2,33 . Pode-se representar tal situação por: $\lim_{x\to 100} 2,33x = 233$.

- b) Imagine uma placa metálica quadrada que se expande uniformemente por estar sendo aquecida. Se x representa o comprimento do lado, a área da placa é dada por $A(x) = x^2$. Evidentemente, quando x se aproxima de 5, a área da placa A se aproxima de 25. Essa situação pode ser expressa simbolicamente por $\lim_{x\to 5} x^2 = 25$.

- c) Suponha agora que você esteja dirigindo um automóvel. Se o acelerador for pressionado para baixo em torno de 4 cm, então a velocidade se manterá próxima aos 120 Km/h. Logo, podemos dizer que o limite (velocidade instantânea do automóvel) é igual a 120 Km/h, quando o acelerador tender a 4 cm para baixo. Matematicamente escrevemos tal situação por $\lim_{x\to 4} v(x) = 120$, onde $v(x)$ é a velocidade instantânea do automóvel e x é a medida em centímetros do deslocamento do pedal do acelerador.

- d) Outra aplicação interessante do limite de uma função é o cálculo da velocidade instantânea de um corpo em queda livre sob a ação da gravidade, dentre outras inúmeras aplicações interdisciplinares disponíveis.

Após apresentar um panorama de aplicações simples, faz-se necessário propor o repasse das noções intuitivas de limite utilizando o estudo de funções. De acordo com a estratégia disseminada pelos livros didáticos uma das melhores formas de expor as ideias de limite via funções consiste em observar o comportamento de uma função dada nas proximidades de um ponto, em sua vizinhança.

Vejamos um exemplo prático: Exemplo Observe o estudo analítico do comportamento de uma função f na vizinhança de um ponto. Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2.$$

Estudando o comportamento da referida função nas proximidades do ponto $x = 2$, dado que o mesmo não pertence ao domínio da função dada, verifica-se que quando aproximamos os valores de x da abscissa $x = 2$, há uma aproximação abrupta para a imagem $y = f(x) = 4$, mesmo que se tome valores à esquerda $(x < 2)$ ou a direita

$(x > 2)$ da abscissa $x = 2$. Tal constatação, sob o ponto de vista numérico, pode ser interpretada a seguir via dados tabelados:

Tabela 7.1: Aproximação do valor numérico da função $f(x) = x + 2$ para $x = 2$.

Aproximação pela esquerda $(x < 2)$									Aproximação pela direita $(x > 2)$								
x	0	0.5	1	1.5	1.7	1.99	1.999	2	x	4	3.5	3	2.5	2.3	2.01	2.001	2
$f(x)$	2	2.5	3	3.5	3.7	3.99	3.999	4	$f(x)$	6	5.5	5	4.5	4.3	4.01	4.001	4

Nesse momento é possível discutir com os alunos a noção intuitiva de limite. Note que, tomando valores na vizinhança de $x = 2$, o valor da função permanece nas proximidades de $y = f(x) = 4$. Inserindo a linguagem moderna, precisa e concisa, pode-se dizer que ao fazer com que os valores de x tendam para a abscissa $x = 2$ $(x \to 2)$, os valores das imagens tenderão para a imagem $y = f(x) = 4$ $(y \to 4)$, a qual será denominada de limite e representada por: $L = \lim_{x\to 2} f(x) = 4$. Note que, esse limite representa o valor da função para $x = 2$, porém esse valor de x não pertence ao domínio da função dada. Tal episódio serve de base para explicar que o conceito de limite independe de a função estar definida naquele ponto específico e mais, serve para representar que o limite de uma dada função pode não ser o valor da imagem do ponto em que estamos investigando em sua vizinhança.

Embora tal explicação seja aceitável, é bom ser cauteloso ao explicar a situação. Caso ainda haja dúvida, recomenda-se a construção do gráfico da referida função via GeoGebra. Nesse software ao inserir no campo entrada as coordenadas do ponto $F = (2, f(2))$ o programa indicará na janela de Álgebra a informação de que tal ponto é indefinido e quando inserirmos $G = (1.999, f(1.999))$, o GeoGebra indicará um ponto praticamente sobre o ponto $(2, 4)$, o qual é o ponto indefinido cuja imagem representará o limite da função. Oportunidade riquíssima para mencionar a relação importância/dependência/limitação de um software no estudo de Matemática.

Para melhor compreensão, observe a imagem capturada da tela do GeoGebra. É interessante mencionar que esse fenômeno pode ser generalizado, de maneira informal, para qualquer função $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de $x = a$ exceto talvez em $x = a$. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L, para todos os valores de x suficientemente próximos de a, dizemos que f tem limite L quando x tende para a e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Nesse ínterim, é válido ressaltar que o conceito formal utilizando épsilon e delta será visto em um curso específico de Cálculo I. E mais, há disponível diversos sites na internet com variados applets (programas desenvolvido via GeoGebra) com atividades que explicam tópicos do estudo de Cálculo, por exemplo, em BIZELLI (2014) [33] responsável pelo site do Instituto de Química da Universidade Estadual de São Paulo (UNESP) em que disponibiliza applets que orientam diversos assuntos, dentre os quais destacamos o estudo da ideia de limite de uma função que corresponde a uma contribuição construtiva para o conhecimento de forma lúdica, concreta e com possibilidades de inúmeras iterações.

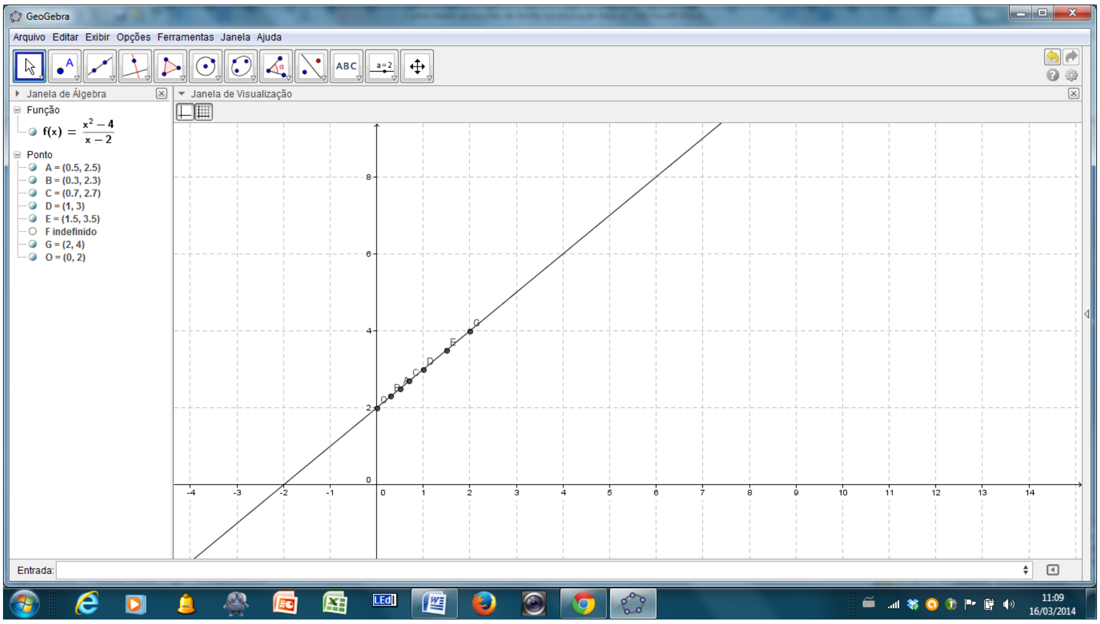

Figura 7.8: Representação gráfica da função f(x) = x + 2 para aproximações à direita.
Fonte: Imagem capturada de uma janela do GeoGebra.

7.2.1 Estudo do comportamento gráfico de algumas funções

Ao estudar a construção dos gráficos das principais funções estudadas durante o ensino médio, diversos questionamentos são levantados por alunos. A principal pergunta dos alunos consiste em como obter garantias suficientes e esclarecedoras sobre o comportamento das curvas (Quando crescem ou decrescem? Quando os eixos ou determinas retas são consideradas assíntotas das curvas em questão? Selecionando um intervalo qualquer presente no 1º quadrante, por exemplo, o que significa e como se calcula a área sob o gráfico dessa função?). Alguns desses e outros questionamentos são frequentes em sala de aula e serviram de base para a discussão que será feita a partir desse momento.

Ao representar o gráfico de uma função do 1º grau, do 2º grau, Exponencial ou Logarítmica, geralmente representa-se apenas uma parte da função a partir de valores discretos para as abscissas. Em seguida, traçamos o gráfico de maneira natural de acordo com a amostragem construída, por exemplo, via tabela que relaciona o par $(x, f(x))$. São raros os professores que abrem a discussão em torno de valores contínuos para a variável x. Uma estratégia boa para garantir aos alunos que o crescimento/concavidade da referida não se altera para algum valor de x e que em alguns casos o crescimento tende para o infinito seria utilizar as ferramentas do Cálculo, mas tais ferramentas não estão disponíveis no Ensino Médio. Daí a necessidade de fornecer um suporte específico de noções elementares do Cálculo para justificar/demonstrar algumas propriedades que são simplesmente comentadas sem a prova de que são válidas independentemente do valor do domínio ser discreto ou contínuo, isto é, a validade é para todo o domínio real de definição da função, um prelúdio ao conceito de continuidade de função.

As questões referentes à tendência de crescimento para o infinito ou à aproximação a uma reta assíntota são explicadas via noções de limites. Negligenciar tal discussão, como é praxe na educação básica, contribui vertiginosamente para a desmotivação dos alunos e como consequência reduz o rendimento das escolas de educação básica e superior.

Por exemplo, suponha hipoteticamente que um dado aluno do Ensino Médio faça dois questionamentos acerca do gráfico da função logarítmica: "Por que a função logarítmica é crescente?"e "O que garante que quando os valores de x tendem para o infinito positivo, os valores das imagens $(f(x))$ tendem também para o infinito positivo?". É notório que inúmeros professores do Ensino Médio teriam dificuldade em explicar com transparência e argumentos válidos tais perguntas. Com o intuito de ajudar colegas que apresentem insegurança, dificuldade e alguma outra adversidade na arte de lecionar esse conteúdo particular proposto, observe a maneira escolhida para justificá-las. Note que para explicá-las faz-se necessário formalizá-las segundo proposições (teoremas) e em seguida demonstrá-las. Além disso, verifique que a segunda proposição torna-se suficiente a partir da prova de monotonicidade da primeira.

Proposição 7.2.1. *A função logarítmica de base 10 (logaritmos decimais) é crescente, isto é, se* $0 < x < y$, *então* $\log\ x < \log\ y$.

Demonstração. Sejam x e y dois números positivos com $x < y$, ou seja, existe um número

$m > 1$ tal que $y = mx$. Daí, temos: $\log\ y = \log\ (mx) = \log\ m + \log\ y$. Como $m > 1$, segue que $\log\ m > 0$. Conclusão, $\log\ y > \log\ x$, como queríamos demonstrar. □

Proposição 7.2.2. *Quando x tende para $+\infty$, $\log\ x$ tende para $+\infty$. Isto é, quando tomamos valores positivos cada vez maiores para x, o logaritmo decimal cresce e pode torna-se maior do que qualquer número positivo prefixado.*

Demonstração. Dado qualquer número real $J > 0$, pode-se obter $K > 0$ tal que, para todo x $>$ K, se tem $\log x > J$. Assim dado $J > 0$, escolhemos primeiro um número inteiro positivo M tal que $M > \frac{J}{\log\ 2}$. Então $\log\ (2^M) = M \log\ 2 > J$. Tome agora $K = 2^M$. Note que qualquer que seja $x > K$, como a função logaritmo de base 10 é crescente, tem-se que $\log\ x > \log\ K > J$. Isso prova que todos os números reais $x > K$ possuem logaritmos decimais maiores do que J. Utilizando uma linguagem moderna e avançada, concluímos que $\lim_{x \to +\infty} \log\ x = +\infty$. □

É válido ressaltar que a maioria dos livros analisados não demonstra tais proposições, apenas faz citações como propriedades válidas. Somente o livro do IEZZI (2010) [15] e o do LIMA (2006) [17] fazem menção de maneira deficiente, injustificada e diferente da apresentada. Note que a escolha da função logarítmica foi com a finalidade de escapar da comodidade de trabalhar com funções simples (1º e 2º grau) e para mostrar um questionamento que pode ser útil em sala de aula. Foi feita apenas uma apresentação simples de demonstração de uma propriedade muito utilizada no estudo de Logaritmos, mas é claro que há outras pertinentes e que exigem um olhar diferenciado do professor regente. Também é bom salientar a necessidade de empregar noções intuitivas de limite para completar e ratificar o raciocínio.

Agora suponha que um aluno faça um questionamento interdisciplinar, ou seja, vamos admitir que um dado aluno tenha recebido a informação numa aula de Física de que a área sob o gráfico de uma função representa o espaço percorrido por um móvel ou o trabalho de uma força, por exemplo. Diante dessa situação, o aluno lhe peça esclarecimentos sobre tal informação. Como explicar essa situação utilizando somente matemática elementar faltaria argumentos, faz-se necessário inserir noções elementares do Cálculo para justificar e esclarecer os fatos para o dado aluno.

Por exemplo, considere uma parábola definida por $y = x^2$, em que y represente a velocidade e x o tempo percorrido por um móvel num dado instante. Caso o interesse esteja voltado para o cálculo do espaço percorrido pelo móvel no primeiro intervalo (unidade) de tempo, é preciso calcular a área da faixa de parábola ($A(x^2)_a^b$) compreendida entre as retas verticais $x = 0$ e $x = 1$. Como as ferramentas de Cálculo não estão disponíveis e também não possuímos uma fórmula específica para efetuar o cálculo, a resolução do referido problema deve empregar um raciocínio que evocará noções intuitivas do cálculo. Para realizar e estimar o cálculo da área em questão, é necessário decompor a região $[0, 1]$ sob a curva em $(n+1)$ intervalos justapostos de mesmo comprimento e calcular uma aproximação inferior para a faixa $A(x^2)_1^0$ através da área do polígono retangular P_{n+1} inscrito na faixa da parábola $y = x^2$. Vide figura a seguir que exemplifica a aproximação inferior da área de uma faixa de parábola por intermédio da área do polígono retangular P_6com 6 intervalos justapostos de mesmo comprimento ($n = 5$).

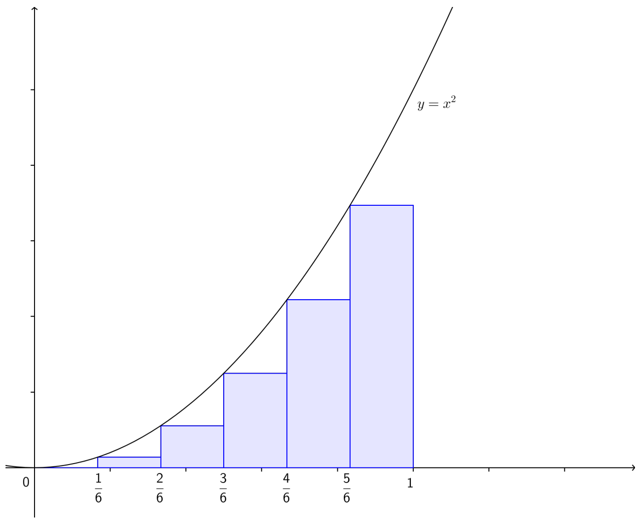

Figura 7.9: Aproximação para a área da faixa de parábola com $n = 5$.

Fonte: GeoGebra.

A área (S) do polígono retangular P_{n+1} inscrito na faixa da parábola $y = x^2$ será dada pela soma das áreas de todos os retângulos contidos na região sob a parábola, isto é:

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{(n+1)} f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)} f\left(\frac{2}{(n+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)} f\left(\frac{3}{(n+1)}\right) + \cdots + \frac{1}{(n+1)} f\left(\frac{n}{(n+1)}\right).$$

Substituindo os valores da função em cada partição considerada e utilizando a fatoração por evidência, tem-se:

$$S = \frac{1}{(n+1)^3}(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2)$$
$$\Rightarrow S = \frac{1}{(n+1)^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right).$$

Segue daí a conclusão de que tomando valores cada vez maiores para n, isto é, aumentando o número de subintervalos, aumentamos o número de retângulos e consequentemente a diferença entre a área (S) do polígono retangular e a área da faixa de parábola aproxima-se de zero. É óbvio que quando n tende para o infinito ($n \to \infty$) a área S tende para a área da faixa de parábola, ou seja, $S \cong A(x^2)_1^0 = \frac{1}{3}$. Em linguagem moderna e avançada, temos:

$$\lim_{s\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)\right] = \frac{1}{3}.$$

A construção da atividade acima deve ser realizada de maneira gradual, ou seja, solicitando aos alunos que calculem a área do polígono retangular a partir de subcasos supondo valores para n, por exemplo, $n = 5$ e depois para $n = 10$. Essa atividade pode ser realizada com auxílio de calculadora científica ou então via planilha eletrônica (do Excel ou CALC ou até do GeoGebra). Após resolver os problemas para os casos particulares (encontrar a área por falta), sugira aos alunos para que tentem generalizar o método até conseguir encontrar a área do triângulo parabólico de base $[0, 1]$. Essa área foi encontrada experimentalmente por Arquimedes através de O método de equilíbrio e demonstrado via método da exaustão com argumentos de dupla *reductio ad absurdum*. Com o método de equilíbrio, Arquimedes verificava e testava a validade da propriedade. Já com o método da exaustão, que historicamente é creditado a Eudoxos, porém, segundo EVES (2004) [11], já havia antecipação de tais ideias nos trabalhos do sofista Antífon (c. 430 a.C.), o mestre de Siracusa demonstrava a validade da proposição, formando um verdadeiro prelúdio às escuras das noções elementares do Cálculo, em particular a ideia intuitiva de limite.

Veja a construção do gráfico, via GeoGebra, da área do polígono retangular para cinco, cinquenta e cem intervalos de mesmo comprimento.

É notório que, fazendo n tender para o infinito a faixa escura crescerá e tenderá para a área do triângulo parabólico de base $[0, 1]$ cuja área corresponde a um terço da área do quadrado de mesma base. E mais, pode-se concluir que a área de metade do segmento parabólico (região limitada pela reta secante pontilhada e pela parábola) contido

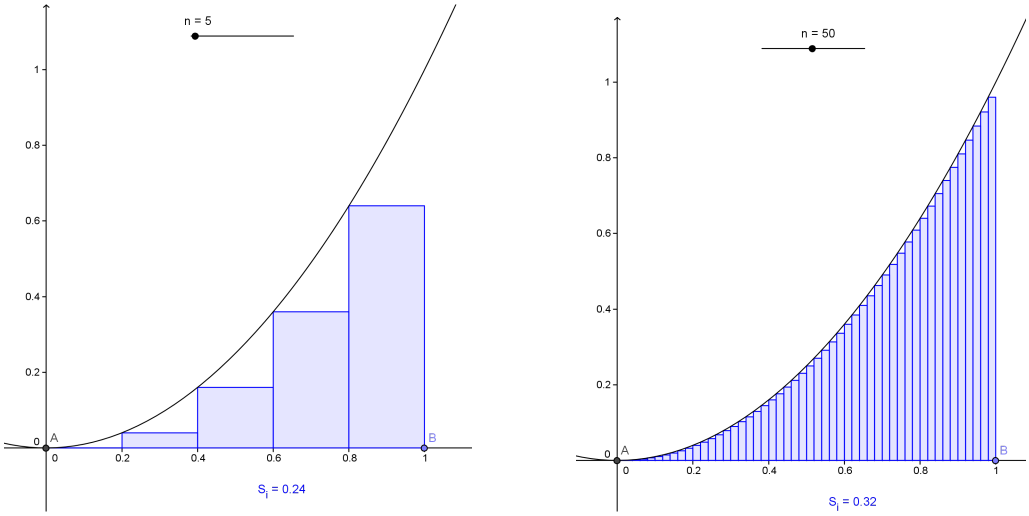

Figura 7.10: Polígono Retangular para $n = 5$ e $n = 50$.

Fonte: Geogebra.

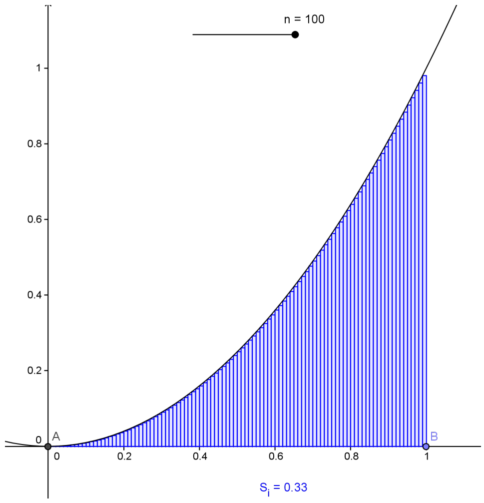

Figura 7.11: Polígono Retangular para $n = 100$.

Fonte: Geogebra.

no quadrado de lado unitário mede $\frac{2}{3}$, ou melhor, é possível concluir que a área do segmento parabólico da parábola em questão mede $\frac{4}{3}$. Esse procedimento consiste na quadratura da parábola cuja autoria de forma rudimentar, isto é, com as ferramentas disponíveis para a época, é creditada a Arquimedes via Método de Equilíbrio e Método da Exaustão.

Também é necessário dizer que o problema de calcular á área referida acima poderia ser solucionado decompondo o intervalo $[0, 1]$ em subintervalos contendo trapézios circunscritos de forma que a área do polígono trapezoidal circunscrito à faixa de parábola fosse uma aproximação por excesso. Possivelmente os alunos vão reclamar muito das contas que aparecerão, pois os cálculos não são tão simples assim como a técnica propriamente dita. Mas segundo MACHADO (2008) [19] esse aspecto é favorável, pois preparará o aluno para que venha a apreciar as facilidades que serão depois apresentadas, em um curso de Cálculo. Inclusive é possível mencionar a existência de um teorema importantíssimo que cita a existência um ponto entre as áreas por aproximações por falta e por excesso que as tornam iguais. Esse teorema é conhecido como Teorema do Valor Médio.

Outra atividade excelente de aplicação das noções intuitivas de limite e ideias correlatas do Cálculo é o cálculo da chamada Área de uma faixa de Hipérbole. Antes de defini-la é preciso pré-estabelecer um sistema de coordenadas cartesianas em que H será considerado algebricamente como o ramo positivo do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, isto é, $H = \{(x, y); x > 0, y = \frac{1}{x}\}$ ou geometricamente, ramo da Hipérbole Equilátera ($xy = 1$) contido no primeiro quadrante. A partir dessas considerações, é possível definir a faixa de hipérbole e de forma específica como consequência imediata propor uma ligação com o estudo de logaritmos naturais. Esse trabalho pode ser conferido na íntegra em LIMA (1980) [16] em que o autor com maestria faz uma abordagem geométrica do estudo dos logaritmos e suas consequências (construção da tabela de logaritmos, cálculo de raízes inexatas de índice qualquer, cálculo de potências de base e expoente qualquer, construção do número de Euler e sua ligação com o logaritmo natural e finalmente propor o estudo da Função Exponencial).

Nesse ínterim, é possível propor uma atividade de aplicação interdisciplinar sobre a relação existente entre o crescimento exponencial e o decaimento (desintegração) radioativo. Esse problema é comum nos livros de Ensino Médio. Observe a situação problema descrita a seguir em que é apresentada uma maneira construtiva de explorar/utilizar as noções elementares de Cálculo.

Situação Problema A Desintegração Radioativa consiste na emissão espontânea de raios (partículas e ondas) de núcleo instável com o objetivo de adquirir estabilidade em que um átomo radioativo (por exemplo, o Rádio e o Urânio) é transformado num elemento químico diferente. Essa transformação faz com que a quantidade de substância original diminua a cada instante de forma que a desintegração seja proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele momento. A constante (α) de proporcionalidade é específica para cada substância e é determinada experimentalmente.

Suponha hipoteticamente que um corpo de massa M_0 seja formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração seja α. Caso o processo de desintegração seja instantaneamente a cada segundo, tem-se que, para $t = 0$, a massa correspondente é M_0. Decorrido o tempo $t = 1$ segundo, ocorrerá uma perda de αM_0 unidade de massa, restando somente a massa $M_1 = M_0 - \alpha M_0 = (1-\alpha)M_0$. Para $t = 2$ segundos, implica que a massa restante será dada por $M_2 = (1-\alpha)M_1 = (1-\alpha)^2 M_0$. Esse processo pode ser generalizado, isto é, após n segundos, temos: $M_n = M_0(1-\alpha)^n$. Porém, a desintegração se processa de forma contínua e não apenas discreta. Daí é necessário pensar que a desintegração seja feita em frações de intervalos de $\frac{1}{n}$ de segundo. Assim, após a primeira fração de $\frac{1}{n}$ de segundo, a massa do corpo se reduziria para $M_0 - \frac{\alpha}{n}M_0 = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) M_0$. Realizando uma subdivisão do intervalo $[0,1]$ em um número n cada vez maior de partições iguais, tem-se que a massa resultante se reduziria para a aproximação $\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n M_0$. Logo, quando n tender para o infinito, a expressão $\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n M_0$ tenderá para $M_0 e^{-\alpha}$. Em linguagem moderna e avançada, tem-se: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right)^n M_0 = M_0 \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right)^n = M_0 e^{-\alpha}$. Caso se queira calcular a massa após t segundos, é preciso dividir o intervalo $[0,t]$ em n partes iguais em que cada intervalo parcial receberá uma perda de massa de $\frac{\alpha t}{n}M_0$. Repetindo esse processo, encontra-se a expressão que fornece a massa do corpo após t segundo decorridos: $M(t) = M_0 e^{-\alpha}$. A título de curiosidade, vale a pena ressaltar que a constante α é determinada a partir de um número básico denominado de meia-vida da substância (tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo).

7.3 EXPLORANDO AS DÍZIMAS PERIÓDICAS E SUAS IMPLICAÇÕES

Comumente ao estudar conjuntos numéricos, em particular ao estudar o conjunto dos números racionais, nos deparamos com números decimais infinitos, porém periódicos, os quais são denominados de dízimas periódicas. Dentre as dízimas periódicas mais célebres com absoluta certeza está o número decimal periódico $0,999...$. Esse número gera bastante desconforto entre os alunos do Ensino Médio, principalmente quando o professor de Matemática afirma que $1 = 0,999...$. Afinal de contas, o que é uma dízima periódica e o que representa? Esses questionamentos são frequentes e recorrentes durante as aulas de Matemática que requerem a utilização das dízimas periódicas.

Conforme já foi definido, denominamos de dízima periódica todo número racional com representação decimal infinita e periódica. Há dízimas periódicas simples e compostas. Nesse trabalho apenas far-se-á uma análise da formação das dízimas periódicas simples (por exemplo: $0,111...$; $0,353535...$; $0,456456456...$;etc.).

As dízimas periódicas, em geral, representam uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica com razão entre 0 e 1. Assim, por exemplo, a dízima periódica $0,111...$ é equivalente a soma $S = 0,1 + 0,01 + 0,001 + ...$ cujo primeiro termo coincide a razão numericamente igual a $0,1$.

Muitos problemas de matemática elementar exigem que o aluno de Ensino Médio determine a fração geratriz correspondente a uma dada dízima periódica. Para realizar tal feito, os professores utilizam diversos recursos e artimanhas dentre as quais é possível citar: o método em que há o repasse de uma fórmula com bastante decoreba e pouca compreensão, o método que requer a utilização de artifício via equação do 1º grau e o método de considerar a dízima como uma soma de termos de uma progressão geométrica infinita de razão (q) variando entre 0 e 1. A exposição seguinte apenas expõe o método de obtenção da dízima via comparação como uma soma de termos de progressão geométrica infinita.

Para dar continuidade a exibição, é necessário estudar como é feita a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica finita. Assim, dada uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$, define-se a soma (S) dos termos dessa progressão geométrica da seguinte maneira:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} \text{ (1)}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1) pela razão q, tem-se:

$$qS = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_n = qa_1 + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \cdots + a_1q^n \text{ (2)}.$$

Subtraindo (1) de (2) membro a membro, tem-se:

$$qS - S = a_1q^n - a_1 = a_1(q^n - 1) \Rightarrow S(q-1) = a_1(q^n - 1) \Rightarrow S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Assim, a soma (S) dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão (q) é dada em função do primeiro termo, da razão e do número de termos.

Quando se dispõe de uma dízima periódica, ou melhor, de uma soma de termos de progressão geometria infinita cuja razão pertence ao intervalo $(0, 1)$, percebemos que o termo q^n se aproxima de zero a medida que n tende ao infinito. Em outra linguagem, o limite da soma (S) quando n tende ao infinito é dado por:

$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}\right] = \frac{a_1\cdot(-1)}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Como exemplo, observe o cálculo da fração geratriz da dízima periódica $0,999\cdots$.

Note que: $0,999\cdots$ equivale a soma $S = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots$.

Essa soma representa o somatório dos termos de uma progressão geométrica infinita cuja razão é dada por $q = 0,1$. Substituindo $a_1 = 0,9$ e $q = 0,1$, tem-se:

$$S = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{0,9\left[\left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right]}{0,1-1}\right] = \frac{0,9\cdot(-1)}{0,1-1} = \frac{-0,9}{-0,9} = 1.$$

Isto é, o limite do somatório dos termos da progressão geométrica infinita em questão é igual a um quando tomamos n tendendo para o infinito.

Há uma série de problemas que utilizam de tais recursos, dentre os quais se destacam: a formação de determinados mosaicos, o processo de divisão celular via meiose, o processo decaimento radioativo, etc..

O estudo do somatório de uma quantidade infinita resultar numa quantidade finita aparece historicamente no paradoxo de Zenon (por volta do século V a.C.) que surpreendentemente promove uma corrida, em forma de aposta, entre um famoso guerreiro (Aquiles) da Grécia antiga e uma tartaruga. Nessa corrida, Aquiles, conhecedor de sua superioridade, oferece uma vantagem para tartaruga, porém Aquiles nunca alcança a tartaruga, pois por mais devagar que ela caminhe, quando ele chegar à posição inicial da tartaruga, a mesma terá avançado um pouco. E quando Aquiles cobrir esta distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais e assim sucessivamente. Embora os gregos soubessem que do ponto de vista prático Aquiles seria o vencedor, não sabiam explicar tal fato do ponto de vista matemático. É válido ressaltar que tal ausência de clareza, por parte dos matemáticos gregos, era justificada pela ausência do conhecimento das noções intuitivas de limite. Note que o limite da diferença entre as distâncias entre os dois corredores tende para zero.

Além de Zenon, outro matemático grego percebeu e calculou com bastante habilidade a soma dos termos de uma progressão geométrica com infinitos termos cuja razão estava compreendida entre 0 e 1. Nessa época, o mestre de Siracusa (Arquimedes) estava estudando e analisando quadraturas. Para isso, ele utilizava dois métodos antigos de muito prestígio: O método de Equilíbrio de autoria do próprio Arquimedes e o método da Exaustão credita a Eudoxos. Numa de suas pesquisas em busca da quadratura de um segmento parabólico, Arquimedes conseguiu demonstrar experimentalmente, via método de Equilíbrio, que a área do segmento de parábola correspondia a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo inscrito no segmento parabólico. Essa demonstração ismiuçada em CONTADOR (2012) [6]. Arquimedes utilizou o conhecimento dessa proposição para realizar a quadratura da parábola. Nesse trabalho, foi encontrada pela primeira vez a soma de uma série infinita.

Acompanhe duas aplicações do estudo de somas de progressões geométricas infinitas cuja razão (q) seja dada por $|q| < 1$ e q não nulo:

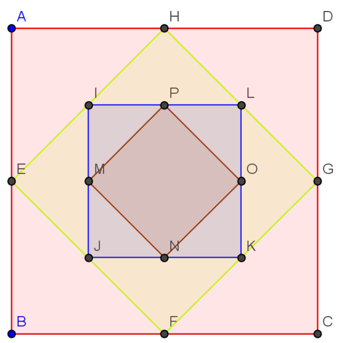

Figura 7.12: Processo recursivo de Quadrados.

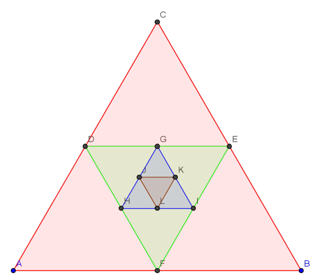

Figura 7.13: Processo recursivo de Triângulos Equiláteros.

Note que as figuras acima determinam o comportamento das áreas e dos perímetros dos novos quadrados e dos novos triângulos equiláteros formados a partir dos pontos médios dos lados da figura anterior. Para isso, considere o quadrado inicial de lado l e o triângulo equilátero inicial de lado 2α.

Note que as sequências das áreas dos quadrados e dos triângulos equiláteros, a partir do primeiro quadrado e do primeiro triângulo equilátero, são dadas, respectivamente, por: $\left(l^2, \frac{l^2}{2}, \frac{l^2}{4}, \frac{l^2}{8}, \cdots\right)$ e $\left(a^2\sqrt{3}, \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \frac{a^2\sqrt{3}}{8}, \cdots\right)$.

Por conseguinte, a soma (S_Q) das áreas dos infinitos quadrados, formados a partir do quadrado primitivo de lado l, representa uma soma de termos de uma progressão geométrica infinita de razão $q = \frac{1}{2}$ a qual será dada por: $S_Q = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{l^2}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{l^2}{2}}{\frac{1}{2}} = l^2$. Isto é, a soma ($S_Q$) coincide com a área do quadrado primitivo de lado l. Já a soma (S_{TE}) das áreas dos triângulos equiláteros, formados a partir do triângulo equilátero de lado $2a$, também representa uma soma de termos de uma progressão geométrica infinita de razão

$q = \frac{1}{4}$, a qual será dada por: $S_{TE} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a^2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}a^2\sqrt{3}$. Isto é, a soma (S_{TE}) equivale a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo equilátero primitivo de lado $2a$.

7.3.1 Relação entre grandezas incomensuráveis e o conceito de limite

A origem dessa discussão iniciou-se na Grécia com a crise na Escola Pitagórica diante da descoberta de grandezas incomensuráveis, isto é, após provarem que é impossível existir um submúltiplo comum (α) entre o lado (L) e a diagonal (D) de quadrado de lado unitário tal que $L = m\alpha$ e $D = n\alpha$.

Nesse ínterim, surgiu o questionamento da existência de uma unidade comum infinitamente pequena (um submúltiplo) de forma que ela pudesse medir o lado e a diagonal do quadrado. Caso tal existência se confirmasse, seria lógica a discussão realizada por volta do século V a.C. pelo matemático grego Zenon, que questionava o fato de que uma soma infinita pudesse ser finita, ou ainda, utilizando a linguagem moderna, se seria possível fazer com que o limite da diferença entre as distâncias percorridas por Aquiles e a tartaruga tendesse a zero. Segundo os anais da História da Matemática, o paradoxo de Zenon e suas consequências assim como a descoberta das grandezas incomensuráveis são relatos pioneiros e rudimentares da presença/intervenção do conceito de limite num problema matemático.

Atualmente é possível concluir que se o segmento AB é incomensurável com o segmento unitário α então a medida de AB é um número irracional. E como exemplo célebre de número irracional, pode-se citar a medida da razão áurea (o famoso número de ouro: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) e a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário cuja medida corresponde ao número irracional $\sqrt{2}$. Os exemplos escolhidos são excelentes, didáticos e históricos. Inclusive em GALARDA et al (1999) [13] há uma discussão aberta sobre qual número irracional apareceu primeiro, não se sabe se foi $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$ que primeiro revelou a existência de grandezas incomensuráveis.

Mesmo sabendo que não é possível determinar com exatidão o valor de $\sqrt{2}$, é possível relacionar aproximações por falta e por excesso de números racionais construindo uma sequência infinita de números racionais tais que seus quadrados sejam todos menores do que 2.

Observe a tabela a seguir em que a primeira coluna representa uma sequência infinita de números racionais, a segunda coluna representa seus quadrados e a terceira coluna representa a diferença entre quadrado da diagonal e cada termo quadrático na série gerada. Note que, tomando aproximações com um número reduzido de casas decimais foi possível construir uma sequência de quadrados em que, com apenas seis iterações, tornou-se mínima a diferença entre os valores quadráticos da série formada e o número 2. Assim pode-se tornar a diferença tão pequena quanto se queira aumentando o número de iterações. Quando o número de iterações tende ao infinito, de fato tem-se que a diferença tenderá a zero e consequentemente obtém-se o valor $\sqrt{2}$.

Tabela 7.2: Cálculo aproximado do valor $\sqrt{2}$ com até 5 casas decimais.

Número (x_i) da Sequência	Quadrado de x_i	$2 - x_i^2$
1	1	1
1.4	1.96	0.04
1.41	1.9881	0.0119
1.414	1.999396	0.000604
1.4142	1.999962	0.0000383600000000237100000000000
1.41421	1.99999	0.0000100759000000128300000000000

Além de ser uma atividade rica de utilização da calculadora em sala de aula, é uma excelente oportunidade de expor de maneira compreensiva a influência de que a noção de limite está associada à ideia de incomensurabilidade.

É válido ressaltar que um procedimento análogo pode ser aplicado para cálculo do número π por meio da divisão do perímetro do polígono regular inscrito pela maior diagonal desse polígono. Quanto maior o número de lados desse polígono inscrito, mais próximo do comprimento da circunferência estará seu perímetro e consequentemente promoverá uma melhor aproximação para o valor do número π.

7.3.2 Utilização do número de Euler na Capitalização Contínua

Embora sugira um aspecto bastante abstrato, o número de Euler (e) está presente em diversos processos de crescimento ou decrescimento exponencial, dentre os quais possui destaque o problema de aplicação de um capital a uma taxa anual de $k\%$ com juros compostos capitalizados de forma contínua durante t anos.

Suponha, hipoteticamente, que um determinado capital C_0 seja aplicado a juros de 100% ao ano.

Caso sejam incorporados ao capital somente no final do ano, então ao final de um ano teríamos o montante de R$ 2,00 para cada R$1,00 investido, isto é, o capital final acumulado após um ano é dado por:

$$C_1 = C_0 + 100\% C_0 = C_0 + 1C_0 = 2C_0.$$

Agora, a forma de incorporação dos juros será alterada, porém mantendo a taxa anual de 100%.

Suponha que a referida taxa seja decomposta em duas taxas semestrais de 50%, sendo os juros incorporados ao capital no final de cada semestre. Daí segue que, a partir do capital inicial C_0, haverá duas acumulações a serem consideradas. A primeira ocorrerá ao final do 1º semestre e a segunda ao final do 2º semestre, com a ressalva de que o capital inicial a ser utilizado no cálculo do montante do 2º semestre coincide com o montante acumulado ao final do 1º semestre. Em outras palavras, ou melhor, adotando a linguagem moderna da matemática, tem-se:

1. Capital após o final do 1º semestre:

$$C_{1/2} = C_0 + 50\% C_0 = C_0(1 + 50\%) = C_0(1 + 1/2)$$

$$\Rightarrow C_{1/2} = C_0(1 + 1/2).$$

2. Capital após o final do 2º semestre:

$$C_1 = C_{1/2} + 50\% C_{1/2} = C_{1/2}(1 + 50\%) = C_{1/2}(1 + 1/2) = C_0(1 + 1/2)(1 + 1/2)$$

$$\Rightarrow C_1 = C_0(1 + 1/2)^2.$$

3. Suponha que a referida taxa seja decomposta em quatro taxas trimestrais de 25%, sendo os juros incorporados ao capital no final de cada trimestre. Capital após o final do 1º trimestre:

$$C_{1/4} = C_0 + 25\% C_0 = (1 + 25\%)C_0 = C_0(1 + 1/4)$$

$$\Rightarrow C_{1/4} = C_0(1 + 1/4).$$

4. Capital após o final do 2º trimestre:

$$C_{2/4} = C_{1/4} + 25\%C_{1/4} = (1 + 25\%)C_{1/4} = C_{1/4}(1 + 1/4) = C_0(1 + 1/4)(1 + 1/4)$$

$$\Rightarrow C_{2/4} = C_0(1 + 1/4)^2.$$

5. Capital após o final do 3º trimestre:

$$C_{3/4} = C_{2/4} + 25\%C_{2/4} = (1 + 25\%)C_{2/4} = C_{2/4}(1 + 1/4) = C_0(1 + 1/4)^2(1 + 1/4)$$

$$\Rightarrow C_{3/4} = C_0(1 + 1/4)^3.$$

6. Capital após o final do 4º trimestre:

$$C_{4/4} = C_1 = C_{3/4}+25\%C_{3/4} = (1+25\%)C_{3/4} = C_{3/4}(1+1/4) = C_0(1+1/4)^3(1+1/4)$$

$$\Rightarrow C_{4/4} = C_1 = C_0(1 + 1/4)^4.$$

7. Caso a capitalização fosse mensal seria necessário subdividir ano e a taxa anual de 100% em 12 partes iguais, daí o resultado seria:

$$C_1 = C_0(1 + 1/12)^{12}.$$

8. Caso a incorporação seja realizada de forma diária seria preciso subdividir o ano e a taxa anual de 100% em 365 partes iguais, daí segue que:

$$C_1 = C_0(1 + 1/365)^{365}.$$

Generalizando o fenômeno, isto é, subdividindo o ano e a taxa anual de 100% em n partes iguais e considerando-se que os juros são incorporados ao capital no final de cada período, tem-se:

$$C_1 = C_0(1 + \frac{1}{n})^n.$$

Esquematizando uma tabela com o objetivo de analisar o comportamento da expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ quando n cresce indefinidamente, tem-se:

Note que a expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ aproxima-se indefinidamente para um número decimal não periódico (número irracional ou transcendental) denominado de número de Euler. Tal número é representado por e. Uma aproximação suficiente com três casas decimais para tal número é dada por: $e \approx 2,718$.

Tabela 7.3: Cálculo aproximado do valor do número de Euler.

Subdivisão	Fator de Acumulação
n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	2
2	2.25
3	2.37037037
4	2.44140625
5	2.48832
10	2.59374246
50	2.691588029
100	2.704813829
1000	2.716923932
10000	2.718145927
100000	2.718268237
1000000	2.718280469

Assim, conclui-se que um capital C_0, aplicado a uma taxa de 100% ao ano, com capitalização contínua (a cada instante), resultará ao final do 1º ano um valor C_1 tal que: $C_1 = C_0 \cdot e$.

Isto é, quando n tende ao infinito (incorporação de juros de forma continuada / instantânea), tem-se que $(1+\frac{1}{n})^n$ tende para o número irracional e.

É importante observar que, caso a aplicação seja a uma taxa anual de k% ao ano, ao final de um ano haverá um capital expresso por $C_1 = C_0 \cdot e^k$. Já no final de t anos, $C_1 = C_0 \cdot e^{kt}$.

Uma excelente demonstração de modelagem matemática que faz uso do número de Euler de maneira construtiva e não imperativa, embora seja uma situação hipotética.

7.4 OUTRAS APLICAÇÕES DE NOÇÕES DE CÁLCULO

Conforme já foi visto nas atividades propostas na seção 6.2.1, o cálculo da área de uma região com algum lado curvilíneo não é tão óbvio como o cálculo da área de uma região poligonal. Quando se pretende analisar a região abaixo da curva cujo gráfico não é retilíneo em sua totalidade com o intuito de obter a medida da área sob a curva, a resolução desse problema é realizada novamente por aproximação da área da faixa de hiperbóle a ser calculada por um polígono retangular inferior, como se considerássemos a função constante em cada instante e somássemos todos os áreas dos retângulos ideais. Essa estratégia é bastante motivadora, porém para que a estimativa seja boa é necessário realizar um número de iterações relativamente grande. Para calcular área sob o gráfico de uma função curvilínea utilizando a construção de polígonos retangulares acrescentaremos ao raciocínio a aproximação via retângulos superiores fazendo com que a soma das áreas desses retângulos (polígono retangular inscrito e circunscrito) seja estimada tanto por excesso quanto por falta.

É possível generalizar os casos tomando uma função não negativa e contínua num dado intervalo e dividi-lo em n subintervalos de mesmo comprimento em que cada partição conterá um retângulo de mesma base de acordo com o número de partições e cuja altura consiste no valor da função numa dada extremidade do retângulo considerado, porém será proposto um processo mais construtivo que trabalha de forma concreta com um número de casos palpável por meio da análise de gráficos de funções quadráticas, de hipérboles equiláteras e de funções exponenciais. O procedimento geral citado fornece uma excelente aproximação e o mesmo é amplamente encontrado nos livros de cálculo com a denominação popularmente conhecida como Somas de Riemann. Nele ao tender o número de iterações (subdivisões do intervalo) para o infinito, tem-se que as somas de Riemann tendem para o valor da área (A) da região sob a curva, que é denominada de integral definida, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \triangle x$ em que $f(x_k)$ e $\triangle x$ representam altura e comprimento do retângulo k.

Observe a figura construída via GeoGebra com vinte retângulos inferiores e superiores sob a curva da função quadrática ($y = x^2$). Note que a soma das áreas dos retângulos inferiores (S_i) (destacados de azul) e a soma das áreas dos retângulos superiores

(S_s) (destacados de vermelho) para um número de vinte intervalos iguais nos fornece uma ideia de que a área pretendida está compreendida entre 0.31 e 0.36. Isso serve como instrumento empírico para ratificar uma afirmação (quadratura da parábola) demonstrada na seção 6.2.1 em que foi constatado que a área da faixa de parábola no intervalo $[0, 1]$ mede $\frac{1}{3}$.

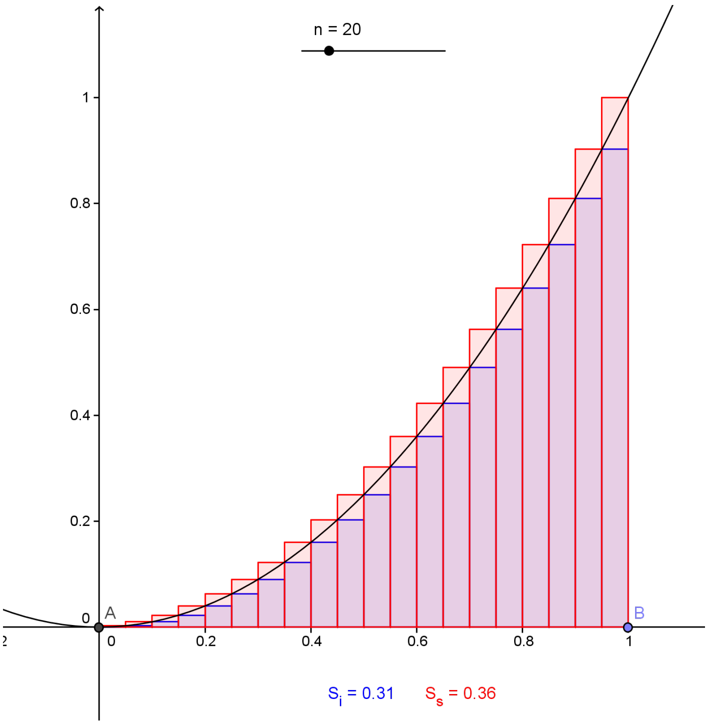

Figura 7.14: Polígonos Retangulares (Inscrito e Circunscrito).

Fonte: Geogebra.

Na mesma linha da análise anterior, porém com maior riqueza de detalhes e consequências, pode analisar o comportamento do ramo positivo de uma hipérbole equilátera e da parte pertencente ao primeiro quadrante do gráfico da função exponencial. Somente será realizada a análise do significado geométrico da área de uma faixa de hipérbole equilátera. Via GeoGebra, proponha a construção do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ e por meio do comando SomaDeRiemann solicite o cálculo de aproximações para a área pretendida.

Inicialmente, proponha o cálculo da área do polígono retangular, inscrito e circunscrito, para $n = 8$, isto é, pretende-se que o aluno determine uma aproximação para o valor da área da faixa da hipérbole para uma subdivisão de oito retângulos de mesmo comprimento. Veja o esboço gráfico da situação descrita.

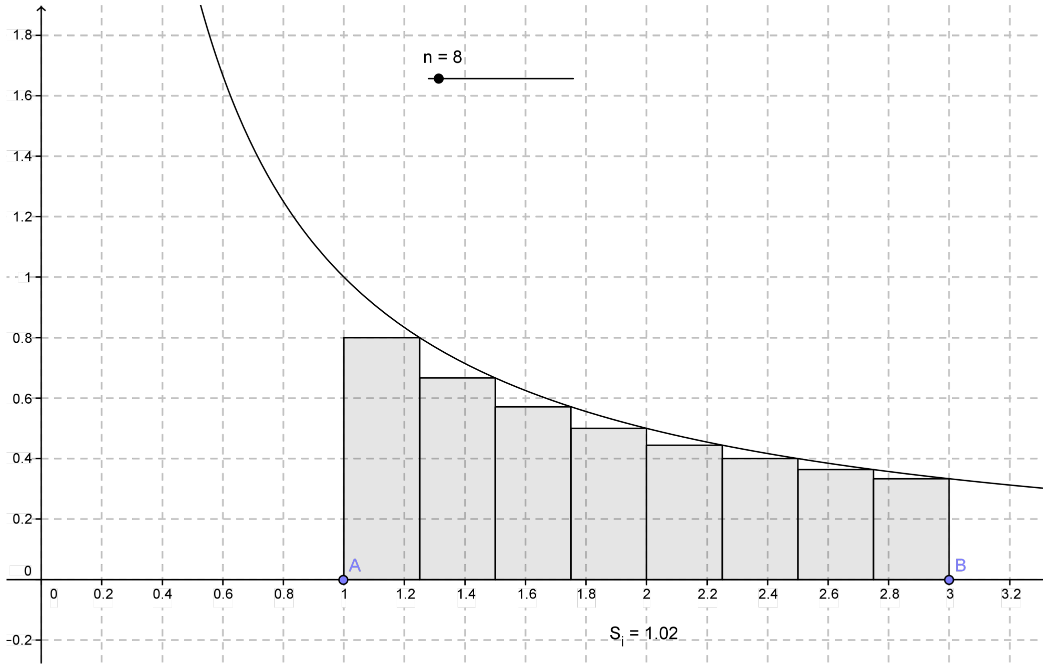

Figura 7.15: Polígono Retangular Inscrito com $n = 8$.

Fonte: Geogebra.

Espera-se que o aluno seja capaz de calcular a área da faixa de hipérbole, denotada por H_1^3 , realizando o maior número de iterações de subdivisões do intervalo $[1, 3]$. Por exemplo, ao dividi-la em oito partições de mesmo comprimento, encontra-se os valores das abscissas 1, 5/4, 6/4, 7/4, 8/4, 9/4, 10/4, 11/4 e 12/4. E calculando suas respectivas imagens, tem-se: 1, 4/5, 4/6, 4/7, 4/8, 4/9, 4/10, 4/11 e 4/12. Realizando o cálculo da soma dos retângulos inferiores, obtém-se:

$$S = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{11} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{12}$$

$$\Rightarrow S \approx 1,019.$$

O passo seguinte para o prosseguimento da atividade e para completar o raciocínio depende de cada professor, porém é recomendável solicitar aos alunos que reproduza a situação descrita para outros valores de n, por exemplo, para $n = 10$ considerando o intervalo de 1 até 2. Seguindo esse procedimento, espera-se que o aluno consiga calcular a área com uma precisão de cerca de 0.67. Observe o esboço gráfico da situação mencionada.

Nesse momento, o professor deve intervir diretamente na atividade inserindo a definição geométrica do logaritmo natural de x como a área da faixa de Hipérbole de 1 até x, ou seja, $\ln\ x = \text{Área}(\mathrm{H}_1^x)$.

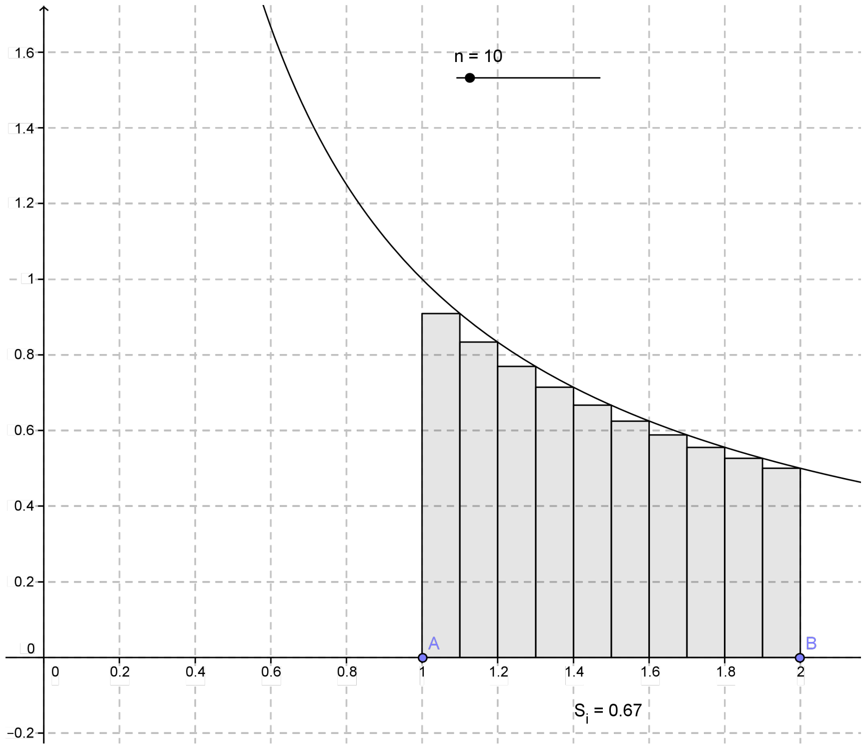

Figura 7.16: Polígono Retangular Inscrito com $n = 10$.

Fonte: Geogebra.

A partir dessa definição, é possível questionar os alunos sobre a existência de uma dada abscissa que representará a área de medida igual a 1 unidade. Além disso, pode-se conjecturar uma boa aproximação entre números inteiros para o número neperiano (e) de acordo com o estudo exposto acima. Enfim, é necessário orientar os alunos com a finalidade dos mesmos investigarem a existência de uma área de uma faixa de hipérbole, variando de 1 até um certo x, cuja área seja unitária ou equivalentemente, procurar o valor de x tal que $\ln\ x = \text{Área}(H_1^x) = 1$. A conclusão obtida pelos alunos deve admitir a existência dessa abscissa e estimar que o valor procurado pertencente ao intervalo entre 2 e 3. Pode-se demonstrar que o valor de x em questão trata-se do número irracional e cuja melhor aproximação é dada por: $e = 2,718281828459$. Nesse ponto, é satisfatório que o professor faça uma reflexão comparando o número obtido com o número de Euler surgido ao resolver o problema de capitalização contínua proposto historicamente pelos irmãos Bernoulli.

7.4.1 Utilizando as noções de indivisíveis de Cavalieri

O procedimento que será apresentado a seguir consiste basicamente num resumo dos estudos realizados no século XVII pelo matemático Bonaventura Francesco Cavalieri que recebeu forte influência dos predecessores Arquimedes, Kepler, Galileu e Fermat.

Esse grandioso trabalho de Cavalieri foi publicado em 1635 e foi intitulado de *Geometria indivisibilibus.* O método proposto considerava um sólido formado pela reunião de conjunto infinito de planos, isto é, seu princípio dizia que qualquer grandeza (plana ou sólida) pode ser dividida numa quantidade infinita de porções (lâminas) com espessura infinitesimal de tal modo que mantenham entre si proporções desejadas.

Segundo CONTADOR (2012, p. 214) [7] um dos princípios norteadores do método de Cavaliere dizia que "se dois sólidos, nos quais qualquer plano secante a eles, e paralelo a um plano dado, determina neste sólido planos cuja razão é constante, então, a razão entre os volumes destes sólidos também será constante".

Observe, por meio da utilização da linguagem moderna da matemática, como Cavalieri obteve a área lateral de um cilindro, a área superficial da esfera e volume do cone de revolução, a partir da reprodução de ideias publicadas em CONTADOR (2012) [7].

Inicialmente, é necessário considerar um sólido qualquer com bases paralelas, de altura h, e área S e de volume (V_L) dado por $V_L = Sh$. Agora, imagine uma superfície como uma lâmina sólida em que sua altura h é infinitamente pequena, logo seu volume e sua área serão praticamente iguais, ou seja: $S = V_L$.

- a) Cálculo da área (S) lateral de um cilindro

É notório e consensual que o procedimento adotado na maioria dos livros didáticos (cálculo da superfície lateral do cilindro reto é obtido a partir de uma região retangular de altura h e base 2π) possui uma abordagem excelente, aos olhos da didática e, de acordo com a visão crítica dos alunos, tal procedimento é considerado de fácil assimilação/compreensão contribuindo de modo satisfatório para o ensino/aprendizagem. O procedimento a ser apresentado tem como proposta o cálculo da área lateral de um cilindro de altura h e raio da base igual a $(r + x)$ a partir do volume V_A do anel cilíndrico considerando x como uma espessura infinitamente pequena, pois a partir dessas considerações é possível inserir a aplicação das noções de limite de uma maneira construtiva.

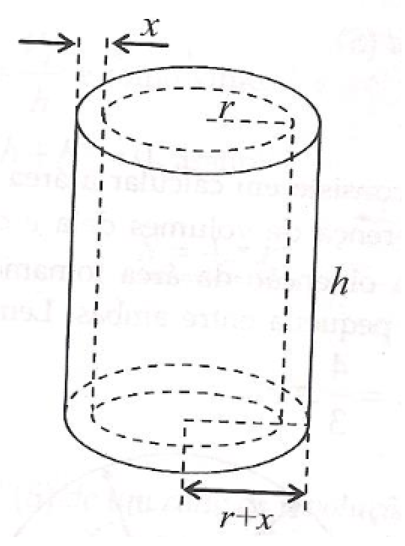

Figura 7.17: Anel Cilíndrico.

Fonte: CONTADOR [8], 2012, vol.3, p. 333.

Note que o volume do cilindro interno de raio r e altura h é dado por: $V_i = \pi r^2 h$. Já o volume do cilindro externo de raio $(r + x)$ e de mesma altura h é dado por: $V_e = \pi r + x^2 = rh(r^2 + 2rx + x^2)h$.

Assim, o volume do anel cilíndrico será dado por:

$$V_A = V_e - V_i$$

$$\Rightarrow V_A = \pi h(r^2 + 2rx + x^2) - \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow V_A = \pi h(2rx + x^2)$$

$$\Rightarrow V_A = \pi h 2rx + \pi h x^2.$$

Fazendo a divisão por x, tanto do 1º membro, quanto do 2º membro igualdade, tem-se:

$$\Rightarrow \frac{V_A}{x} = \pi h 2r + \pi h x.$$

Como $V_A = S \cdot x \Rightarrow S = \frac{V_A}{x}$ e sabendo que x é infinitamente pequeno, segue que a 2ª parcela da soma do 2º membro também será tão pequena ao ponto de considerá-la nula.

Assim:

$$\Rightarrow \frac{V_A}{x} = S = 2\pi hr.$$

Observe que, de fato, S é área do retângulo de altura h e de base idêntica ao comprimento de um circunferência de raio r.

- b) Cálculo da área da esfera (S)

O cálculo da área da superfície de uma esfera será feito a partir da diferença entre os volumes das esferas, externa e interna, cujos raios são $(r+h)$ e r, respectivamente.

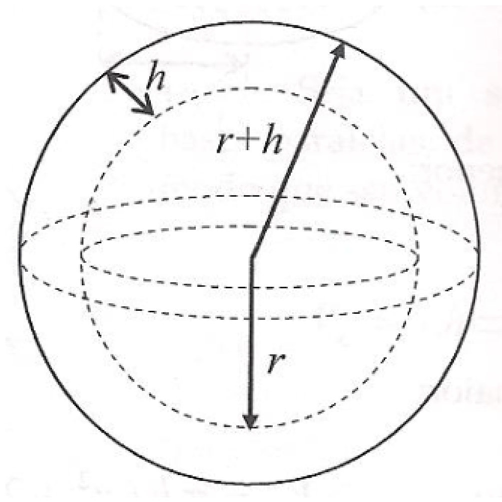

Figura 7.18: Casca de Esfera.

Fonte: CONTADOR [8], 2012, vol.3, p. 337.

$$V_{Casca} = V_e - V_i$$
$$\Rightarrow V_{Casca} = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\Rightarrow V_{Casca} = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3 - r^3)$$
$$\Rightarrow V_{Casca} = \frac{4}{3}\pi(3r^2h + 3rh^2 + h^3).$$

Utilizando procedimento análogo, isto é, dividindo ambos os termos por h, tem-se:

$$\Rightarrow \frac{V_{Casca}}{h} = \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3rh + h^2).$$

Como $V_{Casca} = S \cdot h \Rightarrow S = \frac{V_{Casca}}{h}$ e sabendo-se que h é infinitamente pequeno, segue que:

$$\frac{V_{Casca}}{h} = S = \frac{4}{3}\pi r^2.$$

- c) Cálculo do volume do cone de revolução

Antes de deduzir a fórmula $V_{Cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, em que r e h representam o raio e a altura do cone, respectivamente, é válido ressaltar que historicamente esse feito é creditado inicialmente a Demócrito (c. 410 a.C.) e sua evolução, posteriormente a Arquimedes que utilizou brilhantemente seu método de equilíbrio para conjecturar e o método da exaustão de Eudoxo para provar a validade dessa relação. De acordo com EVES (2004) [11] o pioneiro no Cálculo do volume do cone foi Demócrito:

> (...) A chave é fornecida por Plutarco, ao relatar o dilema a que chegou certa vez Demócrito quando considerou a possibilidade de um cone ser formado de uma infinidade de secções planas paralelas à base. Se duas secções adjacentes fossem do mesmo tamanho, o sólido seria um cilindro e não um cone. Se, por outro lado, duas secções adjacentes tivessem áreas diferentes, a superfície do sólido seria formada de uma série de degraus, o que certamente não se verifica. Nesse caso se assumiu que o volume do cone pode ser subdividido indefinidamente (ou seja, numa infinidade de secções planas atômicas), mas que o conjunto dessas secções é contável, no sentido de que, dada uma delas, há uma outra que lhe é vizinha; suposição que se situa, até certo ponto, entre as duas já consideradas sobre a divisibilidade de grandezas. Demócrito pode ter argumentado que se duas pirâmides de bases equivalentes e alturas iguais são seccionadas por planos paralelos às bases, verificando-se a divisão das alturas numa mesma razão, então as secções correspondentes assim formadas são equivalentes. Portanto as pirâmides contém o mesmo número infinito de secções planas equivalentes, o que implica que seus volumes devem ser iguais. Tem-se aí o que seria um exemplo primitivo do chamado método dos indivisíveis de Cavalieri (...) (EVES [11], 2004, p. 420).

Considere o cone de diâmetro da base $AB = 2r$ e altura H composto pela junção de n cilindros de raios variando de 0 à r e de altura h extremamente pequena tal que $h = \frac{H}{n}$.

Considere um desses cilindros ideais de ordem k a partir do vértice C e raio r_1 de tal maneira que o cone fique dividido em duas partes. Note que é possível, por meio da semelhança de triângulos, relacionar r,r_1, H e H_1 de tal modo que seja dado em função de r, k e n:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{H}{H_1} \Rightarrow \frac{r}{r_1} = \frac{H}{\frac{kH}{n}} \Rightarrow r_1 = \frac{rk}{n}.$$

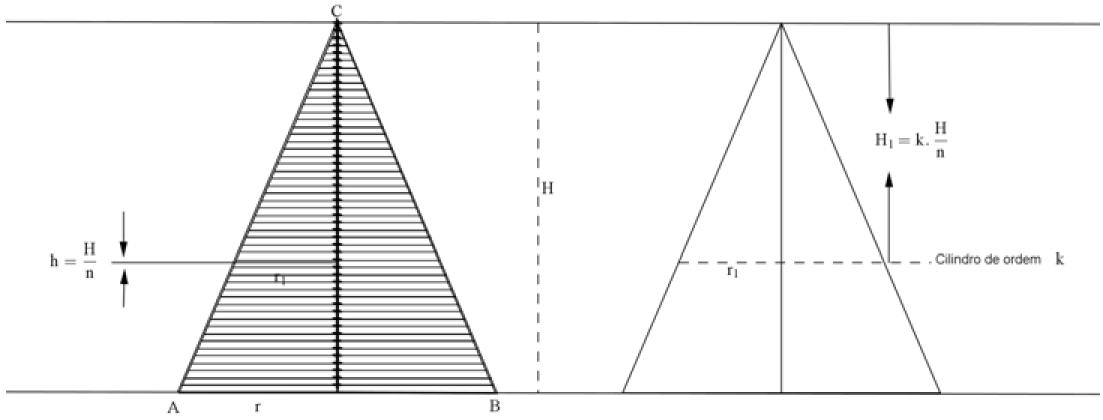

Figura 7.19: Fatiamento da Secção Cônica.

Fonte: CONTADOR [8], 2012, vol.3, p. 339.

O volume do cilindro de ordem k será dado por:

$$V_{Cilindro} = \pi r_1^2 h$$
$$\Rightarrow V_{Cilindro} = \pi \frac{r^2 k^2}{n^2} \frac{H}{n}$$
$$\Rightarrow V_{Cilindro} = \pi r^2 H \frac{1}{n^3} k^2.$$

Assim, o volume do cone será dado pelo somatório de todos os cilindros ideais com k variando de 1 a n:

$$V_{Cone} = \pi r^2 H \frac{1}{n^3} 1^2 + \pi r^2 H \frac{1}{n^3} 2^2 + \pi r^2 H \frac{1}{n^3} 3^2 + \pi r^2 H \frac{1}{n^3} 4^2 + \cdots + \pi r^2 H \frac{1}{n^3} n^2$$
$$= \pi r^2 H \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2).$$

Sabe-se que: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. A validade dessa relação pode ser obtida pelo Princípio da Indução Matemática ou a partir do desenvolvimento do binômio $(1 + k)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3$ variando k de 0 a n e adicionando as igualdades de ambos os membros (vide em CONTADOR (2012) [8]). Embora essa abstração algébrica seja possível de ser aplicada aos alunos do Ensino Médio, a demonstração geométrica consiste num procedimento mais construtivo e de fácil assimilação.

Inicialmente, faremos a apresentação da prova geométrica para a soma dos números inteiros de 1 a n, isto é, $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dado que a mesma será necessária para demonstrar geometricamente a validade da relação $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (*).

Antes de generalizar os casos, é imprescindível realizar os cálculos para um caso particular, por exemplo, $n = 6$, com o intuito de motivar e aguçar a curiosidade dos alunos. Além de contribuir de maneira satisfatória para a formação da conjectura dos alunos.

A figura seguinte ilustra a soma $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$ em que a coluna i é composta por i quadrados.

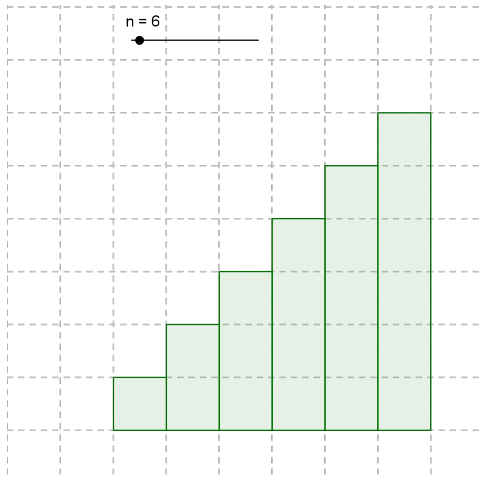

Figura 7.20: Representação geométrica da soma $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$.

Fonte: Geogebra

Ao girar a figura anterior e encaixá-la, tem-se um retângulo de base 6 e altura 7, conforme ilustra a imagem seguinte.

Note que a medida da área do retângulo construído é dada por $6 \cdot 7 = 6 \cdot (6 + 1)$.

A partir daí, é possível concluir que, a soma $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$ pretendida representa a metade do retângulo construído, isto é:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6(6 + 1)}{2}.$$

Para generalizar o procedimento é necessário construir um retângulo de base n e altura $(n + 1)$ a partir das n colunas que representam geometricamente a soma $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. A área (A) do retângulo construído será dada por: $A = n \cdot (n + 1)$.

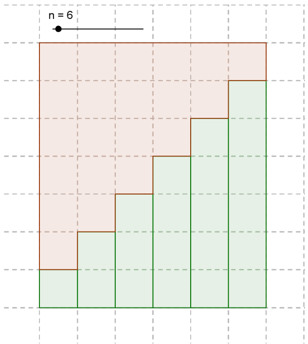

Figura 7.21: Representação geométrica do retângulo 6 x 7.

Fonte: Geogebra

De forma análoga, a soma desejada ($S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$) representa a metade do retângulo $n(n + 1)$, isto é:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Enfim, para demonstrar geometricamente a validade da relação (*) faz-se necessário implementar ideias semelhantes com as devidas ressalvas.

Repetindo o procedimento realizado para um caso particular da soma dos 6 primeiros quadrados perfeitos $(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)$.

As figuras a seguir sugerem uma visão geométrica do procedimento detalhado. Note que, para realizar o preenchimento é preciso acrescentar um quadrado na 2ª linha; um quadrado e um retângulo $(2x1)$ na 3ª linha; um quadrado, um retângulo $(2x1)$ e retângulo $(3x1)$ na 4ª linha, assim por diante.

Logo, a área (A) do retângulo $(ABCD)$, cuja base mede $b = (1+2+3+4+5+6)$ e cuja altura mde 6 unidades, é dada por: $A = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 6$.

Equivalentemente tal área pode ser calculada a partir da soma das áreas que compõe o retângulo $(ABCD)$, isto é:

$$A = (1+4+9+16+25+36)+[1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)]$$

$$\Rightarrow A = (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) + [\sum_{i=1}^{5} \frac{(1+i)i}{2}].$$

Portanto, tem-se:

$$1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = (1+2+3+4+5+6)\cdot 6-[\sum_{i=1}^{5} \frac{(1+i)i}{2}] = (\frac{6(6+1)}{2})\cdot 6-\frac{1}{2}\cdot[\sum_{i=1}^{5} i+\sum_{i=1}^{5} i^2]).$$

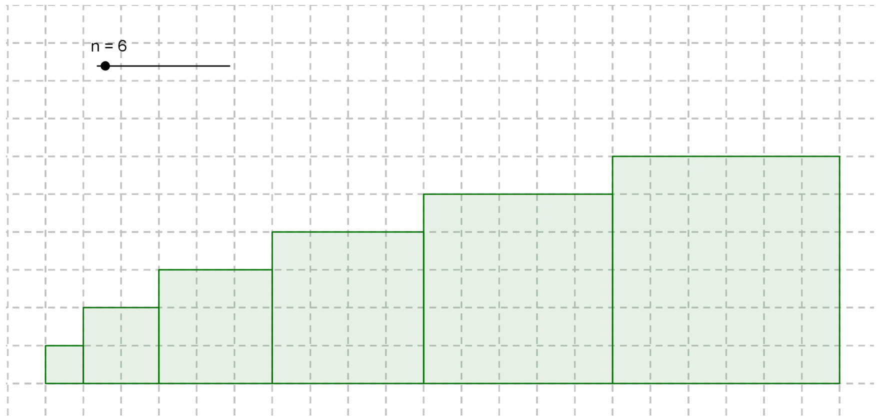

Figura 7.22: Representação geométrica da soma $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$.

Fonte: Geogebra

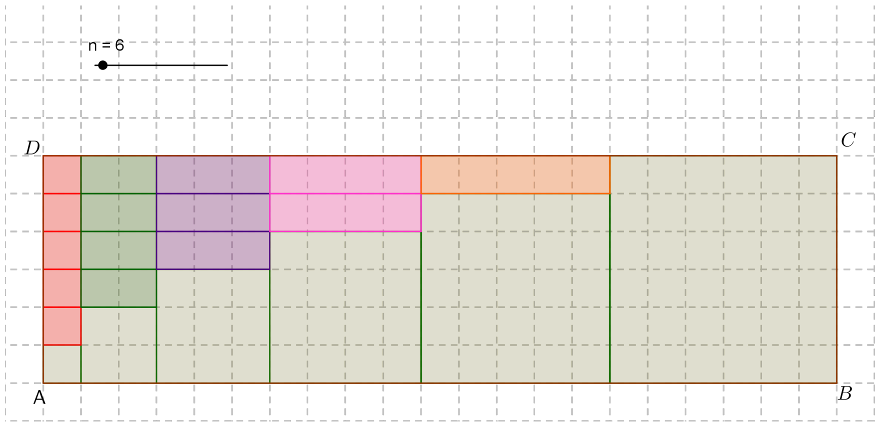

Figura 7.23: Representação geométrica da soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$.

Fonte: Geogebra

Daí, segue que:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 6^2 = \sum_{i=1}^{6} i^2 = (\frac{6(6+1)}{2}) \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{5} i - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{5} i^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} i^2 = (\frac{6(6+1)}{2}) \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot (\frac{6(6-1)}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{5} i^2.$$

Ainda é possível manipular a referida expressão com o intuito de melhorar a visualização:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 6^2 = \sum_{i=1}^{6} i^2 = (\frac{6(6+1)}{2}) \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot (\frac{6(6-1)}{2}) - \frac{1}{2} \cdot ([\sum_{i=1}^{6} i^2] - 6^2)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} i^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{6} i^2 = (\frac{6(6+1)}{2}) \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot (\frac{6(6-1)}{2}) + \frac{6^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\sum_{i=1}^{6} i^2 = (\frac{6(6+1)}{2})\cdot 6 - \frac{1}{2}\cdot(\frac{6(6-1)}{2}) + \frac{6^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{4}\sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{6^2+6}{2} - \frac{6^2-6}{2} + \frac{6^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{4}\sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{6(2\cdot 6^2+3\cdot 6+1)}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{4}\sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{6(2\cdot 6+1)(6+1)}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{6(2\cdot 6+1)(6+1)}{6}.$$

Generalizando o procedimento, ou seja, representando geometricamente a soma dos quadrados $(1+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2)$ de 1 até n e em seguida completando a figura até que se forme um retângulo de base $(1+2+3+4+5+\cdot+n)$ e altura n, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{6} i^2 = 1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(2\cdot n+1)(n+1)}{6}.$$

Assim, dispondo da relação que representa a soma dos quadrados, segue que:

$$V_{Cone} = \pi r^2 H\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2)$$

$$= \pi r^2 H\frac{1}{n^3}\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right) = \pi r^2 H\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right).$$

Como n tende ao infinito, segue que as frações que contém denominador composto por n poderão ser desprezadas dado que tenderão a zero. Isto é, o volume do cone será dado por:

$$V_{Cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 H.$$

Recomenda-se que a aplicação dessa atividade seja realizada na 2ª e 3ª série do Ensino Médio de acordo com o currículo adotado sob o caráter de material adicional. Acredita-se que em cinco aulas há tempo suficiente para complementar todo o aparato de discussão sobre os tópicos de Geometria Espacial.

7.4.2 Cálculo da área de uma elipse

Dispondo dos métodos de quadratura do círculo realizados por Arquimedes, dos conceitos básicos de Geometria Analítica difundida por Descartes e Fermat e, além disso, dos princípios de Cavalieri, é possível aplicar tais ideias para ampliar o estudo de cônica, deduzindo a fórmula para o cálculo da área de uma elipse, isto é, descobrir a relação de proporção da área do círculo para a elipse de eixo maior igual ao diâmetro do círculo formalizada por Johannes Kepler.

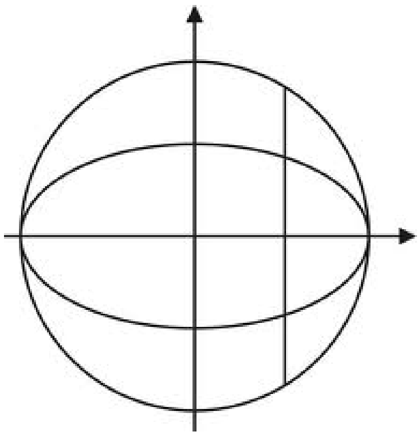

Figura 7.24: Elipse inscrita numa circunferência.

Fonte: CONTADOR [8], 2012, vol.3, p.339

Considere o semi-círculo de raio $r = a$ e a semi-elipse de semi-eixos positivos a e b, com $a > b$. A partir dessa convenção, é possível descrever as equações reduzidas do círculo e da elipse:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ e } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Escrevendo y em função de x e tomando o 1º quadrante por simetria afim de que ambos os radicandos sejam positivos, tem-se:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{y'^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} &\Rightarrow \sqrt{b^2 - x^2\frac{b^2}{a^2}} \\ \Rightarrow y' &= \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \\ &= \sqrt{b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)} \\ &= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.\end{aligned}$$

Ou seja: $y' = \frac{b}{a}y$ (a razão entre duas cordas verticais correspondentes da elipse e do círculo é b/a).

Note que, apesar de adotar a variável y em cada função, y e y' são diferentes, isto é, representam, para cada abscissa x, ordenadas com valores distintos.

Se as ordenadas do círculo e elipse, y e y', respectivamente, guardam entre si a relação b/a, segue que suas áreas vão manter a mesma razão. Essa afirmação é garantida pelo primeiro princípio de Cavalieri em que EVES (2004, p.426) [11] destaca: "Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante". Em linguagem moderna, temos:

$$\frac{Area\ da\ elipse}{Area\ do\ circulo} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow Area\ da\ elipse = \frac{b}{a} Area\ do\ circulo$$

$$\Rightarrow Area\ da\ elipse = \frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab.$$

É válido ressaltar que a ideia acima pode ser estendida para comparar dois sólidos (segundo princípio de Cavalieri) e por meio dela pode-se deduzir a fórmula para o cálculo do volume da esfera.

É recomendável que a aplicação dessa atividade seja realizada durante a 3ª série do Ensino Médio de acordo com o currículo adotado sob o caráter de material adicional. A quantidade de aulas suficientes para expor tais ideias variará de acordo com a proposta do professor, mas acredita-se que cinco aulas são bastantes para complementar todo o aparato de discussão sobre os tópicos de Geometria Analítica e de Cônicas.

7.4.3 Área sob o gráfico de uma curva

Ao analisar uma grandeza cuja variação é tomada como constante em subintervalos, isto é, como se a função tivesse variação de degrau em degrau e não de forma continuada, há uma abordagem de forma implícita das noções intuitivas de limite e ideias elementares de integral.

Primeiramente, o trabalho estará focado no caso em que a função é constante em todo o intervalo positivo considerado. Suponha que o interesse principal seja o cálculo da área sob o gráfico no intervalo considerado. Nesse caso o problema se resume em medir a área de um retângulo cuja base coincide com a variação do intervalo considerado e a altura corresponde ao valor fixo e constante da função fixada.

Nessa mesma tônica, veja um exemplo gráfico de uma função constante ($f(x) = 3x$) via GeoGebra com polígono regular inscrito para $n = 100$.

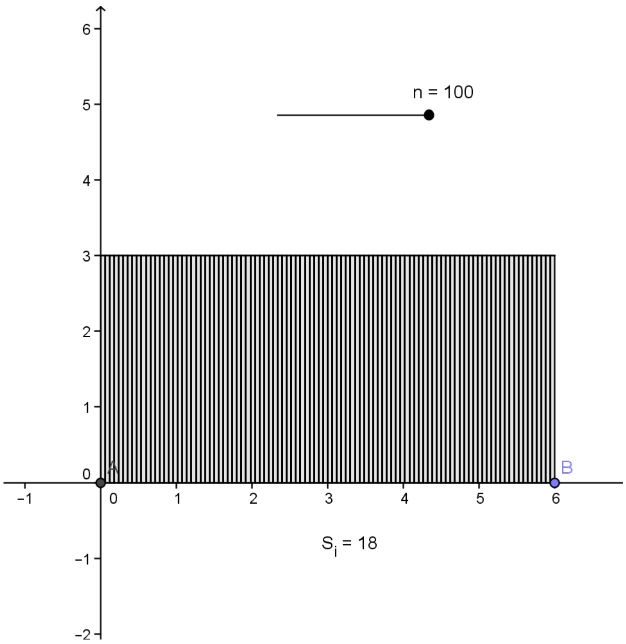

Figura 7.25: Gráfico de uma Função Constante.

Fonte: GeoGebra

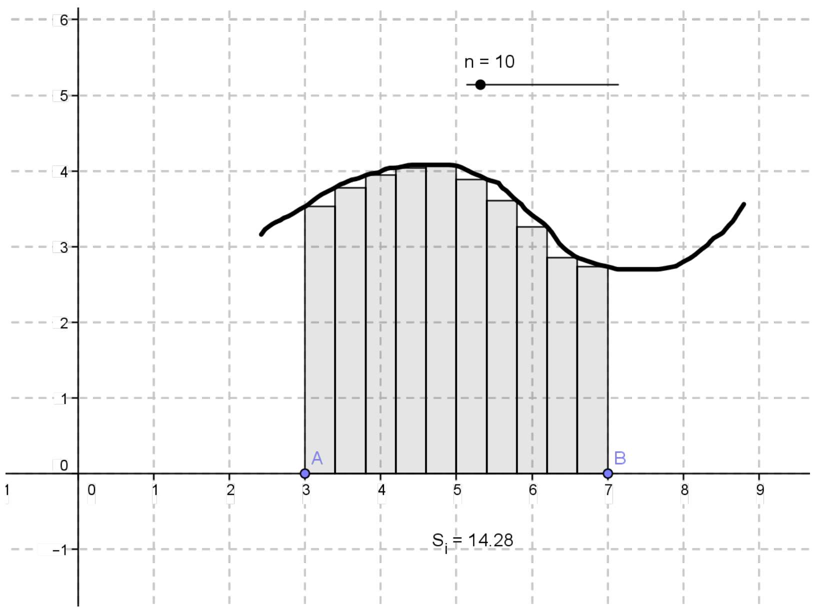

Figura 7.26: Polígono Retangular inscrito de uma curva qualquer.

Fonte: GeoGebra

A figura anterior representa o caso de uma grandeza positiva e não constante cuja variação seja contínua ao longo do intervalo considerado. Nesse caso, para calcular a área sob o gráfico é preciso analisar o problema fragmentando o intervalo contínuo em um número considerável de partes (degraus) com o intuito de que a grandeza seja analisada como se fosse praticamente constante em cada subintervalo, isto é, a área solicitada é obtida adicionando as áreas dos inúmeros retângulos inseridos no intervalo considerado. A figura a seguir ilustra o gráfico de uma função qualquer feita a mão livre via GeoGebra com polígono retangular inscrito com $n = 10$.

Esse procedimento descrito acima é comum e rotineiro em diversas situações cotidianas. A estratégia de resolução é similar na maioria dos casos e consiste em raciocinar a função dado como se fosse constante em pequenos trechos. Tal fenômeno já era realizado desde o século III a.C. por Arquimedes com auxílio do método da exaustão. Um exemplo prático, motivacional e de fácil entendimento é a explicação da área do círculo como uma aproximação via área de polígonos regulares inscritos com número de lados em escala crescente e tendendo ao infinito. Observe a imagem abaixo que foi produzida no software de geometria dinâmica GeoGebra. Note que há um controle deslizante responsável por determinar o número de lados do polígono regular inscrito. Na imagem a seguir, o cursor do controle deslizante foi posicionado em $N = 11$, isto é, fez-se surgir o undecágono regular inscrito. Já a figura ao lado está representando o hectágono regular (polígono regular de 100 lados) inscrito e construído também via GeoGebra.

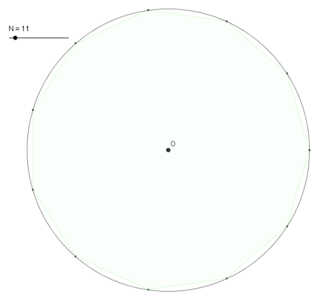

Figura 7.27: Quadratura do círculo para $n = 11$

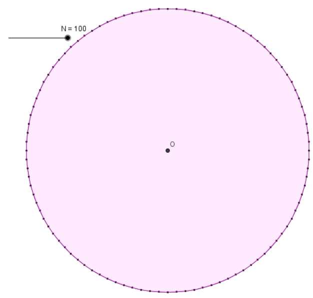

Figura 7.28: Quadratura do círculo para $n = 100$

Tomando uma função contínua, $y = f(x)$, qualquer preferencialmente não constante definida no intervalo positivo $[a, b]$ e supondo que a meta seja o cálculo da área sob o gráfico contido no 1º quadrante, faz-se necessário uma subdivisão do intervalo $[a, b]$ em numerosos subintervalos praticamente constantes afim de determinar a área sob o gráfico como uma aproximação pela soma de todos os retângulos obtidos ao particionar o intervalo $[a, b]$. Isto é, considerando n subintervalos de comprimentos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ e cujas imagens (alturas dos retângulos) sejam $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$, respectivamente e supostos constantes em cada subintervalo, tem-se uma aproximação para a área S sob o gráfico da curva dada:

$$S \cong x_1y_1 + x_2x_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n.$$

Note que, aumentando o valor de n e reduzindo o comprimento dos subintervalos, a aproximação fica melhorada, ou seja, o valor real da área sob o gráfico torna-se muito próximo da aproximação considerada via soma de retângulos. É óbvio que tendendo o valor de n para um número infinito de subdivisões sucessivas com as ressalvas necessárias de redução dos comprimentos dos subintervalos, a soma das infinitas áreas dos retângulos, pertencentes aos trechos particionados, tenderá para o valor real da área sob o gráfico da função considerada. Tal número é conhecido como integral definida.

É válido ressaltar que o procedimento exibido acima pode ser contextualizado, aplicado e inserido de forma interdisciplinar com a disciplina de Física ao calcular a distância d percorrida por um móvel com velocidade $v(t)$ no intervalo de tempo $[a, b]$ ou então no cálculo do trabalho T realizado por uma força de direção constante e intensidade $f(x)$ no deslocamento de x de a até b. Também é possível aplicar o estudo descrito para calcular o volume de uma trombeta (sólido obtido pela rotação do gráfico particular $y = f(x)$ em torno do eixo x com $a \leq x \leq b$ e $f(x) \geq 0$) via cascas cilíndricas, porém essa atividade pode ser encontrada nos livros de Cálculo citados anterioremente e será deixada como atividade suplementar, pois foge ao escopo desse trabalho.

Para ratificar o estudo exibido, propõe-se um exercício que pode ser resolvido passo a passo conforme etapas descritas a seguir.

Exercício: Calcule um valor aproximado para a área sob o gráfico de $f(x) = 100 - x^2$ no intervalo $[0; 10]$.

Atividade a ser desenvolvida no laboratório de informática com computadores compostos por softwares de geometria dinâmica (especialmente, o GeoGebra). Além disso, é recomendável o uso de calculadora científica ou de algum software de planilha (por exemplo, Excel ou CALC).

1º passo: Utilize o GeoGebra para plotar o gráfico da função com as restrições discriminadas no enunciado.

2º passo: Inicialmente proponha uma subdivisão do intervalo $[0; 10]$ em 5 subintervalos de comprimento igual a 2. Note que, em cada subintervalo, é preciso supor $f(x)$ constante e de valor correspondente ao ponto médio do subintervalo.

3º passo: Calcule os valores de $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$ e $f(9)$. Nesse momento, questione os alunos sobre o que essas imagens representam.

4º passo: Utilize a calculadora científica ou uma planilha eletrônica para adicionar a área dos cinco retângulos contidos nos subintervalos determinados. A soma (S_5) é uma aproximação para o valor da área sob o gráfico da função dada, isto é, é uma estimativa para o valor da integral definida.

5º passo: Questione os alunos sobre o que acontecerá com a estimativa/aproximação caso fosse uma nova subdivisão em dez subintervalos de comprimento igual a 1. Oriente os mesmos a realizarem tal experimento.

6º passo: Maximize o grau de abstração da atividade supondo uma subdivisão do intervalo dado em n subintervalos de comprimento igual a $\frac{10}{n}$. Solicite aos alunos que calculem a nova aproximação em função de n, fornecendo uma expressão geral e ao final dessa tarefa questione os alunos sobre o que acontecerá com tal expressão caso o valor de n seja tendido ao infinito.

7º passo: Revise todas as etapas melhorando a linguagem de forma gradual e introduzindo uma simbologia de maneira a facilitar a escrita, por exemplo, insira a notação de somatórios. Caso observe a maturidade e a compreensão dos conceitos de maneira satisfatória por parte dos alunos, insira a notação moderna de limite junto aos símbolos de somatórios. Além disso, também pode introduzir a simbologia de integrais.

A expectativa dessa atividade é que a maioria dos alunos construa o gráfico no GeoGebra conforme as figuras ilustrativas a seguir e que aproxime ao máximo da área sob o gráfico via Soma de Riemann.

Note que o aumento do número de iterações de cinco para dez fez com que a aproximação da área do polígono retangular inferior melhorasse de 560 para 615 unidades de área. E mais, aumentando o número de interações de 10 para 100 fez com que a aproximação via área do polígono retangular superior melhorasse de 715 para 671.65. Tal realização conduz a seguinte conclusão: a área procurada é um número entre 615 e 671.65. Utilizando as ideias de Arquimedes sobre quadratura da parábola, é possível constatar que a área desse segmento parabólico (A_{sp}) é dada por $\frac{4}{3}$ da área do triângulo inscrito de base medindo 10 unidades e altura medindo 100 unidades, isto é: $A_{sp} = \frac{4}{3}$ de $\frac{10 \cdot 100}{2} = \frac{2000}{3} = 666,\overline{6}$.

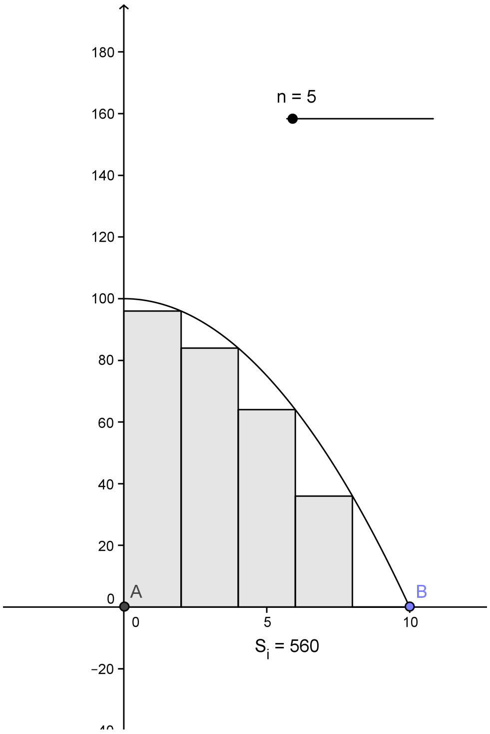

Figura 7.29: Polígono Retangular para $n = 5$

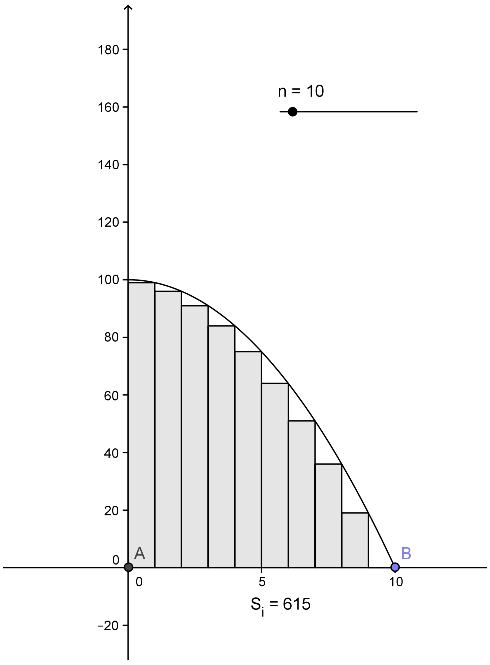

Figura 7.30: Polígono Retangular para $n = 10$

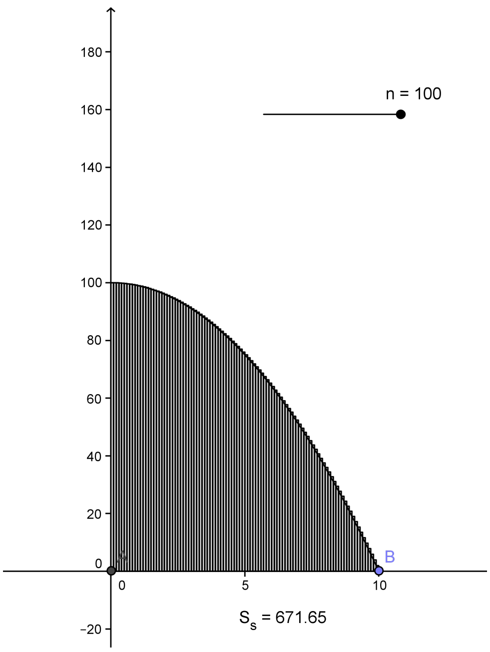

Figura 7.31: Polígono Retangular inscrito

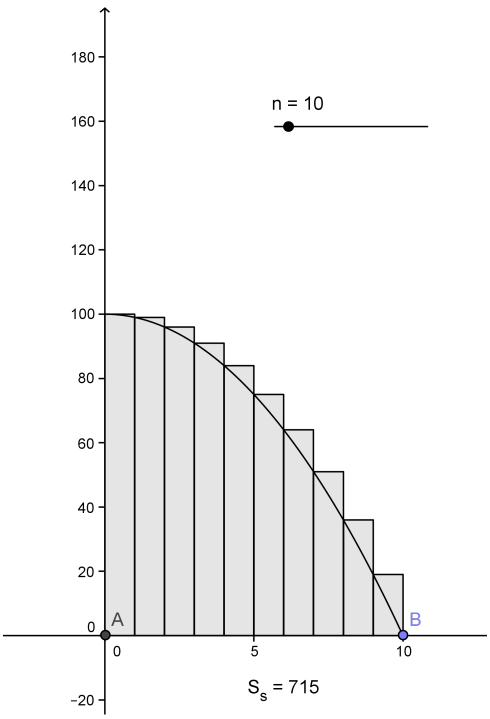

Figura 7.32: Polígono Retangular circunscrito

Observe que a Figura 7.32 representa uma imagem ilustrativa de um polígono retangular superior em que é possível verificar que a área está bem próxima do valor real exibido anteriormente. Note ainda que, a medida que aumentamos o valor do cursor (n), o polígono retangular inscrito aproximasse cada vez mais da área da faixa de parábola pretendida (vide figura 7.31).

7.4.4 Atividades interdisciplinares com a Física

O estudo de função decorre da necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências e generalizar. É preciso ter em mente que o termo função é mais abrangente e complexo do que a definição apresentada, ou seja, é necessário mostrar ao aluno que esse tópico usado de forma sistemática em exatas e no seu cotidiano é de suma importância para o meio social, pois várias relações de mercado e capital, engenharia, economia (micro e macro), saúde, transportes, indústrias, artes, energia, enfim uma diversidade de áreas dependem de uma análise clara e objetiva da funcionalidade de um modelo ou parâmetro a ser adotado.

Os casos, em que há o emprego das noções elementares no estudo de Física durante a etapa do ensino médio, são frequentes e corriqueiros. Observe os casos em que é possível explorar tais ideias durante o ensino médio.

No 1º ano do Ensino Médio, aplica-se durante o estudo do:

- gráfico de Velocidade x Tempo (Deslocamento);
- gráfico de Aceleração x Tempo (Velocidade);
- gráfico de Força x Distância (Trabalho);
- gráfico de Força x tempo (Impulso);

No 2º ano do Ensino Médio, aplica-se durante o estudo do:

- gráfico de pressão x Volume (Trabalho realizado por um gás ideal);
- gráfico de pressão x Volume (Transformação isotérmica);
- gráfico de calor específico x variação de temperatura (Quantidade de Calor);

No 3º ano do Ensino Médio, aplica-se durante o estudo do:

- gráfico de Corrente x Tempo (Carga);
- gráfico de Campo elétrico x distância (Força elétrica);
- gráfico de Resistência x corrente (Tensão);

É possível citar outros casos mais específicos, porém fogem ao escopo desse material. A seguir, será apresentado um estudo de cão referente ao cálculo da área sob o gráfico de uma dada relação entre duas grandezas.

A riqueza de tal estudo, que é uma aplicação básica do cálculo integral, vai ao encontro dos ideais de interdisciplinaridade e contextualização defendidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) [20] e pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) [30].

Os PCNEM (2002) [21] foram formulados a partir da discussão entre especialistas e educadores pertencentes aos domínios do território nacional. Sua finalidade é bastante abrangente dado que se pretende dar suporte as equipes escolares na execução de seus trabalhos com o intuito de promover o aperfeiçoamento da prática educativa por meio de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática diária, ao planejamento de aulas e ao desenvolvimento do currículo da escola, de maneira a construir um processo contínuo de ensino/aprendizagem e a contribuir satisfatoriamente para a atualização profissional e para a integração ao mundo contemporâneo nas dimensões fundamentais da cidadania e do trabalho.

Nesse ínterim, que foca numa aprendizagem de formação geral em que se prioriza a aquisição de conhecimentos, a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação, a pretensão dessa sequencia didático tem a finalidade de contribuir para a transformação do ensino médio assim como formar alunos capazes de buscar, analisar e selecionar informações de modo crítico em detrimento do ensino focado nos processos de memorização.

A integração e o uso da Matemática para justificar fatos da Física sempre foram e serão mecanismos favoráveis para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia.

É válido ressaltar que para propagar tais ideias é necessário discutir/comentar alguns pré-requisitos matemáticos e físicos de acordo com a série em que há pretensão a aplicar a referida técnica. É de suma importância que o aluno saiba e domine os conceitos de função úteis na construção do esboço gráfico da situação proposta. Assim a primeira etapa de todo o processo, consiste numa revisão de tópicos de função (1º grau, 2º grau, exponencial, logarítmica, trigonométrica, hipérbole equilátera, etc.), de acordo com o enfoque que o professor trabalhará.

Por exemplo, caso o professor esteja interessado apenas em aplicar os conceitos de limite às funções do 1º grau cujos gráficos serão figuras planas poligonais não há necessidade de explanar as demais funções. Já o educador que pretende estudar tais fenômenos que desembocam em gráficos parabólicos, é preciso discutir com os alunos tópicos relacionados ao estudo das funções quadráticas e suas relações gráficas com o estudo da parábola. Nos outros casos, recomenda-se prosseguir com raciocínio análogo. O número de aulas previstas de revisão dependerá do nível da turma em que se pretende aplicar o trabalho.

Além disso, é preciso utilizar o laboratório de informática como recurso suplementar para o ensino e manejo do software de geometria dinâmica GeoGebra. Em geral, de duas a quatro aulas são suficientes para aprender a usar de forma básica, desde que haja planejamento de atividades e interesse por parte discente e docente no aprimoramento da utilização.

Após o domínio das ferramentas básicas do GeoGebra, é hora de propor a plotagem/construção de gráficos. É recomendável que o professor inicie seu trabalho a partir de uma situação problema que empregará conceitos de função do 1º grau e que implicará na utilização dos conceitos físicos de acordo com a série momentânea. Forneça os dados via tabela, via texto ou via fórmula. Solicite a interpretação da função com questionamentos: Quem é a variável dependente e a independente? Como representamos tal situação graficamente? O que representa o produto das variáveis? Etc..

7.4.4.1 Velocidade x Tempo e Cálculo de Velocidade instantânea

Para compreender o significado de velocidade instantânea de um móvel em movimento, faz-se necessário compreender o conceito de taxa de variação.

Considere que $x = f(t)$ seja equação que descreve o movimento do móvel (função horária do móvel). A velocidade média (v_m) de um móvel, entre os instantes t_1 e $t_2 = t_1 + \triangle t$, é definida como a razão entre variação do espaço percorrido pelo tempo gasto para executar tal deslocamento:

$$v_m = \frac{\triangle S}{\triangle t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{(t_1 + \triangle t) - t_1} = \frac{f(t_1 + \triangle t) - f(t_1)}{\triangle t}.$$

Tomando $\triangle t \to 0$, tem-se que v_m tende para a velocidade instantânea, isto é:

$$v_{instatanea} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{f(t_1 + \triangle t) - f(t_1)}{\triangle t}.$$

A razão $\frac{f(t_1+\triangle t)-f(t_1)}{\triangle t}$ é denominada de Quociente de Newton. Esse quociente é bastante corriqueiro em problemas de Matemática (problemas de tangência a curvas), Física (velocidade instantânea, aceleração instantânea, etc.), Química (quociente de reações químicas) e Economia (problemas de custo marginal). No estudo de cálculo esse conceito receberá o nome de derivada de uma função em um dado ponto, ou ainda, representa geometricamente a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto $(t, f(t))$.

Nesse momento, seria interessante propor atividades de cunho experimental com carrinhos de flexão ou com problemas de queda livre. Nessa tarefa, além de realizar anotações acerca de deslocamentos e tempos decorridos, é interessante solicitar a construção de um esboço gráfico da situação e propor questionamentos aos alunos acerca da área sob o gráfico da curva obtida ao traçar o gráfico.

Situação Problema: Cálculo da distância d percorrida por um móvel com velocidade $v(t)$ no intervalo de tempo $[a, b]$.

1º caso: Se a velocidade $v(t)$ for constante e igual a v, segue que:

$$d = vt = v(b - a).$$

2º caso: Se a velocidade $v(t)$ não for constante em $[a, b]$, então é possível adotar uma subdivisão desse intervalo em n partições de mesmo comprimento e supor que a velocidade seja constante em cada subintervalo. Isto é, adotando $t_1, t_2, t_3, t_4, \cdots, t_n$ como comprimento desses subintervalos, tem-se:

$$d \cong v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3 + \cdots + v_n t_n.$$

Observe a situação ilustrativa de aplicação das ideias difundidas acima por meio da análise da tabela que fornece a velocidade de um corpo, que se desloca com movimento retilíneo, em diversos instantes:

Tabela 7.4: Dados da Velocidade em função do tempo.

t(segundos)	0	1	2	3	4	5
v (m/s)	2	5	8	11	14	17

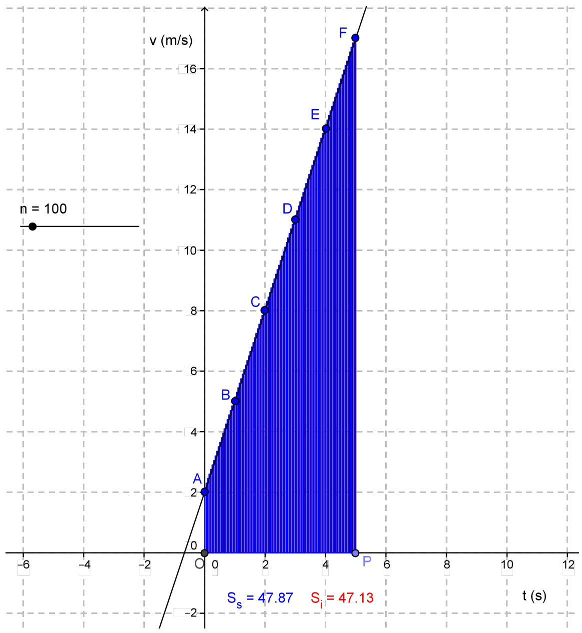

Figura 7.33: Trapézio retângulo.

Fonte: GeoGebra

7.4.4.2 Transformação Isotérmica ou Lei de Boyle

Um gás sofre transformação isotérmica quando há variação da sua pressão e do seu volume sem que haja variação de sua temperatura, isto é, a temperatura permanece constante. Daí se explica o nome da transformação que é uma fusão do prefixo iso (do grego: iso = igual) com a palavra thermo (do grego: thermo = calor).

Segundo a Lei de Boyle-Mariotte, a pressão (P) e o volume (V) de um gás são inversamente proporcionais, ou seja, aumentando a pressão, o volume de gás diminui.

Um exemplo simples, prático e presente diariamente em nosso dia-a-dia é o êmbolo de uma seringa. Como a Pressão (P) e o volume (V) de um gás são inversamente proporcionais, segue que $PV = k$. Observe a situação hipotética tabulada e a construção do gráfico a partir de tais dados. Daí decorre que os pontos da curva geram de fato uma hipérbole. Isto é, por intermédio da construção do gráfico da função (hipérbole) $y = \frac{54}{x}$ é possível conjecturar um valor para o trabalho realizado no intervalo $[3, 24]$. O eixo das abscissas contém os valores do volume, enquanto o eixo das ordenadas contém os valores da pressão do referido gás em estudo.

Tabela 7.5: Dados hipotéticos de Pressão e Volume de um gás fictício.

Pressão (atm)	Volume (ml)	Produto (P $\cdot V$)
3	18	54
6	9	54
12	4.5	54
18	3	54
24	2.25	54

Note que a aproximação via polígonos retangulares inferiores quanto a aproximação via polígonos retangulares superiores está tendendo para um número entre 112,12 e 112,46 unidades de área. Como a área em questão representa o trabalho realizado pelo gás e, conforme já foi provada, a referida área pode ser obtida a partir de uma subtração entre os logaritmos naturais das abscissas do intervalo $[3, 24]$, segue que o trabalho (T) realizado será dado por: $T = 54(\ln\ 24 - \ln\ 3) \cong 112,289$.

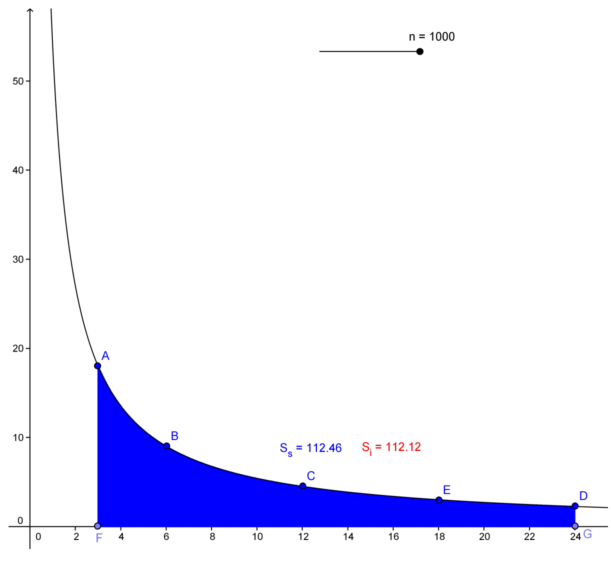

Figura 7.34: Faixa de Hipérbole com Polígono Retangular para $n = 1000$.

Fonte: GeoGebra

7.4.5 Sugestão de estratégia de inserção da derivada

É consenso entre os estudiosos do assunto de que a introdução do estudo de derivadas deve ser realizada por meio de suas aplicações como, por exemplo, ao introduzir conceitos de pressão, densidade da massa, densidade da carga elétrica e em problemas de tangência em determinados pontos de uma curva.

Vários artigos da RPM já mencionaram a importância desse estudo e defenderam de forma ferrenha e de acordo com história, o estudo das derivadas. Dentre os inúmeros artigos que citam direta/indiretamente o ensino de derivadas merece destaque os artigos de ÁVILA (1991) [1] nas revistas de número 18, 23 e 60 e o artigo dos professores WAGNER e CARNEIRO (2004) [32] na revista de número 53.

Analisando o artigo mais recente da RPM de número 60 sobre o tema, cuja autoria é exclusiva do professor ÁVILA (2006) [2], é possível verificar a possibilidade de aplicação das noções elementares do Cálculo, em particular do estudo inicial de derivadas, no Ensino Médio. Nesse artigo, o autor critica as abordagens feitas pelos livros didáticos e propõe uma abordagem segundo a utilização de ferramentas do Cálculo diferencial e integral com o intuito de promover um ensino básico de forma ampla, contextualizada e harmônica com outras áreas do conhecimento.

A princípio, ÁVILA [2] apresenta o estudo das coordenadas do vértice de uma parábola conforme a maioria dos livros didáticos nos apresenta, isto é, um amontoado de proposições e fórmulas sem justificativas e aceitas via decoreba sem demonstração formal ou intuitiva. Um verdadeiro disparate, dado que há uma desvinculação entre definição do vértice e a função propriamente dita cujo gráfico é uma parábola. Segundo SANTOS (2006) [24]:

> a definição mais natural e contextualizada seria a de que o vértice da parábola é o ponto que representa o extremo (máximo ou mínimo) da função quadrática, sendo a abscissa o ponto onde esse extremo é atingido e a ordenada o valor extremo assumido. Dessa forma, ao considerar uma função quadrática como um modelo matemático, fica clara a importância de se obter o vértice da parábola, ao interpretá-lo como o extremo da função". (SANTOS [24], 2006, p.4)

É importante salientar que, segundo ÁVILA (2006) [2], para seguir os próximos passos propostos na RPM de número 60, faz-se necessário uma abordagem inicial do estudo de derivadas conforme a maior parte dos livros didáticos de Cálculo apresenta em que o limite das inclinações das retas secantes ao gráfico de uma parábola ($y = ax^2 + bx + c$) tende para ($2ax + b$). A apresentação desse estudo é feita posteriormente com auxílio do GeoGebra. Caso não seja suficiente a atividade proposta, é recomendado realizar uma leitura crítica e minuciosa da exposição desse assunto em STEWART (2006) [37].

A partir desses pré-requisitos, é possível introduzir as noções elementares de derivada difundidas no presente artigo. Nele há uma interpretação geométrica da derivada relacionada ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função quadrática em cada ponto descartando a análise via zeros da função. Como a inclinação da reta tangente no vértice da parábola possui valor nulo uma vez que a reta tangente é horizontal, segue que a derivada da função ($f(x) = ax^2 + bx + c$) no ponto que contém a abscissa do vértice é igual a zero, isto é:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax_v + b = 0 \Leftrightarrow \frac{-b}{2a}.$$

Já a ordenada y_v pode ser obtida como a imagem da abscissa, ou seja, substituindo o valor da abscissa do vértice na função quadrática.

Nesse mesmo artigo, ÁVILA (2006) [2] cita uma aplicação da derivada segunda para uma análise da concavidade da parábola e, além disso, também faz uma citação de referência a uma aplicação da derivada como taxa de variação no estudo de Mecânica na Física. A explanação com riqueza de detalhes ficará a cargo do leitor, pois assim evita-se uma fuga demasiada do escopo da discussão desse trabalho de dissertação.

Veja o esboço da situação descrita acima.

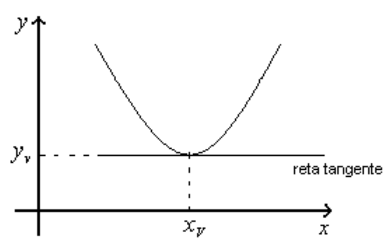

Figura 7.35: Reta tangente a uma dada parábola.

Fonte: RPM [2], n.60

7.4.5.1 Interpretação geométrica do estudo da derivada

Conforme a maioria dos livros didáticos de cálculo propõe, recomenda-se que a introdução do estudo de derivadas seja realizada a partir da situação problema de traçar a reta tangente a uma curva num determinado ponto.

Se a figura curvilínea for uma circunferência, basta encontrar a reta que toca a circunferência em um único ponto. Mas essa noção não pode ser estendida como caso geral, pois há diversos exemplos de curvas qualquer em que uma dada reta intercepta somente em um ponto e tal reta não representa a reta tangente. Por exemplo, se a referida curva fosse uma parábola, é óbvio que a reta vertical que representa o eixo da parábola intercepta a curva somente em seu vértice e tal reta não representa uma reta tangente da parábola. Sendo assim, faz-se necessário criar uma definição geral capaz de ser utilizada em qualquer gráfico curvilíneo.

Para isso, é necessário partir de uma situação concreta, por exemplo, escolhendo o gráfico de uma função quadrática ($y = x^2$). Considere dois pontos nessa curva, $P = (a, f(a))$ e $Q = (a+h, f(a+h))$. A proposta exibida abaixo é referente a uma análise da inclinação das retas secantes quando Q se aproxima de P com a intenção de conjecturar uma definição precisa de reta tangente via razão incremental (inclinação, coeficiente angular).

Observe o procedimento da situação descrita via representação no GeoGebra cujos passos devem ser repassados conforme proposição abaixo:

1º passo: Digite na linha de comandos (campo entrada) a lei de formação da função quadrática ($f(x) = x^2$).

2º passo: Crie dois controles deslizantes, a e h. O primeiro (a) com intervalo de variação de -10 até 10 com incremento de 0.1. O segundo (h) com mesmo intervalo e com mesmo de 0.01.

3º passo: Crie dois pontos (A e Q). O primeiro com coordenadas $A = (a, f(a))$ e o segundo com coordenadas $Q = (a + h, f(a + h))$. Em seguida, crie a reta definida por dois pontos (A e Q).

4º passo: Crie uma razão incremental (m) tal que:

$$m = \frac{(y(Q) - y(A))}{(x(Q) - x(A))}.$$

5º passo: Solicite aos alunos que realize variação no controle deslizante a e no controle deslizante h.

6º passo: Mantenha o controle deslizante na posição $a = 1$ e faça variações no controle deslizante h.

7º passo: Solicite aos alunos que comparem o valor do coeficiente angular da reta AQ com o valor da razão incremental (m) quando o ponto Q se aproxima do ponto A em sua vizinhança.

A seguir, observe as retas secantes ao gráfico da função quadrática $(f(x) = x^2$ com representação de limites laterais $(h = -0.04$ e $h = 0.04)$. É válido que após a realização dos passos descritos e de analisar as conjecturas obtidas pelos alunos, o professor deve realizar diversos questionamentos acerca da atividade desenvolvida dentre os quais o de maior destaque consiste em observar o que acontece na vizinha do ponto $P = (1, 1)$.

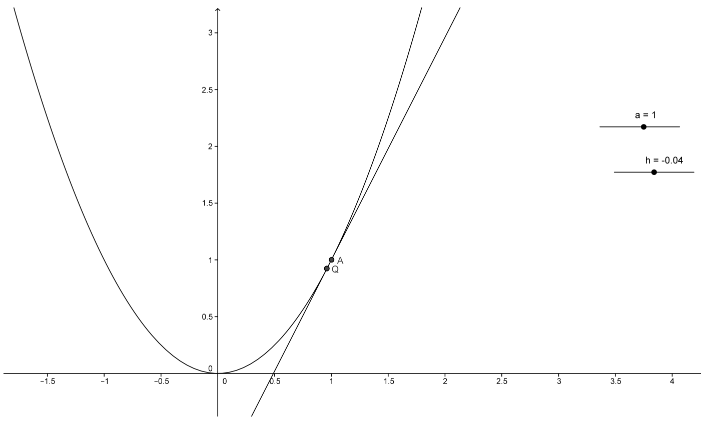

Figura 7.36: Reta secante ao gráfico de uma função quadrática $f(x) = x^2$ (limite lateral a esquerda).

Fonte: GeoGebra

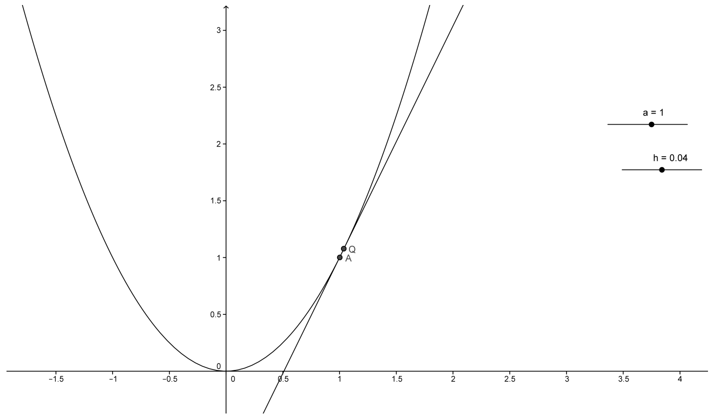

Figura 7.37: Reta secante ao gráfico de uma função quadrática $f(x) = x^2$ (limite lateral a direita).

Fonte: GeoGebra

7.4.5.2 Interpretação algébrica do estudo da derivada

Após realizar experimento via GeoGebra e incitar conjecturar a partir de inúmeras modificações nos cursores (a e h) que conduzem alterações no ponto escolhido e no incremento lateral analisado, é hora de utilizar o quadro da sala de aula com o intuito de realizar um estudo algébrico das etapas a partir da análise da razão incremental (m) comparando com o valor do coeficiente angular da reta secante AQ.

Observe como seria o referido estudo analítico e algébrico:

$$m = \frac{(y(Q) - y(A))}{(x(Q) - x(A))}$$
$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - h}$$
$$= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$
$$= \frac{2ah + h^2}{h}$$
$$= 2a + h.$$

Note que, quanto mais próximo o ponto Q estiver em relação ao ponto A, o valor de h tenderá a zero, isto é:

$$\lim_{h \to 0}[m = \frac{(y(Q) - y(A))}{(x(Q) - x(A))}] = \lim_{h \to 0}[2a + h] = 2a.$$

Note que para $a = 1$, implica em $m = 2$, ou seja, a inclinação da secante AQ também será igual a 2 e nesse momento a reta, via GeoGebra, secante deixa de "existir", pois não faz sentido para o programa divisão com denominador nulo. Mas é válido ressaltar que a reta existe e trata-se da reta tangente cuja inclinação (coeficiente angular ou razão incremental) coincide com o valor da derivada no ponto A. Caso o professor ache conveniente, introduza a notação de derivada primeira num ponto qualquer determinado ($f'(a) = 2a$). Essa atitude, de acordo com o nível de abstração da turma, pode ser um belo exemplo e uma boa alternativa de introdução das técnicas e propriedades de derivação da função polinomial.

Na atividade proposta também foi utilizada a função quadrática, mas é válido salientar que há viabilidade e facilidade da extensão para demais funções (1º grau, exponencial, logarítmica e até mesmo a função trigonométrica).

O problema descrito abaixo é referente a uma situação problema de utilização prática do estudo de derivada com auxílio do GeoGebra.

1ª Situação problema: Aplicação num problema de maximização

Um terreno em formato retangular possui perímetro de medida igual a 74 metros. A partir dessa informação, determine a medida dos lados desse retângulo para que a área desse terreno seja máxima.

Resolução passo a passo via GeoGebra:

1º passo: Equacionar o problema a partir dos dados.

Sejam a e b os lados do terreno em questão.

Como o perímetro mede 74 metros, segue que: $2a + 2b = 74$.

Isto é, $a + b = 37$ que é equivalente a $b = 37 - a$.

Como o problema solicita os valores das dimensões que geram área (S) máxima, segue que: $S = ab = a(37 - a) = -a^2 + 37a$.

2º passo: Após o equacionamento, construir, via GeoGebra, o gráfico da função quadrática obtida ($f(x) = -x^2 + 37x$).

3º passo: Criar um controle deslizante (a) de intervalo de -50 a 50 com incremento de 0.1.

4º passo: Criar um ponto de coordenadas $P = (a, f(a))$. Em seguida, criar uma reta tangente no ponto P.

5º passo: Varie o controle deslizante e observe na janela de álgebra os valores das ordenadas do ponto P.

Observe a imagem da tela do GeoGebra após sequencia dos passos anteriores:

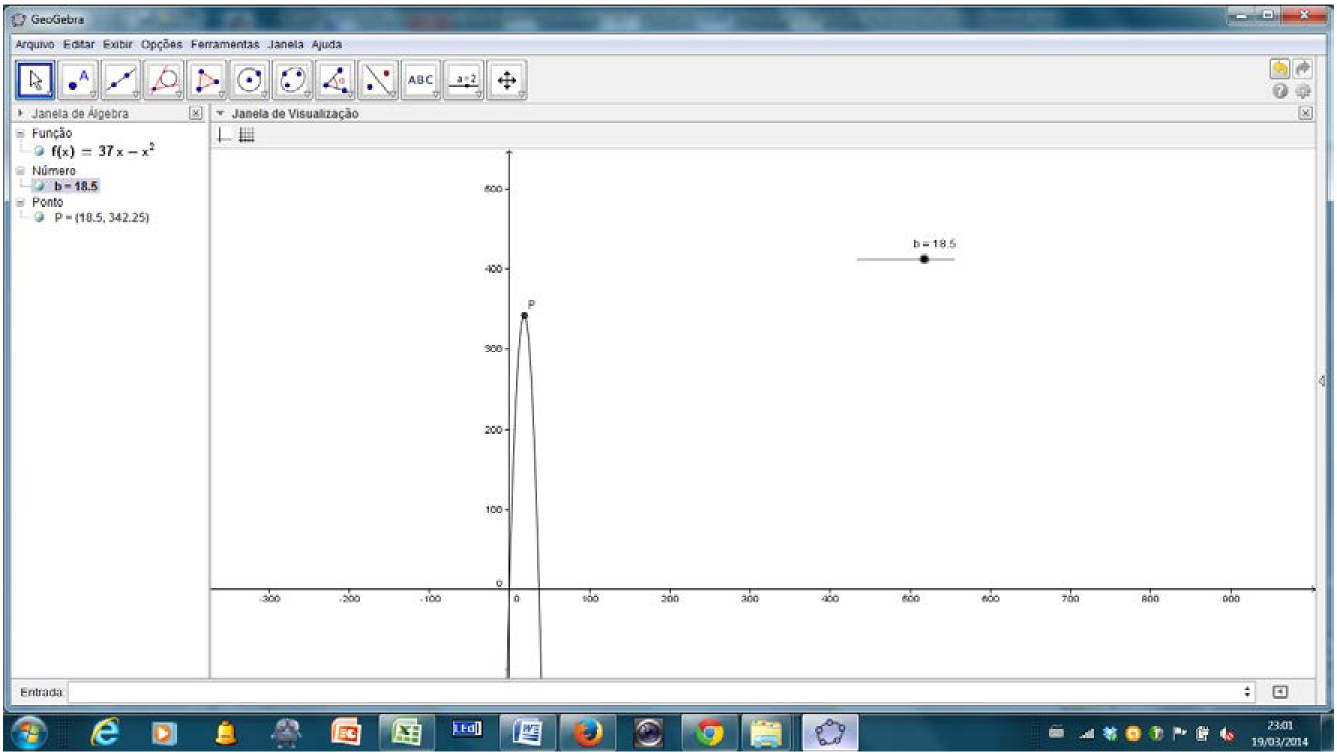

Figura 7.38: Ponto (P) de máximo da função quadrática relativo a área retangular.

Fonte: Imagem capturada de janela do GeoGebra

Note que, quando o ponto P atinge o vértice (V) da parábola as coordenadas desse ponto são dadas por $V = (18.5, 342.25)$. Assim é possível concluir que a função área assume valor máximo quando a reta tangente torna-se horizontal, isto é, a máxima área ocorre quando a inclinação da reta tangente é igual a zero e o retângulo torna-se um quadrado de lado de medida 18.5 metros. Utilizando a linguagem do cálculo, é possível dizer que a área é máxima quando a derivada no ponto P é igual a zero (vide imagem a seguir).

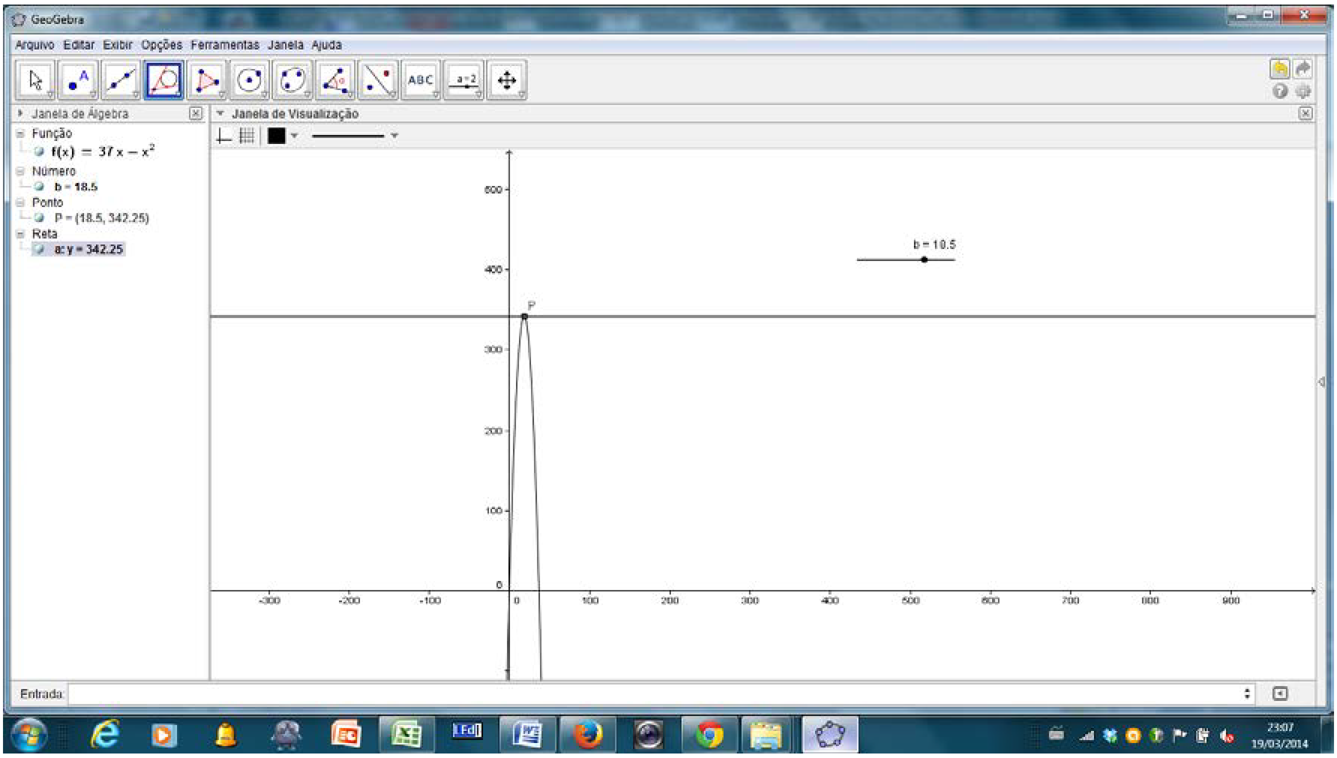

Figura 7.39: Reta tangente ao ponto de máximo da função quadrática.

Fonte: Imagem capturada da janela do GeoGebra

8 CONCLUSÃO

Ao tomar a decisão final de pesquisar sobre o tema em estudo e escrever uma proposta de sequência didática de resgate à inserção das noções elementares do Cálculo durante o Ensino Médio, é importante confessar que a princípio tal ideia aparentemente foi considerada absurda, antiquada e de discussão desprezível. Após finalizar todo o levantamento de dados dessa dissertação, foi possível perceber quão é pertinente tal discussão e quanto o ensino está sendo negligenciado por professores experientes e de reputação ilibada no mercado da terceira etapa da educação básica.

Assim como opinaram a maioria dos professores que atua na rede municipal e estadual do Espírito Santo, nossa visão, a priori, do tema da pesquisa era crítica e contrária à introdução de conceitos de limite, deriva e integral. Uma justificativa plausível seria dizer que a clientela existente na educação básica diariamente está constantemente nos desapontando com problemas simples de matemática elementar e isso talvez tenha contribuído para o equívoco de considerar tal proposta absurda, impossível e incompatível com a realidade da maioria das escolas capixabas, porém em contrapartida é preciso focar a atenção ao prejuízo que estamos causando àquela minoria de estudantes ávidos pelo saber e que possuem alto grau de abstração. A preparação de nossos alunos para ingressarem no estudo de matemática superior não está sendo suficiente. Isso pode ser uma das justificas para os pífios índices de aprovação da maior parte dos alunos que estudam Cálculo. A implementação de nossa proposta em sala de aula, mesmo que seja para um seleto grupo, pode gerar mudanças significativas com contribuições ímpares para o ensino/aprendizagem dos alunos partícipes.

Também foi possível refletir sobre vários pontos da educação matemática capixaba, em particular do público alvo da pesquisa pertencente à Grande Vitória, que perpassa desde a formação inconsistente dos professores, seja de instituição pública ou privada, até a precariedade/negligência de nossos livros didáticos, do currículo estadual, dos PCN, da proposta do ENEM e dos cursos de capacitação em relação ao repasse de noções elementares do Cálculo.

O presente trabalho serviu para nos alertar sobre a importância da História da Matemática na evolução dos conceitos. Às vezes, desejamos que os alunos aprendam algo em um dia, sendo que tal conceito demorou séculos para atingir o rigor e o padrão preestabelecido em nossas literaturas de matemática. Além disso, serviu de instrumento norteador para pensar em mudanças ou adaptações significativas em nossos livros didáticos para que os mesmos estejam em conformidade com a proposta constitucional de preparação para uma continuação de estudos mais avançados. Também serviu de aperfeiçoamento do conhecimento via emprego prático e motivador de planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica (GeoGebra). Como esses recursos podem tornar as aulas mais interessantes e fazer com que o ensino/aprendizagem seja facilitado.

O emprego das noções de Cálculo no Ensino Médio, via noções intuitivas e via situações problema de aplicações reais, pode ser incluso novamente nos PNCEM, no currículo estadual e/ou então nas estratégias suplementares do plano pedagógico da escola básica com o intuito de oportunizar um aprendizado mais qualificado aos alunos e de prepará-los para estudos posteriores com maior teor de abstração. Foi possível verificar que algumas propriedades são justificadas de maneira rigorosa apenas com o auxílio de ideais correlatas do Cálculo (limite, derivada e integral), principalmente a explicação matemática de alguns fenômenos físicos e químicos, tornando a matemática interdisciplinar.

Enfim, é preciso ensinar matemática com o intuito de formar alunos aptos a lidar com situações extremas de abstração nas universidades e não somente para adquirirem bom rendimento nos exames de caráter nacional (ENEM, PAEBES, etc.). Afinal, a omissão pode estar causando resultados negativos como: desmotivação dos alunos da escola básica, redução de procura por cursos que requerem uma boa formação na área de exatas e aulas expositivas cada vez mais distantes da realidade cotidiana dos nossos alunos. Assim, as políticas governamentais assim como os professores, devem participar dessas discussões com propostas de viabilidade de cursos de capacitação que oriente os profissionais a trabalharem com as noções de Cálculo via aulas expositivas com adaptações de recursos didáticos disponíveis e via produção de material específico que complemente as lacunas deixadas pelos livros didáticos disponíveis. Essa adaptação ao modelo tradicional de ensino, que já se mostrou desmotivador, arcaico e ultrapassado, pode ser uma alternativa eficiente para resgatar a busca incessante pelo aprofundamento do saber matemático, físico e químico por parte dos alunos.

I Resultados do questionário aplicado aos graduandos de engenharia da FAACZ (Anexo A)

Pesquisa com graduandos de Engenharia da faculdade de Aracruz (FAACZ)						
MESTRANDO: ALEXANDRE MAIA FERREIRA						
Pesquisa realizada com graduandos da FAACZ						
(FAACZ - Faculdade de Aracruz)						
1. Sexo						
Masculino	Feminino					
29	3	Total: 32 entrevistados				
2. Idade (i) (anos)						
i ≤ 20	20 < i ≤ 25	25 < i ≤ 30	30 < i ≤ 35	35 < i ≤ 40	40 < i ≤ 45	i > 45
18	11	2	1	0	0	0
3. Instituição que cursou a disciplina de Cálculo I						
Pública	Particular	Nome da Instituição				
0	32	FAACZ (FACULDADE DE ARACRUZ)				
4. Houve algum tipo de preparação para iniciar o estudo de Cálculo I?						
Não	Sim	Como se denominava a preparação?				
	X	CURSO DE NIVELAMENTO (PRÉ-CÁLCULO)				
5. Caso tivessem recebido uma iniciação das noções de Cálculo durante o Ensino Médio, seu rendimento teria sido melhor?						
Não	Sim	Em que grau de porcentagem?				
1	31	acima de 80% (7), de 50 a 80% (12) e menos que 50% (12)				
6. Em geral, os livros didáticos ensinam cálculo a partir das noções de limite. Essa sequencia está em conformidade com a história da evolução do Cálculo?						
Sim	Não	Por quê?				
20	4	Obs.: Quem respondeu não justificou e 8 abstiveram.				
7. Em geral nos cursos de Exatas, a disciplina de Cálculo I é ofertada no mesmo período que a disciplina de Física I que requer conhecimentos prévios de limite, derivada e integral. Você passou por essa situação?						
Não	Sim	Por quê?				
4	29	Devido a grade imposta. Obs.: 1 aluno não respondeu.				
8. Em qual livro didático você aprendeu Cálculo I (limite, derivada e integral)? Caso tenha sido em mais de um, por favor cite o autor.						
14 alunos estudaram no livro de Cálculo de George B. Thomas - 11ª Edição.						
1 aluno estudou no livro de Cálculo de James Stewart - 5ª Edição.						
12 alunos estudaram via apostila, notas de aula e vídeo-aula.						
9. Na sua opinião, diante do atual momento da educação básica do Brasil, seria possível repassar noções intuitivas de Cálculo I (limite, derivada e integral) sem formalidades num processo construtivo aos alunos de Ensino Médio?.						
Não	Sim	Por quê?				
19	13	Caos da educação pública.				
10. Na sua opinião, nas escolas brasileiras de educação básica em que os alunos tiveram uma base boa de matemática elementar, seria possível repassar noções intuitivas de Cálculo I (limite, derivada e integral) sem formalidades num processo construtivo aos alunos de Ensino Médio?.						
Sim	Não					
28	3					

11. Na sua opinião, em que assuntos do Ensino Médio (Álgebra/Aritmética) seria possível repassar noções intuitivas de Cálculo I (limite, derivada e integral) sem formalidades num processo construtivo aos alunos de Ensino Médio?.
Citaram o estudo de Funções e Sequências.
12. Em que assuntos do Ensino Médio da área de Geometria/Trigonometria seria possível repassar noções intuitivas de Cálculo I (limite, derivada e integral) sem formalidades num processo construtivo?
Citaram o estudo de Trigonometria, Problemas de Tangência, áreas e volumes.
13. Qual o nome do curso de graduação que está cursando?
Engenharia Mecânica
14. Já reprovou em alguma disciplina relacionada ao Cálculo? Qual?
Dos 32 alunos, apenas 6 alunos disseram que reprovaram em Cálculo I.
15. Com relação ao professor de Cálculo I: Qual a titulação (Especialista, Mestre, Doutor, Phd, etc.) dele?
5 alunos não souberam responder; Doutores (2 alunos);
Mestres (11); Especialistas (8) e Mestrando (6).
16. Com relação ao professor de Cálculo I: As aulas dele eram demonstrativas ou apenas aplicações de teoremas?
2 alunos não souberam responder, 13 responderam ambas;
15 alunos responderam demonstrativas.
2 alunos responderam aplicações de teoremas.
17. Com relação ao professor de Cálculo I: O professor utilizou recursos computacionais e/ou outros recursos didáticos para enriquecer as aulas?
Caso responda sim, por favor cite os softwares ou estragégias utilizadas.
24 alunos responderam que seus professores utilizam diversos recursos:
Data-Show, Softwares de Geometria dinâmica (Geogebra e Winplot),
Planilhas de Eletrônicas e sistemas de computação eletrônica (CAS).
5 alunos responderam que seus professores não utilizam recursos.
3 alunos não souberam opinar.
18. As avaliações de Cálculo I versus o desempenho/rendimento da sua turma foram satisfatórias ou muitos de seus colegas tiravam notas baixas?
4 alunos abstiveram-se.
14 responderam que a experiência foi satisfatória.
14 alunos responderam que as notas foram baixas.

19. Durante as aulas de Cálculo houveram momentos de aplicação de modelagem matemática?

Não	Sim	Cite algumas atividades realizadas.
12	6	14 alunos não responderam, pois não o que é modelagem matemática.

20. Como foi sua experiência ao iniciar o estudo da teoria de limites com as formalidades expressas em nossos livros de cálculo?

Péssimo	Ruim	Regular	Boa	Ótima	Excelente	
1	3	5	11	5	3	Não responderam 4

21. Como você avaliaria, em dados percentuais (DP), o nível de sua aprendizagem das noções de limite durante a disciplina de Cálculo I ?

Abaixo de 50%	50%	50% < DP < 70%	Acima de 70%
8	1	11	12

22. Durante a etapa da Educação Básica, em particular durante o Ensino Médio, houve alguma menção/citação/método de investigação das noções de Cálculo, principalmente das noções de limite?

Não	Sim	Cite a série em que houve a abordagem.
25	7	1ª Série e 2ª Série

23. Como você avaliaria o nível dos livros didáticos do Ensino Médio quanto ao repasse das ideias/noções intuitivas correlatas ao Cálculo (limite, derivada e integral)?

Péssimo	Ruim	Regular	Boa	Ótima	Excelente	
7	8	4	8	0	0	Não responderam 5

II Resultados do questionário aplicado aos professores de Matemática (Anexo B)

Perfil dos Colaboradores							
1. Sexo							
Respostas Obtidas	Não responderam	Masculino	Feminino				
38		23	15				
2. Idade (anos)							
Respostas Obtidas	Não responderam	20a 30	31 a 40	41 a 50	51 ou mais		
38		16	15	5	2		
3. Formação							
Respostas Obtidas	Não responderam	Licenciatura plena	Licenciatura curta	Bacharel	Mestrado	Doutorado	Outros
		em Matemática	(Complementação)	em Matemática			
38		34	3				1
4. Instituição em que leciona matemática							
Respostas Obtidas	Não responderam	Pública	Particular	Ambas	Fora de sala		
38		28	5	3	2		
Caso a resposta seja instituição pública, qual a rede a qual pertence:							
Respostas Obtidas	Não responderam	Municipal	Estadual	Federal	Me E	Fora de sala	
38	6	4	17	4	5	2	
5. Em que modalidade educacional está atuando?							
Respostas Obtidas	Não responderam	Fundamental	Médio	Superior	F e M	Fora de sala	
38	2	7	16		11	2	
Tempo de serviço	Escola Pública						
	Escola Particular						
6. Qual a sua experiência profissional (EP) (em anos) em sala de aula?							
Respostas Obtidas	Não responderam	$EP \leq 5$ anos	$5 < EP \leq 10$	$10 < EP \leq 15$	$15 < EP \leq 20$	$EP > 20$	
38		13	13	7	1	4	
7. Realizou algum curso de aperfeiçoamento em ensino de Matemática nos últimos 10 anos?							
Respostas Obtidas	Não responderam	SIM	QUAIS? ONDE?			NÃO	
38	1	22	PAPEM, UFES			15	
8. Em que instituição realizou sua graduação?							
Respostas Obtidas	Não responderam	Pública	Particular	AMBAS			
38		25	12	1			

Experiências/Formação/Análise do Professor de Matemática								
	Número de Entrevistados	Dados BRUTO da pesquisa						
		1	2	3	4	5	6	
		Péssimo	Ruim	Regular	Bom	Ótimo	Excelente	NR
Como você classificaria sua formação durante a fase de graduação?	38	0	0	7	19	7	0	5
Como você avaliaria a preparação recebida na educação básica para iniciar o estudo de Cálculo?	38	5	11	7	7	3	0	5
Como você avaliaria o trabalho dos seus professores do ensino médio ao ensinar ideias relativas ao cálculo I (noções de limite, derivada e integral)?	38	15	12	2	3	0	0	6
Como você analisaria sua carga horária recebida na disciplina de Cálculo?	38	3	3	11	12	3	1	5
Que conceito você atribuiria a sua aprendizagem de Cálculo I?	38	1	3	7	17	5	0	5
Que conceito você atribuiria ao nível dos alunos quanto ao entendimento das noções/teoria de limite?	38	3	8	7	13	1	0	6
Que conceito você atribuiria a didática do professor de Cálculo I?	38	1	5	8	8	7	4	5
Que conceito você atribuiria às demonstrações dos teoremas de Cálculo I?	38	1	5	9	10	5	3	5
Que conceito você atribuiria às aplicações dos teoremas de Cálculo I?	38	1	4	12	12	3	1	5
Que conceito você atribuiria às citações históricas relativas ao estudo de limite, deriva e integral?	38	4	10	11	4	2	1	5
Que conceito você atribuiria à aplicação do estudo de limite, deriva e integral em modelagem matemática?	38	4	9	6	11	1	1	6
Que conceito você atribuiria ao professor de Cálculo I com relação ao uso de softwares e outras ferramentas?	38	13	7	9	3	1	0	5
Que conceito você atribuiria ao tempo de dedicação ao Cálculo I?	38	1	5	12	11	2	1	6
Caso já tenha lecionado Cálculo I, como avaliaria o nível de conhecimento básicos de matemática dos seus alunos?	38							
Caso já tenha lecionado Cálculo I, como avaliaria as estratégias utilizadas durante as aulas?	38							
Caso já tenha lecionado Cálculo I, como avaliaria a aceitação das demonstrações dos teoremas de Cálculo I?	38							

Plano de Curso/Plano de Ensino/ Recursos didáticos/ Carga Horária/Ementa de Cálculo I								
	Número de Entrevistados	Dados percentuais da pesquisa						
		1	2	3	4	5	6	
		Péssimo	Ruim	Regular	Bom	Ótimo	Excelente	NR
Como você analisaria a ementa da disciplina de Cálculo I ofertada?	38	2	0	5	19	8	3	1
Como você analisaria cumprimento integral da ementa de Cálculo I num semestre?	38	2	8	9	15	1	2	1
Como você avaliaria a carga horária da disciplina de Cálculo I durante sua formação?	38	1	3	15	13	2	3	1
Como você avaliaria o domínio da disciplina do seu professor de Cálculo I durante sua graduação?	38	1	1	5	9	11	10	1
Como você avaliaria o plano de ensino do professor durante sua graduação?	38	1	2	7	17	5	5	1
Como você classificaria o livro didático adotado durante a graduação?	38	0	2	7	8	14	5	2
Como você classificaria o nível das avaliações aplicadas durante a graduação?	38	0	1	11	11	11	3	1
Como você classificaria o rendimento geral da sua turma nas avaliações sobre a teoria de limite durante sua formação?	38	0	5	17	10	4	2	1
Como você classificaria os recursos didáticos utilizados pelo seu professor durante a graduação?	38	3	8	12	10	2	2	1
Como você classificaria a didática x conhecimento do seu professor de Cálculo I?	38	0	2	14	5	5	8	1
Como você avaliaria o interesse do seu professor de Cálculo I em demonstrar teoremas da teoria de limites?	38	2	3	8	14	6	5	0
Como você avaliaria o interesse do seu professor de Cálculo I com relação a apresentação de aplicações da teoria de limites?	38	2	5	8	15	4	4	0
Como você avaliaria o interesse do seu professor de Cálculo I com relação ao ensino de modelagem matemática que necessitasse da teoria de limites?	38	6	6	10	12	2	1	1

Caso tivesse recebido aulas no ensino médio de noções de limite e outras ideias do Cálculo, como seria sua expectativa de rendimento em Cálculo I?	38	2	1	3	10	14	5	3
Como você avaliaria seu ensino quanto ao repasse das noções de limites e ideias correlatas do Cálculo I ao trabalhar no Ensino Médio, quando necessárias?	38	4	7	10	12	2	1	2
Como você classificaria o teor de sua resposta caso um aluno de Ensino Médio lhe fizesse um questionamento sobre as noções de limites ou ideias correlatas do Cálculo I?	38	3	6	12	14	2	1	0
Como você avalia seu conhecimento de conteúdos da educação básica que requerem a introdução de noções do cálculo?	38	2	5	12	14	4	1	0
Quanto ao tratamento das noções de limites e ideias correlatas do Cálculo, como você classifica os livros didáticos do Ensino Médio?	38	8	13	10	5	0	1	1
Como você classificaria o nível de preparação da maioria dos alunos atuantes na educação básica, caso tivessem que repassar aos alunos noções de limite e ideais correlatas do cálculo?	38	8	17	2	0	2	0	9
Como você classificaria o nível de preparação da maioria dos professores atuantes na educação básica, caso tivessem que repassar aos alunos noções de limite e ideais correlatas do cálculo?	38	5	15	7	0	2	0	9

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. *O Ensino do Cálculo no Segundo Grau.* Revista do Professor de Matemática, n.18. Rio de Janeiro: SBM, 1991, p.1-9.

[2] ÁVILA, Geraldo. *Limites e Derivadas no Ensino Médio.* Revista do Professor de Matemática, n.60. Rio de Janeiro: SBM, 2006, p.30-38.

[3] BOYER, Carl Benjamim. *História da Matemática*, 2ªEd. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.

[4] BOYER, Carl Benjamim. *Cálculo: Tópicos de História da Matemática para o uso em sala de aula*. São Paulo: Atual, 1992.

[5] CARVALHO, João Bosco Pitombeira. *O Cálculo na escola secundária - algumas considerações históricas*, Caderno CEDES. Campinas: Papirus, n.40, p. 68-81, 1996.

[6] CONTADOR, Paulo Roberto Martins, *Matemática, uma breve História*, Volume I, 4ªEd. São Paulo: Livraria de Física, 2012.

[7] CONTADOR, Paulo Roberto Martins, *Matemática, uma breve História*, Volume II, 4ªEd. São Paulo: Livraria de Física, 2012.

[8] CONTADOR, Paulo Roberto Martins, *Matemática, uma breve História*, Volume III, 4ªEd. São Paulo: Livraria de Física, 2012.

[9] DANTE, Luis Roberto, *Matemática: Contexto e Aplicações*, 3v, 1ªEd. São Paulo: Ed. Ática, 2010.

[10] DUCLOS, Roberto Costa. *Cálculo no Segundo Grau.* Revista do Professor de Matemática, n. 20. Rio de Janeiro: SBM, 1992, p.26-30.

[11] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*, Campinas. São Paulo: Unicamp, 2004.

[12] FINNEY, Ross Lee; WEIR, Maurice; GIORDANO, Frank. *Cálculo de George B. Thomas*, Volume I, 10ªEd. São Paulo: Person Addison Wesley, 2002.

[13] GALARDA, Lilian Jeanette; SILVA, Sophia E. E.; ROSSI, Suely M. M..*A Evolução do Cálculo através da História*, 1ªEd. Vitória: UFES, 1999.

[14] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. *Matemática Completa*, 3v, 2ªEd. São Paulo: FTD, 2005.

[15] IEZZI, Gelson, et al. *Matemática: Ciência e Aplicações*, 3v, 6ªEd. São Paulo: Editora Atual, 2010.

[16] LIMA, Elon Lages. *Logaritmos*. Brasília: SBM, 1980.

[17] LIMA, Elon Lages, et al. *A Matemática do Ensino Médio*, 3v. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[18] MACHADO, Nilson José. *Noções de Cálculo*. São Paulo: Editore Scipione, 1989.

[19] MACHADO, Nilson José. *Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica: Possível e Necessário*. São Paulo: Seminários de Ensino da Matemática - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP),2008.

[20] BRASIL, Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

[21] BRASIL, Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

[22] MORAES, Mônica Suelen Ferreira de, et al. *Alguns apontamentos sobre o desenvolvimento histórico do conceito de limite de função*. X Seminário Nacional de História da Matemática, 2013. Disponível em <http://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/anais-snhm/index>. Acesso em: 10 de Janeiro de 2014.

[23] PAIVA, Manuel, *Matemática*, 3v, 1ªEd. São Paulo: Moderna, 2009.

[24] SANTOS, Damiana, *A Inclusão do Cálculo Diferencial e Integral no Currículo do Ensino Médio*, Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática - Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2006.

[25] SOUZA, Joamir Roberto de, *Novo Olhar Matemática*, 3v, 1ªEd. São Paulo: FTD, 2010.

[26] GOULART, Luis Amorim, *CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: Progressões geométricas e o que vai para debaixo do tapete*. Rio de Janeiro:IMPA, 2013. 97f (Dissertação: Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, PROFMAT-IMPA, Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

[27] BRITO, Fábio Luis de, *CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: Área sob o gráfico de uma curva* Rio de Janeiro:IMPA, 2013. 59f (Dissertação: Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, PROFMAT-IMPA, Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

[28] POLYA, George, *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*, Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo, 2ªReimpressão. Rio de Janeiro: Interciência Ltda, 1995.

[29] GARBI, Gilberto Geraldo, *C.Q.D: Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria*, 1ªEd. São Paulo: Editoria Livraria da Física, 2010.

[30] BRASIL, Senado Federal. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*, Brasília: Lei 9394/1996.

[31] WAGNER, Eduardo, *Usando Áreas*. Revista do Professor de Matemática, n.21, Rio de Janeiro: SBM, 1992.

[32] CARNEIRO, José Paulo e WAGNER, Eduardo, *Vale a pena estudar Cálculo?*, Revista do Professor de Matemática, n.53, Rio de Janeiro: SBM, 2004, p.18-21.

[33] BIZELLI, Maria Helena S. S., *Cálculo Digital: Conteúdos didáticos digitais para o ensino e aprendizagem do Cálculo*. Disponível em <http://www.calculo.iq.unesp.br/sitenovo/Calculo1/calculo$_d$*igital.html*>. Acessado em: 10 de Março de 2014.

[34] LUCHETA, Valéria Ostete Jannis, *Matemática Interativa na Internet: Papiro Rhind*. Disponível em <http://www.matematica.br/historia/prhind.html>. Acessado em: 15 de Março de 2014.

[35] WIKIPÉDIA. *Desenvolvido pela Wikimedia Foundation. Apresenta conteúdo enciclopédico.*. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Matemática$_b$*abilnica*. Acessado em: 20 de Março de 2014.

[36] GOMES, Gisela Hernandes; Lopes, Célia Mendes Carvalho; Nieto, Solange dos Santos, *Cálculo zero: uma experiência pedagógica com calouros nos cursos de engenharia*, In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 33, 2005, Campina Grande. Anais... Campina Grande: UFPB, 2005. CD-ROM.

[37] STEWART, James. *CALCULO*. vol. I, Tradução da 5ªEd. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.