



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT**

**ADENILDO TEXEIRA DE ARAUJO**

**NÚMEROS COMPLEXOS: UM ESTUDO DE APLICAÇÕES A**  
**TRIGONOMETRIA E AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS**

**JUAZEIRO DO NORTE**

**2014**

**ADENILDO TEXEIRA DE ARAUJO**

**NÚMEROS COMPLEXOS: UM ESTUDO DE APLICAÇÕES A TRIGONOMETRIA  
E AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao  
Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional da Universidade Federal do  
Ceará - UFC como requisito parcial à obtenção  
do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Maria Silvana  
Alcântara Costa

**JUAZEIRO DO NORTE**

**2014**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Cariri  
Biblioteca do Campus de Juazeiro do Norte

---

A663n Araújo, Adenildo Teixeira de

Números complexos: um estudo de aplicações à trigonometria e as equações algébricas / Adenildo Teixeira de Araújo. – 2014.  
70 f. : il. color., enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014.  
Área de Concentração: Ensino de matemática  
Orientação: Profa. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa

1. Matemática- estudo e ensino. 2. Forma algébrica e polar. 3. Equação quadrática.  
I. Título

---

CDD 372.70440

ADENILDO TEXEIRA DE ARAUJO

NÚMEROS COMPLEXOS: UM ESTUDO DE APLICAÇÕES A TRIGONOMETRIA  
E AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Programa de Pós-Graduação em  
Matemática em Rede Nacional, do  
Departamento de Matemática da  
Universidade Federal do Ceará, como  
requisito parcial para a obtenção do  
Título de Mestre em Matemática. Área  
de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 10 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Maria Silvana Alcantara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa (Orientadora)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Plácido Francisco de Assis Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Francisco Valdemiro Braga

Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga

Universidade Regional do Cariri (URCA)

*A Deus que iluminou o meu caminho durante esta caminhada, a minha esposa Francerly Moreira Barreiro de Araújo pelo apoio incondicional e a Ana Luísa e Álvaro Luís que completam a minha existência.*

## ***Agradecimentos***

*À Deus, por mais uma realização e que sem Ele nada seria possível;*

*À Minha esposa Francerly Moreira Barreiro de Araujo que é o meu ponto de equilíbrio nas horas de grande dualidade;*

*À minha filha Ana Luísa e ao meu filho Álvaro Luís que vieram abrilhantar a minha vida;*

*Aos meus pais Acelino Texeira de Araujo e Maria da Luz Araújo que se dedicaram e foram fundamentais na minha criação e educação;*

*A todos os professores da Universidade Federal do Ceará que compõe o PROFMAT pela dedicação e por ter acreditado no projeto;*

*A professora Dr<sup>a</sup>. Maria Silvana Alcântara Costa que prontamente aceitou ser minha orientadora e foi de grande importância para que esse trabalho pudesse ser realizado;*

*A SBM, a CAPES e a UFC por, respectivamente, realizar, financiar e executar o projeto.*

*“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real”.*

*(Lobachevsky)*

## *Resumo*

O estudo dos Números Complexos no Ensino Médio é caracterizado, quase exclusivamente, pela abordagem algébrica deixando a parte geométrica e suas aplicações sem uma devida importância. Este trabalho apresenta um estudo sobre Números Complexos bem como algumas de suas aplicações tanto da parte algébrica, aplicada a polinômios, quanto da parte geométrica aplicada em especial à trigonometria. De início fizemos uma abordagem dos fatos históricos desses números citando alguns matemáticos que deram suas contribuições acerca desse conjunto complexo. Em seguida é apresentada a parte teórica, algébrica e geométrica, bem como algumas aplicações a Trigonometria. Por fim apresentamos a teoria das Equações Algébricas quadráticas e cúbicas e a interação dessas com os Números Complexos.

Palavras Chaves: Números Complexos, Trigonometria, Equações Algébricas.

## *Abstrat*

The study of the Complex Numbers in the medium teaching is characterized, almost exclusively, for the algebraic approach leaving the geometric part and their applications without a due importance. This work presents a study on Complex Numbers as well as some of their applications so much of the algebraic part, applied to polynomials, as of the geometric part especially applied to the trigonometry. Of I begin did an approach of the historical facts of those numbers mentioning some mathematical that gave their contributions near of that complex group. Soon afterwards the part theoretical, algebraic and geometric is presented, as well as some applications the Trigonometry. Finally we presented the theory of the quadratic and cubic Algebraic Equations and the interaction of those with the Complex Numbers.

Key words: Complex numbers, Trigonometry, Algebraic Equations.

# Sumário

<b>Introdução</b>	10
<b>1. História</b>	11
<b>2. Números complexos</b>	14
2.1 Definição e propriedades dos números complexos.....	14
2.2 Forma algébrica.....	17
2.2.1. Representação geométrica dos números complexos.....	19
2.2.2. Adição e subtração de números complexos: representação geométrica.....	19
2.2.3. Módulo de um número complexo.....	22
2.2.4. Divisão de números complexos.....	24
2.2.5. Potências do número complexo $i$ .....	25
2.3 Forma polar ou trigonométrica.....	26
2.3.1 Igualdade de complexos na forma trigonométrica.....	27
2.3.2 Multiplicação, divisão, potenciação e radiciação na forma trigonométrica.....	28
2.4. Raízes da unidade.....	37
2.4.1. Algumas propriedades da raiz da unidade.....	41
<b>3. Função polinomial complexa</b>	49
3.1. Equação quadrática.....	53
3.2. Equações cúbicas.....	59
Considerações Finais	64
Referências Bibliográficas	65
Apêndice	67

## ***Introdução***

O estudo dos Números Complexos no Ensino Médio é caracterizado, quase exclusivamente, pela abordagem algébrica deixando a parte geométrica e suas aplicações sem uma devida importância. Os números complexos estão presentes nos mais diversos ramos da matemática, tais como rotação, identidades e funções trigonométricas, equações algébricas, dentre outros, sua importância vai além das raízes quadradas de números negativos.

Então, neste trabalho apresentaremos algumas aplicações significativas dos números complexos na trigonometria e equações algébricas quadráticas e cúbicas.

No capítulo 1 descrevemos um pouco da história desse conjunto desde as tentativas de solucionar equações algébricas, até a nomenclatura utilizada hoje dos números complexos.

No capítulo 2, apresentamos uma fundamentação teórica dos números complexos demonstrando suas propriedades e destacando as principais definições, caracterizando o conjunto  $\mathbb{C}$  como um corpo. Também incluímos nesse capítulo algumas aplicações pertinentes as definições e/ou operações desse conjunto.

No capítulo 3, demos destaque para aplicações de números complexos as equações algébricas, em especial, equações quadráticas e cúbicas, para tanto elencamos algumas definições e teoremas indispensáveis para esse estudo.

## Capítulo 1

### História

Os números complexos ou imaginários nasceram das tentativas de solucionar equações do terceiro grau e não das equações quadráticas com raízes negativas como afirmam muitos livros didáticos. A resolução de equações sempre foi um desafio para os matemáticos, começando por volta de 1600 *a.C* com as equações lineares e graças a obra “Os elementos” de Euclides (330 *a.C* + 70 = 260 *a.C*) tais equações começaram a ser solucionadas. Porém desafios relacionados a geometria, como cálculos de áreas, recaíam em equações do segundo grau, por exemplo, determinar as medidas de um retângulo com perímetro de medida 20 unidades de comprimento e área 40 unidades de área.

Para solucioná-lo, considere  $x$  e  $y$  as dimensões do retângulo.

Então:

$$x + y = 10 \text{ e } x \cdot y = 40$$

Isolando  $x$  na primeira equação e substituindo na segunda, temos a equação quadrática  $y^2 - 10y + 10 = 0$ . Resolvendo encontramos

$$y = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Observe que as raízes  $5 + \sqrt{-15}$  e  $5 - \sqrt{-15}$  satisfazem a equação algébrica, porém a equação foi originária de um problema da geometria, por isso não tinha solução.

As equações cúbicas começaram a aparecer, provavelmente na Matemática Grega, evidenciada pelo problema clássico da duplicação do cubo. Todavia, a partir do século XVI é que matemáticos italianos se interessaram em procurar uma solução geral para equação do terceiro grau. Mas foi Niccolo Tartaglia (1500 + 57 = 1557) que desenvolveu um método para as equações da forma  $x^3 + px^2 = q$  sem demonstrá-las. Nessa época Tartaglia foi desafiado por Antônio Maria Fior que tinha conhecimento da resolução das equações cúbicas do tipo  $x^3 + px = q$ , pois aprendera com Scipione Del Ferro. Fior propôs 30 equações a Tartaglia que que resolveu todas, ao contrário de Fior que não resolveu as equações propostas pelo seu oponente. Esse desafio ficou conhecido entre os matemáticos da época, inclusive por Girolamo Cardano (1501 + 75 = 1576), que se aproximou de Tartaglia e adquiriu os estudos da equação do tipo  $x^3 + px^2 = q$  sob juras de não divulgá-los, porém Cardano

quebrou as juras e publicou, mais tarde, esses estudos na obra *Ars Magna* (1545), sem mencionar se quer o nome do idealizador.

Cardano apresentou nessa obra, além da fórmula de Tartaglia, a resolução de equações biquadradas, como também o método de transformar equações completas do terceiro grau  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  em equações reduzidas com o objetivo de usar o método de Tartaglia, então ele mostrou que a equação  $x^3 + px + q = 0$  tem solução

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Porém Cardano não sabia resolver equação do terceiro grau quando o termo  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ , pois ele tentou e não conseguiu solucionar a equação  $x^3 = 15x + 4$ , já que por sua fórmula tem solução

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Foi então que o matemático Raphael Bombelli (1526 + 47 = 1573), um estudioso da obra *Ars Magna* passou a utilizar  $\sqrt{-1}$ , hoje unidade imaginária, nas soluções dessas equações.

Após os estudos realizados por Bombelli, outros matemáticos que o sucederam passaram a incluir os números imaginários em seus trabalhos e cálculos. Foi Albert Girard (1590 + 43 = 1633) passou a utilizar a notação  $a + b\sqrt{-1}$  para escrever as raízes quadradas de números negativos, nessa mesma época René Descartes (1596 + 54 = 1650) introduziu a denominação “números imaginários” utilizado até hoje como também a existência de raízes complexas para equações algébricas, mas foi Leonhard Euler (1707 + 76 = 1783) que começou a usar a letra  $i$  em substituição a  $\sqrt{-1}$  sendo bem aceito pelos matemáticos da época já que ocultava na resolução das equações o espectro da raiz quadrada negativa. Euler também incluiu polinomiais, logaritmo e forma trigonométrica.

A representação geométrica  $a + bi$  dos números complexos no plano, só foi feita em 1797 por Gaspar Wessel (1745 + 83 = 1818), mas esse trabalho passou despercebido, contudo Jean – Robert Argand (1768 + 54 = 1822) foi quem publicou pela primeira vez um trabalho com o título “Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas” onde os números complexos eram representados por pontos

(vetores) do plano elucidando assim as operações de adição e multiplicação. Essa representação só foi consagrada e aceita pela comunidade acadêmica quando Gauss (1777 + 78 = 1855) publicou um trabalho “A Verdadeira Matemática das Quantidades Imaginárias”. Ainda no século *XVIII*, Abraham de Moivre (1667 + 87 = 1754) introduziu métodos mais modernos para as operações entre números complexos, toda via foi William Rowan Hamilton (1805 + 60 = 1865), quem utilizou pela primeira vez, a álgebra formal, que consiste em admitir o conjunto dos números complexos como o conjunto de todos os pares ordenados da forma  $(a, b)$  de números reais, definição essa seguida neste trabalho.

## Capítulo 2

### Números Complexos

Neste capítulo apresentaremos o conjunto dos números complexos a partir do conjunto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , munido de uma operação de adição e multiplicação. Tendo em vista a relação entre números complexos e pares ordenados, podemos representá-lo no Plano Complexo também conhecido como Plano de Argand - Gauss. Um número complexo também pode ser representado por uma forma trigonométrica ou polar, a qual vem facilitar as operações dentro deste conjunto.

#### 2.1 Definição e Propriedades dos Números complexos

Seja  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais onde estão definidas as operações de adição e multiplicação usuais.

Considere o conjunto  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ , onde  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto dos pares ordenados  $(x, y)$  com  $x, y \in \mathbb{R}$ . Considere ainda os pares ordenados  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$  elementos desse conjunto. Sabemos que  $P = Q$  se, e somente se,  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ . Assim em  $\mathbb{R}^2$  definiremos as seguintes operações de adição e multiplicação:

$$P + Q = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (1)$$

e

$$P \cdot Q = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \quad (2)$$

O conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos é o conjunto dos pares ordenados  $(x, y)$  de números reais  $x$  e  $y$ , onde estão definidas as operações de adição e multiplicação acima.

Portanto, sendo  $z$  um elemento de  $\mathbb{C}$ , temos:

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y), \text{ onde } x, y \in \mathbb{R}$$

De acordo com essa definição as operações de adição e multiplicação gozam das seguintes propriedades:

**I) COMUTATIVA:** Sendo  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ ,  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , temos:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{e} \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$$

ou seja,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = z_2 + z_1 \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= (x_2 x_1 - y_2 y_1, y_2 x_1 + y_1 x_2) = z_2 z_1 \end{aligned}$$

**II) ASSOCIATIVA:** Sendo  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  e  $z_3 = (x_3, y_3)$ ,  $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , temos:  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  e  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ .

De fato:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) \\ &= [(x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)] \\ &= [(x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3] \\ &= [x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)] \\ &= [(x_1 + y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)] = z_1 + (z_2 + z_3) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= [(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)] \cdot (x_3, y_3) = [(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)] \cdot (x_3, y_3) \\ &= [(x_1 x_2 - y_1 y_2) x_3 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) y_3, (x_1 x_2 - y_1 y_2) y_3 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) x_3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + x_2y_1x_3)] \\
&= [x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(y_2x_3 + x_2y_3), x_1(y_2y_3 + x_2y_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)] \\
&= (x_1, y_1) \cdot (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) = (x_1, y_1) \cdot [(x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)] = z_1(z_2z_3)
\end{aligned}$$

### III) A MULTIPLICAÇÃO É DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO A ADIÇÃO

Dados Sendo  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  e  $z_3 = (x_3, y_3)$ ,  $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , temos:  
 $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ . Ou seja:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (x_1, y_1) \cdot [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) \cdot [(x_2 + x_3, y_2 + y_3)] \\
&= [x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)] \\
&= [x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3] \\
&= [(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3), (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3)] \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\
&= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) = z_1z_2 + z_1z_3
\end{aligned}$$

Outras propriedades em  $\mathbb{C}$ , não menos importantes do que as citadas são:

**IV) ELEMENTO NEUTRO ADITIVO:** Existe um elemento em  $\mathbb{C}$ ,  $0 = (0, 0)$ , tal que  
 $z + 0 = 0 + z, \forall z \in \mathbb{C}$ .

Observe que dado um  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ , tem-se que:

$$z + 0 = (x, y) + 0 = (x + 0, y + 0) = (x, y) = z$$

**V) EXISTÊNCIA DO SIMÉTRICO ADITIVO:** Dado um  $z \in \mathbb{C}$ , existe um  $z' \in \mathbb{C}$ , tal que  $z + z' = 0$ .

Note que para  $z = (x, y)$ , basta tomarmos  $z' = (-x, -y)$  em  $\mathbb{C}$ , pois

$$z + z' = (x, y) + (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y)) = (0, 0) = 0$$

**VI) EXISTÊNCIA DE UM ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO:** Dado  $z \in \mathbb{C}$ , existe um  $a_m \in \mathbb{C}$ , tal que  $z \cdot a_m = a_m \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{C}$ .

Basta tomar  $z = (x, y)$  e  $a_m = (1, 0)$ , observe que

$$z \cdot a_m = (x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) = z$$

**VII) EXISTÊNCIA DO ELEMENTO INVERSO MULTIPLICATIVO:** Dado  $z \in \mathbb{C}$  existe  $z^{-1} \in \mathbb{C}$ , tal que  $z \cdot z^{-1} = a_m, \forall z \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$ .

De fato, tome  $z = (x, y)$  e  $z^{-1} = (a, b)$ , então:

$$z \cdot z^{-1} = (x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, ya + xb) = (1, 0)$$

Portanto, da equação acima temos:

$$xa - yb = 1 \text{ e } ya + xb = 0, \quad \text{o que nos dá}$$

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad b = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Logo

$$z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \text{ que multiplicado por } z \neq (0, 0) \text{ tem como resultado } (1, 0) = a_m.$$

Um conjunto munido das operações de adição e multiplicação satisfazendo as propriedades mencionadas anteriormente é um *corpo*. Por essa razão podemos chamar  $\mathbb{C}$  de *corpo* dos números complexos.

## 2.2 Forma Algébrica

Identificando o número complexo  $(x, 0)$  com o número real  $x$ , temos:

$$(x, 0) \Leftrightarrow x$$

Ao fazermos essa identificação verificamos que  $\mathbb{R}$  é subconjunto de  $\mathbb{C}$ , ou seja:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

De fato, seja  $\mathbb{R}'$  um subconjunto de  $\mathbb{C}$ , tal que  $\mathbb{R}' = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$  e  $g$  uma aplicação de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}'$  que leva qualquer  $x \in \mathbb{R}$  ao par  $(x, 0) \in \mathbb{R}'$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Observe que dado  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  com  $g(x_1) = g(x_2)$  tem-se  $(x_1, 0) = (x_2, 0)$ , logo  $x_1 = x_2$ , com isso  $g$  é injetiva.

Observe também que qualquer  $y = (x, 0) \in \mathbb{R}'$ , temos  $y = g(x)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ , portanto  $g$  é sobrejetiva. Temos então uma bijeção de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}'$ .

Vamos verificar também que  $g$  conserva as operações de adição e multiplicação, a saber:

$$1 - g(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$2 - g(xy) = (xy, 0) = (x \cdot y - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot y) = (x, 0) \cdot (y, 0) = g(x) \cdot g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Assim a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$  é bijetiva e preserva as operações de adição e multiplicação, nestas condições dizemos que  $g$  é um isomorfismo e os corpos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}'$  são ditos isomorfos.

Dessa maneira os complexos da forma  $(x, 0)$  podem ser identificados com o número real  $x$ .

Definindo um número complexo  $i$  por  $i = (0, 1)$  de unidade imaginária, verifica-se que  $i^2 = -1$ . De fato:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \quad (3)$$

Portanto um número complexo qualquer  $z = (x, y)$  pode ser escrito da seguinte maneira

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + yi \quad (4)$$

em que  $i$  é a unidade imaginária. Assim, todo número complexo  $z$  pode ser escrito de maneira única:

$$z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1.$$

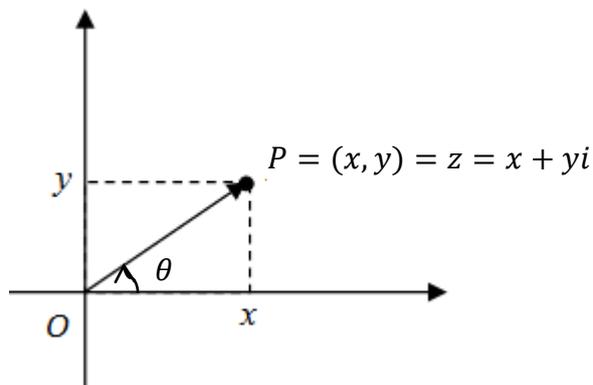
A expressão  $z = x + yi$  é chamada forma algébrica do número complexo  $z$ .

Vale destacar ainda que os números reais  $x$  e  $y$  são respectivamente parte real ( $Re z = x$ ) e parte imaginária ( $Im z = y$ ) e quando  $x = 0$  e  $y \neq 0$  o número complexo  $z$  é dito imaginário puro.

### 2.2.1. *Representação Geométrica dos Números Complexos*

Já vimos que a cada número complexo  $z = x + yi$  está associado o par de números reais  $(x, y)$ . Então suponha fixado um sistema de coordenadas no plano. Logo podemos associar a cada número complexo  $z$  o ponto  $P$  desse plano de coordenadas  $x$  e  $y$ . Assim ao complexo  $z$  associamos o vetor de origem  $(0, 0)$  desse sistema de coordenadas e extremidade  $(x, y)$ , isto é, o complexo  $z$  é representado pelo vetor  $\overrightarrow{OP}$ , chamado também de afixo de  $z$ .

Esse sistema de coordenadas cartesianas no qual estão representados os números complexos é chamado de Plano Complexo ou plano de Argand-Gauss.



*Figura 1*

Além disso, se  $x_1 + y_1i = x_2 + y_2i$ , concluímos pela unidade dos números complexos que  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ , ou seja, se dois complexos são iguais então as suas partes real e imaginária são iguais.

### 2.2.2 *Adição e Subtração de Números Complexos: representação geométrica*

Considere  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ , com  $x_1, y_1, x_2$  e  $y_2 \in \mathbb{R}$ . Assim;

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = z_3 \quad (5)$$

Essa soma corresponde simplesmente a soma dos vetores  $\overrightarrow{Oz_1}$ , e  $\overrightarrow{Oz_2}$  com  $O = (0, 0)$ , ou seja a soma é representada geometricamente pela diagonal do paralelogramo com lados adjacentes  $Oz_1$  e  $Oz_2$  e os pontos  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  e  $z_3 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$  corresponde respectivamente a  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$  e  $z_3 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ .

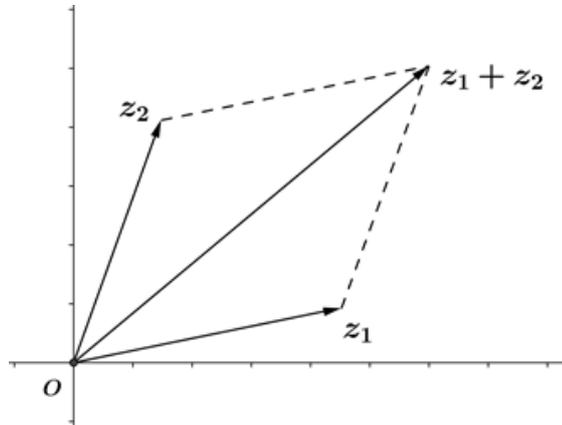


Figura 2

A subtração é interpretada geometricamente como a diferença dos vetores  $\overrightarrow{Oz_1}$ , e  $\overrightarrow{Oz_2}$ .

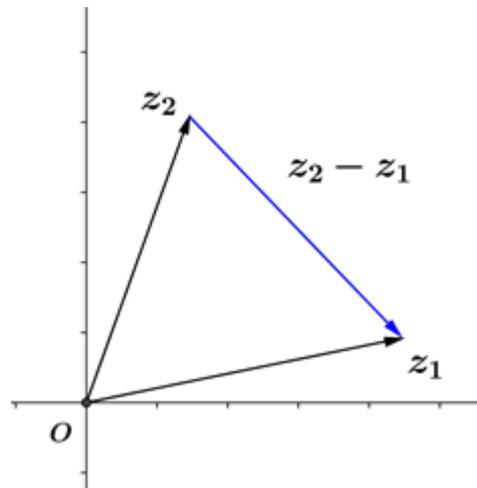


Figura 3

Temos:

$$\overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{Oz_2}$$

$$\overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{Oz_2} - \overrightarrow{Oz_1}$$

Logo  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  representa a diferença entre os complexos  $z_2$  e  $z_1$ , ou seja:

$$z_2 - z_1 = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \quad (6)$$

O conjugado de um número complexo  $z = x + yi$ ;  $x, y \in \mathbb{R}$ , é definido por  $\bar{z} = x - yi$ , geometricamente, corresponde ao simétrico de  $z$  em relação ao eixo real  $OX$ .

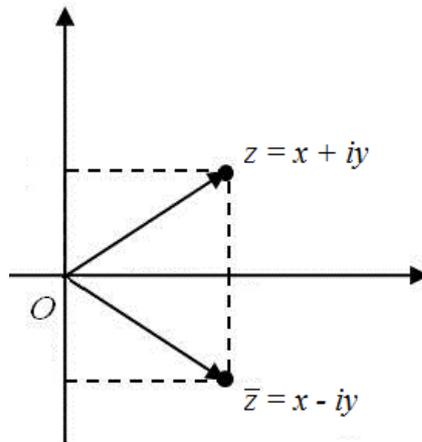


Figura 4

As propriedades da conjugação são:

$$(1) \quad \overline{\bar{z}} = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$(2) \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$(3) \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$(4) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ e } z_2 \neq 0$$

$$(5) \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n, \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ e } n \text{ um número inteiro}$$

$$(6) \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{(z + \bar{z})}{2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$(7) \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{(z - \bar{z})}{2i}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

**Prova.**

( 1 ) Sendo  $z = x + yi$ , temos  $\bar{z} = x - yi$  e  $\bar{\bar{z}} = x - (-yi) = x + yi = z$

( 2 ) Para  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$  temos

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \\ &= (x_1 - y_1i) + (x_2 - y_2i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\end{aligned}$$

( 3 ) Seja  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$  temos

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2)i} = \overline{(x_1y_1 - x_2y_2) + (x_2y_1 + x_1y_2)i} \\ &= (x_1y_1 - x_2y_2) - (x_2y_1 + x_1y_2)i = (x_1 - y_1i)(x_2 - y_2i) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\end{aligned}$$

( 4 ) Veja que pela propriedade ( 3 ), temos

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 \cdot \frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$\begin{aligned}( 5 ) \bar{z}^n &= \overline{(x + yi)^n} = \overbrace{\overline{(x + yi)(x + yi) \dots (x + yi)}}^{n \text{ fatores}} \\ &= \overbrace{\overline{(x + yi)} \cdot \overline{(x + yi)} \cdot \dots \cdot \overline{(x + yi)}}^{n \text{ fatores}} = \left[\overline{(x + yi)}\right]^n = (\bar{z})^n\end{aligned}$$

( 6 ) Como  $z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi)$ , então  $z + \bar{z} = 2x$ , donde  $x = \text{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$

( 7 ) Como  $z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi)$ , então  $z - \bar{z} = 2yi$ , logo  $y = \text{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i$

### 2.2.3. Módulo de um Número Complexo

Dado um número complexo  $z = x + yi$ , chamaremos módulo de  $z$  o número real não negativo  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Geometricamente, o módulo de  $z$  é a distância do ponto de extremidade  $P = (x, y)$ , à origem  $O$ .

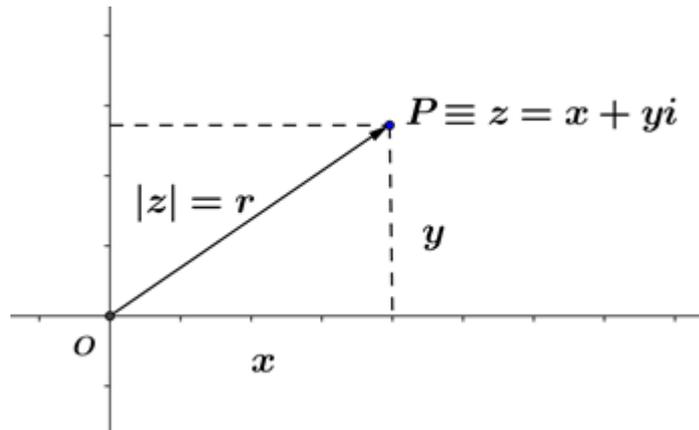


Figura 5

Logo, dado dois complexos quaisquer  $z_1$  e  $z_2$  são válidas as seguintes propriedades:

$$(1) z_1 \cdot \bar{z}_1 = |z_1|^2, \forall z_1 \in \mathbb{C}$$

$$(2) |z_1| = |\bar{z}_1|, \forall z_1 \in \mathbb{C}$$

$$(3) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$(4) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$(5) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

**Prova.**

$$(1) z_1 \cdot \bar{z}_1 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z_1|^2$$

$$(2) \text{ Seja } z_1 = x + yi, \text{ logo } |z_1| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x)^2 + (-y)^2} = |\bar{z}_1|$$

(3) Da propriedade (1), temos

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) = (z_1 \cdot \bar{z}_1) \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

Como  $|z| \geq 0$ , conseqüentemente  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(4) Temos

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

(5) Seja dois complexos  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ . Consideremos a desigualdade

$$0 \leq (ad - bc)^2, (a, b, c, d \in \mathbb{R}), \text{ daí}$$

$$0 \leq (ad - bc)^2 \Rightarrow 0 \leq (ab)^2 - 2adbc + (bc)^2 \Rightarrow 2adbc \leq (ad)^2 + (bc)^2$$

Vamos adicionar o termo  $(ac)^2 + (bd)^2$  a ambos os membros, logo

$$\begin{aligned} 2adbc + (ac)^2 + (bd)^2 &\leq (ad)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 \Rightarrow \\ (ac + bd)^2 &\leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \end{aligned}$$

Portanto,

$$(ac + bd) \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

Agora, multiplicando ambos os termos por 2 e em seguida somando  $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ , teremos

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

Segue que

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Agora que conhecemos o conjugado e o módulo de um número complexo e suas respectivas propriedades podemos falar de divisão de números complexos.

#### 2.2.4. *Divisão de Números Complexos*

Dados  $z_1$  e  $z_2 \neq 0$ , números complexos quaisquer, o quociente  $z = z_1/z_2$  será denotado por:

$$z = z_1/z_2 \Leftrightarrow z \cdot z_2 = z_1 \Leftrightarrow z \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot z_2}$$

E por ( 1 ) das propriedades do módulo, temos:

$$z = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

### 2.2.5. Potências do Número Complexo $i$

Sabendo que  $i^2 = -1$ , então vamos analisar o comportamento das potências de  $i^n$ , utilizando as propriedades das potências de números reais quando  $n$  for um número natural.

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$$

Observe que a medida que  $n$  cresce, o valor das potências de  $i^n$  se repetem de 4 em 4, com valores da sequência  $(1, i, -1, -i)$ . Logo para calcular o valor de  $i^n$ , basta elevar  $i$  ao resto da divisão de  $n$  por 4. Ou seja,  $n = 4q + r$ , obtemos:

$$i^n = i^{4q+r} \Rightarrow i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r, \quad 0 \leq r \leq 4,$$

com  $q, n \in \mathbb{N}$ .

Assim,

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 4q \\ i, & \text{se } n = 4q + 1 \\ -1, & \text{se } n = 4q + 2 \\ -i, & \text{se } n = 4q + 3 \end{cases} \quad \text{com } q = 1, 2, 3, \dots$$

### 2.3. Forma Polar ou Trigonométrica

Um número complexo  $z = x + yi$ ,  $z \neq 0$ , pode ter outra representação devida a Euler, chamada de forma trigonométrica ou polar. A forma polar de um número complexo facilita o cálculo das operações de multiplicação, potência e extração de raízes de um número, bem como suas representações geométricas.

Para isso considere o complexo  $z = x + yi$  não mais como ponto  $P = (x, y)$  mas como vetor  $\overline{OP} = (x, y)$ .

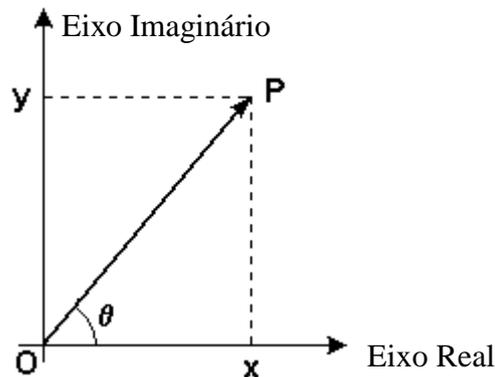


Figura 6

Como o módulo de um complexo  $z = x + yi$  é a distância do ponto  $P = (x, y)$  a origem temos  $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Observe também que o segmento de reta  $\overline{OP}$  determina com o semieixo positivo  $OX$ , um ângulo cuja medida em radiano vale  $\theta$ , variando no intervalo  $[0, 2\pi)$ .  $\theta$  é chamado de *argumento principal* de  $z$  e será denotado por  $\arg z = \theta$ .

É notório destacar que podemos considerar como argumentos do número complexo  $z = x + yi$ , todos os arcos congruentes de  $\theta$ , ou seja, os ângulos de medidas  $\theta_k = \theta_1 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Agora usando as relações trigonométricas, observamos na figura ( 5 ) que:

$$\operatorname{sen} \theta = y/r \Rightarrow y = r \operatorname{sen} \theta \quad (i) \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \theta = x/r \Rightarrow x = r \operatorname{cos} \theta \quad (ii)$$

substituindo (i) e (ii) na igualdade  $z = x + yi$ , temos:

$$z = r \operatorname{cos} \theta + i r \operatorname{sen} \theta, \text{ ou seja,}$$

$$z = r (\operatorname{cos} \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

que é chamada Forma Polar ou Trigonométrica do complexo  $z$  e  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares do ponto  $Z = (x, y)$  do plano onde  $r$  pertence ao intervalo  $[0, +\infty[$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

### 2.3.1. *Igualdade de Complexos na Forma Trigonométrica*

Dados dois números complexos não nulos  $z_1$  e  $z_2$ , representador por  $z_1 = r_1 (\operatorname{cos} \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = r_2 (\operatorname{cos} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$  tem-se que  $z_1 = z_2$  se, e somente se,

$$r_1 (\operatorname{cos} \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) = r_2 (\operatorname{cos} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

Se, e somente se,  $r_1 = r_2 > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1 = \operatorname{cos} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2$ , portanto, da igualdade de números complexos, e da periodicidade das funções trigonométricas, temos  $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

### 2.3.2. *Multiplicação, Divisão, potenciação e radiciação na Forma Trigonométrica.*

A forma trigonométrica de um número complexo vem facilitar os cálculos com as operações definidas no conjunto dos complexos e nos permite interpretá-las geometricamente por isso dá-se preferência pela fórmula trigonométrica à formula algébrica.

#### ( I ) Interpretação Geométrica da Multiplicação de dois Complexos

De início vamos interpretar geometricamente a multiplicação de dois números complexos.

Para tanto, consideremos  $z_1$  e  $z_2$  dois números complexos não nulos, com  $|z_1| = |z_2| = 1$ .

Logo:

$$z_1 = \cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1 \text{ e } z_2 = \cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2 \text{ com } \theta_1 \in \operatorname{arg} z_1 \text{ e } \theta_2 \in \operatorname{arg} z_2$$

Observe que esses complexos unitários são representados geometricamente por pontos no círculo unitário e que:

$$iz_1 = i(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) = -\operatorname{sen} \theta_1 + i \cos \theta_1$$

mas

$$-\operatorname{sen} \theta_1 = \cos \left( \theta_1 + \frac{\pi}{2} \right) \text{ e } \cos \theta_1 = \operatorname{sen} \left( \theta_1 + \frac{\pi}{2} \right)$$

Portanto,

$$iz_1 = \cos \left( \theta_1 + \frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left( \theta_1 + \frac{\pi}{2} \right)$$

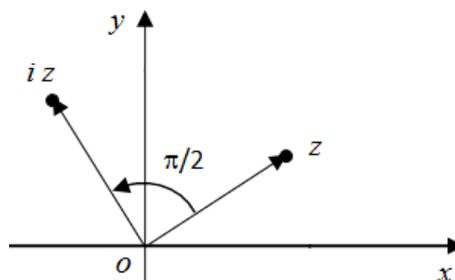


Figura 7

Segue que quando multiplicamos um complexo  $z_1$  por  $i$  obtemos uma rotação positiva de  $\pi/2$  a partir do ponto  $Z_1$ . Entretanto:

$$z_1 \cdot z_2 = (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) z_2 = \cos \theta_1 z_2 + \operatorname{sen} \theta_1 i z_2$$

Podemos considerar  $z_1 \cdot z_2$  como a soma dos vetores perpendiculares  $\cos \theta_1 z_2$  e  $\operatorname{sen} \theta_1 i z_2$ , ou seja, a diagonal do paralelogramo determinado pelos vetores  $\cos \theta_1 z_2$  e  $i \operatorname{sen} \theta_1 z_2$ . Veja que  $\theta_1$  é o ângulo entre  $z_2$  e  $z_1 \cdot z_2$ .

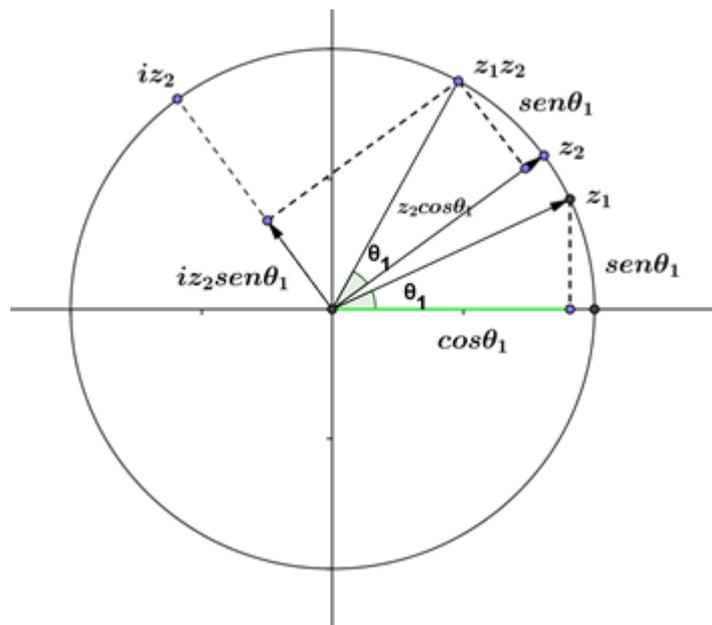


Figura 8

Portanto, multiplicar dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , ambos unitários, é atribuir a um deles uma rotação no sentido anti-horário de ângulo igual ao ângulo do outro. Para dois complexos  $w_1$  e  $w_2$  quaisquer podemos proceder da seguinte forma:

$$w_1 = r_1 z_1 \quad \text{e} \quad w_2 = r_2 z_2$$

com  $z_1$  e  $z_2$  números complexos unitários. Note que  $w_1$  e  $z_1$  tem o mesmo argumento  $\theta_1$  e  $w_2$  e  $z_2$  tem o mesmo argumento  $\theta_2$ , logo

$$w_1 w_2 = r_1 z_1 r_2 z_2 = r_1 r_2 z_1 z_2$$

Mostrando que o produto de dois números complexos quaisquer tem módulo  $r_1 r_2$  e argumento  $\theta_1 + \theta_2$ , o que nos fornece

$$w_1 w_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \quad (7)$$

Para o produto de  $n$  números complexos essa fórmula continua válida. A saber:

Dados  $w_1, w_2, \dots, w_k \in \mathbb{C}$  tais que  $w_k = r_k (\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  temos que:

$$w_1 \cdot w_2 \dots w_n = r_1 \cdot r_2 \dots r_n [\cos(\theta_1 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \dots + \theta_n)] \quad (8)$$

Note que para  $n = 2$  já vimos anteriormente que é válida. Suponha também que seja válida para  $n \in \mathbb{N}$ , então para  $n + 1$ , temos:

$$w_1 \cdot w_2 \dots w_n \cdot w_{n+1} = r_1 \cdot r_2 \dots r_n [\cos(\theta_1 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \dots + \theta_n)] \cdot w_{n+1}$$

que nos dá:

$$w_1 w_2 \dots w_n \cdot w_{n+1} = r_1 r_2 \dots r_n r_{n+1} [\cos(\theta_1 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1}) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1})]$$

Mostrando pelo princípio da indução finita que é válida a multiplicação de  $n$  números complexos.

## ( II ) Divisão

Dados  $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ ,  $z_2 \neq 0$ , então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \quad (9)$$

Para provarmos vamos recorrer a multiplicação de complexos. Veja que a equação ( 9 ) fica provado se

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1$$

Ora, para multiplicar dois complexos, pelo que já vimos, basta multiplicar os módulos e somar os argumentos, então como:

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot r_2 [\cos((\theta_1 - \theta_2) + \theta_2) + i \operatorname{sen}((\theta_1 - \theta_2) + \theta_2)]$$

Como  $\frac{r_1}{r_2} \cdot r_2 = r_1$  e  $(\theta_1 - \theta_2) + \theta_2 = \theta_1$ , segue

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) = z_1$$

### (III) Potenciação (Primeira Fórmula de De Moivre)

Dado o complexo  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , com  $z \neq 0$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , temos:

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

Observe que a fórmula decorre diretamente de (8), uma vez que

$$\begin{aligned} z^n = z \cdot z \dots z &= r \cdot r \dots r [\cos(\theta + \theta + \dots + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta + \dots + \theta)] \\ &= r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)] \end{aligned}$$

Temos então que multiplicar o complexo  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , por si próprio  $n$  vezes, equivale a dá ao complexo  $n$  rotações sucessivas de ângulo  $\theta$ .

### (IV) Radiciação de Números Complexos

Utilizando a Fórmula de Moivre é possível determinar raízes de números complexos. Para isso consideremos um número complexo  $z$  e um número natural  $n > 1$ .

*Definição.* Chamaremos de raiz  $n$  – ésima de  $z$  a todo complexo  $w$ , tal que  $z = w^n$ .

Temos, se  $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$  então  $w^n = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ . Façamos agora  $w = \rho(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$ , então

$$w^n = [\rho(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)]^n = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Pela fórmula de De Moivre,

$$\rho^n[\cos(n\varphi) + i\operatorname{sen}(n\varphi)] = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Da igualdade acima, conclui-se que

- $\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$
- $\cos(n\varphi) = \cos\theta$  e  $\operatorname{sen}(n\varphi) = \operatorname{sen}\theta$ . Daí

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto,

$$w_n = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

Veja que para

$$k = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{n}$$

$$k = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

$$k = 2 \Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}$$

...

$$k = n - 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{n} + (n - 1) \frac{2\pi}{n}$$

Obtendo  $n$  valores distintos e não congruentes para  $\varphi$ , pois todos esses valores estão no intervalo de  $[0, 2\pi[$  já que  $n > 1$ .

Note que para qualquer outro valor de  $k$ , o valor de  $\varphi$  será congruente a um dos anteriores, ou seja:

$$k = n \Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{n} + n \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi = \frac{\theta}{n}$$

Esse valor é o mesmo para  $k = 0$ . De um modo geral, dado qualquer  $k \in \mathbb{Z}, k \geq n$ , pelo algoritmo da divisão de Euclides, existem  $n, q$  e  $r$  inteiros tais que

$$k = nq + r, \text{ com } q, r \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq r < n$$

Como:

$$\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2(nq + r)\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2r\pi}{n} + 2q\pi$$

Vimos que o valor de  $\varphi$  correspondente a  $k$  é o mesmo valor de  $\varphi$  correspondente a  $r$ . Portanto existem  $n$  valores para  $w_k$ .

Veja que todas as raízes *enésimas* de  $z$  possuem o mesmo módulo,  $\sqrt[n]{r}$ . Assim são representadas por  $n$  pontos sobre uma circunferência com centro na origem e raio  $\sqrt[n]{r}$ . Além disso, os argumentos principais de  $w_k$  estão igualmente espaçados ao longo desta circunferência, pois forma uma progressão aritmética de primeiro termo  $\frac{\theta}{n}$  e razão  $\frac{2\pi}{n}$ .

Há também a conexão dos números complexos com a exponencial. Essa conexão foi descoberta por Euler por meio dos desenvolvimentos das funções seno, cosseno e exponencial comparando as séries de Taylor.

Então: dado um número complexo  $z = x + yi$ , a exponencial de  $z$  é denotada por

$$e^z = e^{x+yi} = e^z(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad (10)$$

Em particular

$$e^{i\pi} = (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -1$$

Assim podemos escrever qualquer número complexo diferente de zero na forma

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Consequentemente o produto de dois números complexos pode ser expresso por

$$(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (11)$$

e a fórmula da potência como

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Como aplicação, podemos deduzir a fórmula da soma dos senos e dos cossenos de uma sucessão de arcos em Progressão Aritmética (PA).

Sejam as somas:

$$S_1 = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}(x+r) + \operatorname{sen}(x+2r) + \dots + \operatorname{sen}[x+(n-1)r]$$

$$S_2 = \operatorname{cos}x + \operatorname{cos}(x+r) + \operatorname{cos}(x+2r) + \dots + \operatorname{cos}[x+(n-1)r]$$

Agora multiplicando  $S_1$  por  $i$  temos:

$$iS_1 = i\operatorname{sen}x + i\operatorname{sen}(x+r) + i\operatorname{sen}(x+2r) + \dots + i\operatorname{sen}[x+(n-1)r]$$

Somando  $S_2$  e  $iS_1$  membro a membro e considerando que  $e^{i\pi} = (\cos\pi + i\sin\pi)$ , temos,

$$S_2 + iS_1 = e^{ix} + e^{i(x+r)} + e^{i(x+2r)} + \dots + e^{i[x+(n-1)r]}$$

$$S_2 + iS_1 = e^{ix}[1 + e^{ir} + e^{i2r} + \dots + e^{i(n-1)r}]$$

Observe que entre os colchetes temos uma Progressão Geométrica de primeiro termo 1 e razão  $e^{ir}$ . Então aplicando a fórmula da soma, temos,

$$S_2 + iS_1 = e^{ix} \cdot \frac{1 - e^{inr}}{1 - e^{ir}}$$

Podemos escrever ainda, e com mesmo valor,

$$S_2 e^{iS_1} = e^{ix} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}nri} \left( e^{-\frac{1}{2}nri} - e^{\frac{1}{2}nri} \right)}{e^{\frac{1}{2}ri} \left( e^{-\frac{1}{2}ri} - e^{\frac{1}{2}ri} \right)}$$

$$S_2 e^{iS_1} = e^{i\left[x + \frac{r}{2}(n-1)\right]} \cdot \frac{\cos \frac{nr}{2} - i \operatorname{sen} \frac{nr}{2} - \cos \frac{nr}{2} - i \operatorname{sen} \frac{nr}{2}}{-2i \cdot \operatorname{sen} \frac{r}{2}}$$

$$S_2 e^{iS_1} = e^{i\left[x + \frac{r}{2}(n-1)\right]} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{nr}{2}}{\operatorname{sen} \frac{r}{2}}$$

$$S_2 e^{iS_1} = \frac{\operatorname{sen} \frac{nr}{2}}{\operatorname{sen} \frac{r}{2}} \left\{ \cos \left[ x + \frac{r}{2}(n-1) \right] + i \operatorname{sen} \left[ x + \frac{r}{2}(n-1) \right] \right\}$$

E finalmente,

$$S_2 = \frac{\operatorname{sen} \frac{nr}{2}}{\operatorname{sen} \frac{r}{2}} \cdot \cos \left[ x + \frac{r}{2}(n-1) \right]$$

e

$$S_1 = \frac{\operatorname{sen} \frac{nr}{2}}{\operatorname{sen} \frac{r}{2}} \cdot \operatorname{sen} \left[ x + \frac{r}{2}(n-1) \right]$$

**Exemplo 1.** Seja  $\alpha = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ . Mostre que para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , tem-se:

$$\cos k\theta = \frac{\alpha^k + \alpha^{-k}}{2} \quad e \quad \operatorname{sen} k\theta = \frac{\alpha^k - \alpha^{-k}}{2i}$$

*Solução.* Se  $\alpha = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ , por De Moivre, temos:

$$\alpha^k = \cos(k\theta) + i\operatorname{sen}(k\theta) \quad e \quad \alpha^{-k} = \cos(k\theta) - i\operatorname{sen}(k\theta)$$

Então, adicionando membro a membro as expressões acima,

$$\alpha^k + \alpha^{-k} = \cos(k\theta) + i\operatorname{sen}(k\theta) + \cos(k\theta) - i\operatorname{sen}(k\theta)$$

$$\alpha^k + \alpha^{-k} = 2\cos k\theta \Rightarrow$$

$$\cos k\theta = \frac{\alpha^k + \alpha^{-k}}{2}$$

Agora, subtraindo as mesmas expressões membro a membro, teremos:

$$\alpha^k - \alpha^{-k} = \cos(k\theta) + i\operatorname{sen}(k\theta) - [\cos(k\theta) - i\operatorname{sen}(k\theta)]$$

$$\alpha^k - \alpha^{-k} = 2i\operatorname{sen}k\theta \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}k\theta = \frac{\alpha^k - \alpha^{-k}}{2i}$$

**Exemplo 2.** Verifique a seguinte identidade trigonométrica

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2(1 + \cos\theta)^2$$

*Solução.* Seja  $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}$  e  $z^{-1} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = e^{-i\theta}$ , então

$$\cos\theta = \frac{\alpha^{i\theta} + \alpha^{-i\theta}}{2} \text{ e } \cos 2\theta = \frac{\alpha^{i2\theta} + \alpha^{-i2\theta}}{2}$$

Portanto,

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2(1 + \cos\theta)^2$$

$$3 + 4\frac{z + z^{-1}}{2} + \frac{z^2 + z^{-2}}{2} = 2\left(1 + \frac{z + z^{-1}}{2}\right)^2$$

$$3 + 2z + 2z^{-1} + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^{-2} = 2\left[1 + z + z^{-1} + \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{2}z^2 + 2z + 3 + 2z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} = \frac{1}{2}z^2 + 2z + 3 + 2z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}$$

$$0 = 0$$

## 2.4 Raízes da Unidade

Determinar as raízes  $n$  – ésimas da unidade é encontrar todas as soluções complexas  $z$  da equação

$$z^n - 1 = 0$$

Sabemos que pelo Teorema Fundamental da Álgebra, que estudaremos no próximo capítulo, tal equação possui  $n$  raízes complexas; e a única raiz  $1$  – ésimas da unidade é  $1$ . Então como

$$\cos(2k\pi) + i\operatorname{sen}(2k\pi) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1} &= \sqrt[n]{1[\cos(2k\pi) + i\operatorname{sen}(2k\pi)]} \\ &= \sqrt[n]{1} \cdot \sqrt[n]{\cos(2k\pi) + i\operatorname{sen}(2k\pi)} \\ &= 1 \cdot \left[ \cos \frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right] \end{aligned}$$

Por (9), temos

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad \text{com } k = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Então as  $n$  raízes  $n$  – ésimas da unidade, para questão de simplificação, serão representadas por  $W_k$ .

Logo,

$$W_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

As imagens dessas  $n$  raízes complexas divide o círculo de raio  $1$  em  $\mathbb{C}$  e centro na origem em  $n$  partes iguais sendo,  $W_0 = 1$ . Então para  $n > 2$ , essas raízes são vértices de um polígono regular de  $n$  lados inscrito nesse círculo.

Considerando

$$W = \cos \frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

Temos que

$$W^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Portanto as raízes da unidade poderão ser representadas por

$$1, W, (W)^2, \dots, (W)^{n-1}$$

Vejam alguns exemplos e aplicações nos quais mostramos a geometria das raízes.

**Exemplo 1.** Determinar as raízes cúbicas da unidade.

*Solução.*

$$W_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

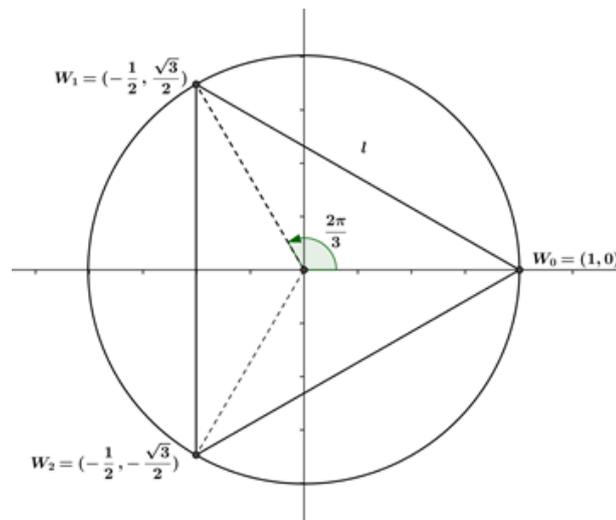
Logo,

$$W_0 = 1$$

$$W_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A representação no plano de Gauss, será



Raízes cúbicas da unidade

Essas três raízes são vértices de um triângulo equilátero no círculo unitário com vértices  $(1, 0)$ ,  $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  e  $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ .

Observe que um dos lados do triângulo é  $l = \overline{W_0 W_1}$  dado pela distância entre as imagens de  $W_0$  e  $W_1$ .

$$d(W_0, W_1) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$d(W_0, W_1) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3} = l$$

Pela geometria plana a área do triângulo equilátero é

$$A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

Temos

$$A = \frac{\sqrt{3}^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

**Exemplo 2.** Calcular as raízes sexta de 1.

*Solução.* Temos

$$W_k = \cos \frac{2k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{6}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Por tanto,

$$W_0 = 1$$

$$W_1 = \cos \frac{2\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

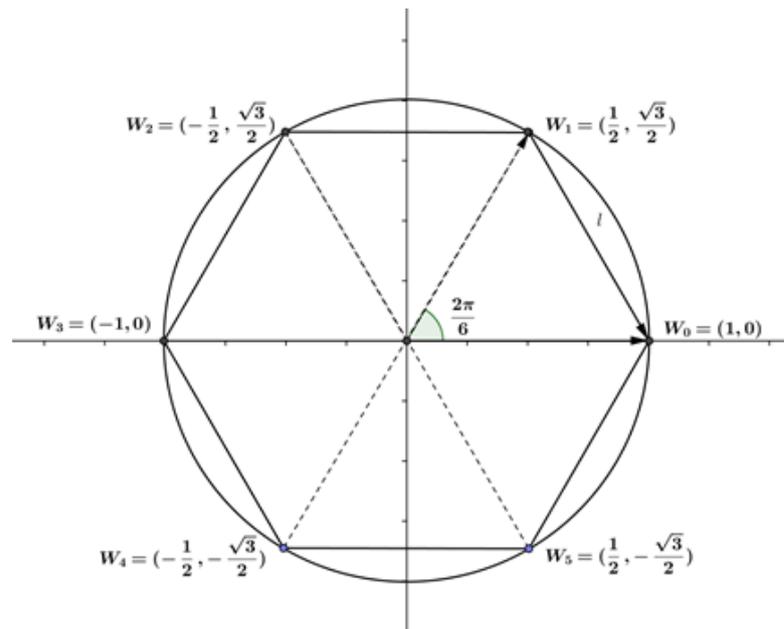
$$W_2 = \cos \frac{4\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{6} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_3 = \cos \frac{6\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{6} = -1$$

$$W_4 = \cos \frac{8\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{8\pi}{6} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_5 = \cos \frac{10\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{10\pi}{6} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Essas raízes determinam num plano um hexágono regular.



Raízes sexta da unidade

Perceba que o vetor  $\overrightarrow{W_0W_1} = \overrightarrow{OW_1} - \overrightarrow{OW_0} = l$  é um dos lados do hexágono e que a norma dos números complexos  $W_0, W_1, W_2, W_3, W_4,$  e  $W_5$  são todas iguais a 1. Perceba também que a norma do vetor  $\overrightarrow{W_0W_1}$  é

$$|W_0W_1| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Portanto o triângulo  $\Delta OW_0W_1$  é equilátero. O mesmo argumento serve para os demais triângulos  $\Delta OW_1W_2, \Delta OW_2W_3, \Delta OW_3W_4, \Delta OW_4W_5$  e  $\Delta OW_5W_0$ , logo a área do hexágono é

$$A = \frac{6 \cdot l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 1 \sqrt{3}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ u.a}$$

### 2.4.1 Algumas Propriedades da Raiz da Unidade

I) O produto de duas raízes  $n$  – ésimas da unidade é também uma raiz  $n$  – ésima da unidade.

Considere  $W_1^n = 1$  e  $W_2^n = 1$ , temos

$$\begin{aligned}(W_1 \cdot W_2)^n &= 1 \\ W_1^n \cdot W_2^n &= 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

II) O inverso de uma raiz  $n$  – ésima da unidade é também raiz  $n$  – ésima da unidade.

A saber: Seja

$$W_1^n = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{W}\right)^n = \frac{1}{W^n} = \frac{1}{1} = 1$$

III) O quociente de duas raízes  $n$  – ésimas da unidade é também uma raiz  $n$  – ésima da unidade.

Seja  $W_1^n = 1$  e  $W_2^n = 1$ , temos,

$$\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^n = \frac{W_1^n}{W_2^n} = \frac{1}{1} = 1$$

Vejamos alguns exemplos

**Exemplo 1.** Prove que é nula a soma dos vetores com origem no centro de um polígono regular convexo e extremidades nos vértices do polígono.

*Solução.* Considere o complexo,

$$W_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Como raízes  $n$  – ésimas da unidade.

Cada raiz  $n$  – ésima da unidade representa um vetor de centro na origem e extremidade no afixo do complexo  $W_k$  e que para  $n > 2$ , as raízes representam um polígono regular, então a soma das raízes  $n$  – ésimas da unidade é dado por:

$$W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_{n-1} = 1 + W_1 + W_1^2 + \dots + W_1^{n-1}$$

Observe que essa sequência é uma  $P.G$  primeiro termo e razão dados respectivamente por

$$1 \quad e \quad \frac{W_1}{1} = \frac{(W_1)^2}{W_1} = W_1$$

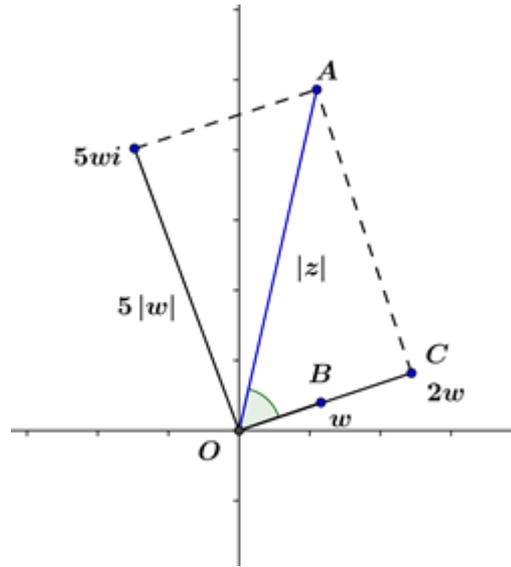
Portanto,

$$W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_{n-1} = 1 + W_1 + W_1^2 + \dots + W_1^{n-1} = 1 \cdot \frac{W_1^n - 1}{W_1 - 1} = 1 \cdot \frac{1 - 1}{W_1 - 1} = 0$$

■

**Exemplo 2.** Os complexos  $z$  e  $w$  tem como imagens os pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente. Se  $z = 2w + 5wi$  e  $w \neq 0$ , quanto vale o seno e cosseno do ângulo  $A\hat{O}B$ ?

*Solução.* Observe que se  $w$  é complexo, então  $2w$  é o seu dobro e  $5wi$  é o seu quádruplo girando  $90^\circ$  no sentido anti-horário.



Seja  $C$  a imagem do complexo  $2w$ .

Observe que  $z$  é a soma dos complexos  $2w$  com  $5wi$ . Então pela figura acima o triângulo  $AOC$ , retângulo em  $C$  e que o ângulo  $A\hat{O}B = A\hat{O}C$  e que o módulo de  $5wi$  e  $2w$  é, respectivamente,  $5|w|$  e  $2|w|$ , logo pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$AO^2 = 25|w|^2 + 4|w|^2 = 29|w|^2$$

$$AO = \sqrt{29|w|^2} = |w|\sqrt{29}$$

Portanto,

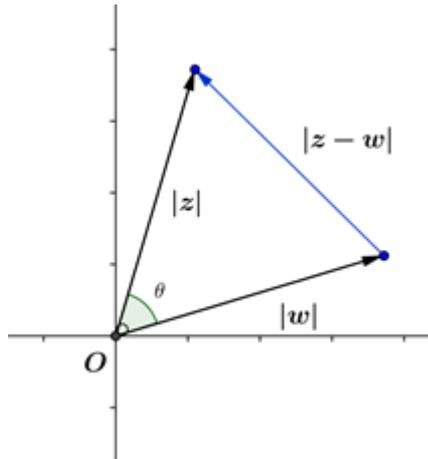
$$\text{sen}(AOB) = \frac{5|w|}{|w|\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$$

e

$$\text{cos}(AOB) = \frac{2|w|}{|w|\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

**Exemplo 3.** Mostre que o cosseno do ângulo formado pelos vetores que representam os complexos não-nulos  $z$  e  $w$  é igual a

$$\frac{z\bar{w} + w\bar{z}}{2|z| \cdot |w|}$$



Seja  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $w = c + di$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ .

Veja que

$$z\bar{w} = (a + bi)(c - di) = ac + bd - adi + bci$$

e

$$\bar{z}w = (a - bi)(c + di) = ac + adi - bci + bd$$

Logo,  $z\bar{w} + \bar{z}w = 2(ac + bd)$

Agora tome  $z$  e  $w$  como vetores, então  $\vec{z} = (a, b)$  e  $\vec{w} = (c, d)$ .

Sabendo que  $\vec{z} \cdot \vec{w} = |z| \cdot |w| \cdot \cos\theta$  e que  $\vec{z} \cdot \vec{w} = (a, b)(c, d) = ac + bd$

Temos:

$$|z| \cdot |w| \cdot \cos\theta = \vec{z} \cdot \vec{w}$$

$$|z| \cdot |w| \cdot \cos\theta = ac + bd \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{ac + bd}{|z| \cdot |w|}$$

Mas,

$$ac + bd = \frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2}, \quad \text{portanto} \quad \cos\theta = \frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2|z| \cdot |w|}$$

**Exemplo 4.** Prove que

$$\frac{1 + \operatorname{sen} x + i \operatorname{cos} x}{1 - \operatorname{sen} x - i \operatorname{cos} x} = (\operatorname{tg} x + \operatorname{sec} x)i, \quad \text{para todo } x \text{ real, } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{1 + \operatorname{sen} x + i \operatorname{cos} x}{1 - \operatorname{sen} x - i \operatorname{cos} x} &= \frac{(1 + \operatorname{sen} x + i \operatorname{cos} x)(1 - \operatorname{sen} x + i \operatorname{cos} x)}{(1 - \operatorname{sen} x - i \operatorname{cos} x)(1 - \operatorname{sen} x + i \operatorname{cos} x)} \\ &= \frac{[(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x) - \operatorname{cos}^2 x] + [1 - \operatorname{sen} x + 1 + \operatorname{sen} x] \operatorname{cos} x i}{(1 - \operatorname{sen} x)^2 + \operatorname{cos}^2 x} \\ &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{cos}^2 x + 2 \cdot \operatorname{cos} x i}{\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{cos}^2 x} \\ &= \frac{2 \operatorname{cos} x i}{2 \operatorname{cos}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{cos} x i}{\operatorname{cos}^2 x} \end{aligned}$$

Agora

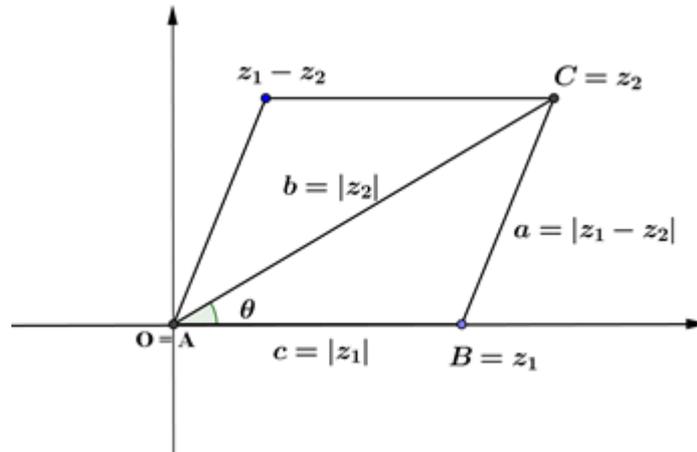
$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x + \operatorname{sec} x)i &= \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} + \frac{1}{\operatorname{cos} x} \right) i \\ &= \left( \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{cos} x} \right) i \cdot \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{cos} x} \\ &= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) \cdot i \operatorname{cos} x}{\operatorname{cos}^2 x} \\ &= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) \cdot i \operatorname{cos} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) \cdot i \operatorname{cos} x}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)} \\ &= \frac{i \operatorname{cos} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \end{aligned}$$

■

**Exemplo 5.** No triângulo  $ABC$  qualquer, onde  $a, b$  e  $c$  são os lados opostos aos vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente, demonstre que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad (\text{Lei dos Cossenos})$$

*Solução.* No sistema  $xOy$ , tome  $A$  e  $OB$  coincidindo, respectivamente, com a origem  $O$  e  $Ox$ . Agora considere  $z_1 = r_1$  o número complexo representado por  $B$  e  $z_2 = r_2(\cos\theta + isen\theta)$  o número complexo correspondente por  $C$ . (veja figura abaixo)



Perceba que  $|z_1 - z_2|^2 = a^2$  e que pela propriedade (1) do módulo dos números complexos, temos

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - (z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2)$$

Mas

$$z_2\bar{z}_1 = r_2(\cos\theta + isen\theta)r_1 e$$

$$z_1\bar{z}_2 = r_1r_2(\cos\theta - isen\theta)$$

Temos

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = r_1r_2(2\cos\theta)$$

Logo,

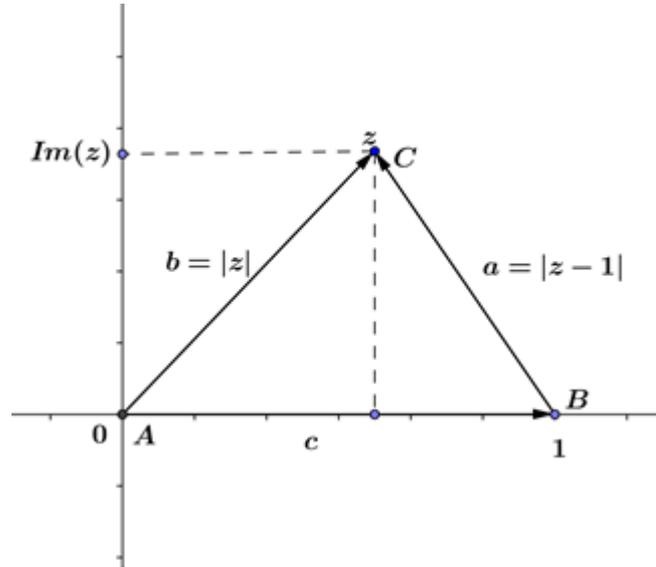
$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 = a^2 &= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - (z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2r_1r_2\cos\theta \\ &= b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A} \end{aligned}$$

■

**Exemplo 6.** No triângulo  $ABC$  qualquer, onde  $a, b$  e  $c$  são os lados opostos aos vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente, demonstre que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad (\text{Lei dos senos})$$

*Solução.* Representando  $A, B$  e  $C$  pelos números complexos  $0, 1$  e  $z$ , temos



Logo,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{|z-1|}{\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}} = \frac{|z||z-1|}{\operatorname{Im}(z)} = \frac{|z|}{\frac{\operatorname{Im}(z-1)}{|z-1|}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$$

■

**Exemplo 7.** Se  $x$  e  $y$  são números reais quaisquer prove que

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \operatorname{sen} y \cdot \cos x.$$

Considere  $x$  e  $y$  satisfazendo à condição  $0 \leq x \leq 2\pi$  e  $0 \leq y \leq 2\pi$ , então podemos escrever

$$z_1 = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad z_2 = \cos y + i \operatorname{sen} y,$$

$$z_1 z_2 = \cos(x+y) + i \operatorname{sen}(x+y) \quad (I)$$

Mas,  $z_1 z_2$  pode ser

$$z_1 z_2 = (\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos x \cos y + \cos x i \operatorname{sen} y + \cos y i \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) \\
&= (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) + i(\cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x)
\end{aligned} \tag{II}$$

Agora, igualando as partes reais e imaginárias de (I) e (II), temos

$$\cos(x + y) + i \operatorname{sen}(x + y) = (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) + i(\cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x)$$

Logo,  $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x$$

**Exemplo 8.** Encontrar o cosseno e o seno do arco duplo, ou seja,  $\cos 2x$  e  $\operatorname{sen} 2x$ .

Seja  $z = \cos x + i \operatorname{sen} x$ , então pela fórmula de Moivre, temos

$$\begin{aligned}
\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x &= (\cos x + i \operatorname{sen} x)^2 = z^2 \\
&= \cos^2 x + 2i \cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x \\
&= (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + i(2 \cos x \operatorname{sen} x)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

e

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \cos x \operatorname{sen} x$$

## Capítulo 3

### Função Polinomial Complexa

Neste capítulo estudaremos mais uma aplicação dos números complexos, desta vez nos polinômios, em especial as funções complexas, pois ao caracterizarmos o conjunto  $\mathbb{C}$  como corpo, podemos definir polinômios sobre  $\mathbb{C}$ . É importante destacar que não vamos nos prender ao estudo detalhado dos polinômios, mais informações podem ser encontradas em [6], [10] e [14].

**Definição:** Uma função  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , é uma função polinomial complexa quando existem números complexos  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  tais que  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  para todo  $x \in \mathbb{C}$ .

O resultado seguinte nos auxiliará nos próximos teoremas. A partir dele mostraremos que uma função polinomial  $f$  pode ser expressa como produto de duas funções polinomiais, isto é,  $f = pq$ , então diz que  $p$  e  $q$  divide  $f$ .

**Teorema 3.1.** *O resto da divisão de um polinômio  $f(x)$  por  $(x - \beta)$  é igual a  $f(\beta)$ .*

*Demonstração.* Sendo  $f$  um polinômio então pela divisão de polinômios, existem polinômios  $q(x)$  e  $r(x)$ , tais que  $f(x) = q(x)(x - \beta) + r(x)$ , de  $q(x)$  e  $r(x)$  são respectivamente o quociente e o resto. Observe que o grau de  $(x - \beta)$  é 1, logo o grau de  $r(x)$  é 0 ou  $r(x)$  é o polinômio nulo. Portanto,

$$f(\beta) = q(\beta) \underbrace{(\beta - \beta)}_0 + r(\beta)$$

logo

$$f(\beta) = r(\beta)$$

■

**Teorema 3.2. Teorema de D'Alembert**

Uma função  $f(x)$  é divisível por  $(x - \beta)$  se, e somente se,  $\beta$  é raiz de  $f(x)$ .

*Demonstração.* Suponha que  $f(\beta) = 0$ , logo pelo teorema (3.1) temos  $r = f(\beta) = 0$ , assim  $x - \beta$  divide  $f(x)$ .

Analogamente, se  $x - \beta$  divide  $f(x)$ , então existe  $q(x)$  tal que  $f(x) = q(x)(x - \beta)$ , logo  $r = 0$ . Pois  $f(\beta) = q(\beta)(\beta - \beta) = 0$ .

■

**Teorema 3.3. Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A)**

Todo polinômio complexo  $F(x)$  de grau maior ou igual a 1 admite pelo menos uma raiz complexa. (ver demonstração em [3] página 107)

**Teorema 3.4.** *Todo polinômio complexo  $F(x)$  de grau  $n$ , com  $n \geq 1$ , pode ser escrito na forma*

$$F(x) = a_n(x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n)$$

Com  $a_n \neq 0$  e  $n$  fatores do primeiro grau, em que  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  são as raízes de  $f(x)$ . Essa fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.

*Demonstração. Mostremos a Existência.*

Seja  $F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  com  $x \in \mathbb{C}$ , como  $n \geq 1$ , pelo T.F.A o polinômio admite pelo menos uma raiz complexa. Seja  $\beta_1$  essa raiz, então pelo teorema (3.2)  $F(x)$  é divisível por  $(x - \beta_1)$ . Portanto:

$$F(x) = (x - \beta_1)Q_1(x)$$

Perceba que  $Q_1(x)$  é um polinômio de grau  $n - 1$ . Se o grau de  $Q_1(x)$  for zero, ou seja, polinômio constante,  $F(x) = a_n(x - \beta_1)$ .

Porém se  $n - 1 \geq 1$ , novamente pelo T.F.A, existe um  $\beta_2 \in \mathbb{C}$  que é raiz de  $Q_1(x)$ , logo  $Q_1(x)$  é divisível por  $x - \beta_2$ , então:

$$Q_1(x) = (x - \beta_2)Q_2(x) \text{ e } F(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)Q_2(x)$$

Onde  $Q_2(x)$  é um polinômio de grau  $n - 2$ . Portanto, aplicando o T.F.A sucessivamente por  $n$  aplicações, resulta a igualdade

$$F(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n)Q_n(x)$$

ou seja,

$$(x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n)Q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Onde  $Q_n(x) = a_n$ , logo

$$F(x) = a_n(x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n)$$

*Unicidade.* Considere que o polinômio  $F$  admita duas decomposições:

$$F(x) = a_n(x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n)$$

$$F(x) = b_n(x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \dots (x - \gamma_n)$$

Veja que comparando o termo de mais alto grau, nas duas expressões, verifica-se que  $a_n = b_n$ .

Logo temos,

$$(x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n) = (x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \dots (x - \gamma_n) \quad (12)$$

Suponha que  $x = \beta_1$ , logo,

$$(\beta_1 - \gamma_1)(\beta_1 - \gamma_2) \dots (\beta_1 - \gamma_n) = 0$$

Como o produto é nulo, pelo menos um  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  é igual a  $\beta_1$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $\beta_1 = \gamma_1$ , então substituindo  $\beta_1 = \gamma_1$  em (11), temos

$$(x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n) = (x - \beta_1)(x - \gamma_2) \dots (x - \gamma_n)$$

Temos então, pelo teorema anterior que uma função polinomial complexa de grau  $n$  pode ter no máximo  $n$  raízes.

Sabemos que a todo polinômio está associado uma função polinomial, assim podemos trabalhar com as funções polinomiais ou com polinômios.

Perceba que  $(x - \beta_1)$  é termo comum na equação acima e que eliminando o mesmo de ambos os lados resta

$$(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n) = (x - \gamma_2) \dots (x - \gamma_n)$$

Com o mesmo procedimento verifica-se que para cada  $\beta_i = \gamma_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  elimina-se um par de termos idênticos em cada lado da igualdade. Isso prova a unicidade da decomposição.

■

Dai resulta que toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos de grau  $n$ , com  $n \geq 1$ , tem no campo complexo exatamente  $n$  raízes.

**Teorema 3.5.** *Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz complexa não real  $z = a + bi$ , então também admite como raiz seu complexo conjugado  $\bar{z} = a - bi$ .*

*Demonstração.* Seja a equação polinomial  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , sabemos que  $a + bi$  é raiz da equação polinomial acima, logo  $P(z) = 0$ . Assim

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

Agora, tomando o conjugado da equação, temos

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \bar{0}$$

Das propriedades do módulo, concluímos que

$$\begin{aligned} \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} &= \bar{0} \\ a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \dots + a_1(\bar{z}) + a_0 = 0$$

Portanto temos  $P(\bar{z}) = 0$ , logo  $\bar{z} = a - bi$  também é raiz da equação polinomial.

Pelo teorema (3.5), temos que o número de raízes complexas de um polinômio de coeficientes reais é um número par.

Se o polinômio tem coeficientes complexos não vale o teorema (3.5) pois o polinômio  $P(x) = x^2 - ix$ , temos

$$\begin{aligned} P(0) &= 0 & e \\ P(i) &= i^2 - i^2 = 0 \end{aligned}$$

Mas  $\bar{z} = \bar{i} = -i$ , então

$$P(-i) = i^2 + i^2 = 2i^2 = -2$$

Como aplicação, trabalharemos nas seções seguintes, com as equações quadráticas e cúbicas.

### 3.1. Equação Quadrática

Considere a equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

onde  $a, b, e c$  são números reais e  $a \neq 0$ . Temos

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \tag{2}$$

onde  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Sabemos que se,

1. Se  $\Delta = 0$ , a equação admite uma única raiz real.
2. Se  $\Delta > 0$ , a equação admite duas raízes reais e distintas, a saber

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Além disso, podemos escrever a equação ( 1 ) como

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

3. Suponhamos agora que  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ .

Logo

$$-\Delta = -(b^2 - 4ac) > 0$$

Por ( 2 ), temos

$$\left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$$

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - (-1) \cdot \left( \frac{-\Delta}{4a^2} \right) = 0$$

Como  $i^2 = -1$ , temos

$$\left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - i^2 \left( \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a^2} \right)^2 \right] = 0$$

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = i^2 \left( \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a^2} \right)^2$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Temos então que, as raízes de (1) são complexas conjugadas, logo

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad e \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - i^2(-b^2 + 4ac)}{4a} = \frac{-c}{a}$$

Assim, por (1)

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= 0 \\
 a[x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x - x_1 \cdot x_2] &= 0 \\
 a(x^2 - x \cdot x_1 - x \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2) &= 0 \\
 a[x \cdot (x - x_1) - x_2(x - x_1)] &= 0 \\
 a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) &= 0
 \end{aligned}$$

Portanto se as raízes da equação quadrática são complexas, ainda temos

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Suponha que os coeficientes da equação quadrática são complexos. Temos

$$az^2 + bz + c = 0$$

De forma similar

$$\begin{aligned}
 a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) &= 0 \\
 a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) &= 0 \\
 a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right] &= 0
 \end{aligned}$$

Assim

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Onde  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Temos

$$\frac{(2az + b)^2}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Logo,  $(2az + b)^2 = \Delta$

Faça  $u = 2az + b$ , logo  $u^2 = \Delta$

Sendo  $\Delta = b^2 - 4ac$  um complexo então podemos escrever

$$\Delta = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = x + iy$$

Pela fórmula de Moivre

$$u = \sqrt{|\Delta|} \cdot \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)$$

Onde  $\theta$  é o argumento de  $\Delta$ .

Sabemos que

$$\cos \theta = \frac{x}{|\Delta|} \quad e \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{|\Delta|}$$

Assim

$$\frac{x}{|\Delta|} = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

Segue que

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2|\Delta|} \quad \Rightarrow \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{|\Delta| + x}{2|\Delta|}}$$

Similarmente,

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2|\Delta|} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{|\Delta| - x}{2|\Delta|}}$$

Portanto

$$u_i = \sqrt{|\Delta|} \cdot \left( \sqrt{\frac{|\Delta| + x}{2|\Delta|}} + i \sqrt{\frac{|\Delta| - x}{2|\Delta|}} \right)$$

Segue que

$$u_i = \pm \left( \sqrt{\frac{|\Delta| + x}{2}} + i \sqrt{\frac{|\Delta| - x}{2}} \right)$$

Se  $u_i = 2az + b$ , então

$$2az = u_i - b$$

$$z_i = \frac{1}{2a}u_i - \frac{b}{2a}$$

Temos

$$z_1 + z_2 = \frac{1}{2a}(u_1 + u_2) - \frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$z_1 \cdot z_2 = -\frac{1}{4a^2} \left( u_1 u_2 + \underbrace{u_1 b - u_2 b}_{=0} + b^2 \right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = -\frac{1}{4a^2} \left( -\left( \frac{|\Delta| + x}{2} - \frac{|\Delta|}{2} + \frac{x}{2} + 2i \sqrt{\frac{|\Delta|^2 - x^2}{4}} \right) + b^2 \right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = -\frac{1}{4a^2} \left( -4 + i\sqrt{|\Delta|^2 - x^2} + b^2 \right) = -\frac{1}{4a^2} (-b^2 + 4ac + b^2) = -\frac{c}{a}$$

**Exemplo 1.** Se  $f = x^2 + bx + c$  é um polinômio quadrático com coeficientes complexos e que ambas as raízes têm módulo 1. Prove que  $g = x^2 + |b|x + |c|$  tem o mesmo módulo.

**Solução.** Seja  $x_1$  e  $x_2$  as raízes complexas do polinômio  $f = x^2 + bx + c$  e  $y_1$  e  $y_2$  as raízes complexas do polinômio  $g = x^2 + |b|x + |c|$ .

Temos que provar que se  $|x_1| = |x_2| = 1$ , então  $|y_1| = |y_2| = 1$

Perceba que  $x_1 \cdot x_2 = c$  e  $x_1 + x_2 = -b$ , então pelas propriedades do módulo temos,  $|c| = |x_1| \cdot |x_2| = 1$  e  $|b| \leq |x_1| + |x_2| = 2$

Logo, o polinômio  $g = x^2 + |b|x + 1$  e que o discriminante  $\Delta = |b|^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = |b|^2 - 4 \leq 0$ .

Consequentemente

$$y_{1,2} = \frac{-|b| \pm \sqrt{|b|^2 - 4}}{2} = \frac{-|b| \pm \sqrt{(-1)(|b|^2 - 4)}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-|b| \pm \sqrt{i^2(4 - |b|^2)}}{2} = \frac{-|b| \pm i\sqrt{4 - |b|^2}}{2}$$

Como  $|x_1| = |x_2| = 1$ , isso implica  $x_1 = \pm 1$  e  $x_2 = \pm 1$ , logo  $|b| = 0$  ou  $|b| = 2$ . Como  $|i| = 1$ , temos

$$|y_{1,2}| = \left| \frac{-|b| \pm i\sqrt{4 - |b|^2}}{2} \right| = 1$$

Portanto  $|y_1| = |y_2| = 1$ .

**Exemplo 2.** Se  $p$  e  $q$  são números complexos com  $q \neq 0$ . Prove que se as raízes da equação quadrática  $x^2 + px + q^2 = 0$  tiverem o mesmo valor absoluto, então  $\frac{p}{q}$  é número real.

*Solução.* Seja  $x_1$  e  $x_2$  as raízes da equação, então  $x_1 + x_2 = p$  e  $x_1x_2 = q^2$  considere também  $r = |x_1| = |x_2|$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{q^2} &= \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1x_2} = \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 = \frac{x_1\bar{x}_2}{x_2\bar{x}_2} + \frac{x_2\bar{x}_1}{x_1\bar{x}_1} + 2 \\ &= \frac{x_1\bar{x}_2}{|x_2|^2} + \frac{x_2\bar{x}_1}{|x_1|^2} + 2 = \frac{x_1\bar{x}_2}{r^2} + \frac{x_2\bar{x}_1}{r^2} + 2 = 2 + \frac{2}{r^2} \operatorname{Re}(x_1\bar{x}_2) \end{aligned}$$

é um número. Além disso,

$$\operatorname{Re}(x_1\bar{x}_2) \geq -|x_1\bar{x}_2| = -r^2, \text{ mas } \frac{p^2}{q^2} \geq 0$$

Segue que  $p/q$  é um número real.

**Exemplo 3.** Seja  $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  um polinômio de grau  $n$  e seja  $a$  um número complexo. Mostre que através de divisões sucessivas por  $(x - a)$ , que  $p$  pode ser desenvolvido segundo as potências de  $(x - a)$ ; isto é, na forma  $p(x) = b_n(x - a)^n + b_{n-1}(x - a)^{n-1} + \dots + b_1(x - a) + b_0$ .

*Solução.* Seja  $P(x)$  um polinômio de grau  $n$ . Vamos dividir  $P(x)$  por  $(x - a)$ , logo podemos escrever  $P(x) = q_1(x)(x - a) + b_0$ . Dividindo agora  $q_1$  por  $(x - a)$  obtemos  $q_1 = q_2(x)(x - a) + b_1$ , então  $P(x) = q_2(x)(x - a)^2 + b_1(x - a) + b_0$ . Perceba que os graus dos quocientes  $q_i$  decrescem de uma unidade a cada passo e o processo para quando

$q_n(x)$  é constante, ou seja,  $q_n(x) = b_n$ . Portanto  $p(x) = b_n(x - a)^n + b_{n-1}(x - a)^{n-1} + \dots + b_1(x - a) + b_0$ .

### 3.2. Equações Cúbicas

Consideremos a equação geral do terceiro grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

Podemos escrever esta equação da seguinte forma

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Que é equivalente a (1). Portanto basta considerarmos equações cúbicas em que o coeficiente de  $x^3$  é igual a 1. Assim, sem perda de generalidade temos

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

Mas por meio de uma mudança de variável vamos procurar uma substituição  $x = y + t$  que anule o coeficiente em  $y^2$ . Fazendo a substituição em (2), temos:

$$(y + t)^3 + a(y + t)^2 + b(y + t) + c = 0 \implies$$

$$y^3 + (3t + a)y^2 + (3t^2 + 2ta + b)y + (t^3 + t^2a + tb + c) = 0$$

Fazendo  $t = -a/3$ , teremos  $x = y - a/3$  e novamente substituindo na equação (2)

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 + \left(y - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

Observe que essa equação não tem termo do segundo grau, então basta estudar as equações do terceiro grau do tipo

$$x^3 + px + q = 0 \quad (3)$$

Para resolver esta equação vamos escolher duas indeterminadas  $x = u + v$ . Substituindo em (3), obtemos

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q &= 0 \\ (u^3 + v^3 + q) + (u + v)(p + 3uv) &= 0 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -p \\ u \cdot v = \frac{-p}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -p \\ u^3 \cdot v^3 = \frac{-p^3}{27} \end{cases}$$

Então cada solução  $(u, v)$  do sistema acima é solução da forma  $x = u + v$  da equação (3). Perceba que a soma e o produto de  $u^3$  e  $v^3$ , e que os mesmos são raízes da equação do segundo grau

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$$

Resolvendo esta equação encontramos

$$\begin{aligned} u^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad e \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\ x = u + v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{aligned}$$

Que é uma raiz da equação  $x^3 + px + q = 0$ . Um fato que merece destaque é o radicando

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

Pois mostraremos no apêndice que, se:

- $D > 0$  a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas;
- $D = 0$  a equação tem três raízes reais sendo uma dupla;
- $D < 0$  a equação possui três raízes reais e diferentes.

Vejamos alguns exemplos

**Exemplo 1.** Resolvamos a equação  $x^3 - 6x - 9 = 0$ .

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{81}{4} - \frac{216}{27} = \frac{2187 - 864}{108} = \frac{1323}{108} = \frac{49}{4} > 0$$

Logo a equação possui uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

Pela fórmula

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = 2 + 1 = 3$$

Poderíamos encontrar esta raiz inspecionando os divisores de 9, sem a necessidade do uso da fórmula.

Então

$$x^3 - 6x - 9 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3) = 0$$

Resolvendo a equação  $x^2 + 3x + 3 = 0$ , teremos as outras raízes  $-3/2 + i\sqrt{2}/2$  e

$$-3/2 - i\sqrt{2}/2.$$

**Exemplo 2.** Resolvendo a equação  $x^3 - 3x - 2 = 0$ , temos

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{4}{4} - \frac{27}{27} = 0$$

Portanto a equação tem três raízes reais e uma delas sendo dupla. Pela fórmula  $x = 2$ . Logo,  $x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x^2 + 2x + 1) = 0$ , como  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ , portanto tem raízes  $-1$  e  $-1$ , uma raiz dupla.

**Exemplo 3.** Para a equação  $x^3 - 6x - 4 = 0$ , temos

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{16}{4} - \frac{216}{27} = 4 - 8 = -4 < 0$$

Portanto a equação tem 3 raízes reais distintas. Pela fórmula teremos

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{216}{27}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}$$

Essa raiz parece ser complexa, porém a equação admite apenas raiz real. Ora, verificando os divisores de  $-4$  constatamos que  $-2$  é raiz da equação. Então  $x^3 - 6x - 4 = (x + 2)(x^2 - 2x - 2) = 0$  e as outras raízes são  $1 + \sqrt{3}$  e  $1 - \sqrt{3}$  que também são as raízes da equação  $x^2 - 2x - 2 = 0$ .

Porém, pela fórmula temos que encontrar  $\sqrt[3]{2 - 2i}$  e  $\sqrt[3]{2 + 2i}$  para determinar  $x$ , mas cada radical tem 3 raízes e isso parece que  $x$  tem 9 raízes, mas  $u \cdot v = -p/3 = 6/3 = 2$ , logo  $v = 2/u$ . Então  $v$  fica determinado pelas 3 raízes de  $u$ .

Então,

$$z = 2 + 2i = \sqrt{8} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{8} e^{i\pi/4}$$

Logo

$$u_1 = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{8} e^{i\pi/4}} = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[3]{e^{i\pi/4}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/12} = \sqrt{2} (\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)$$

Então

$$v_1 = \frac{2}{u_1} = \frac{2\bar{u}_1}{|u_1|^2} = \frac{2\bar{u}_1}{|\sqrt{2}|^2} = \bar{u}_1 = \sqrt{2}(\cos 15^\circ - i \sin 15^\circ)$$

Portanto, uma raiz da equação é

$$\begin{aligned}x_1 &= u_1 + v_1 = \sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) + \sqrt{2}(\cos 15^\circ - i \sin 15^\circ) = 2\sqrt{2}\cos 15^\circ \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = 1 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

As outras raízes o processo é análogo.

## *Considerações Finais*

Averiguando o contexto histórico dos números complexos verificamos as dificuldades que os matemáticos tiveram para chegarem a nomenclatura atual desse conjunto chamado de corpo. Cremos que a pesquisa histórica poderá contribuir para desmistificar a ideia que muitos professores e alunos do Ensino Médio tem de que os números complexos foram desenvolvidos para determinar raízes não reais de uma equação quadrática.

Ao trabalharmos com esse conjunto verificamos que é possível aplicar os conhecimentos algébricos e/ou geométricos do mesmo na trigonometria e na resolução de equações algébricas.

Acreditamos que este trabalho possa despertar o interesse do estudo mais profundo dos números complexos pelos professores e alunos do ensino básico e que se sintam entusiasmados para melhorar o ensino-aprendizagem com as aplicações desses números nos diversos ramos da matemática.

## ***Referências Bibliográficas***

1. ANDRESCO, T. ANDRICA, D. Complex Numbers from  $a$  to  $z$ . Ed. Birkhauser. Boston. 2006.
2. ARAÚJO, Nanci Barbosa Ferreira. Números Complexos: *Uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no ensino médio*. 111f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)- Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte, 2006.
3. ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e Aplicações**. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2000.
4. BERLINGHOFF, W. P. GOUVÊA, F. Q. *A matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.
5. BOYER, Carl. *História da Matemática*. 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.
6. CARMO, M. P., MORGADO, A. C., Wagner, E. *Trigonometria e Números Complexos*, IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1991.
7. DANTE, Luiz Roberto. *Contexto e aplicações*. Editora Ática: São Paulo, 2010.
8. EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. 2 ed. São Paulo: UNICAMP, 2002.
9. HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. de S.. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: S.B.M, 2012.
10. IEZZI, G.. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 6.ed. São Paulo: Atual, 1993.v. 2-9.
11. IEZZI, G. DOLCE, O. *Álgebra III: Números Complexos, Polinômios e Equações Algébricas*. São Paulo: Ed Moderna, 1973.

12. LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.. *A matemática do ensino médio: volume 1*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1997.
13. LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.. *A matemática do ensino médio: volume 3*. Rio de Janeiro: SBM, 1998.
14. LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
15. **Revista do Professor de Matemática – RPM**, número 25. SBM, Rio de Janeiro, 1994.
16. SESSA, C. *Iniciação ao estudo didático da álgebra*: origens e perspectivas. Tradução DamianKraus. São Paulo: Edições SM, 2009.

## Apêndice

Para entendermos a natureza das raízes da equação  $x^3 + px + q = 0$  a partir do sinal do discriminante  $D = q^2/4 + p^3/27$ , vamos estudar o gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3 + px + q$ , com  $p$  e  $q$  reais. Observe que

$$f(x) = x^3 \left( 1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3} \right)$$

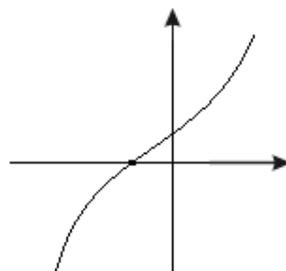
Veja que para valores absolutos de  $x$  muito grande, os termos  $p/x^2$  e  $q/x^3$  assumem valores insignificantes, portanto o sinal de  $\left( 1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3} \right)$  será positivo. Logo o sinal função  $f(x)$  depende exclusivamente de  $x^3$ , ou seja, de  $x$ . Em particular  $f(x)$  será positiva para valores muito grande positivos de  $x$  e será negativa quando  $x$  assumir valores muito grande negativos. Como  $f(x)$  passa de valor negativo para positivo, em algum momento deve-se anular em algum ponto, ou seja, a função  $f(x)$  possui pelo menos uma raiz real. Para prosseguirmos vamos recorrer ao cálculo da derivada de  $f(x)$ . Então

$$f'(x) = 3x^2 + p$$

Quando  $p > 0$  a derivada de  $f(x)$  é sempre positiva, portanto a função  $f$  é crescente e corta o eixo  $x$  apenas uma vez. Logo  $f(x)$  possui apenas uma raiz real que pode ser negativa, nula ou positiva e duas raízes complexas conjugadas.

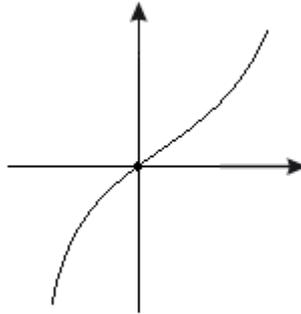
Então, quando  $p > 0$  pode ocorrer os seguintes casos:

- a) Se  $q < 0$ ,  $f(x)$  tem uma raiz real negativa e duas raízes complexas;



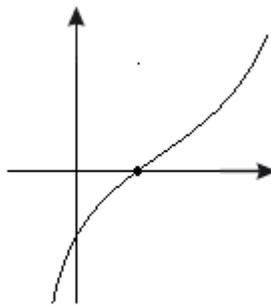
*Uma raiz real negativa*

- b) Se  $q = 0$ ,  $f(x)$  tem uma raiz real nula e duas raízes complexas;



*Uma raiz real nula*

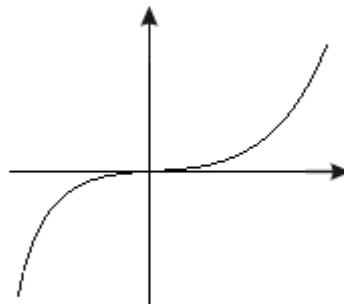
- c) Se  $q > 0$ ,  $f(x)$  tem uma raiz real positiva e duas raízes complexas;



*Uma raiz real positiva*

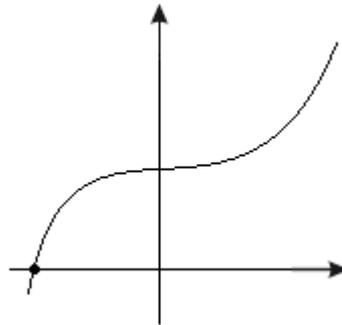
Quando  $p = 0$  teremos  $f(x) = x^3 + q$ , conseqüentemente, suas raízes serão:

- a) Se  $q = 0$ ,  $f(x)$  tem uma raiz real tripla igual à zero;



*Uma raiz real tripla,  $f(x) = x^3$*

b) Se  $q \neq 0$ ,  $f(x)$  tem uma raiz real e duas complexas;



Uma raiz real e duas complexas,  $f(x) = x^3 + q$ ,  $q \neq 0$

Quando  $p < 0$ , vamos fazer  $p = -3a^2$ ,  $a > 0$  e teremos  $f(x) = x^3 - 3a^2x + q$ , logo sua derivada é  $f' = 3x^2 - 3a^2$  e a derivada segunda é  $f'' = 6x$ . Observe que  $f'(x) = 0$  quando  $x = \pm a$  e que  $f''(x)$  é negativa no ponto  $x = -a$ , portanto esse é um ponto de máximo local, como  $f''(x)$  é positiva no ponto  $x = a$  esse é um ponto de mínimo local.

Observe que

$$\begin{aligned} f(a) \cdot f(-a) &= (a^3 - 3a^2a + q)(-a^3 + 3a^2a + q) \\ &= (a^3 - 3a^3 + q)(-a^3 + 3a^3 + q) \\ &= (q - 2a^3)(q + 2a^3) \\ &= q^2 - 4a^6 \end{aligned} \tag{1}$$

Lembrando que

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \quad e \quad p = -3a^2 \Rightarrow a = \left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

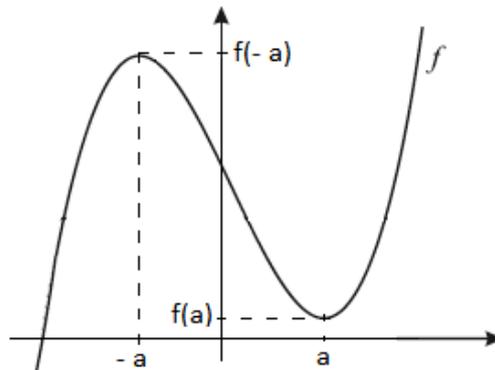
Então, substituindo o valor de  $a$  em (1), temos

$$\begin{aligned} f(a) \cdot f(-a) &= q^2 - 4a^6 = q^2 - 4 \left[ \left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^6 = q^2 - 4 \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = q^2 + \frac{4p^3}{27} \\ f(a) \cdot f(-a) &= 4 \left( \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right) = 4D \end{aligned}$$

Logo o sinal do discriminante  $D$  será o mesmo de  $f(a) \cdot f(-a)$ .

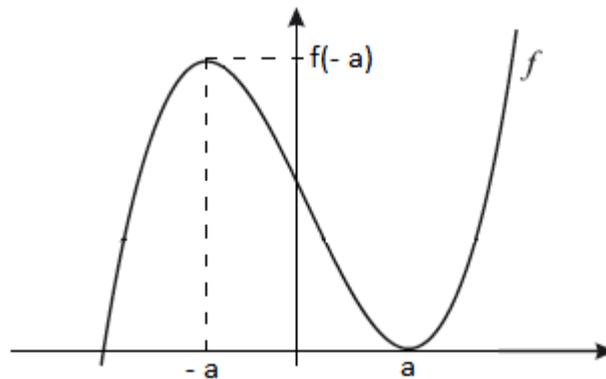
Portanto o gráfico de  $f(x)$  apresenta as seguintes formas:

- a) Se  $D > 0$ ,  $f(x)$  terá uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas;



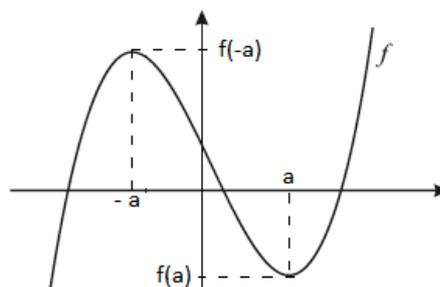
*Uma raiz real e duas raízes complexas*

- b) Se  $D = 0$ ,  $f(x)$  terá uma raiz real simples e uma raiz real dupla;



*Uma raiz real simples e uma raiz real dupla*

- c) Se  $D < 0$ ,  $f(x)$  terá três raízes reais distintas;



*Três raízes reais distintas*

Concluimos que a equação do terceiro grau  $x^3 + px + q = 0$  tem uma, duas ou três raízes reais distintas, de acordo com o valor de  $D$ , portanto se:

- $D > 0$  a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas;
- $D = 0$  a equação tem três raízes reais sendo uma dupla;
- $D < 0$  a equação possui três raízes reais e diferentes.