



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

# Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana †

por

**Laércio Francisco Feitosa**

sob a orientação do

**Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Abril/2013

João Pessoa - PB

---

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

# Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana

por

**Laércio Francisco Feitosa**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UEPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

---

**Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta - UFPB (Orientador)**

---

**Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB**

---

**Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano - UFPE**

**Abril/2013**

# Agradecimentos

A Deus por estar sempre presente em minha vida e por permitir essa nova conquista nos meus estudos. À coordenação e a todos os professores do PROFMAT pólo UFPB. Aos membros da banca, os professores Miguel Fidencio Loayza Lozano (UFPE), Uberlandio Batista Severo (UFPB). Ao meu orientador, Napoleón Caro Tuesta (UFPB), pelo incentivo constante e pelas contribuições, sugestões e críticas que muito contribuíram para a elaboração deste trabalho. Aos colegas da turma 2011 pelo companheirismo desde o início dessa jornada, em especial aos meus amigos e componentes do meu grupo de estudos, José Luiz Lucena Travassos, Luis Rodrigo D'Andrada Bezerra e Charleson Clivandir de Araujo Silva. Aos familiares e amigos que sempre me incentivaram e apoiaram nessa jornada. À minha esposa Sandra Cristina Cavalcanti de Albuquerque Barros, pelo apoio incondicional.

# Dedicatória

*Aos meus pais, Natalício (in memoriam) e Hosana (Nanha), sem os quais este trabalho não seria possível.*

*Para minha esposa, Sandra, a quem serei eternamente grato pelo incentivo e apoio.*

*Para minhas filhas, Letícia e Natália, que completam a minha existência.*

*Durante este outono, preocupei-me largamente com a consideração geral das superfícies curvas, o que conduz a um campo ilimitado... Essas pesquisas ligam-se profundamente com outros assuntos, inclusive – como me sinto tentado a dizer – com a metafísica da geometria, e não é sem ingentes esforços que consigo me arrancar as consequências que daí advém, qual seja, por exemplo, a verdadeira metafísica das grandezas negativas e imaginárias, o verdadeiro sentido de  $\sqrt{-1}$ , mas creio que será extraordinariamente difícil expressá-lo com palavras.*

GAUSS <sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), matemático alemão. Visto por muitos como o maior matemático de todos os tempos. É dele a expressão números complexos.

# Resumo

O ensino dos Números Complexos baseia-se quase exclusivamente, em uma abordagem algébrica, embora, a abordagem geométrica dos números complexos esteja contemplada no estudo da sua forma polar (ou trigonométrica).

O propósito deste trabalho é apresentar algumas aplicações significativas dos números complexos na geometria plana, fazendo, assim, uma contraposição a essa visão estritamente algébrica e formal, que tradicionalmente caracteriza o ensino destes números. Vamos abordar alguns teoremas clássicos da geometria e alguns problemas geométricos, avaliando a eficiência dos números complexos como ferramenta para demonstrar os teoremas e os resultados pertinentes a resolução de tais problemas. Alguns dos teoremas selecionados em nosso estudo foram: o Teorema de Napoleão, o Círculo dos Nove Pontos e a Reta de Simson.

**Palavras-chave:** Números Complexos, Geometria Plana.

# Abstract

The teaching of Complex Numbers is based almost exclusively on an algebraic approach, although the geometric approach of complex numbers is contemplated in the study of its polar form (or trigonometric).

The purpose of this paper is to present some significant applications of complex numbers in plane geometry, making thus a contrast to this view strictly algebraic and formal, that has traditionally characterized the teaching of these numbers. We'll cover some classical theorems of geometry and some geometric problems, evaluating the efficiency of complex numbers as a tool to demonstrate the theorems and results relevant to the resolution of such problems. Some of the theorems selected in our study were: Napoleon's Theorem, the Circle of Nine Points and Simson Line.

**Keywords:** Complex Numbers, Plane Geometry.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Números Complexos</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Raiz Quadrada de um Número Complexo . . . . .	4
1.3	Definição de Número Complexo . . . . .	5
1.3.1	Definição . . . . .	5
1.3.2	Conjugado de um Número Complexo . . . . .	6
1.3.3	Módulo de um Número Complexo . . . . .	8
1.4	Os Números Complexos como Pontos do Plano . . . . .	9
1.4.1	Forma Polar dos Números Complexos . . . . .	11
1.4.2	Operações com Números Complexos na Forma Polar . . . . .	13
1.5	Interpretação Geométrica de Operações Algébricas com Números Complexos . . . . .	16
1.5.1	Multiplicação de um Número Complexo por um Número Real $k$ . . . . .	16
1.5.2	Adição e Subtração . . . . .	17
1.5.3	Multiplicação e Divisão . . . . .	18
1.6	Raízes $n$ -ésimas da Unidade . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Números Complexos e Geometria</b>	<b>24</b>
2.1	Algumas Propriedades e Noções Geométricas Simples . . . . .	24
2.1.1	Distância Entre Dois Pontos . . . . .	24

2.1.2	Ângulo Orientado Entre Retas . . . . .	25
2.1.3	Ângulo Formado Entre Duas Retas . . . . .	25
2.1.4	Condição de Alinhamento de Três Pontos no Plano Complexo	27
2.1.5	Equação da Reta . . . . .	27
2.1.6	Equação Paramétrica da Reta . . . . .	30
2.1.7	Equação da Circunferência . . . . .	30
2.1.8	Perpendicularismo no Plano Complexo . . . . .	33
2.1.9	Equação da Reta Perpendicular . . . . .	33
2.1.10	Equação da Mediatriz de um Segmento . . . . .	34
2.1.11	Triângulos . . . . .	34
2.1.12	Triângulos Semelhantes . . . . .	35
2.1.13	Triângulo Equilátero . . . . .	38
2.1.14	Pontos Notáveis em um Triângulo . . . . .	40
2.2	Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana . . . . .	45
2.2.1	Teorema de Napoleão . . . . .	45
2.2.2	Círculo dos Nove Pontos . . . . .	46
2.2.3	A Reta de Simson . . . . .	49
2.2.4	Lei dos Cossenos e Lei dos Senos . . . . .	53
2.2.5	Resolução de Problemas Geométricos . . . . .	55
<b>A</b>	<b>Geometria Analítica e Números Complexos</b>	<b>61</b>
A.1	Equação da Reta . . . . .	61
A.2	Equação de uma reta determinada por um ponto e uma direção . . . . .	64
A.3	Equação da reta determinada por dois pontos . . . . .	66
A.4	Condição de Alinhamento de Três Pontos . . . . .	67
<b>B</b>	<b>Resolução dos Problemas 1 e 4</b>	<b>69</b>
B.1	Problema 1 . . . . .	69

---

B.2 Problema 4 . . . . .	71
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Introdução

Os números complexos ou imaginários surgiram como resposta a um problema que desafiou os matemáticos durante séculos. O problema surge quando tentamos calcular raízes quadradas de números negativos. Em 50 d.C., o matemático grego Heron de Alexandria, enfrentou esse problema ao tentar calcular o volume de parte de uma pirâmide. No entanto, o primeiro matemático a usar raízes quadradas de números negativos em seus trabalhos foi o italiano Girolamo Cardano (1501 – 1576), quando tentava encontrar uma fórmula resolutive para equações do 3º grau. Mas foi René Descartes (1596 – 1650) que cunhou o nome “imaginário” para as raízes quadradas de números negativos. Mais tarde, os matemáticos De Moivre (1667 – 1754) e Newton (1642 – 1727), combinaram trigonometria com números complexos em seus trabalhos. Mais tarde ainda, Euler (1707 – 1783) usou  $i$  para designar o número imaginário  $\sqrt{-1}$ , que foi amplamente aceito, pois ocultava o espectro da raiz quadrada negativa. O topógrafo e cartógrafo norueguês Caspar Wessel (1745 – 1818) foi o primeiro a representar geometricamente os números complexos. O trabalho de Wessel passou despercebido e foi um livreiro parisiense chamado Jean-Robert Argand (1768 – 1822) quem publicou pela primeira vez um trabalho em que os números complexos passaram a ser compreendidos de um novo ponto de vista: eles começaram então a ser vistos como pontos (ou vetores) do plano e suas operações de adição e multiplicação tiveram desvendados os seus significados geométricos (translações, rotações e dilatações no plano). Esse novo ponto de vista veio finalmente a se con-

---

sagrar com as realizações de Gauss (1777 – 1855), um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Gauss não só explorou a identificação do conjunto dos números complexos com o plano, mas principalmente usou os complexos para obter diversos resultados sobre Geometria Plana e sobre os números reais, e até sobre os números inteiros. Foi com a ajuda dos complexos que Gauss decidiu quais eram os polígonos regulares construtíveis com régua e compasso. Foi utilizando o plano complexo que Gauss deu sua demonstração geométrica de que todo polinômio de coeficientes reais pode ser decomposto em fatores de grau máximo dois, o que ele chamou de Teorema Fundamental da Álgebra.

A importância dos números complexos vai além da obtenção das raízes quadradas de números negativos, desempenhando um papel importante nos mais diversos ramos da matemática, aparecendo em problemas que envolvem rotações, funções trigonométricas, movimentos periódicos, dentre outros.

Neste trabalho apresentaremos algumas aplicações significativas dos números complexos na geometria plana. No Capítulo 1, faremos uma introdução aos números complexos, que difere um pouco do que ocorreu historicamente, onde apresentaremos algumas definições e propriedades que serão de suma importância no desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 2, apresentaremos algumas propriedades e noções geométricas simples no plano complexo, tais como ângulo formado entre duas retas, equações da reta, semelhança de triângulos, que serão utilizadas para a demonstração de alguns teoremas da geometria plana como o Teorema de Napoleão, o Círculo dos Nove Pontos e a Reta Simson. Ainda no Capítulo 2, faremos uso dos números complexos para resolver alguns problemas geométricos.

No apêndice A, traremos uma relação entre a geometria analítica e os números complexos. No apêndice B, traremos as soluções de dois problemas geométricos apresentados no Capítulo 2, porém com um enfoque diferente.

# Capítulo 1

## Números Complexos

### 1.1 Introdução

O modo padrão de introduzir os números complexos é fazer uma extensão do conjunto dos números reais, ou seja, estender o conceito de número, para que possamos resolver qualquer equação quadrática. Como sabemos a equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b \text{ e } c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \quad (1.1)$$

possui duas raízes reais se  $\Delta := b^2 - 4ac > 0$ , uma raiz real se  $\Delta = 0$  e não possui raiz real se  $\Delta < 0$ . Desta maneira, muitas equações quadráticas como, por exemplo,

$$x^2 + 1 = 0, \quad x^2 - x + 1 = 0, \quad x^2 + x + 1 = 0,$$

não possuem soluções reais. Para eliminar esta dificuldade, vamos estender o nosso conceito de número, considerando, por convenção, que a equação

$$x^2 + 1 = 0$$

tem uma raiz que chamaremos de *número imaginário*. Tal raiz não é um número real, pois não existe um número real cujo quadrado seja igual a  $-1$ . Denotaremos este número imaginário pela letra  $i$ . Acrescentando o número  $i$  ao conjunto dos números reais, teremos um conjunto estendido. Para que  $i$  possa ser chamado de número, devemos definir como efetuamos a multiplicação e a adição de números reais com  $i$ , neste novo conjunto estendido de números. Também devemos considerar como números imaginários todas as expressões da forma  $bi$ , onde  $b$  é um número real, e todas as expressões da forma  $a + bi$  onde  $a$  e  $b$  são números reais.

Para as expressões da forma  $a + bi$ , definiremos

- Igualdade

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d \quad (1.2)$$

- Adição

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad (1.3)$$

- Multiplicação

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (1.4)$$

Aqui levamos em conta que, por definição,  $i$  é a raiz da equação  $x^2 + 1 = 0$ , de modo que  $i^2 + 1 = 0$ , ou seja,  $i^2 = -1$ .

Dividir dois números complexos,  $\frac{a + bi}{c + di}$ , significa encontrar um número complexo  $x + yi$  tal que

$$a + bi = (c + di) \cdot (x + yi).$$

Efetuando o produto indicado, temos

$$a + bi = (cx - dy) + (dx + cy)i,$$

e pela igualdade de números complexos, obtemos

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, encontramos a solução única

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2},$$

onde  $c$  e  $d$  não são simultaneamente nulos. Daí

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

O conjunto assim obtido de números da forma  $a + bi$  (que inclui para  $b = 0$  todos os números reais, e para  $a = 0$  todos os números da forma  $bi$ ) é denominado **conjunto dos números complexos**, que denotaremos por  $\mathbb{C}$ .

Para o número complexo  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ),  $a$  é a parte real do número  $z$  e é denotada por  $\mathbf{Re}(z)$  e  $b$  é a parte imaginária de  $z$ , e é denotada por  $\mathbf{Im}(z)$ .

**Exemplo:** Dados  $z_1 = 3 - 2i$  e  $z_2 = 1 + i$ , temos

(a)  $z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (1 + i) = 4 - i;$

(b)  $z_1 - z_2 = (3 - 2i) - (1 + i) = 2 - 3i;$

(c)  $z_1 z_2 = (3 - 2i)(1 + i) = 3 + 3i - 2i - 2i^2 = 5 + i;$

(d)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 2i}{1 + i} = \frac{(3 - 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{3 - 3i - 2i + 2i^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1 - 5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i.$

Assim, com os números complexos podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir. Além disso, as regras que regem essas operações coincidem com as usadas para as operações com números reais.

## 1.2 Raiz Quadrada de um Número Complexo

No conjunto dos números reais só é possível extrair a raiz quadrada de números não negativos. No entanto, no conjunto dos números complexos é possível extrair a raiz quadrada de qualquer número  $z = a + bi$ . Com efeito, fazendo

$$a + bi = (x + yi)^2, \text{ com } a, b, x \text{ e } y \in \mathbb{R},$$

obtemos, facilmente, que

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações, obtemos

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad \text{e} \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Como  $\sqrt{a^2 + b^2} + a \geq 0$  e  $\sqrt{a^2 + b^2} - a \geq 0$ , temos que  $x$  e  $y$  são números reais. Os sinais dos radicais são escolhidos de tal forma que o produto  $xy$  tenha o mesmo sinal de  $b$ . Assim, as raízes quadradas de  $a + bi$  são dadas por

$$\sqrt{a + bi} = \begin{cases} \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right), & \text{para } b > 0; \\ \pm \left( -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right), & \text{para } b < 0; \\ \pm \sqrt{a}, & \text{para } b = 0, a \geq 0; \\ \pm i\sqrt{-a}, & \text{para } b = 0, a < 0. \end{cases}$$

Para  $a \in \mathbb{R}$ , a notação  $\sqrt{a}$  foi usada para a raiz quadrada não negativa, quando  $a \geq 0$ , e  $\sqrt{a} = i\sqrt{-a} = i\sqrt{|a|}$ , quando  $a < 0$ . Mostramos, assim, que todo número complexo não nulo possui duas raízes quadradas.

Daqui, deduzimos diretamente que, no conjunto dos números complexos, toda equação do segundo grau,  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a \neq 0$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são reais ou complexos, tem duas raízes (diferentes ou iguais), que são dadas por

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Em particular, se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais, com  $a \neq 0$ , esta equação tem duas raízes reais diferentes  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  para  $\Delta > 0$ , duas raízes reais iguais  $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$  para  $\Delta = 0$  e duas raízes complexas diferentes (conjugadas)  $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$  para  $\Delta < 0$ .

## 1.3 Definição de Número Complexo

Na Seção 1.1, dissemos que os números complexos são números da forma  $a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais. Assim, os números complexos são essencialmente um par ordenado de números reais  $a$  e  $b$ . Daremos, agora, uma definição formal.

### 1.3.1 Definição

Um **número complexo** é um par ordenado  $(a, b)$  de números reais com as seguintes propriedades:

- 1) Dois números complexos  $(a, b)$  e  $(c, d)$  são iguais se, e somente se,  $a = c$  e  $b = d$ .
- 2) A soma e o produto de dois números complexos  $(a, b)$  e  $(c, d)$  são definidas por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (1.5)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad). \quad (1.6)$$

Se considerarmos números complexos da forma  $(a, 0)$ , então

$$(a, 0) \pm (b, 0) = (a \pm b, 0);$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0);$$

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)} = \left(\frac{a}{b}, 0\right), \quad \text{com } b \neq 0,$$

que são resultados idênticos aos obtidos entre dois números reais  $a$  e  $b$ . Assim, podemos considerar os números complexos da forma  $(a, 0)$  como um número real  $a$ . Consequentemente, podemos considerar um número real como um caso particular de número complexo, cuja segunda componente é igual a zero. Considerando o número complexo  $(0, 1)$ , temos que

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Assim, o número complexo  $(0, 1)$  pode ser identificado como o número imaginário  $i$ . Desta forma, um número complexo qualquer  $(a, b)$  pode ser escrito como

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

### 1.3.2 Conjugado de um Número Complexo

O número  $\bar{z} = a - bi$  é denominado **conjugado** do número  $z = a + bi$ . A seguir, a partir da definição de número conjugado deduzimos as seguintes propriedades:

- 1)  $z$  é real se, e somente se  $\bar{z} = z$ ;
- 2)  $z$  é imaginário puro se, e somente se  $\bar{z} = -z$ ;
- 3)  $\overline{\bar{z}} = z$ ;
- 4)  $z\bar{z} = a^2 + b^2$ ;

$$5) \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2};$$

$$6) \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};$$

$$7) \overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1} \quad \text{se } z \neq 0;$$

$$8) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad \text{se } z_2 \neq 0;$$

$$9) a = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2};$$

$$10) b = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

**Prova.**

1) Para  $z = a + bi$ , a relação  $\overline{z} = z$  equivale a  $a - bi = a + bi$ . Donde  $2bi = 0$  e  $b = 0$ . Assim,  $z = a \in \mathbb{R}$ .

2) Para  $z = a + bi$ , temos que relação  $\overline{z} = -z$  equivale a  $a - bi = -a - bi$ . Donde  $2a = 0$  e  $a = 0$ . Assim,  $z = bi$  é um imaginário puro.

3) Temos que  $\overline{z} = a - bi$  e  $\overline{\overline{z}} = a - (-bi) = a + bi = z$ .

$$4) z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

5) Para  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , temos que

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

6) Para  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , temos que

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

7) Como  $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ , temos que  $\overline{\left(z \cdot \frac{1}{z}\right)} = \overline{1}$ , e pela Propriedade 5,  $\overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1$ , e assim,  $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$ .

8) Pelas Propriedades 6 e 7, temos que

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

9) Como  $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi)$ , temos  $z + \bar{z} = 2a$ , donde  $a = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ .

10) Como  $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi)$ , temos  $z - \bar{z} = 2bi$ , donde  $b = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .

■

**Exemplo:** Sejam  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Prove que o número  $E = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2$  é um número real.

**Solução.** Temos que  $\overline{E} = \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{\bar{z}_2} + \overline{\bar{z}_1} \cdot \overline{z_2} = \bar{z}_1 \cdot z_2 + z_1 \bar{z}_2 = E$ , e pela Propriedade 1, temos que  $E \in \mathbb{R}$ .

### 1.3.3 Módulo de um Número Complexo

O número não-negativo  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ , denomina-se **módulo** do número complexo  $z$  e é indicado por  $|z|$ .

**Exemplo:** Para o número complexo  $z = 1 + \sqrt{3}i$ , temos que  $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ .

Da definição de módulo, decorrem as seguintes propriedades:

1)  $|z| = |-z| = |\bar{z}|;$

2)  $z\bar{z} = |z|^2;$

3)  $|z| = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \bar{z};$

4)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$

5)  $|z^{-1}| = |z|^{-1}$  se  $z \neq 0$ ;

6)  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  se  $z_2 \neq 0$ .

**Prova.**

1) Seja  $z = a + bi$ , temos que  $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

e  $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ , e daí  $|z| = |-z| = |\bar{z}|$ .

2)  $z\bar{z} = a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = |z|^2$ .

3) Pela Propriedade 2, temos que

$$|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}.$$

4) Pela Propriedade 2, temos que

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = (z_1 \cdot \bar{z}_1)(z_2 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2.$$

E conseqüentemente  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ , pois  $|z| \geq 0$ .

5) Da relação  $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ , temos que  $|z| \cdot \left|\frac{1}{z}\right| = 1$  ou  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ . Então  $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ .

6) Pelas Propriedades 4 e 5, temos que

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|z \cdot \frac{1}{w}\right| = |z \cdot w^{-1}| = |z| \cdot |w^{-1}| = |z| \cdot |w|^{-1} = \frac{|z|}{|w|}.$$

■

**Exemplo:** Sendo  $z = \frac{5i}{3 + 4i}$ , calcule  $|\bar{z}|$ .

**Solução.** Pelas Propriedades 1 e 6, temos que  $|\bar{z}| = |z| = \left|\frac{5i}{3 + 4i}\right| = \frac{|5i|}{|3 + 4i|} = 1$ .

## 1.4 Os Números Complexos como Pontos do Plano

Como definimos o número complexo  $z = (a, b) = a + bi$  como um par ordenado  $(a, b)$  de números reais e este, por sua vez, pode ser visto como um ponto  $P(a, b)$  no plano cartesiano, é natural que façamos a correspondência entre os números complexos e o plano  $\mathbb{R}^2$ . Nessa correspondência, um número real  $a = a + 0i$  corresponde ao ponto  $(a, 0)$  sobre o eixo x, e um número imaginário puro  $bi = 0 + bi$  corresponde

ao ponto  $(0, b)$  sobre o eixo  $y$ . Assim, o eixo  $x$  é chamado de eixo real e o eixo  $y$  de eixo imaginário. O plano formado pelos eixos real e imaginário é chamado de **plano complexo**, **plano de Argand**<sup>1</sup> ou **plano Gaussiano**.

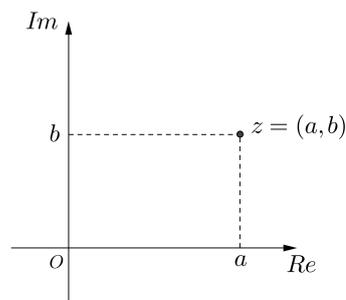


Figura 1.1: Plano Complexo

Os números complexos que possuem módulos unitários,  $r = 1$ , são representados no plano complexo por um círculo de centro na origem e raio igual a 1 (círculo unitário), que denotaremos por  $\mathbb{S}^1$ .

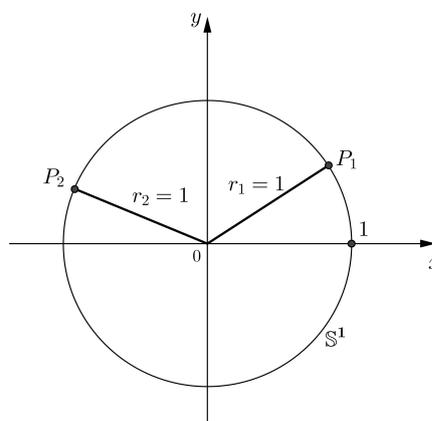


Figura 1.2: Círculo Unitário

<sup>1</sup>Jean Robert Argand (1768 – 1822), matemático suíço. Seu artigo sobre o plano complexo foi publicado em 1806.

Ainda, de acordo com a definição dada, podemos pensar no número complexo  $z = a + bi$  como o vetor, (isto é, o segmento orientado) de origem na origem do sistema de coordenadas e extremidade  $(a, b)$ , isto é, o complexo  $z$  é representado pelo vetor  $\overrightarrow{OP}$ , onde  $P(a, b)$  é a imagem geométrica do número complexo  $z$ .

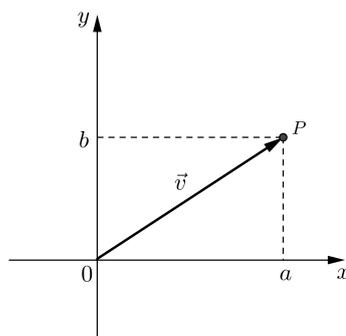


Figura 1.3: Número Complexo como Vetor

### 1.4.1 Forma Polar dos Números Complexos

Em muitos casos, é bastante útil utilizar outra forma de representação de um número complexo  $z = a + bi$ , que destaca de modo especial seu módulo

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Seja um ponto  $P = (a, b)$  no plano complexo. Considere o vetor  $\overrightarrow{OP}$  (onde  $O$  é a origem). Seja  $\theta$  o ângulo entre  $\overrightarrow{OP}$  e o semi-eixo positivo  $x$ , e  $r = \overline{OP}$ . Então,  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \operatorname{sen} \theta$ . As coordenadas polares do ponto  $P$  são  $(r, \theta)$ . O ângulo  $\theta$  para o qual temos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

é chamado de argumento do número complexo  $z$  e se indica por  $\arg z$ . Se limitarmos o valor de  $\theta$  ao intervalo  $(-\pi, \pi]$ , então para os números reais positivos, será igual a 0, enquanto que para os números reais negativos, igual a  $\pi$ .

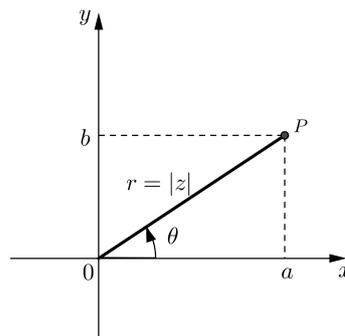


Figura 1.4: A Forma Polar

Os números conjugados tem um mesmo módulo  $r$  e argumentos opostos  $\theta$  e  $-\theta$ .

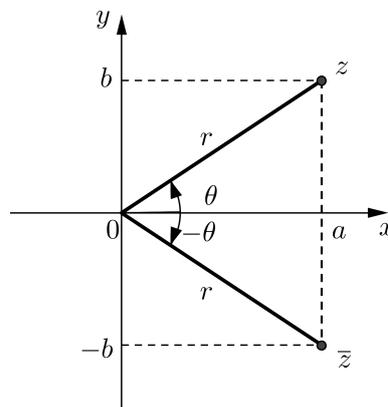


Figura 1.5: Conjugado de um Número Complexo

A origem é o único ponto em que  $r = 0$ ; o argumento  $\theta$  da origem não está definido. Então, sendo  $z = a + bi \neq 0$ , podemos escrever sua forma polar como

$$z = r(\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta). \quad (1.7)$$

Note que a substituição de  $\theta$  na expressão acima por  $\theta + 2k\pi$ , onde  $k$  é um número

inteiro, não altera o número complexo  $z$ . Assim, podemos escrever

$$z = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i \cdot \text{sen}(\theta + 2k\pi)]. \quad (1.8)$$

**Exemplo:** Dado  $z = 1 + i$ , temos

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \arg(z) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right], \quad k \in \mathbb{Z},$$

ou, simplesmente,

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right].$$

### 1.4.2 Operações com Números Complexos na Forma Polar

A forma polar é bastante útil para a multiplicação, divisão e potenciação de números complexos.

#### 1. Multiplicação

**Proposição 1** *Suponha que*

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen} \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen} \theta_2).$$

*Então,*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \quad (1.9)$$

**Prova.** Temos que,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2)\} \end{aligned}$$

e utilizando as identidades trigonométricas

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2$$

e

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2,$$

segue que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

■

Desta maneira, o módulo do produto é igual ao produto dos módulos dos fatores e o argumento é igual a soma dos argumentos dos fatores.

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

**Observação 1** A fórmula (1.9) pode ser usada no produto de dois ou mais números complexos. Então,

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]. \quad (1.10)$$

## 2. Potência de um Número Complexo

**Proposição 2** (*De Moivre*<sup>2</sup>) Para  $z = r(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta)]. \quad (1.11)$$

**Prova.** Aplicando a fórmula (1.10) para  $z = z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ , obtemos

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{n \text{ vezes}} [\cos(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_{n \text{ vezes}}) + i \cdot \operatorname{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_{n \text{ vezes}})] \\ &= r^n [\cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta)]. \end{aligned}$$

■

Como consequência do resultado anterior, temos que

$$|z^n| = |z|^n; \quad \arg z^n = n \arg z.$$

## 3. Divisão

**Proposição 3** *Suponha que*

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1) \quad e \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2), \quad \text{com } z_2 \neq 0.$$

Então,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (1.12)$$

**Prova.** Temos que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2)} = \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \cdot \operatorname{sen} \theta_2)}{r_2(\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2)}$$

<sup>2</sup>Abraham de Moivre (1667 – 1754), matemático francês, introduziu quantidades imaginárias na Trigonometria.

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2)$$

e utilizando as identidades trigonométricas

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2$$

e

$$\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) = \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2,$$

segue que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

■

Como consequência do resultado anterior, temos que

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

## 1.5 Interpretação Geométrica de Operações Algébricas com Números Complexos

### 1.5.1 Multiplicação de um Número Complexo por um Número Real $k$

O produto de um número complexo  $z = a + bi$  por  $k \in \mathbb{R}$ , é dado por

$$kz = k(a + bi) = ka + kbi.$$

- Se  $k > 0$ , multiplicamos o módulo do vetor por  $k$  e mantemos a direção.
- Se  $k < 0$ , multiplicamos o módulo do vetor por  $|k|$  e a direção inverte.

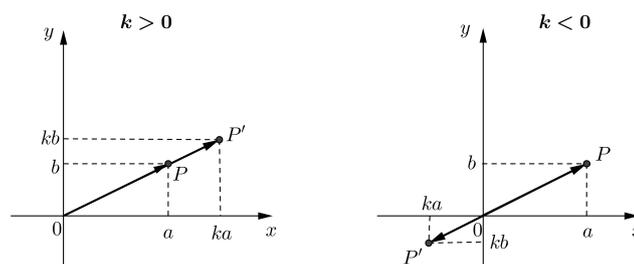


Figura 1.6: Produto de um número complexo por um número real

### 1.5.2 Adição e Subtração

Sejam  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$  dois números complexos representados por vetores do plano  $\mathbb{R}^2$ , então

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \quad (1.13)$$

O número  $z_1 + z_2$  é representado por um vetor, cujas componentes são as somas das componentes dos vetores que representam  $z_1$  e  $z_2$ . Geometricamente, isto significa que a soma é dada pela diagonal do paralelogramo construído sobre esses vetores .

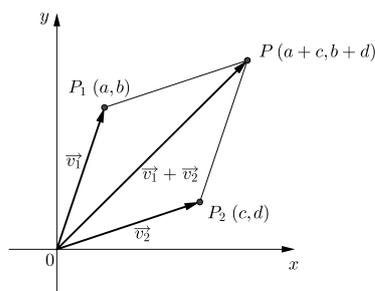


Figura 1.7: Soma de dois Números Complexos

Para a subtração, podemos escrever

$$z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1), \quad \text{pois } -z_1 = (-1)z_1.$$

Geometricamente, isto significa que a diferença  $z_2 - z_1$  é dada pela diagonal do paralelogramo construído sobre os vetores que representam  $z_2$  e  $-z_1$ .

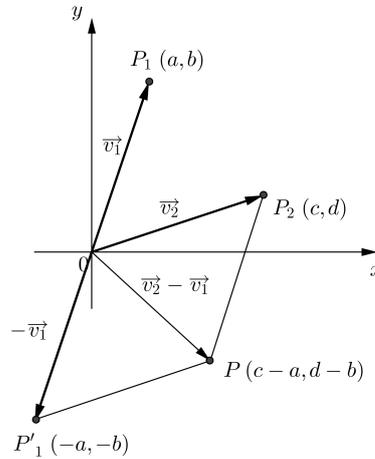


Figura 1.8: Diferença de dois Números Complexos

### 1.5.3 Multiplicação e Divisão

Pela Proposição 1, temos que multiplicar por  $z$  no plano complexo significa, geometricamente, efetuar uma rotação no sentido positivo (anti-horário), em torno da origem, de um ângulo igual ao  $\arg z$ , seguido de uma distensão ou contração.

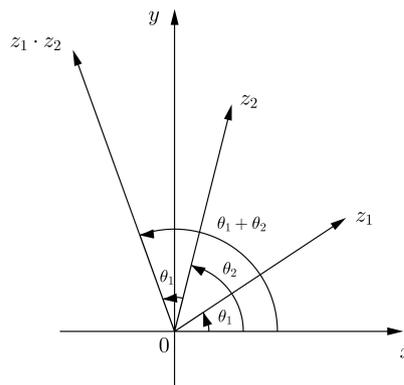


Figura 1.9: Produto de dois Números Complexos

Para dividir por  $z$ , a rotação é no sentido negativo (horário), de um ângulo igual ao  $\arg z$ , seguido de uma distensão ou contração.

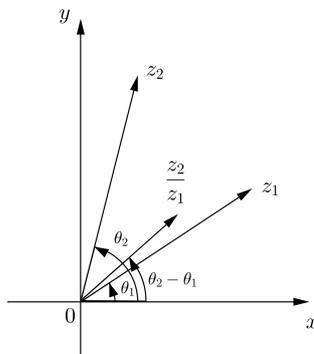


Figura 1.10: Quociente de dois Números Complexos

Em particular, multiplicar um número complexo por  $i$  corresponde a rotacioná-lo de um ângulo  $\frac{\pi}{2}$  no sentido positivo (anti-horário). De fato, se  $z_1 = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}$  e  $z = r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$ , então

$$iz = r \left[ \cos \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Dividir um número complexo por  $i$  equivale a rotacioná-lo de  $\frac{\pi}{2}$  no sentido negativo (horário), pois  $\frac{z}{i} = z \cdot \frac{1}{i} = -iz = (-1)iz$ .

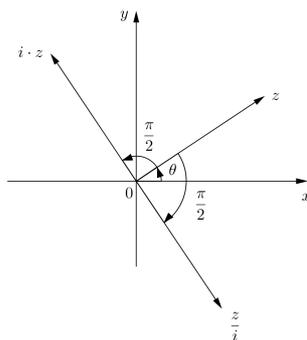


Figura 1.11: Produto e Quociente de um Número Complexo por  $i$

## 1.6 Raízes $n$ -ésimas da Unidade

Obter as raízes  $n$ -ésimas da unidade significa determinar todos os números complexos  $z$  que são soluções da equação

$$z^n - 1 = 0. \quad (1.14)$$

Por inspeção, temos que  $z_0 = 1$  é uma das raízes da equação. Sabemos que  $\cos 2k\pi + i \cdot \operatorname{sen} 2k\pi = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$ . Usando esse fato e a fórmula de De Moivre, temos que

$$\left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \right)^n = \cos 2\pi + i \cdot \operatorname{sen} 2\pi = 1.$$

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, a equação  $z^n - 1 = 0$  possui exatamente  $n$  raízes complexas. Então, podemos concluir que as raízes  $n$ -ésimas da unidade são dadas por

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\},$$

pois,

$$(z_k)^n = \left( \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right)^n = \cos 2k\pi + i \cdot \operatorname{sen} 2k\pi = 1.$$

Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0; \\ z_1 &= \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}; \\ z_2 &= \cos \frac{4\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n}; \\ &\dots \\ z_{n-1} &= \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2(n-1)\pi}{n}. \end{aligned}$$

Para fins de simplificação,  $z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$  será representada por  $\omega$ . Usando essa notação, as raízes  $n$ -ésimas da unidade serão

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1} \quad (1.15)$$

As raízes  $n$ -ésimas da unidade são geradas pelo número  $\omega$ , isto é, são potências de  $\omega$ . Essas  $n$  raízes,  $n > 2$ , são os vértices de um polígono regular de  $n$  lados inscrito no círculo unitário e com um vértice em  $(1, 0)$ .

A seguir obteremos as raízes  $n$ -ésimas para alguns valores de  $n$ .

### • Raízes Quadradas da Unidade

Para  $n = 2$ , a equação  $z^2 - 1 = 0$  tem duas raízes  $-1$  e  $1$ , que são as raízes quadradas da unidade.

### • Raízes Cúbicas da Unidade

A obtenção das raízes cúbicas da unidade será de grande importância para a obtenção de alguns resultados no Capítulo 2. Para  $n = 3$ , as raízes cúbicas da unidade, ou seja, as raízes da equação  $z^3 - 1 = 0$ , são dadas por

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Por isso,

$$z_0 = 1; \quad z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \omega \quad \text{e} \quad z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \omega^2. \quad (1.16)$$

Essas três raízes são os vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo

unitário  $\mathbb{S}^1$  e com um vértice em  $(1, 0)$ .

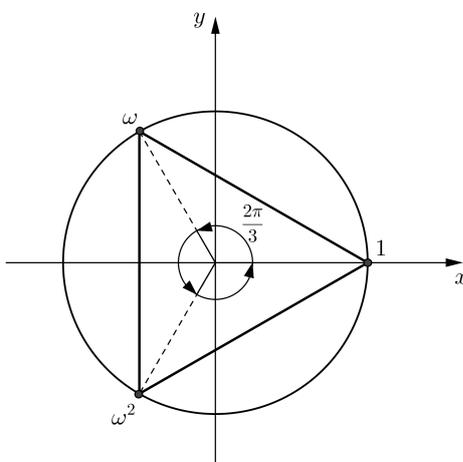


Figura 1.12: Raízes Cúbicas da Unidade

Note que

- $z_2 = \omega^2 = \bar{\omega}$ , pois  $\omega^2$  é obtido, geometricamente, pela reflexão de  $\omega$  em torno do eixo real.
- $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ , pois  $\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$  e como  $\omega \neq 1$ , temos  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ .

#### • Raízes Quartas da Unidade

Para  $n = 4$ , as raízes quartas da unidade, ou seja, as raízes da equação  $z^4 - 1 = 0$ , são dadas por

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{4}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Por isso,

$$\begin{aligned} z_0 &= 1; & z_1 &= \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \omega = i; \\ z_2 &= \cos \pi + i \cdot \operatorname{sen} \pi = \omega^2 = -1 \quad \text{e} \\ z_3 &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = \omega^3 = -i. \end{aligned}$$

Essas quatro raízes são os vértices de um quadrado inscrito no círculo unitário  $\mathbb{S}^1$  e com um vértice em  $(1, 0)$ .

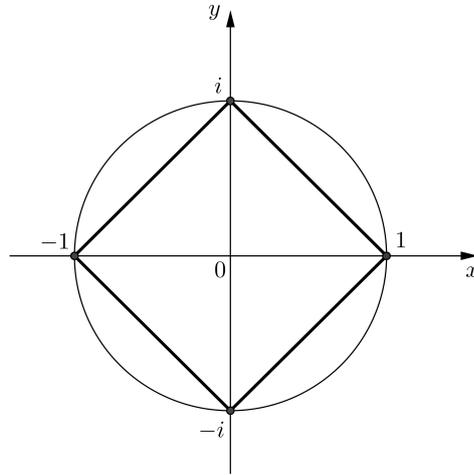


Figura 1.13: Raízes Quartas da Unidade

## Capítulo 2

# Números Complexos e Geometria

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e propriedades geométricas simples, no Plano Complexo, como equações de retas passando por dois pontos, semelhança de triângulos, etc, que constituirão os pré-requisitos para as demonstrações dos teoremas propostos na Seção 2.2.

### 2.1 Algumas Propriedades e Noções Geométricas Simples

Daqui em diante, o ponto correspondente ao número complexo  $z$  será indicado pela mesma letra  $z$ .

#### 2.1.1 Distância Entre Dois Pontos

A distância  $d$  entre os pontos  $z_1$  e  $z_2$  do plano coincide com o módulo  $|w| = |z_2 - z_1|$  do número complexo  $w = z_2 - z_1$ , já que o vetor  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  é igual ao vetor  $\overrightarrow{Ow}$ , conforme figura 2.1.

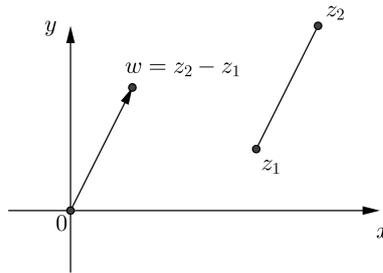


Figura 2.1: Distância Entre Dois Pontos

### 2.1.2 Ângulo Orientado Entre Retas

Sejam  $z_1$  e  $z_2$  dois números complexos distintos e  $O$  a origem do plano complexo, o ângulo  $\widehat{z_1 O z_2}$  é orientado se os pontos  $z_1$  e  $z_2$  são ordenados no sentido positivo (anti-horário).

### 2.1.3 Ângulo Formado Entre Duas Retas

O ângulo  $\delta_0 = \widehat{z_1 O z_2}$  entre as retas que se cortam na origem das coordenadas  $O$  e que passam pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$  é dado por

$$\widehat{z_1 O z_2} = \arg \frac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1. \quad (2.1)$$

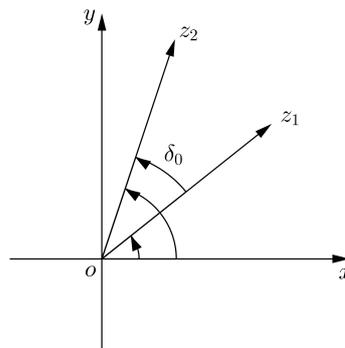


Figura 2.2: Ângulo Entre Retas Que se Cortam na Origem

**Exemplo:** Dados  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = -1 + i$ , temos que o ângulo

$$\widehat{z_1 O z_2} = \arg \frac{z_2}{z_1} = \arg \frac{-1 + i}{1 + i} = \arg \frac{(1 + i)i}{1 + i} = \arg i = \frac{\pi}{2}.$$

Para determinar o ângulo  $\delta = \widehat{z_1 z_0 z_2}$  entre duas retas que se cortam em um ponto qualquer  $z_0$  e que passam pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$ , efetuamos uma translação que transforma  $z_0$  em  $O$ . Assim, temos

$$z'_1 = z_1 - z_0 \quad \text{e} \quad z'_2 = z_2 - z_0.$$

Logo, o ângulo  $\delta$  (conforme figura 2.3) é dado por

$$\delta = \widehat{z'_1 z'_0 z'_2} = \arg \frac{z'_2}{z'_1} = \arg \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \arg(z_2 - z_0) - \arg(z_1 - z_0). \quad (2.2)$$

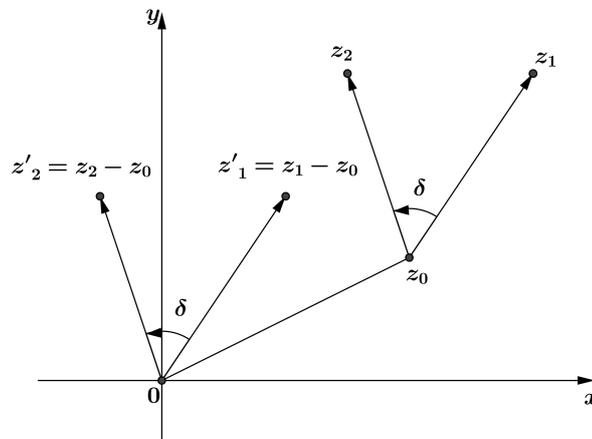


Figura 2.3: Ângulo Entre Retas Que se Cortam em um Ponto Qualquer

Note que  $\delta$  é o ângulo que devemos girar o vetor  $\overrightarrow{z_0 z_1}$  no sentido anti-horário para fazê-lo coincidir com o vetor  $\overrightarrow{z_0 z_2}$ .

**Exemplo:** Dados  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 2 + 5i$  e  $z_3 = 4 + 5i$ , temos que o ângulo

$$\widehat{z_3 z_1 z_2} = \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{2i}{2 + 2i} = \arg \frac{i}{1 + i} = \arg \frac{i(1 - i)}{2} = \arg \frac{1 + i}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

### 2.1.4 Condição de Alinhamento de Três Pontos no Plano Complexo

**Proposição 4** *Três pontos distintos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  são colineares se, e somente se,*

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

**Prova.** A colinearidade dos pontos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  é equivalente a o ângulo  $\widehat{z_2 z_1 z_3}$  ser igual a 0 ou a  $\pi$ , ou seja, se  $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \{0, \pi\}$ , o que é equivalente a  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$ . ■

### 2.1.5 Equação da Reta

**Proposição 5** *Sejam  $z_1$  e  $z_2$  pontos distintos do plano complexo. A equação da reta que passa por esses dois pontos é dada por*

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}, \quad (2.4)$$

*que é equivalente a*

$$(z_2 - z_1)\bar{z} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2. \quad (2.5)$$

**Prova.** De fato, se os pontos  $z$ ,  $z_1$  e  $z_2$  são colineares, temos pela Proposição 4 que

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}.$$

Como  $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$  é um número real, podemos escrever

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left( \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)} = \frac{\overline{z - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1},$$

que é equivalente a

$$(z_2 - z_1)\bar{z} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2,$$

ou ainda,

$$(z_2 - z_1)\bar{z} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z + z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = 0.$$

■

Desta maneira, a equação de uma reta pode ser escrita como

$$\bar{B}\bar{z} - Bz + C = 0, \tag{2.6}$$

onde  $B = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$ ,  $\bar{B} = z_2 - z_1$ ,  $C = z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2$  e  $C$  é um imaginário puro, pois  $\bar{C} = \overline{z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2} = \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 = -C$ .

**Observação 2** No caso em que  $|z_1| = |z_2| = 1$ , isto é,  $z_1 = \frac{1}{\bar{z}_1}$  e  $z_2 = \frac{1}{\bar{z}_2}$ , a equação (2.5) se torna

$$z + z_1 z_2 \bar{z} = z_1 + z_2. \tag{2.7}$$

**Observação 3** A equação (2.4) é equivalente a

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De fato, pelas Propriedades dos determinantes, temos que

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} z - z_1 & \bar{z} - \bar{z}_1 & 0 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & \bar{z}_2 - \bar{z}_1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} z - z_1 & \bar{z} - \bar{z}_1 \\ z_2 - z_1 & \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}. \end{aligned}$$

Logo, podemos obter a equação da reta que passa por  $z_1$  e  $z_2$  desenvolvendo o determinante

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

### 2.1.6 Equação Paramétrica da Reta

Seja  $z$  um ponto qualquer da reta que passa pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$ . Então, pela condição (2.3), podemos escrever

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = t, \quad \text{onde } t \in \mathbb{R}.$$

Daí

$$z - z_1 = t(z_2 - z_1),$$

donde

$$z = (1 - t)z_1 + tz_2 \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) é denominada equação paramétrica da reta que passa pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$ .

### 2.1.7 Equação da Circunferência

**Proposição 6** *Quatro pontos distintos  $z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$  estão situados em uma circunferência (uma reta) se, e somente se, o número*

$$\left( \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right) / \left( \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \right) \quad (2.9)$$

*é um número real.*

**Prova.** Suponha que os pontos estejam em uma circunferência. Da geometria euclidiana plana, sabemos que quatro pontos,  $z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$ , estão situados em uma circunferência se, e somente se,  $\widehat{z_1 z_3 z_2} = \widehat{z_1 z_4 z_2}$ , no caso dos pontos  $z_3$  e  $z_4$  estarem no mesmo semiplano em relação à reta  $z_1 z_2$ , ou  $\widehat{z_1 z_3 z_2} + \widehat{z_1 z_4 z_2} = \pi$ , no caso dos pontos  $z_3$  e  $z_4$  estarem em semiplanos opostos em relação à reta  $z_1 z_2$ .

Para o primeiro caso (figura 2.4), temos que  $\widehat{z_1 z_3 z_2} = \widehat{z_1 z_4 z_2}$ . Logo

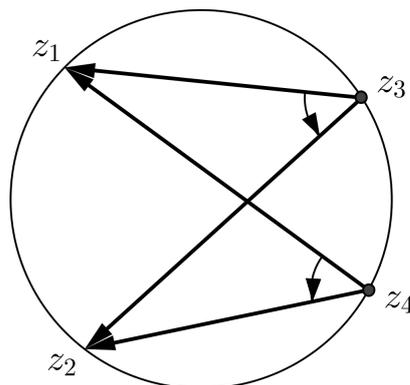


Figura 2.4:  $\widehat{z_1 z_3 z_2}$  e  $\widehat{z_1 z_4 z_2}$  no mesmo semiplano em relação a reta  $z_1 z_2$

$$\arg \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \arg \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}, \quad \text{donde} \quad \arg \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} - \arg \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = 0$$

e, portanto,  $\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) / \left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right)$  é um número real.

Por outro lado, se  $\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) / \left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right) \in \mathbb{R}$ , temos que  $\arg \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} - \arg \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . E como  $z_3$  e  $z_4$  estão no mesmo semiplano em relação à reta  $z_1 z_2$ , temos  $k = 0$ , pois os módulos dos argumentos é menor que  $\pi$ . Assim, temos que

$$\arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} - \arg \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = 0 \Rightarrow \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \arg \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \Rightarrow \widehat{z_1 z_3 z_2} = \widehat{z_1 z_4 z_2}.$$

O segundo caso pode ser provado de modo semelhante. ■

**Observação 4** A expressão  $\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) / \left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right)$  será denotada por  $(z_3, z_4; z_2, z_1)$ .

**Proposição 7** A equação da circunferência (da reta) que passa pelos pontos  $z$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  é dada por

$$\left(\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}\right) \Big/ \left(\frac{z - z_3}{z_1 - z_3}\right) = \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}\right) \Big/ \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}\right) \quad (2.10)$$

**Prova.** Como os pontos  $z, z_1, z_2$  e  $z_3$  pertencem a uma circunferência, temos pela Proposição 6, que

$$\left(\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}\right) \Big/ \left(\frac{z - z_3}{z_1 - z_3}\right)$$

é um número real e podemos escrever

$$\left(\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}\right) \Big/ \left(\frac{z - z_3}{z_1 - z_3}\right) = \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}\right) \Big/ \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}\right),$$

que é equivalente a

$$(z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_3)[(z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)] = (z - z_3)(\bar{z} - \bar{z}_2)[(z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)],$$

■

Desta maneira, a equação de uma circunferência (reta) pode ser escrita como

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (2.11)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= (z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1), \\ B &= -\bar{z}_3(z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_2(z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1), \\ C &= z_2\bar{z}_3(z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - z_3\bar{z}_2(z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1), \end{aligned}$$

em que  $A$  e  $C$  são imaginários puros. Como já sabemos, a equação (2.11) representa

uma reta se, e somente se,  $A = 0$ , ou seja, se

$$(z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = (z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1),$$

que é equivalente a

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

### 2.1.8 Perpendicularismo no Plano Complexo

**Proposição 8** *As retas  $z_1z_2$  e  $z_3z_4$  são ortogonais se, e somente se,*

$$\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \quad (2.12)$$

*for um imaginário puro.*

**Prova.** Temos que  $z_1z_2 \perp z_3z_4$  se, e somente se, o ângulo formado pelas retas  $z_1z_2$  e  $z_3z_4$  for igual a  $\frac{\pi}{2}$  ou a  $\frac{3\pi}{2}$ . Isso é equivalente a  $\arg \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ , de onde segue que  $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}$  é um imaginário puro. ■

### 2.1.9 Equação da Reta Perpendicular

**Proposição 9** *A equação da reta perpendicular à reta  $z_1z_2$  e que passa por  $z_3$  é dada por*

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0,$$

*que é equivalente a*

$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1). \quad (2.13)$$

**Prova.** De fato, seja  $zz_3$  a reta que passa pelos pontos  $z$  e  $z_3$ , temos que  $zz_3 \perp z_1z_2$  se, e somente se,

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} \text{ é um imaginário puro.}$$

Como  $\frac{z - z_3}{z_2 - z_1}$  é um imaginário puro, podemos escrever

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0,$$

que é equivalente a

$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1).$$

■

### 2.1.10 Equação da Mediatriz de um Segmento

Vamos determinar agora a equação da mediatriz de um segmento de extremos  $z_1$  e  $z_2$ . A **mediatriz** é a reta perpendicular ao segmento  $z_1z_2$  e que passa pelo ponto  $z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}$ , que é o ponto médio do segmento  $z_1z_2$ . Logo, pela equação (2.13), ela é dada por

$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = \frac{z_1 + z_2}{2}(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2}(z_2 - z_1)$$

ou

$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = |z_2|^2 - |z_1|^2. \tag{2.14}$$

### 2.1.11 Triângulos

Na geometria plana elementar, os triângulos são as peças básicas e a congruência e a semelhança de triângulos, os conceitos fundamentais. Antes de apresentar o conceito de semelhança de triângulos, em termos de números complexos, vamos

estabelecer as seguintes convenções:

Sejam  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$  números complexos, dizemos que

- Um triângulo é orientado se a ordem de seus vértices é especificada. Essa orientação pode ser positiva (sentido anti-horário) ou negativa (sentido horário).
- Os triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w_1 w_2 w_3$  possuem a mesma orientação se ambos são horários ou anti-horários.
- Os triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w_1 w_2 w_3$  possuem orientações distintas se um é horário e o outro anti-horário.

Na figura abaixo, os dois primeiros triângulos possuem a mesma orientação e os dois últimos, assim como o primeiro e o último, possuem orientações opostas.

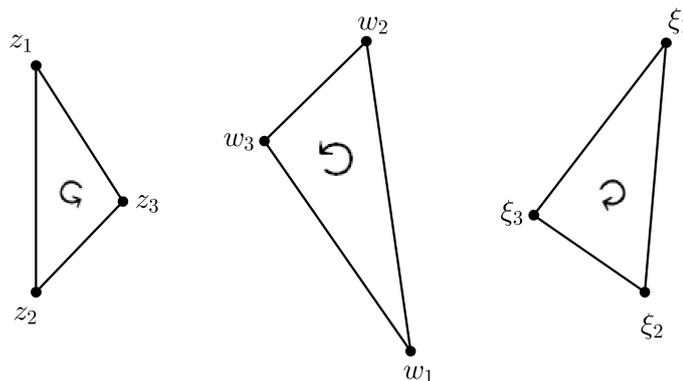


Figura 2.5: Triângulos: Orientações

### 2.1.12 Triângulos Semelhantes

Sejam  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$  seis pontos no plano complexo. Dizemos que os triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w_1 w_2 w_3$  são semelhantes se o ângulo  $z_k$  for igual ao ângulo  $w_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

**Proposição 10** *Os triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w_1 w_2 w_3$  são semelhantes, com a mesma orientação, se, e somente se,*

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}. \quad (2.15)$$

**Prova.** Temos que  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$  se, e somente se,

$$\frac{z_1 z_2}{z_1 z_3} = \frac{w_1 w_2}{w_1 w_3} \quad \text{e} \quad \widehat{z_3 z_1 z_2} = \widehat{w_3 w_1 w_2}.$$

Isso é equivalente a

$$\frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|w_2 - w_1|}{|w_3 - w_1|} \quad \text{e} \quad \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1},$$

de onde obtemos que

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}.$$

■

**Observação 5 :** *A equação (2.15) é equivalente a*

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Logo, podemos escrever*

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3 \iff \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \iff \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Proposição 11** *Os triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w_1 w_2 w_3$ , são semelhantes com orientação oposta, que indicaremos por  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim_{op} \Delta w_1 w_2 w_3$ , se, e somente se,*

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1}. \quad (2.16)$$

**Prova.** A reflexão em relação ao eixo  $x$  transforma os pontos  $w_1, w_2$  e  $w_3$  em  $\bar{w}_1, \bar{w}_2$  e  $\bar{w}_3$ , respectivamente (figura 2.6). Os triângulos  $\Delta w_1 w_2 w_3$  e  $\Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3$  são semelhantes e possuem orientação oposta. Por outro lado, os triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3$  são semelhantes com a mesma orientação. (figura 2.7)

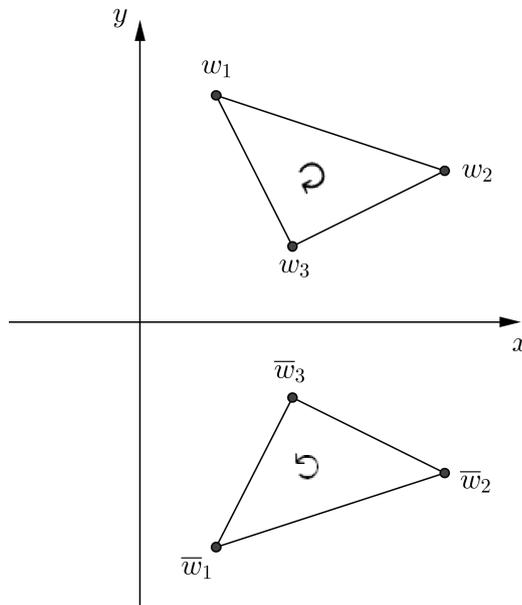


Figura 2.6:  $\Delta w_1 w_2 w_3 \sim_{op} \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3$

Segue da Proposição 10, que

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim_{op} \Delta w_1 w_2 w_3 \iff \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1} \iff \begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

■

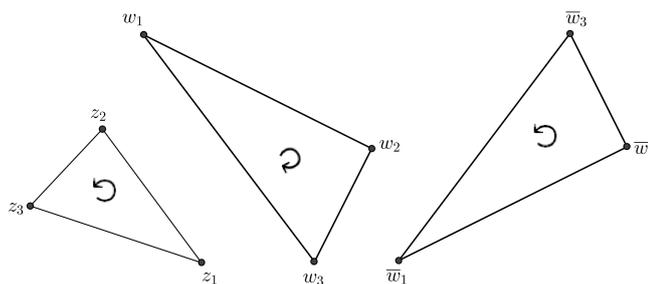


Figura 2.7:  $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3 \Rightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim_{op} \Delta w_1 w_2 w_3$

### 2.1.13 Triângulo Equilátero

A seguir apresentamos duas caracterizações de triângulos equiláteros.

**Proposição 12** *Os pontos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  são os vértices de um triângulo equilátero se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Prova.** O triângulo  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é equilátero se, e somente se, é semelhante ao  $\Delta z_2 z_3 z_1$ , com a mesma orientação, isto é

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

■

Desenvolvendo o determinante, obteremos outra caracterização para triângulos equiláteros, a saber

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 &= 0 \\ \iff z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 \end{aligned} \tag{2.17}$$

**Proposição 13** *O  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é equilátero se, e somente se,*

$$z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0 \quad (2.18)$$

ou

$$z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0, \quad (2.19)$$

onde  $\omega$  é uma das raízes complexas da unidade.

**Prova.** De fato, o  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é equilátero se, e somente se,

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \omega \omega^2 \quad \text{ou} \quad \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \omega^2 \omega$$

Pela Proposição 12, temos para o primeiro caso

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \\ z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff z_1(\omega - \omega^2) + z_2(\omega^2 - 1) + z_3(1 - \omega) = 0.$$

Como  $\omega$  é uma das raízes complexas da unidade e  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ , temos

$$\begin{aligned} z_1(\omega - \omega^2) + z_2(\omega^2 - \omega^3) + z_3(\omega^3 - \omega) &= 0 \\ \iff z_1\omega(1 - \omega) + z_2\omega^2(1 - \omega) - z_3\omega(1 - \omega)(1 + \omega) &= 0 \\ \iff z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 &= 0. \end{aligned}$$

O segundo caso pode ser provado de forma análoga ao primeiro. ■

### 2.1.14 Pontos Notáveis em um Triângulo

#### (a) Circuncentro

**Proposição 14** *As três mediatrizes de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto. Esse ponto é chamado de **circuncentro** do triângulo.*

**Prova.** Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os vértices do triângulo.

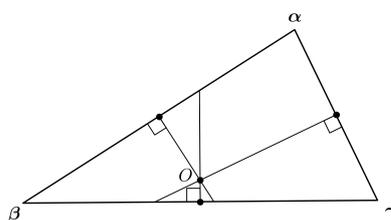


Figura 2.8: Circuncentro

Então, pela equação (2.14), a equação da mediatriz relativa ao lado  $\alpha\beta$  é dada por

$$(\alpha - \beta)\bar{z} + (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z = |\alpha|^2 - |\beta|^2.$$

De modo análogo, obtemos as equações das mediatrizes dos lados  $\gamma\alpha$  e  $\beta\gamma$  e, com as equações obtidas, montamos o seguinte sistema

$$\begin{cases} (\alpha - \beta)\bar{z} + (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z = |\alpha|^2 - |\beta|^2 & (1) \\ (\gamma - \alpha)\bar{z} + (\bar{\gamma} - \bar{\alpha})z = |\gamma|^2 - |\alpha|^2 & (2) \\ (\beta - \gamma)\bar{z} + (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = |\beta|^2 - |\gamma|^2 & (3) \end{cases}$$

Somando-se quaisquer duas dessas equações, obtemos a restante. Por exemplo, somando-se (1) e (2) obtemos (3). Isso implica que a interseção de duas dessas equações pertence à terceira delas. Logo, concluímos que as três mediatrizes de um triângulo qualquer encontram-se em um único ponto. ■

Para determinar o ponto de interseção, ou seja, o circuncentro, resolveremos o sistema formado pelas equações (1) e (2).

Isolando  $\bar{z}$  na equação (1), temos

$$\bar{z} = \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2 - (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z}{\alpha - \beta}.$$

Substituindo em (2), obtemos

$$(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})z + \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2 - (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z}{\alpha - \beta}(\gamma - \alpha) = |\gamma|^2 - |\alpha|^2$$

$$(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})(\alpha - \beta)z + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)(\gamma - \alpha) - (\bar{\alpha} - \bar{\beta})(\gamma - \alpha)z = (|\gamma|^2 - |\alpha|^2)(\alpha - \beta)$$

$$z[\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)] = |\alpha|^2(\beta - \gamma) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta)$$

$$z = \frac{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)}{|\alpha|^2(\beta - \gamma) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta)} \quad (2.20)$$

Note que, pela simetria do resultado obtido, podemos ver novamente que essa solução também satisfaz a equação (3).

### (b) Ortocentro

**Proposição 15** *As três alturas de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto. Esse ponto é chamado de **ortocentro** do triângulo.*

**Prova.** Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os vértices de um triângulo.

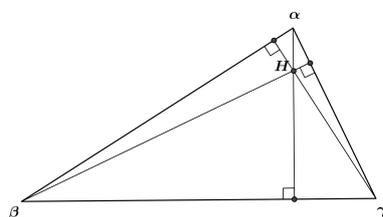


Figura 2.9: Ortocentro

De acordo com a equação (2.13), a reta suporte da altura relativa ao vértice  $\alpha$ , que é perpendicular ao lado  $\beta\gamma$ , é dada pela equação

$$(\beta - \gamma)\bar{z} + (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \alpha(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{\alpha}(\beta - \gamma).$$

De modo análogo obtemos as retas suportes das alturas relativas aos vértices  $\beta$  e  $\gamma$ . Com as três equações obtidas, montamos o seguinte sistema

$$\begin{cases} (\beta - \gamma)\bar{z} + (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \alpha(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{\alpha}(\beta - \gamma) & (1) \\ (\alpha - \gamma)\bar{z} + (\bar{\alpha} - \bar{\gamma})z = \beta(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) + \bar{\beta}(\alpha - \gamma) & (2) \\ (\alpha - \beta)\bar{z} + (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z = \gamma(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{\gamma}(\beta - \gamma) & (3) \end{cases}$$

Podemos observar que qualquer uma das três equações é combinação linear das outras duas e portanto a interseção de duas dessas equações pertence à terceira delas, ou seja, as três alturas de um triângulo se encontram em um único ponto. ■

Sem perda de generalidade, vamos calcular o ortocentro do triângulo inscrito no círculo unitário com centro na origem. Nesse caso, temos  $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ , logo  $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ ,  $\bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$  e  $\bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$ . Substituindo essas relações e isolando  $\bar{z}$  nas equações (2) e (3), temos

$$\bar{z} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{z}{\beta\gamma} \quad (4)$$

e

$$\bar{z} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha\beta} + \frac{z}{\alpha\beta}. \quad (5)$$

De (4) e (5), obtemos

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{z}{\beta\gamma} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha\beta} + \frac{z}{\alpha\beta},$$

eliminando os denominadores, ficamos com

$$\begin{aligned}\beta\gamma - \alpha^2 + z\alpha &= \beta\alpha - \gamma^2 + z\gamma \iff \\ z\alpha - z\gamma &= \alpha^2 - \gamma^2 + \alpha\beta - \beta\gamma \iff \\ (\alpha - \gamma)z &= (\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma) + \beta(\alpha - \gamma) \iff\end{aligned}$$

$$z = \alpha + \beta + \gamma. \tag{2.21}$$

(c) **Baricentro**

**Proposição 16** *As três medianas de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto. Esse ponto é chamado de **baricentro**.*

**Prova.** Seja um triângulo de vértices  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

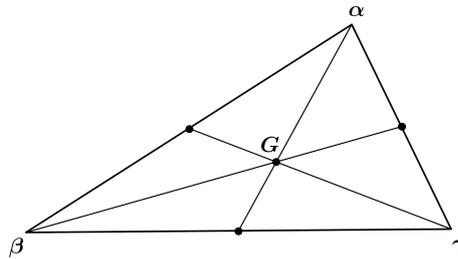


Figura 2.10: Baricentro

A reta suporte da mediana relativa ao lado  $\beta\gamma$  é a reta que passa por  $\alpha$  e pelo ponto médio do segmento  $\beta\gamma$ . Temos pela equação (2.5), que a equação da reta procurada é dada por

$$\left(\alpha - \frac{\beta + \gamma}{2}\right) \bar{z} - \left(\bar{\alpha} - \frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{2}\right) z = \alpha \left(\frac{\bar{\beta} + \bar{\gamma}}{2}\right) - \bar{\alpha} \left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right),$$

ou seja,

$$(2\alpha - \beta - \gamma)\bar{z} - (2\bar{\alpha} - \bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \alpha(\bar{\beta} + \bar{\gamma}) - \bar{\alpha}(\beta + \gamma). \quad (1)$$

De modo análogo, obtemos as retas suportes das medianas relativas aos lados  $\alpha\gamma$  e  $\alpha\beta$ , que são respectivamente

$$(2\beta - \alpha - \gamma)\bar{z} - (2\bar{\beta} - \bar{\alpha} - \bar{\gamma})z = \beta(\bar{\alpha} + \bar{\gamma}) - \bar{\beta}(\alpha + \gamma) \quad (2)$$

e

$$(2\gamma - \alpha - \beta)\bar{z} - (2\bar{\gamma} - \bar{\alpha} - \bar{\beta})z = \gamma(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) - \bar{\gamma}(\alpha + \beta). \quad (3)$$

Qualquer uma das três equações acima é combinação linear das outras duas, somando-se, por exemplo, as equações (1) e (2) encontramos o oposto da equação (3), desta forma as três medianas se encontram em um único ponto. ■

Para obter o baricentro vamos utilizar a equação paramétrica da reta suporte da mediana relativa ao lado  $\beta\gamma$ , que é dada por

$$z = (1 - t)\alpha + t\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Para  $t = \frac{2}{3}$ , temos

$$z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}, \quad (2.22)$$

que devido a simetria das equações, também pertence às medianas relativas aos lados  $\alpha\beta$  e  $\alpha\gamma$ .

## 2.2 Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana

Nesta seção, utilizaremos alguns dos resultados, obtidos anteriormente, para apresentar algumas provas de teoremas da geometria plana, bem como para a solução de alguns problemas geométricos.

### 2.2.1 Teorema de Napoleão

**Teorema 1 (Napoleão<sup>1</sup>)** *Sobre cada lado de um triângulo arbitrário, desenhe um triângulo equilátero (no exterior). Temos então que os baricentros desses três triângulos equiláteros são os vértices de um quarto triângulo equilátero.*

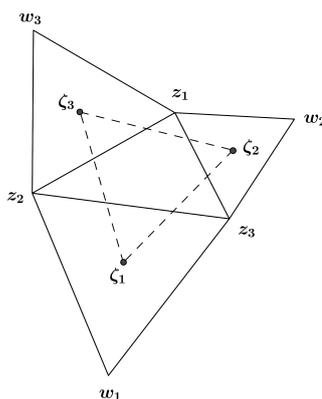


Figura 2.11: Teorema de Napoleão

**Prova.** Sejam  $\Delta z_1 z_2 z_3$  o triângulo dado;  $\Delta w_1 z_2 z_3$ ,  $\Delta z_3 w_2 z_1$  e  $\Delta z_2 z_1 w_3$  os triângulos equiláteros construídos sobre os lados do  $\Delta z_1 z_2 z_3$ , com a mesma orientação que o  $\Delta 1\omega\omega^2$  (com  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ). Sejam  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  e  $\zeta_3$  os baricentros desses triângulos.

<sup>1</sup>Alguns historiadores acham pouco provável que Napoleão Bonaparte (1769 – 1821) tenha realmente descoberto esse teorema. No entanto, já na escola primária, ele demonstrou grande talento na resolução de questões aritméticas e uma grande inteligência lógica. Por isso, chamavam-no “o matemático”. Aliás, Napoleão costumava dizer que era “um geômetra amador”.

Então, pela Proposição 12, temos que

$$w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2 = 0,$$

$$z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1 = 0,$$

$$z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3 = 0.$$

Para provar que o  $\Delta\zeta_1\zeta_2\zeta_3$  é equilátero, vamos calcular

$$\begin{aligned} & \zeta_1 + \omega\zeta_2 + \omega^2\zeta_3 \\ &= \frac{1}{3}(w_1 + z_3 + z_2) + \frac{\omega}{3}(z_3 + w_2 + z_1) + \frac{\omega^2}{3}(z_2 + z_1 + w_3) \\ &= \frac{1}{3}\{(w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2) + (z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1) + (z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o  $\Delta\zeta_1\zeta_2\zeta_3$  é um triângulo equilátero. ■

## 2.2.2 Círculo dos Nove Pontos

**Teorema 2** (*Círculo dos Nove Pontos*<sup>2</sup>) *O círculo que passa pelos pés das alturas de qualquer triângulo passa também pelos pontos médios dos lados, bem como pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices ao ortocentro desse triângulo.*

---

<sup>2</sup>Este teorema foi descoberto em 1821 pelos grandes geômetras franceses Jean Victor Poncelet (1788–1867) e Charles Julien Brianchon (1785–1864). Entretanto, como o geômetra alemão Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834) publicou, no ano seguinte, um trabalho contendo idéias parecidas, o **Círculo dos Nove Pontos** passou também a ser chamado de **Círculo de Feuerbach**.

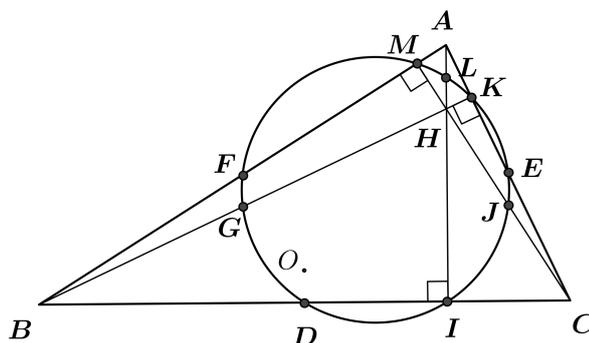


Figura 2.12: Círculo dos Nove Pontos

**Prova.** Dado um triângulo  $ABC$ , vamos supor, sem perda de generalidade, que o seu círculo circunscrito é o círculo unitário de centro na origem do plano complexo, e sejam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  números complexos que representam os vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente, com  $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ .

Vamos inicialmente encontrar o centro do círculo que passa pelos pontos médios dos lados do  $\Delta ABC$ .

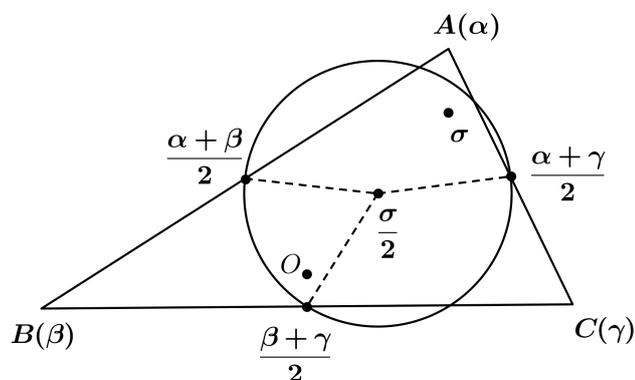


Figura 2.13: Distância de  $\frac{\sigma}{2}$  para os pontos médios dos lados do  $\Delta ABC$

O ortocentro  $H$  do  $\Delta ABC$  é dado por  $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$  e  $\frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$  é o ponto médio do segmento que une o circuncentro  $O$  com o ortocentro  $H$ . A distância de

$\frac{\sigma}{2}$  para o ponto médio  $D$  do lado  $BC$  é

$$\left| \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Analogamente, as distâncias de  $\frac{\sigma}{2}$  para o ponto médio  $E$  do lado  $CA$ , e para o ponto médio  $F$  do lado  $AB$  são todas iguais a  $\frac{1}{2}$ . Logo, o centro do círculo é o ponto  $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ .

Vamos obter agora a distância de  $\frac{\sigma}{2}$  para o ponto médio do segmento que une o ortocentro  $H$  ao vértice  $A$  que é

$$\left| \frac{\alpha + \sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

Analogamente, as distâncias de  $\frac{\sigma}{2}$  para o ponto médio de  $BH$ , e para o ponto médio de  $CH$  são também todas iguais a  $\frac{1}{2}$ .

Precisamos agora determinar a distância de  $\frac{\sigma}{2}$  para os pés das alturas do  $\Delta ABC$ . O pé  $\lambda$  da perpendicular do vértice  $A$  até o lado  $BC$  é dada pela intersecção das retas suportes do lado  $BC$  e da altura relativa ao vértice  $A$ . As equações dessas retas são dadas respectivamente pelas equações

$$(\beta - \gamma)\bar{z} - (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \bar{\gamma}\beta - \gamma\bar{\beta} \quad (1)$$

$$(\beta - \gamma)\bar{z} + (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \alpha(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{\alpha}(\beta - \gamma) \quad (2)$$

multiplicando a equação (1) por  $-1$  e somando com a equação (2), obtemos

$$2z(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) = \alpha(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \gamma\bar{\beta} - \bar{\gamma}\beta$$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{2} \left[ \alpha + \bar{\alpha} \left( \frac{\beta - \gamma}{\bar{\beta} - \bar{\gamma}} \right) + \frac{\gamma \bar{\beta} - \bar{\gamma} \beta}{\bar{\beta} - \bar{\gamma}} \right] \\
z &= \frac{1}{2} \left[ \alpha + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\beta - \gamma}{\gamma - \beta} \right) \beta \gamma + \left( \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\beta \gamma} \right) \left( \frac{\beta \gamma}{\gamma - \beta} \right) \right] \\
z &= \frac{1}{2} \left[ \alpha + \beta + \gamma - \frac{\beta \gamma}{\alpha} \right] \\
z &= \frac{1}{2} \left[ \sigma - \frac{\beta \gamma}{\alpha} \right] = \lambda
\end{aligned}$$

A distância procurada é igual a

$$\left| \lambda - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{\beta \gamma}{2\alpha} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| -\frac{\beta \gamma}{2\alpha} \right| = \frac{1}{2}$$

Analogamente, obtemos os pés das outras alturas do  $\triangle ABC$  e as distâncias de  $\frac{\sigma}{2}$  até eles, e também encontraremos  $\frac{1}{2}$ .

Como os nove pontos citados no teorema estão a uma mesma distância do ponto  $\frac{\sigma}{2}$ , concluímos que existe um círculo que passa por esses nove pontos (o círculo dos nove pontos) e assim, o teorema fica provado. ■

### 2.2.3 A Reta de Simson

**Teorema 3 (A Reta de Simson<sup>3</sup>)** Dado um  $\triangle ABC$  e um ponto  $D$ , sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  os pés das perpendiculares de  $D$  até os lados (ou prolongamentos dos mesmos)  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Então os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  estão alinhados se, e somente se,  $D$  está no círculo circunscrito do  $\triangle ABC$ .

**Prova.** Suponhamos, sem perda de generalidade, que o  $\triangle ABC$  está inscrito em um círculo unitário e que os pontos  $A, B, C, D$  são representados, respectivamente, pelos

<sup>3</sup>Robert Simson (1687–1768), Matemático escocês. Publicou, em latim e inglês, edições críticas e comentadas sobre as obras dos antigos geômetras.

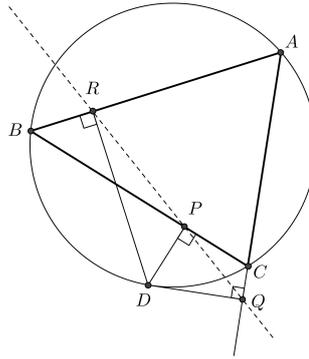


Figura 2.14: Reta de Simson

números complexos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$ .

A equação da reta suporte do lado  $BC$  é dada por

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

isto é,

$$(\beta - \gamma)\bar{z} - (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \beta\bar{\gamma} - \gamma\bar{\beta}. \tag{1}$$

Por outro lado a equação da reta perpendicular ao lado  $BC$  passando por  $D(\delta)$  é dada por

$$(\beta - \gamma)\bar{z} + (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \delta(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{\delta}(\beta - \gamma) \tag{2}.$$

Usando as relações  $\bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$  e  $\bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$  e simplificando, temos

$$z + \beta\gamma\bar{z} = \beta + \gamma \tag{1'}$$

e

$$z - \beta\gamma\bar{z} = \delta - \beta\gamma\bar{\delta}. \tag{2'}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1') e (2'), obtemos a interseção  $z = P(\lambda)$  dessas duas retas

$$\lambda = \frac{1}{2}(\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\bar{\delta}).$$

De modo análogo, encontramos os pontos  $Q(\mu)$  e  $R(v)$ , que são dados por

$$\mu = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha + \delta - \gamma\alpha\bar{\delta}),$$

$$v = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta}).$$

Pela condição de alinhamento, os pontos  $P(\lambda)$ ,  $Q(\mu)$  e  $R(v)$  são colineares se, e somente se,

$$\frac{\lambda - v}{\mu - v} \in \mathbb{R}.$$

Usando a notação  $r = |\delta|$  (portanto  $\bar{\delta} = \frac{r^2}{\delta}$ ), temos

$$\begin{aligned} \frac{\lambda - v}{\mu - v} &= \frac{\gamma - \alpha - (\gamma - \alpha)\beta\bar{\delta}}{\gamma - \beta - (\gamma - \beta)\alpha\bar{\delta}} = \frac{(\gamma - \alpha)(1 - \beta\bar{\delta})}{(\gamma - \beta)(1 - \alpha\bar{\delta})} \\ &= \left( \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \right) \bigg/ \left( \frac{\alpha - \delta r^{-2}}{\beta - \delta r^{-2}} \right) \\ &= (\alpha, \beta; \gamma, \delta r^{-2}). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} P(\lambda), Q(\mu) \text{ e } R(v) \text{ são colineares} &\iff (\alpha, \beta; \gamma, \delta r^{-2}) \in \mathbb{R} \\ &\iff \alpha, \beta, \gamma, \delta r^{-2} \text{ estão em um círculo} \\ &\iff |\delta r^{-2}| = 1 \\ &\iff \frac{|\delta|}{|\delta|^2} = 1 \\ &\iff |\delta| = 1 \end{aligned}$$

Assim,  $D(\delta)$  pertence à circunferência e o teorema está provado. ■

A reta que passa pelos pontos  $P(\lambda), Q(\mu)$  e  $R(\nu)$  é denominada de Reta de Simson. Vamos, agora, encontrar a equação da reta de Simson. Para isso usaremos as mesmas notações utilizadas na prova do teorema. Em particular, assumiremos que o  $\Delta ABC$  está inscrito no círculo unitário, e o ponto  $D(\delta)$  pertence a esse círculo. Como os pontos  $\lambda, \mu$  e  $\nu$  são colineares, basta determinar a equação da reta que passa por  $\lambda$  e  $\mu$ . De acordo com a equação (2.5), a reta procurada é dada por

$$(\mu - \lambda)\bar{z} - (\bar{\mu} - \bar{\lambda})z = \mu\bar{\lambda} - \lambda\bar{\mu}. \quad (2.23)$$

Vamos introduzir as seguintes notações:

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad \sigma_2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \quad \sigma_3 = \alpha\beta\gamma;$$

então,

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \quad \bar{\sigma}_3 = \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sigma_3}.$$

Portanto, as expressões de  $\lambda$  e  $\mu$  se transformam em

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( \sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3}{\delta\alpha} \right) \Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_3} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta} - \frac{\delta\alpha}{\sigma_3} \right)$$

e

$$\sigma = \frac{1}{2} \left( \sigma_1 - \beta + \delta - \frac{\sigma_3}{\delta\beta} \right) \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_3} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\delta} - \frac{\delta\beta}{\sigma_3} \right).$$

Substituindo esses valores na equação (2.23) e efetuando as simplificações necessárias, obtemos

$$\delta z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2} \left( \delta^2 + \sigma_1 \delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\delta} \right).$$

### 2.2.4 Lei dos Cossenos e Lei dos Senos

Para a prova das Lei dos cossenos e dos senos, utilizaremos as seguintes igualdades:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad |z|^2 = z\bar{z}, \quad \operatorname{sen} \arg z = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \arg z = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}.$$

**Teorema 4 (Lei dos Cossenos)** *Seja  $ABC$  um triângulo. Então,*

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC| \cos \hat{A}. \quad (2.24)$$

**Prova.** Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $A$  é a origem do plano complexo,  $B$  está em 1 e  $C$  é representado pelo ponto  $z$ .

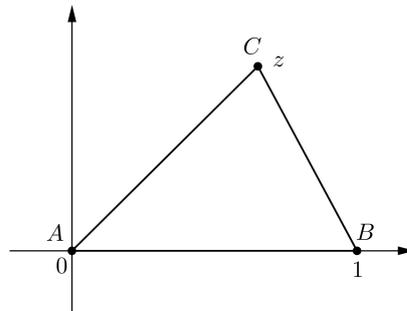


Figura 2.15: Triângulo  $ABC$

Assim, de acordo com as coordenadas estabelecidas, temos

$$|AB| = 1, \quad |BC| = |z - 1|, \quad |AC| = |z| \quad \text{e} \quad \hat{A} = \arg z.$$

Partindo do lado direito de (2.24), temos que

$$\begin{aligned}
 |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC| \cos \hat{A} &= \\
 &= 1 + |z|^2 - 2|z| \cos \arg z \\
 &= z\bar{z} + 1 - 2|z| \cdot \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \\
 &= z\bar{z} + 1 - 2\frac{z + \bar{z}}{2} \\
 &= z\bar{z} + 1 - z - \bar{z} \\
 &= z(\bar{z} - 1) - (\bar{z} - 1) \\
 &= (z - 1)(\bar{z} - 1) \\
 &= |z - 1|^2 \\
 &= |BC|^2,
 \end{aligned}$$

e o teorema está provado. ■

**Teorema 5 (Lei dos Senos)** *Seja  $ABC$  um triângulo. Então*

$$\frac{|AB|}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{|BC|}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{|AC|}{\operatorname{sen} \hat{B}}.$$

**Prova.** Representando  $A$ ,  $B$  e  $C$  pelos números complexos  $0$ ,  $1$  e  $z$ , temos

$$\frac{|AC|}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{|z|}{\frac{\operatorname{Im}(z-1)}{|z-1|}} = \frac{|z||z-1|}{\operatorname{Im}(z)} = \frac{|z-1|}{\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}} = \frac{|BC|}{\operatorname{sen} \hat{A}},$$

e o teorema está provado. ■

### 2.2.5 Resolução de Problemas Geométricos

**Problema 1 (PROFMAT - MA 13 AV1 2012)** . *Quadrados foram construídos sobre os lados de um paralelogramo como mostra a figura abaixo. Mostre que os centros desses quatro quadrados são vértices de outro quadrado.*

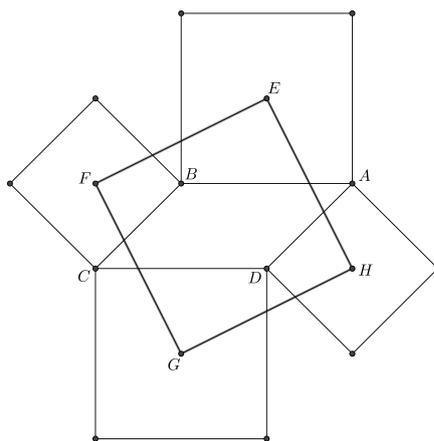


Figura 2.16: Problema 1

**Solução.** A resolução, a seguir, difere da que foi divulgada pela banca do PROFMAT, e que se encontra no Apêndice B.

Considere o ponto de interseção das diagonais como sendo a origem do plano complexo e sejam  $z$ ,  $w$ ,  $-z$  e  $-w$  as coordenadas dos vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , respectivamente. Sejam  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  e  $z_4$  as coordenadas dos centros dos quadrados construídos. Como  $EB = EA$  e  $EB \perp EA$ , temos que o ponto  $A$  é obtido pela rotação positiva do ponto  $B$ , de um ângulo de  $90^\circ$ , em torno de  $E$ . Assim,

$$EA = i \cdot EB \Rightarrow z - z_1 = i(w - z_1) \quad \therefore \quad z_1 = \frac{z - wi}{1 - i}$$

Analogamente, temos que

$$z_2 = \frac{w + zi}{1 - i}, \quad z_3 = \frac{-z + wi}{1 - i}, \quad z_4 = \frac{-w - zi}{1 - i}.$$

Segue-se que

$$\widehat{z_2 z_1 z_4} = \arg \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg \frac{-w - zi - z + wi}{w + zi - z + wi} = \arg \frac{(w + zi - z + wi)i}{w + zi - z + wi} = \arg i = \frac{\pi}{2},$$

donde  $z_1 z_2 = z_1 z_4$ , e

$$\widehat{z_4 z_3 z_2} = \arg \frac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3} = \arg \frac{w + zi + z - wi}{-w - zi + z - wi} = \arg \frac{(-w - zi + z - wi)i}{-w - zi + z - wi} = \arg i = \frac{\pi}{2},$$

o que mostra que  $z_3 z_2 = z_3 z_4$  e, portanto,  $z_1 z_2 z_3 z_4$  é um quadrado.

**Problema 2** *Sobre os lados  $AB$  e  $BC$  de um triângulo  $ABC$ , desenhe quadrados com centros  $D$  e  $E$  tais que os pontos  $C$  e  $D$  estejam do mesmo lado da reta  $AB$  e os pontos  $A$  e  $E$  estejam em lados opostos da reta  $BC$ . Prove que os ângulo entre as retas  $AC$  e  $DE$  é igual a  $45^\circ$ .*

**Solução.** Sejam  $z_A, z_B, z_C, z_D$  e  $z_E$  números complexos que representam os pontos  $A, B, C, D$  e  $E$ , respectivamente.

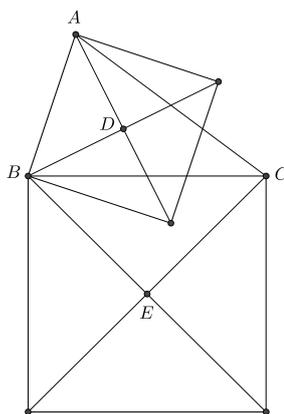


Figura 2.17: Problema 2

Como  $EC = EB$  e  $EC \perp EB$ , temos que  $B$  é obtido pela rotação positiva do ponto  $C$ , de um ângulo de  $90^\circ$ , em torno de  $E$ . Assim temos que

$$z_B - z_E = (z_C - z_E) \cdot i \quad \text{e} \quad z_E = \frac{z_B - z_C i}{1 - i}.$$

Analogamente,

$$z_D = \frac{z_B - z_A i}{1 - i}.$$

O ângulo entre as retas  $AC$  e  $DE$  é igual ao

$$\begin{aligned} \arg \frac{z_C - z_A}{z_E - z_D} &= \arg \frac{z_C - z_A}{\frac{z_B - z_C i}{1 - i} - \frac{z_B - z_A i}{1 - i}} \\ &= \arg \frac{(z_C - z_A)(1 - i)}{-i(z_C - z_A)} \\ &= \arg \frac{1 - i}{-i} \\ &= \arg(1 + i) \\ &= \frac{\pi}{4}, \quad \text{que é o resultado desejado.} \end{aligned}$$

**Problema 3** *Seja  $ABCD$  um quadrado de centro no ponto  $O$  e sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios dos segmentos  $BO$  e  $CD$ , respectivamente. Prove que o triângulo  $AMN$  é isósceles e retângulo.*

**Solução.**

Considere o ponto  $O$  como a origem do plano complexo e sejam as raízes quartas da unidade,  $1, i, -1, -i$ , as coordenadas dos pontos  $A, B, C, D$ , respectivamente.

Os pontos  $M$  e  $N$  são, respectivamente,  $M = \frac{i}{2}$  e  $N = \frac{-1 - i}{2}$ . Assim,

$$\frac{AM}{MN} = \frac{1 - \frac{i}{2}}{\frac{-1 - i}{2} - \frac{i}{2}} = \frac{2 - i}{-1 - 2i} = \frac{(-1 - 2i)i}{-1 - 2i} = i.$$

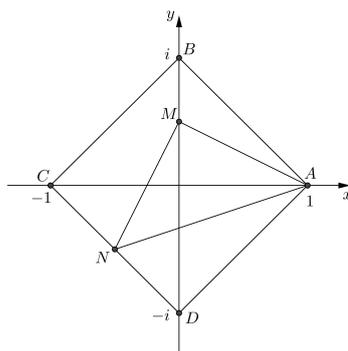


Figura 2.18: Problema 3

Então,  $AM \perp MN$  e  $AM = NM$ , como queríamos mostrar.

**Problema 4 (RPM 14, seção problemas: problema 67)** *Dois piratas Barba Vermelha e Barba Negra, fugindo da marinha real, se dirigiram a uma ilha com o objetivo de nela enterrar um tesouro. Na beira da praia existiam duas grandes rochas e uma palmeira solitária. Barba Vermelha dirigiu-se a uma das rochas e andou, na direção perpendicular à reta que unia a rocha à palmeira, uma distância igual a distância entre a rocha e a palmeira. Barba Negra fez a mesma coisa com relação à outra rocha e à palmeira. Em seguida, eles caminharam um na direção do outro e enterraram o tesouro na metade do caminho. Dois anos mais tarde eles retornaram à ilha para desenterrar o tesouro e descobriram que a palmeira não estava mais lá. Como será possível recuperar o tesouro?*

**Solução.** Na solução desse problema, cuja reprodução encontra-se no Apêndice B, e que foi publicada na RPM 16, o autor utiliza o plano cartesiano. A seguir utilizamos o plano complexo para obter uma outra solução.

Sejam  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_p$  pontos do plano complexo que representam, respectivamente, as posições das rochas e da palmeira. Suponha, sem perda de generalidade, que  $z_1$  e  $z_2$  estão sobre o eixo real, com  $z_2$  à direita de  $z_1$  (o caso em que  $z_2$  está à esquerda de  $z_1$  pode ser tratado de maneira semelhante).

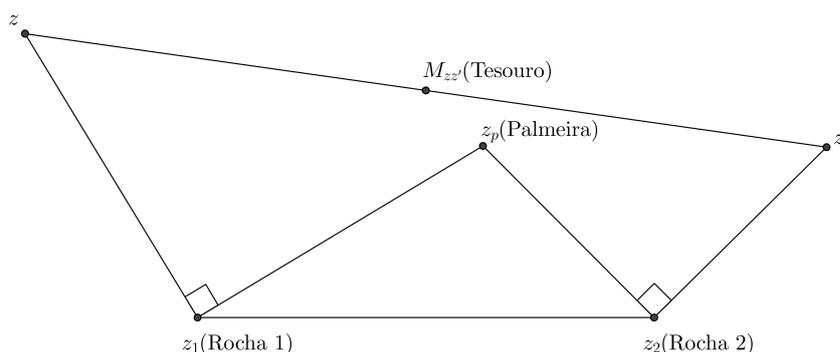


Figura 2.19: Mapa do Tesouro

O ponto  $z$  é obtido pela rotação de  $90^\circ$ , no sentido anti-horário, do ponto  $z_p$  em torno de  $z_1$ , isto é

$$z - z_1 = i(z_p - z_1).$$

O ponto  $z'$  é obtido pela rotação de  $90^\circ$ , no sentido horário, do ponto  $z_p$  em torno de  $z_2$ , isto é

$$z' - z_2 = -i(z_p - z_2).$$

Assim, os pontos  $z$  e  $z'$  são dados por

$$z = iz_p + (1 - i)z_1 \quad \text{e} \quad z' = -iz_p + (1 + i)z_2.$$

Logo, o ponto médio do segmento  $zz'$  é dado por

$$M_{zz'} = \frac{z + z'}{2} = \frac{iz_p + (1 - i)z_1 - iz_p + (1 + i)z_2}{2} = \frac{(1 - i)z_1 + (1 + i)z_2}{2}.$$

Como podemos ver, o ponto médio do segmento  $zz'$  não depende de  $z_p$ , isto é, não depende das coordenadas da palmeira. Se a rotação de  $z_p$  sobre  $z_1$  fosse feita no sentido horário e a rotação de  $z_p$  sobre  $z_2$  fosse feita no sentido anti-horário, a conclusão seria a mesma. No entanto, se as rotações fossem feitas no mesmo sentido, a conclusão não seria verdadeira, pois teríamos:

- Sentido anti-horário

$$\begin{aligned}z &= iz_p + (1 - i)z_1, \\z' &= iz_p + (1 - i)z_2 \quad \text{e} \\M_{zz'} &= \frac{2iz_p + (1 - i)(z_1 + z_2)}{2}.\end{aligned}$$

- Sentido horário

$$\begin{aligned}z &= -iz_p + (1 + i)z_1, \\z' &= -iz_p + (1 + i)z_2 \quad \text{e} \\M_{zz'} &= \frac{-2iz_p + (1 + i)(z_1 + z_2)}{2}.\end{aligned}$$

Nos dois casos,  $M_{zz'}$  depende de  $z_p$ , donde concluimos que, se os piratas andarem no mesmo sentido, o tesouro estará perdido.

# Apêndice A

## Geometria Analítica e Números Complexos

O propósito deste apêndice é mostrar que podemos, utilizando a Geometria Analítica, obter a prova de algumas das Proposições apresentadas no Capítulo 2.

### A.1 Equação da Reta

**Proposição 17** *A equação de uma reta no plano complexo pode ser dada pela equação*

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha z + \beta = 0,$$

onde  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  e  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Prova.** A equação de uma reta no plano cartesiano é representada pela equação

$$ax + by + c = 0,$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a$  e  $b$  não simultaneamente nulos. Se fizermos  $z = x + yi$ , então, pelas propriedades do conjugado de um número complexo, temos que

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Assim,

$$a \frac{z + \bar{z}}{2} - bi \frac{z - \bar{z}}{2i} + c = 0,$$

que é equivalente a

$$\left(\frac{a + bi}{2}\right) \bar{z} + \left(\frac{a - bi}{2}\right) z + c = 0.$$

Fazendo  $\alpha = \frac{a + bi}{2} \in \mathbb{C}^*$  e  $\beta = c \in \mathbb{R}$ , segue que

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha z + \beta = 0, \tag{*}$$

e a Proposição está provada. ■

Com respeito a equação (\*), temos as seguintes observações:

- Se  $\alpha = \bar{\alpha}$ , então  $b = 0$  e temos uma reta vertical.
- Se  $\alpha \neq \bar{\alpha}$ , então definimos o coeficiente angular da reta cuja equação é dada por (\*), como sendo o número

$$m = -\frac{a}{b} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{i}} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}} i$$

**Proposição 18** *Considere as retas  $r_1$  e  $r_2$  de equações dadas, respectivamente, por*

$$\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{z} + \alpha_1 z + \beta_1 = 0$$

e

$$\bar{\alpha}_2 \cdot \bar{z} + \alpha_2 z + \beta_2 = 0.$$

Então as retas  $r_1$  e  $r_2$  são

1) paralelas se e somente se  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2}$ ;

2) perpendiculares se e somente se  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2}$ .

**Prova.** 1) Para que as retas  $r_1$  e  $r_2$  sejam paralelas devemos ter  $m_{r_1} = m_{r_2}$ . Portanto,

$$\frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 i}{\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 i} = \frac{\alpha_2 + \bar{\alpha}_2 i}{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2 i}.$$

Assim

$$\alpha_2 \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \bar{\alpha}_2$$

e, portanto,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2}.$$

2) Para que as retas  $r_1$  e  $r_2$  sejam perpendiculares devemos ter  $m_{r_1} \cdot m_{r_2} = -1$ , isto é

$$\left( \frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 i}{\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 i} \right) \cdot \left( \frac{\alpha_2 + \bar{\alpha}_2 i}{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2 i} \right) = -1.$$

Logo,

$$\alpha_2 \bar{\alpha}_1 = -\alpha_1 \bar{\alpha}_2,$$

e, daí,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2}.$$

■

## A.2 Equação de uma reta determinada por um ponto e uma direção

**Proposição 19** *A equação da reta que passa pelo ponto  $z_0$  e é paralela a reta  $r : \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$  é dada por*

$$z - z_0 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

**Prova.** A equação cartesiana da reta paralela a  $r$  passando por  $z_0$  é dada por

$$y - y_0 = i\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}(x - x_0).$$

Por propriedades de números complexos, temos que

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i} = i\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}\left(\frac{z + \bar{z}}{2} - \frac{z_0 + \bar{z}_0}{2}\right).$$

Multiplicando esta equação por  $2i(\alpha - \bar{\alpha})$ , obtemos

$$(\alpha - \bar{\alpha})[(z - z_0) - (\bar{z} - \bar{z}_0)] = -(\alpha + \bar{\alpha})[(z - z_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0)],$$

donde

$$(z - z_0)(\alpha - \bar{\alpha} + \alpha + \bar{\alpha}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)(-\alpha - \bar{\alpha} + \alpha - \bar{\alpha}),$$

ou ainda,

$$\alpha(z - \bar{z}_0) = -\bar{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

Finalmente, segue que

$$z - z_0 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

■

**Proposição 20** *A equação da reta que passa pelo ponto  $z_0$  e é perpendicular a reta  $r : \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$  é*

$$z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

**Prova.** A equação cartesiana da reta perpendicular a  $r$  passando por  $z_0$  é dada por

$$y - y_0 = -\frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\alpha + \bar{\alpha}}(x - x_0)$$

Usando números complexos, temos

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i} = -\frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\alpha + \bar{\alpha}} \left( \frac{z + \bar{z}}{2} - \frac{z_0 + \bar{z}_0}{2} \right).$$

Multiplicando a equação acima por  $2i(\alpha + \bar{\alpha})$ , obtemos

$$(\alpha + \bar{\alpha})[(z - z_0) - (\bar{z} - \bar{z}_0)] = -(\alpha - \bar{\alpha})[(z - z_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0)],$$

donde

$$(z - z_0)(\alpha + \bar{\alpha} + \alpha - \bar{\alpha}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)(-\alpha + \bar{\alpha} + \alpha + \bar{\alpha}),$$

ou ainda,

$$\alpha(z - \bar{z}_0) = \bar{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

Finalmente, segue que

$$z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

■

### A.3 Equação da reta determinada por dois pontos

**Proposição 21** *A equação da reta determinada pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$  é*

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Prova.** A equação de uma reta determinada pelos pontos  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  no plano cartesiano é

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Denotando a primeira coluna e a segunda do determinante acima, respectivamente, por  $C_1$  e  $C_2$ . Pelas Propriedades dos determinantes, podemos substituir  $C_1$  por  $C_1 + C_2 \cdot i$  e  $C_2$  por  $C_1 - C_2 \cdot i$ , obtendo

$$\begin{vmatrix} x + yi & x - yi & 1 \\ x_1 + y_1i & x_1 - y_1i & 1 \\ x_2 + y_2i & x_2 - y_2i & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

isto é,

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

que é o resultado desejado. ■

**Observação 6** *Desenvolvendo o determinante, temos*

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff z\bar{z}_1 + \bar{z}z_2 + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 - z\bar{z}_2 - \bar{z}z_1 = 0,$$

o que é equivalente a

$$(z_2 - z_1)\bar{z} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = \bar{z}_1z_2 - z_1\bar{z}_2.$$

## A.4 Condição de Alinhamento de Três Pontos

**Proposição 22** *Três pontos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  no plano complexo são colineares se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Prova.** Se  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  são três pontos distintos, então

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pelas Propriedades dos determinantes, temos

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & \bar{z}_2 - \bar{z}_1 & 0 \\ z_3 - z_1 & \bar{z}_3 - \bar{z}_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \\ z_3 - z_1 & \bar{z}_3 - \bar{z}_1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_1} \\ &\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow z_1, z_2 \text{ e } z_3 \text{ são colineares.} \end{aligned}$$

E a prova está concluída.

■

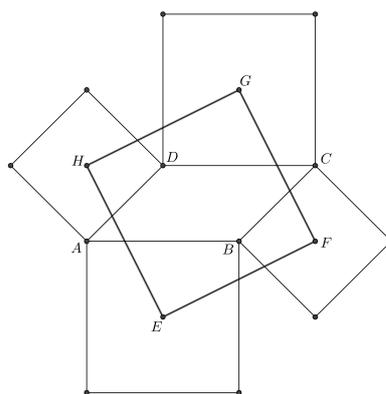
# Apêndice B

## Resolução dos Problemas 1 e 4

Apresentamos aqui as soluções dos problemas 1 e 4, do Capítulo 2, como foram originalmente publicadas.

### B.1 Problema 1

(PROFMAT - MA 13 AV1 2012). *Quadrados foram construídos sobre os lados de um paralelogramo como mostra a figura abaixo. Mostre que os centros desses quatro quadrados são vértices de outro quadrado.*



**Solução.** No paralelogramo  $ABCD$  os quadrados construídos sobre os lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $DA$  têm centros  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ , respectivamente. Os triângulos  $AEB$ ,  $BFC$ ,  $CGD$  e  $DHA$  são retângulos e isósceles. O primeiro e o terceiro são congruentes e o segundo e o quarto são também congruentes. Sejam  $\angle BAD = \alpha$

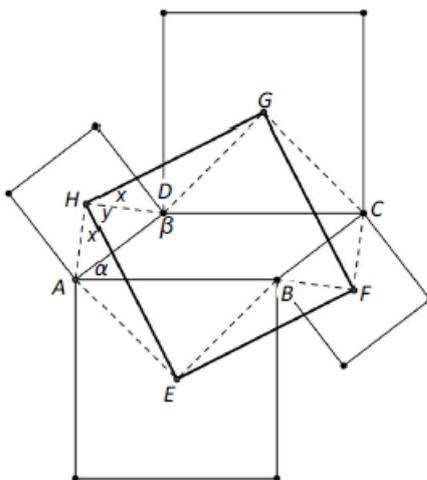


Figura B.1: Problema 1

e  $\angle ADC = \beta$  dois ângulos internos vizinhos do paralelogramo. Sabemos que  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . Observemos que  $\angle HAE = 45^\circ + \alpha + 45^\circ = 90^\circ + \alpha$  e que  $\angle HDG = 360^\circ - 45^\circ - \beta = 270^\circ - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha = \angle HAE$ . Reunindo as informações anteriores, concluímos que os triângulos  $HAE$ ,  $HDG$ ,  $FCG$  e  $FBE$  são todos congruentes e, portanto,  $EH = HG = GF = FE$  e o quadrilátero  $EFGH$  possui os quatro lados iguais. Da congruência dos triângulos  $HAE$  e  $HDG$  temos  $\angle AHE = \angle DHG = x$  e seja  $\angle EHD = y$ . Por um lado,  $\angle AHE + \angle EHD = x + y = 90^\circ$ , pois o ângulo  $AHD$  é reto. Por outro lado,  $\angle EHG = \angle DHG + \angle EHD = x + y = 90^\circ$ . Assim, o quadrilátero  $EFGH$  possui os quatro lados iguais e um ângulo reto. Logo, é um quadrado.

## B.2 Problema 4

(RPM 14, seção problemas: problema 67). *Dois piratas Barba Vermelha e Barba Negra, fugindo da marinha real, se dirigiram a uma ilha com o objetivo de nela enterrar um tesouro. Na beira da praia existiam duas grandes rochas e uma palmeira solitária. Barba Vermelha dirigiu-se a uma das rochas e andou, na direção perpendicular à reta que unia a rocha à palmeira, uma distância igual a distância entre a rocha e a palmeira. Barba Negra fez a mesma coisa com relação à outra rocha e à palmeira. Em seguida, eles caminharam um na direção do outro e enterraram o tesouro na metade do caminho. Dois anos mais tarde eles retornaram à ilha para desenterrar o tesouro e descobriram que a palmeira não estava mais lá. Como será possível recuperar o tesouro?*

**Solução.** Sejam  $R_1, R_2$  as rochas e  $P$  um ponto qualquer distinto de  $R_i$ . Considere:

- $R_1A$ , obtido pela rotação de  $90^\circ$ , no sentido anti-horário, de  $R_1P$ ;
- $R_2B$ , obtido pela rotação de  $90^\circ$ , no sentido horário, de  $R_2P$ .

Sem perda de generalidade, suporemos  $R_1R_2$  horizontal no plano cartesiano e  $R_1$  à esquerda de  $R_2$ . Mostraremos que

o ponto médio  $M$  de  $AB$  é o ponto da mediatriz do segmento  $R_1R_2$  do qual dista  $\frac{1}{2}R_1R_2$  e está no semiplano superior determinado pela reta  $R_1R_2$ .

Invertendo as duas orientações dadas,  $M$  estará no semiplano inferior.

Donde concluiremos que, se os piratas escolherem sentidos contrários, o tesouro poderá ser encontrado, cavando-se, no máximo, em dois pontos.

Sejam  $A', B', M'$  e  $P'$  as projeções ortogonais, sobre a reta  $R_1R_2$ , de  $A, B, M$  e  $P$ , respectivamente. temos

$$A'R_1 = PP' = B'R_2$$

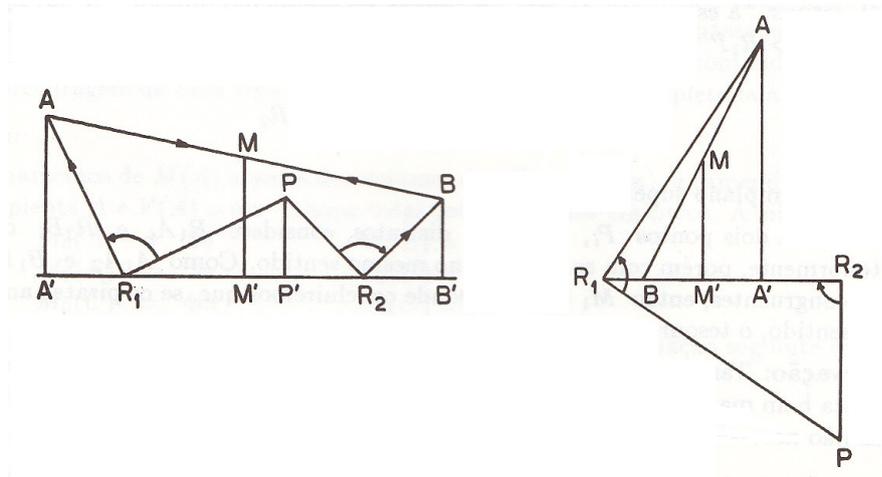


Figura B.2:  $A$  e  $B$  no mesmo semiplano

pois, degenerados ou não,  $\triangle AR_1A' \cong \triangle PR_1P'$  e  $\triangle BR_2B' \cong \triangle PR_2P'$ .

Além disso,  $A'M' = B'M'$ , pois  $M$  é o ponto médio de  $AB$ . Logo, examinando as possíveis projeções de  $A'$  e  $B'$  na reta  $R_1R_2$  quando  $P$  varia, podemos concluir que  $R_1M' = R_2M'$ , portanto,  $M$  pertence a mediatriz de  $R_1R_2$ .

Levando em conta que  $AA' = R_1P$  e  $BB' = R_2P$ , mostraremos que  $MM' = \frac{1}{2}R_1R_2$ .

Na figura B.2,  $A$  e  $B$ , e, portanto,  $M$ , estão no semiplano superior. Neste caso

$$MM' = \frac{1}{2}(AA' + BB') = \frac{1}{2}(R_1P + R_2P) = \frac{1}{2}R_1R_2.$$

Na figura B.3,  $A$  está no semiplano superior,  $B$  no inferior e  $AA' = R_1P' > R_2P' = BB'$ . Neste caso, temos

$$MM' = \frac{1}{2}(AA' + BB') = \frac{1}{2}R_1R_2$$

e  $M$  está no semiplano superior.

Se  $P$  estiver à esquerda de  $R_1$ ,  $A$  estará no semiplano inferior,  $B$  no superior e

$BB' = R_2P' > R_1P' = AA'$ . Logo, temos

$$MM' = \frac{1}{2}(BB' - AA') = \frac{1}{2}R_1R_2$$

e  $M$  está no semiplano superior.

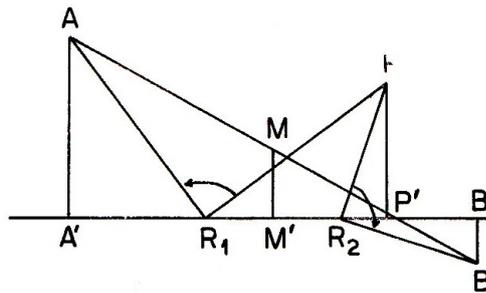


Figura B.3:  $A$  e  $B$  em semiplanos opostos

Dados agora dois pontos  $P_i$ ,  $i = 1, 2$ , distintos, considere  $R_1A_i$  e  $R_2B_i$  obtidos como anteriormente, porém com as rotações no mesmo sentido. Como  $A_1A_2$  e  $B_1B_2$  são paralelos e congruentes, então  $M_1 \neq M_2$ . Donde concluiremos que, se os piratas andarem no mesmo sentido, o tesouro estará perdido.

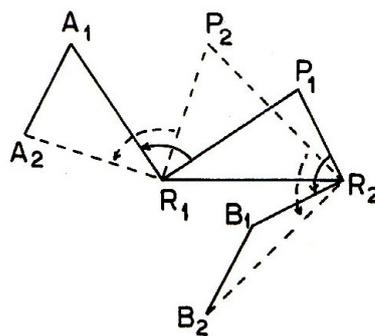


Figura B.4: Rotações no mesmo sentido

## Referências Bibliográficas

- [1] Andreescu, T., Andrica, D., *Complex Numbers From A to ... Z*, Birkhauser, Boston, 2006.
- [2] Carmo, M. P., Morgado, A. C., Wagner, E., *Trigonometria e Números Complexos*, IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1991.
- [3] Garbi, Gilberto G., *A Rainha das Ciências*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.
- [4] Hahn, L., *Complex Numbers and Geometry*, The Mathematical Association of America, 1994.
- [5] Revista do Professor de Matemática - RPM, números 14 e 16, IMPA, Rio de Janeiro, 1989.
- [6] Righetto, A., *Números Complexos e Funções Hiperbólicas*, Ivan Rossi Editora, São Paulo, 1977.
- [7] Yaglom, I. M., *Números Complexos y sus Aplicaciones a la Geometria*, Hayka Libros de Ciencia, España, 2011.