



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL

ANTÔNIO ALMIR BEZERRA

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS

FORTALEZA

2014

ANTÔNIO ALMIR BEZERRA

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Maria Silvana Alcântara Costa

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

B467r Bezerra, Antônio Almir
Relações trigonométricas fundamentais / Antônio Almir Bezerra. – 2014.
59 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof^a. Dr^a Maria Silvana Alcântara Costa.

1. Trigonometria. 2. Geometria. 3. Geometria plana. I. Título.

ANTÔNIO ALMIR BEZERRA

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 20 / 05 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Maria Silvana Alcantara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa (Orientadora)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Plácido Francisco de Assis Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Mario de Assis Oliveira

Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

AGRADECIMENTOS

À Deus, por sempre guiar meus passos para realizar com sucesso os meus objetivos.

A meus pais e irmãos que sempre foram minha base nesta caminhada, o meu muito obrigado por tudo àquilo que me ensinaram e contribuíram para as minhas realizações.

A meus amores Adriana Mendes de Brito Bezerra e Israel Levi Mendes Bezerra, esposa e filho, pela dedicação, amor, apoio e incentivo constante sem o qual eu não estaria realizando este sonho.

Ao meu irmão, João Batista Bezerra, que me acompanhou durante seis meses pelas estradas entre Juazeiro do Norte e Várzea Alegre.

A minha orientadora Maria Silvana Alcântara pela confiança e dedicação, por toda liberdade no desenvolvimento deste estudo e ter acreditado em meu potencial me conduzindo para esta realização, obrigado pelas horas e apoio disponibilizados.

A todos meus professores do PROFMAT, pela arte de ensinar, por nos desafiar e acreditar em nossa capacidade de aprender sempre mais.

Enfim, agradeço aos amigos pelo companheirismo nas árduas vitórias conquistadas e todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução dessa Dissertação de Mestrado.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos algumas relações trigonométricas fundamentais e suas demonstrações. Tais relações merecem destaque, pois são essenciais na resolução de problemas nas diversas áreas do conhecimento. Inicialmente fizemos um breve histórico da Trigonometria destacando a sua importância no contexto da Matemática. Em sequência apresentamos as relações fundamentais, dentre elas, enfatizamos as fórmulas da adição de arcos, cujas demonstrações utilizamos área de figuras planas, a lei dos cossenos e a lei dos senos. Além disso, mostramos como estas fórmulas se relacionam com o Teorema da Corda Quebrada e o Teorema de Ptolomeu da Geometria Plana. Explorando a relação entre Trigonometria e Geometria Plana. Procuramos mostrar a importância desta teoria no ensino médio motivando alunos e professores a buscar um maior interesse pelo conhecimento em Matemática.

Palavras-Chave: Trigonometria. Triângulos. Ângulos. Área

ABSTRACT

The present research aims to present classic demonstrations of the fundamental relations of Trigonometry, with a simple approach, and exploring flat shapes. The intention is to make such demonstrations better known and provide a highlight for Trigonometry, since they are essential in solving problems of everyday life. For this purpose, we made a historical highlighting of the importance of trigonometry in the mathematical context. Since we know Trigonometry is losing its status and not being considered essential in basic education anymore, such demonstrations, associated with the flat shapes, may be used as a model class. Therefore, we highlight the following fundamental relations: Basic Trigonometric relations, Derived Relations, Sine of the Sum and Difference of Two Arcs, Cosine of the Sum and Difference of Two Arcs, Double Arcs, Half Arc, Transformation in Product and Applications. For the demonstration of these relations we used some area results, cosine law, Ptolemy's theorem and the theorem of the broken chord Plane Geometry. We believe that Trigonometry is linked to the formation of these flat shapes. Thus, such demonstrations associated to these flat shapes may serve to improve the Trigonometry teaching-learning and as motivator for students and teachers seeking to enhance their knowledge in mathematics.

Keywords: Teaching-learning. Trigonometry. Euclidean Geometry. Fundamental Relations

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Papiro de Rhind	12
Figura 2.2	Tábua de Plimpton 322	12
Figura 2.3	Esquema de Ptolomeu	14
Figura 2.4	Quadrilátero inscrito	16
Figura 2.5	Círculo de raio unitário	18
Figura 3.1	Ângulo central	20
Figura 3.2	Ângulo inscrito	21
Figura 3.3	Ângulo excêntrico a uma circunferência	21
Figura 3.4	Triângulo retângulo	22
Figura 3.5	Triângulo retângulo dividido	23
Figura 3.6	Triângulo retângulo de hipotenusa unitária	24
Figura 3.7	Triângulo retângulo de cateto adjacente unitário	25
Figura 3.8	Triângulo retângulo de cateto oposto unitário	27
Figura 3.9	Ciclo trigonométrico	29
Figura 3.10	Ciclo trigonométrico e a reta	29
Figura 3.11	Sinais do seno e do cosseno no plano	30

Figura 3.12 Área de um triângulo em função do ângulo agudo	31
Figura 3.13 Área de um triângulo em função do ângulo obtuso	32
Figura 3.14 Triângulo qualquer e a Lei dos cossenos	33
Figura 3.15 Triângulo obtuso e a Lei dos cossenos.	34
Figura 3.16 Triângulo inscrito	35
Figura 4.1 Ciclo trigonométrico e o plano	36
Figura 4.2 Circulo de raio unitário e o Retângulo	37
Figura 4.3 Triângulo retângulos de lado unitário comum	39
Figura 4.4 Triângulo retângulo de altura unitária	41
Figura 4.5 Trapézio	43
Figura 4.6 Triângulo isósceles	44
Figura 4.7 Triângulo retângulo inscrito	46
Figura 4.8 Ângulo excêntrico e o seno da diferença	48
Figura 4.9 Quadrilátero inscrito de lados unitários	49
Figura 4.10 Teorema de Ptolomeu	51
Figura 4.11 Quadrilátero inscrito e o teorema de Ptolomeu	52
Figura 4.12 Corda Quebrada	54

Figura 4.13 Transformação em Produto	56
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	UM BREVE HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA	12
2.1	A Trigonometria Grega	13
2.2	A Trigonometria Hindu	16
2.3	A Trigonometria na Europa	18
3	DEFINIÇÕES E PRELIMINARES	20
3.1	Ângulo Central, Inscrito e Externo a uma Circunferência	20
3.2	Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo	22
3.3	Área de um Triângulo Qualquer	31
3.4	Lei dos Cossenos	32
3.5	Lei dos Senos	34
4	IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS E SUAS DEMONSTRAÇÕES	36
4.1	Cosseno e Seno da Soma e da Diferença de dois arcos	36
4.2	Arcos duplos e Arcos metades	44
4.3	Teorema de Ptolomeu e o seno da diferença de dois arcos	51
4.4	Teorema da Corda quebrada e o seno da diferença de dois arcos	53
4.5	Transformação em produto	55
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	58
	REFERÊNCIAS	59

1 INTRODUÇÃO

Atualmente com as mudanças no ensino de Matemática e conseqüentemente de Trigonometria na educação básica brasileira, tem-se aumentado o interesse de pesquisadores de Ensino da Matemática em debater esta problemática nas escolas e, até mesmo, nas Universidades. “Além disso, há um interesse coletivo por este ramo da Matemática, como área de aprendizagem, pela sua contribuição na formação dos alunos e pela aplicação que tem em outras Ciências, inclusive dentro da própria Matemática” (EVES, 1992).

Com o intuito de tornar o Ensino de Trigonometria mais interessante construímos figuras planas simples na tentativa de mostrar as demonstrações das identidades trigonométricas.

A ideia é desenvolver habilidades em Trigonometria, explorando “algumas relações fundamentais”, abordando a Geometria Euclidiana, tais como o Teorema de Ptolomeu, Áreas de Triângulos, Lei dos Cossenos, que é utilizado tanto em Matemática como na Física. Teoremas de Ptolomeu e Hiparco, que relacionam as diagonais e os lados de um quadrilátero inscrito, que nos dá uma condição de relacioná-los com relações de seno e cosseno da soma e da diferença de dois arcos, Arcos duplo e Triplo. Pois, seguem diretamente das relações fundamentais acima citados. Para tal estudo fizemos uma minuciosa pesquisa bibliográfica, e com o auxílio de algumas construções procuramos detalhar a visualização geométrica das relações fundamentais abordadas, possibilitando assim, demonstra-las.

Com a finalidade de atender os objetivos, citados anteriormente, no capítulo 2 fizemos um breve histórico da Trigonometria. Já no capítulo 3 apresentamos a teoria necessária para a compreensão do trabalho. Fizemos algumas definições e apresentamos resultados envolvendo semelhança de triângulos, a lei dos senos e a lei dos cossenos que serão utilizados no capítulo seguinte. Pois com o auxílio das áreas e resultados clássicos da Geometria Plana apresentamos as demonstrações das relações fundamentais e sua relação com o Teorema da corda Quebrada e o Teorema de Ptolomeu com as fórmulas da adição de arcos.

Nas Considerações Finais, apresentamos uma visão geral sobre os assuntos abordados citando aplicações e como elas podem contribuir para a melhoria do ensino de Trigonometria no Ensino Básico e nos períodos iniciais da graduação.

2 UM BREVE HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

Conforme (EVES, 1992) o papiro de Rhind¹ (Figura 2.1), uma das mais antigas fontes da matemática egípcia, data-se de 5.1650 a.c. Também conhecido como papiro de Ahmes, esse papiro é um texto matemático na forma de manual pratico que contém 85 problemas, o mesmo foi adquirido no Egito, em 1858 numa cidade à beira do Nilo, pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo museu Britânico. O papiro de Rhind foi publicado em 1927 e é um rolo de papiro com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento. Este papiro esta atualmente no Bristish Museum, com exceção de uns poucos fragmentos que estão no Broklim Museum. A *Plimptom322*² (Figura 2.2) leva esse nome por se tratar de uma tábua da coleção G. A. Plimpton da universidade de Colúmbia e ter sido catalogada sob o numero 322. Talvez a mais notável tábua da matemática babilônica, a Plimpton 322 foi escrita no período babilônico antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.c).



Figura 2.1: Papiro de Rhind



Figura 2.2: Tábua de Plimpton 322

Etimologicamente a palavra trigonometria vem do grego trigonon, “triângulo” e metron, “medida”. Esta área da matemática estuda as relações entre os ângulos e os lados do

¹Fonte: <http://www.ime.usp.br/leo/imatica/historia/prhind.html>, acessado em 16 de fevereiro de 2014.

²Fonte : <http://recantodaspalavras.com.br/2010/11/28/pitagoras-no-inventou-oseuTeorema/>, acessado em 16 de fevereiro de 2014.

triângulo. A trigonometria oportuniza ao matemático resolver problemas geométricos envolvendo ângulos e distâncias.

2.1 A Trigonometria Grega

Numa abordagem histórica da trigonometria é importantes destacar as descobertas e aplicações feitas pelos gregos nessa área da matemática. O povo grego usava-se da trigonometria principalmente na resolução de problemas sobre a astronomia. De início deve-se dar ênfase a figura de um dos mais eminentes astrônomos gregos, o astrônomo Hiparco de Nicéia, considerado o “Pai da trigonometria”, Hiparco viveu em torno de 140 a.c e assim como outros importantes matemáticos gregos da antiguidade pouco se sabe sua vida. Segundo (EVES, 1992, p. 202)

E bem provável que o mais eminente dos astrônomos da Antiguidade tenha sido Hiparco, que viveu em torno de 140 a.C. Embora se tenham dados de um equinócio vernal registrado por Hiparco em Alexandria, no ano 146 a.C., suas observações mais notáveis foram feitas no famoso observatório de Rodas, importante centro comercial. Hiparco era um observador extremamente cuidadoso e creditam-se a ele, em astronomia, feitos como a determinação da duração do mês lunar médio (o afastamento entre seu valor e aquele presentemente aceito não vai além de 1), um cálculo acurado da inclinação da eclíptica e a descoberta e uma estimativa da precessão anual dos equinócios.

Hiparco, através de um estudo sistemático das relações entre o ângulo e o comprimento da corda correspondente construiu uma tabela trigonométrica de cordas dos ângulos de 0° a 180° . Provavelmente a divisão do círculo em 360° teve origem a partir da tabela de cordas de Hiparco.

Atribui-se a Hiparco um tratado de doze livros, onde o astrônomo grego se dedicou a construção daquela que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica. Para a montagem da tabela, Hiparco da interpolação linear, a mesma representou um grande avanço na astronomia.

A trigonometria grega teve seu apogeu com Claudio Ptolomeu (150 d.C.) que influenciado pela ideias de Hiparco, foi o autor da mais importante obra da trigonometria, no século II, em Alexandria. “Syntaxis Mathematic”, era uma obra composta de treze volumes, geralmente citada com título de tradução árabe “Almagesto” que em árabe significa “A maior”, pois os árabes consideram a obra de Ptolomeu como a maior existente na época , na área da astronomia.

O objetivo do *Almagesto* é descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar, tendo como base a teoria geocêntrica, que supunha que a Terra era o centro do universo. Esta teoria foi substituída no século XV pelo teoria heliocêntrica de (teoria geocêntrica, que seria substituída já no século XV pela teoria heliocêntrica do astrônomo e matemático polonês Nicolau Copérnico (1473 -1543). Nesta obra, Ptolomeu também apresenta seus cálculos sobre a dimensão da Lua e a distância entre ela e o Sol.

Ptolomeu apresentou no *Almagesto* uma tabela de cordas indo $\frac{1}{2}^\circ$ a 360° , com incrementos de $\frac{1}{2}^\circ$, idéia essa que ter sido baseada na tabela criada por Hiparco. Dividindo-se o

circulo em 60 partes e utilizando $377/120$ como a aproximação de pi, Ptolomeu não fez uso da expressões seno e cosseno para obter a tabela. Ele utilizou apenas as cordas e que pode ser considerado o pronuncio da relação fundamental $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$

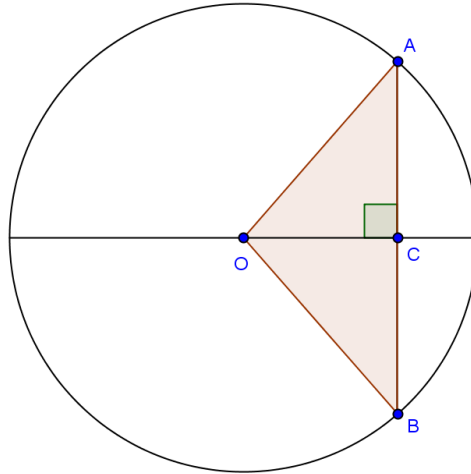


Figura 2.3: Esquema de Ptolomeu

$$\text{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{2\overline{AC}}{2\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{\text{Diâmetro}} = \frac{\text{cdr}(\alpha)}{120} \quad (2.1)$$

Como Ptolomeu havia dividido a circunferência em 60 partes, seu diâmetro é 120 e $\text{cdr}(\alpha)$ é o comprimento da corda \overline{AB} . No *Almagesto* nenhuma tabela continha as “funções” seno e cosseno, pois essa notação era feita usando a função corda do arco (α), denotada por $\text{cdr}(\alpha)$. Na tabela de cordas de Ptolomeu existiam três colunas: a primeira listando os arcos, a segunda o comprimento da corda correspondente a cada arco e a terceira que dava o aumento médio de $\text{cdr}(\alpha)$ correspondente a um acréscimo de um minuto em α . Ptolomeu desenvolveu a Trigonometria no décimo e no décimo primeiro capítulo do primeiro livro do *Almagesto*, a tabela de cordas é apresentada no décimo primeiro capítulo.

Deve-se ressaltar que a tabela de cordas de Ptolomeu teve como base a tabela criada anteriormente por Hiparco e que todo esse cálculo era do conhecimento de Hiparco. Para (EVES, 1992, p. 202)

Essencialmente, então, a tabua de cordas de Ptolomeu fornece os senos dos ângulos de 0° a 90° , com incrementos de 15. A maneira de se calcular os comprimentos dessas cordas, explicada ele suas tabuas e, ademais, que estava a par dos processos equivalentes a varias formulas hoje usadas na resolução de triângulos esféricos retos.

Segundo, (MORGADO; WAGNER; CARMO, 2001) “[...] a Trigonometria foi uma criação da matemática grega. Ela surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes e para ser utilizada na navegação e na geografia”.

Assim, os estudos de Trigonometria se concentravam na Trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, isto é, triângulos sobre a superfície de uma esfera. No entanto, foi necessário para isso desenvolver partes da trigonometria plana.

“O estudo dos triângulos esféricos na Matemática grega vinha sendo feito desde os últimos pitagóricos. O próprio Euclides, que viveu em torno de 300 a.C., em um de seus trabalhos, os Fenômenos, estudou a geometria esférica. Aproximadamente em 20 a.C., Teodósio compilou o que os gregos conheciam sobre o assunto em seu livro sobre a Esfera”. (MORGADO; WAGNER; CARMO, 2001)

Aristarco, segundo Arquimedes e Plutarco, “[...] em seu livro sobre as distâncias do Sol e da Lua, baseando-se em observações, deduziu que a distância da terra ao sol é maior do que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da terra à lua”. (BOYER, 1974).

“Os erros cometidos por Aristarco devem-se aos dados experimentais que utilizou. Seus raciocínios dedutivos estavam corretos. Embora não tenhamos certeza de que utilizou Trigonometria, Apolônio de Perga, que viveu em torno de 200 a.C, um dos grandes matemáticos gregos, achou, em seu Entrega Rápida, a aproximação 3,1416 para π , mais tarde utilizada pelos hindus, os quais exprimiam este valor como o quociente 62832:20000. (MORGADO; WAGNER; CARMO, 2001, p. 101)

Na citação acima, se percebe que as razões trigonométricas foram utilizadas nas demonstrações do seno de pequenos ângulos.

Para (BOYER, 1974, p.109) Hiparco foi o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas, usando para isso uma tabela de cordas por ele calculada. Suas tabelas foram construídas para serem usadas em Astronomia.

As principais contribuições de Hiparco em Astronomia foram à organização dos dados empíricos babilônicos, a confecção de um catálogo de estrelas e a descoberta da precessão dos equinócios. É provável que a divisão do círculo em 360° tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco. Ele provavelmente seguiu a ideia do matemático grego Hipsiclo, o qual por sua vez havia dividido o dia em 360 partes, uma divisão possivelmente inspirada na astronomia babilônica. (BOYER, 1974, p.109)

Podemos assim afirmar, que Hiparco comparado a muitos matemáticos gregos, foi essencial na construção da trigonometria.

Segundo (BOYER, 1974, p.111) “é devido a Ptolomeu o qual cita vários resultados de Hiparco sobre Trigonometria e Astronomia, e a fragmentos de descrições de seus trabalhos contidos nas obras de outros autores gregos”.

Morgado (MORGADO; WAGNER; CARMO, 2001, p. 102) afirma que:

[...] a trigonometria grega atingiu seu ápice com Cláudio Ptolomeu, o qual viveu 150 D.C. Seu principal trabalho, o Almagesto, permite datar a aproximadamente sua vida, pois nele Ptolomeu se refere a observações que fez de efemérides astronômicas cujas datas conhecemos. O Almagesto tem por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar, supondo que a terra está em seu centro (teoria geocêntrica, que será substituída, já no século XV, pela teoria heliocêntrica, introduzida por Copérnico(1473, 1543)). Ptolomeu desenvolveu a Trigonometria nos capítulos 10 e 11 do primeiro livro do Almagesto, sendo que o capítulo 11 consiste em uma tabela de cordas (ou seja, de senos). Para a construção desta tabela, a partir do fato de que um quadrilátero inscrito vale a relação $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ (Figura 2.4).

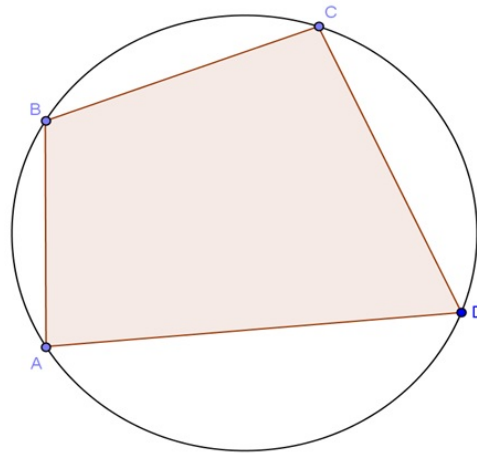


Figura 2.4: Quadrilátero inscrito

Segundo Morgado, “[...] Ptolomeu deduz usando as funções seno e cosseno a expressão para $\sin(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha - \beta)$. Além disso, demonstrou que $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, onde α e β são agudos”.

Com as técnicas expostas em seu livro, Ptolomeu decompõe convenientemente triângulos em triângulos retângulo expondo dessa forma a Trigonometria até o renascimento. A trigonometria era usada pelos gregos em Astronomia. Eles nunca se preocuparam em utilizá-la em topografia, campo em que hoje ela tem emprego constante. A topografia grega romana sempre recorreu somente a Geometria Euclidiana. (MORGADO; WAGNER; CARMO, 2001, p. 104).

2.2 A Trigonometria Hindu

Com os hindus, “[...] a Trigonometria era um instrumento útil e preciso para à astronomia. No século V depois de Cristo, os astrônomos hindus abandonaram as tabelas de cordas e adotaram as de senos”. (BOYER, 1974)

[...] o matemático Aryabhata (476,?) passou a trabalhar com a corda \overline{AB} em um círculo de raio 3438(este número é obtido supondo o comprimento da circunferência 360.60 e usando o valor 3,14 para π . Com a mudança de raio, as tabelas de Ptolomeu não mais puderam ser utilizadas, sendo portanto necessário refazê-las. A Trigonometria hindu era essencialmente aritmética, ao contrário da grega muito mais geométrica. (MORGADO; WAGNER; CARMO, 2001, p. 105).

Os árabes herdaram a Trigonometria dos gregos e hindus, adotando o ponto de vista aritméticos desses últimos.

Introduziram para facilitar os cálculos, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante. Eles foram também indiretamente responsáveis pelo uso da palavra seno cuja origem latina significa bolsa, baía.

Para os árabes,

[...] corda, em sânscrito, língua utilizada pelos antigos hindus, é *jiva*. Esta palavra foi usada sem modificações pelos árabes. No entanto, como em algumas outras línguas, em árabe frequentemente se escrevem somente as consoantes das palavras, deixando as vogais ao cuidado da interpretação do leitor. Ora, a palavra sânscrita *jiva* tem as mesmas consoantes da palavra árabe *Jaib*³. Assim, foi natural que os tradutores de trabalhos matemáticos, do árabe para o latim, e que desconheciam os sânscrito, supusessem que lidavam com tabelas de *jaib*, e traduziram esse termo pela palavra latina correspondente a *sinus*⁴. (MORGADO; WAGNER; CARMO, 2001, p. 105).

Como citamos, o interesse pela trigonometria entre gregos, hindus e árabes era motivado por suas aplicações à astronomia. A partir do Renascimento, época da expansão marítima europeia, que exigiu o desenvolvimento da cartografia, a trigonometria passou a ser utilizada em Cartografia e em topografia.

[...] devido a necessidade de refazer todos os cálculos da Astronomia posicional, com a adoção progressiva do sistema heliocêntrico de Copérnico (1473-1543). Aliás, seu livro, *De Revolutionibus Orbium Celestium* (1543) contém partes substanciais dedicadas a Trigonometria, as quais já tinham sido publicadas independentemente em seu *De Laeteribus et Angulis Triangulorum*. Em ambos os trabalhos Copérnio demonstra grande domínio da Trigonometria. (MORGADO; WAGNER; CARMO, 2001, p. 105).

Com desenvolvimento da Navegação exigia mapas mais precisos e cálculos mais exatos e numerosos de efemérides⁵ astronômicas, para permitir a determinação da hora e da localização durante as navegações.

Devemos citar, em primeiro lugar, George Peurbach (1423-1461), de Viena, que traduziu *Almagesto* diretamente do grego, começou a calcular tabelas de senos mais precisas exigida pelas aplicações. “[...] Com Regiomontano (1436-1476), o qual conhecia os trabalhos de trigonometria de Nasir Eddin e a partir deles, organizou a Trigonometria como uma parte da matemática independente da Astronomia”.

[...] com construções de tabelas trigonométricas, processo essencial para o progresso da Astronomia e da Matemática. A utilização crescente da Trigonometria fez com que muitos outros matemáticos construíssem tabelas, como por exemplo, George Joaquim Rético (1514-1576), Copérnico, François Vieta (1540-1603) e Bartolomeu Pitisco (1561-1613). A este último devemos a Palavra Trigonometria⁶. Rético fundiu as ideias de Copérnico e de Regiomontano com suas próprias contribuições. (MORGADO; WAGNER; CARMO, 2001, p. 106).

Regiomontano, faz uma exposição da trigonometria do triângulo retângulo num círculo (Figura 2.5) de raio igual a 1.

³Jaib: em árabe, significa bacia ou bolso.

⁴Sinus: Origem do seno de um ângulo.

⁵Efeméride: acontecimento notável ocorrido em uma determinada data.

⁶Trigonometria: quer dizer medida dos ângulos de um triângulo.

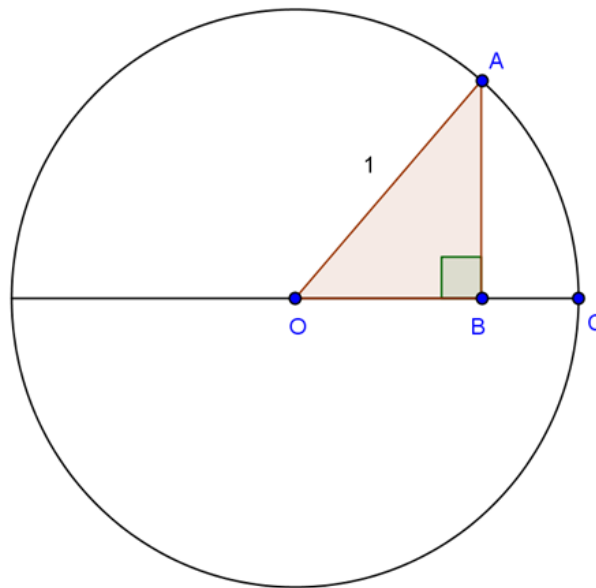


Figura 2.5: Círculo de raio unitário

2.3 A Trigonometria na Europa

Na Europa, nesta época, estavam sendo descobertas e utilizadas várias identidades trigonométricas, como por exemplo, $2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$, fórmula introduzida pelo matemático árabe Ibn-Yunes (? 1008). A ênfase da Trigonometria começou a passar da solução de triângulos para a investigação de relações funcionais. “A fórmula citada acima é um exemplo das usadas na prostaférese, ou seja, substituição de produtos por somas” (BOYER, 1974, p. 211).

A prostaférese antecedeu os logaritmos como algoritmos para simplificar cálculos, e foi adotada por Tycho Brahe em seus cálculos astronômicos. É muito provável que a prostaférese tenha sido o ponto de partida de Neper em sua procura de um método (ou logaritmos) para efetuar, de maneira mais rápida, os cálculos longos e cansativos necessários na época.

Relata-se na história um episódio pitoresco com o conhecimento que Vieta tinha da expressão para $\sin(n\theta)$. Em 1593, o matemático belga Adriano Romano (1561-1615), desafiou os matemáticos a resolverem a equação $x^{45} - 45 \cdot x^{43} + 945 \cdot x^{41} - \dots - 3795 \cdot x^3 + 45 \cdot x = k$

[...] o embaixador dos países baixos da França afirmou que não existiam matemáticos franceses capazes de resolver este problema. O rei da França, Henrique IV, convocou Vieta, o qual percebeu rapidamente que esta equação exprime $\sin(45 \cdot \theta)$ em termos de $\sin(\theta)$, com $k = \sin(\theta) \cdot \sin(45 \cdot \theta)$ e $x = 2\sin(\theta)$. Vieta já sabia que a equação podia ser decomposta em uma de grau 5 e duas de grau 3, após o que ele a resolveu, para espanto de todos (BOYER, 1974, p. 213).

A partir de Galileu (1564, 1642), e com a descoberta da Geometria Analítica por Descartes (1596, 1650) e por Fermat (1601, 1665), o estudo das curvas desenvolveu-se muito. A curva seno foi introduzida no estudo de Roberval (1602, 1703), publicado em 1670, vemos

um gráfico de dois períodos da função seno. É o primeiro aparecimento de uma função trigonométrica usando o método dos indivisíveis Roberval mostrou que $\int_a^b \text{sen} x \cdot dx = \cos b - \cos a$.

Pouco a pouco, as funções passaram a figurar frequentemente em matemática, paralelamente ao uso de tabelas cada vez mais precisas para aplicações em topografia, Navegação e Astronomia de posição.

3 DEFINIÇÕES E PRELIMINARES

Uma das figuras planas de grande relevância é o triângulo, pois qualquer polígono de n lados pode ser decomposto em triângulos. Tendo em vista este fato e sua relação com as funções trigonométricas, fizemos um breve estudo sobre esta figura plana rica de informações. Apresentamos algumas definições e resultados sobre semelhança e congruência, em seguida, definimos as funções trigonométricas como razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo com o intuito de apresentar as relações trigonométricas fundamentais.

3.1 Ângulo Central, Inscrito e Externo a uma Circunferência

Definição 3.1.1 (Ângulo Central Relativo a uma circunferência) Antes de apresentarmos a definição seguinte lembremos que ângulo é uma região plana formada por duas semiretas com mesma origem cuja medida em radianos está entre zero e π .

Seja A e B dois pontos de uma circunferência de centro O . A semireta que passa pelos pontos A e B divide o plano em dois semiplanos. Cada um destes semiplanos contém uma parte da circunferência as quais chamamos de Arcos determinados pelos pontos A e B e o segmento de reta AB é chamado corda AB . Se a corda AB for o diâmetro da circunferência então os arcos são chamados de semicírculos, caso contrário, os arcos serão chamados de *arco maior*, que é o arco que fica no mesmo semiplano que o centro do círculo, e o outro é chamado de arco menor. O ângulo $A\hat{O}B$ que subentende o arco menor é chamado de ângulo central e a medida do arco menor é por definição a medida do ângulo central.

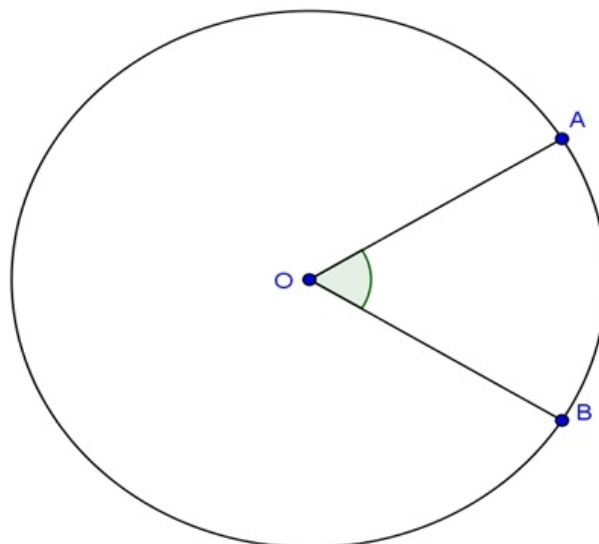


Figura 3.1: Ângulo central

Definição 3.1.2 (Ângulo Inscrito em uma circunferência) Um ângulo é dito inscrito em uma circunferência se seu vértice D é um ponto da circunferência e seus lados cortam a circunferência em pontos B e C distintos do ponto D .

Observe que na definição de ângulo inscrito, os pontos B e C determinam dois arcos. O arco que não contiver o vértice D do ângulo é chamado de arco correspondente ao ângulo inscrito dado.

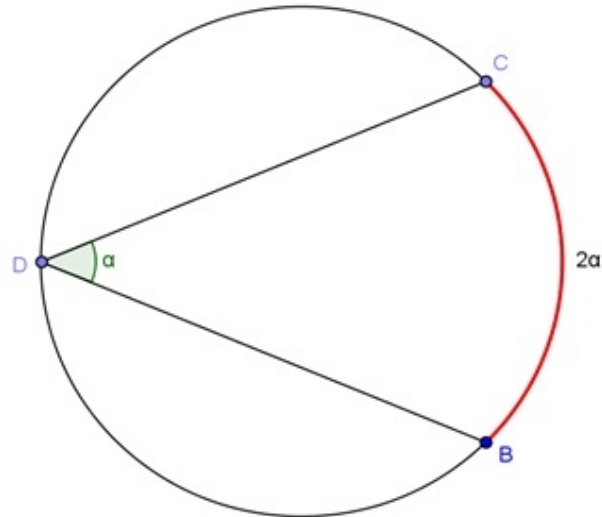


Figura 3.2 Ângulo inscrito

Definição 3.1.3 (Ângulo excêntrico a uma circunferência) “Um ângulo excêntrico a uma circunferência é um ângulo cujo vértice é um ponto exterior à circunferência e seus lados interceptam a circunferência.”

Um ângulo excêntrico a uma circunferência é um ângulo cujo vértice é um ponto exterior à circunferência e seus lados intersectam a circunferência como na figura abaixo

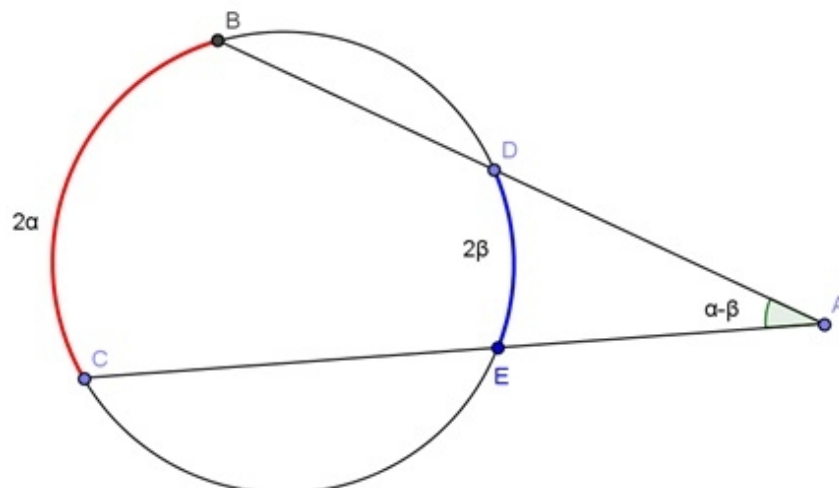


Figura 3.3: Ângulo excêntrico a uma circunferência

A medida de ângulo excêntrico exterior, considerando as indicações dos arcos limitados pelos pontos de interseção das semirretas secantes ou tangentes, é dada pela metade da diferença desses arcos.

Definição 3.1.4 (Congruência de Triângulos) *Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que seus lados congruentes aos lados do outro e seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.*

A congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva.

Definição 3.1.5 (Triângulos Semelhantes) Dizemos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

O caso de semelhança de triângulos que apresentamos abaixo é o caso onde os triângulos possuem ângulos iguais.

Considere um triângulo ABC , retângulo em A . Denotaremos por θ e α as medidas dos ângulos $\hat{A}CB$ e $\hat{A}BC$, respectivamente. Como θ e α são ângulos internos de um triângulo retângulo, então são agudos e complementares. Seja $\overline{AC} = b$ a medida do lado oposto a α , $\overline{AB} = c$ a medida do lado adjacente ao ângulo α e $\overline{BC} = a$, a medida do lado oposto ao ângulo reto, pela qual chamaremos, respectivamente, cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa.

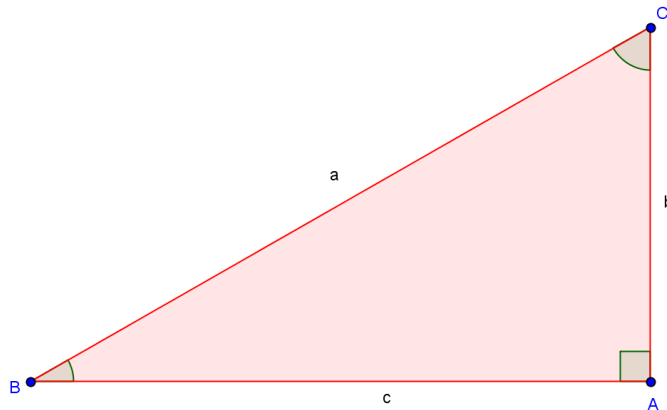


Figura 3.4: Triângulo retângulo

3.2 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Podemos construir n triângulos retângulos semelhantes a ABC como indicado na Figura 3.5.

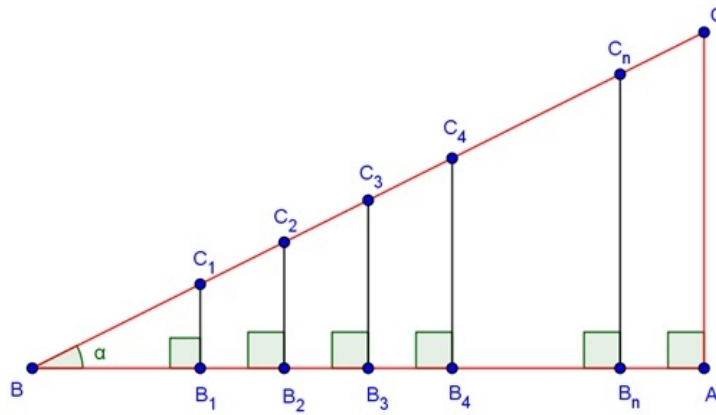


Figura 3.5: Triângulo retângulo dividido

Vejamus que os triângulos são semelhantes. Na semirreta \overline{BC} marque os pontos $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ todos distintos, a partir destes, trace segmentos perpendiculares $\overline{BC_1}, \overline{BC_2}, \overline{BC_3}, \dots, \overline{BC_n}$ relativos ao lado \overline{AB} . Assim, os triângulos construídos $\overline{B_1BC_1}, \overline{B_2BC_2}, \overline{B_3BC_3}, \dots, \overline{B_nBC_n}$ possuem os ângulos agudos congruentes. Portanto,

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{BC_3}} = \dots = \frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{BC_n}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a} \quad (3.1)$$

As razões acima não dependem do comprimento dos lados dos triângulos, mas apenas da medida α do ângulo. A razão acima é chamada de seno de α e denotamos por

$$\text{sen} \alpha = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{BC_3}} = \dots = \frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{BC_n}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (3.2)$$

Similarmente, as razões:

$$\frac{\overline{BB_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{BB_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{BB_3}}{\overline{BC_3}} = \dots = \frac{\overline{BB_n}}{\overline{BC_n}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{c}{a}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (3.3)$$

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{BB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{BB_3}} = \dots = \frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{BB_n}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{b}{c}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (3.4)$$

que também não dependem da medida dos lados dos triângulos, mas somente, do ângulo α . Então definiremos mais duas razões,

$$\cos \alpha = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{BA_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{BA_3}}{\overline{BC_3}} = \frac{\overline{BA_n}}{\overline{BC_n}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{c}{a}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (3.5)$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BA_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BA_3}} = \frac{\overline{A_nC_n}}{\overline{BA_n}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{b}{c}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (3.6)$$

que são chamadas, respectivamente, de cosseno de α e tangente de α . Além das razões acima podemos definir mais três razões para α $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, a saber

$$\left\{ \begin{array}{l} \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \\ \cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \\ \operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

as quais são chamadas respectivamente de secante de α , cotangente de α e cossecante de α . Observando o triângulo ABC acima e as definições das razões trigonométricas, concluímos facilmente que $\operatorname{sen} \theta = \cos \alpha$, $\operatorname{sen} \alpha = \cos \theta$ e $\operatorname{tg} \theta = \cotg \alpha$.

No que segue faremos demonstrações das principais identidades trigonométricas. Começaremos pela relação fundamental da trigonometria.

Lema 3.2.1 Se ABC é um triângulo retângulo em B então

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (3.8)$$

Prova Como vimos anteriormente, as definições das razões seno e cosseno de um ângulo não dependem das medidas dos lados do triângulo retângulo, mas somente do ângulo. Logo, podemos construir um triângulo retângulo cuja hipotenusa $\overline{AC} = 1$, como na Figura 3.6.

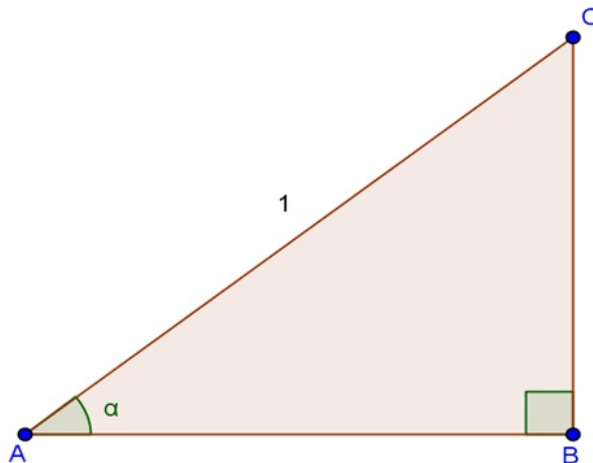


Figura 3.6: Triângulo retângulo de hipotenusa unitária

assim,

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC} \quad (3.9)$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB} \quad (3.10)$$

então, pelo teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 \\ \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha &= 1^2 \\ \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha &= 1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

A tangente se relaciona com a secante e também com as razões seno e cosseno como mostramos abaixo

Lema 3.2.2 *Se ABC é um triângulo retângulo em B então*

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \text{ e } \tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \quad (3.12)$$

Prova Considere ABC um triângulo retângulo em B e α a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Por semelhança de triângulos podemos supor que a medida do lado AB vale 1, ou seja, $\overline{AB} = 1$ como na Figura 3.7.

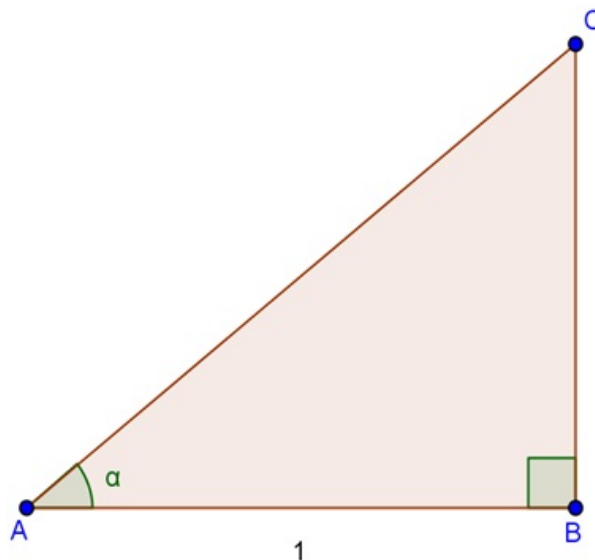


Figura 3.7: Triângulo retângulo de cateto adjacente unitário

por definição temos a tangente e a secante do ângulo α como as razões,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC} \quad (3.13)$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\overline{AC}} \text{ assim, } \overline{AC} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha \quad (3.14)$$

por Pitágoras e substituindo os valores acima

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AC}^2 \\ 1^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \sec^2 \alpha & \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \sec^2 \alpha \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mostraremos a segunda identidade usando a área do triângulo ABC . Para isso, trace a altura h relativa a hipotenusa $\overline{AC} = \sec \alpha$ assim o triângulo ABH é retângulo em H onde H é o pé da altura h . Logo, $\overline{AB} = 1$ será a hipotenusa do triângulo ABH e pelo triângulo do lema 3.2.2 concluímos que $h = \operatorname{sen} \alpha$. Então, a área do triângulo ABC é dada por

$$\text{Área} = A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} \quad (3.16)$$

substituindo os valores acima em A ,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} &= \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} \\ \frac{1 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2} &= \frac{\sec \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \sec \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Mostraremos agora uma identidade equivalente para a cotangente.

Lema 3.2.3 Se ABC é um triângulo retângulo em B então

$$\cotg^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha \text{ e } \cotg^2 \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (3.18)$$

Prova Similarmente ao lema anterior considere ABC um triângulo retângulo em B e α a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Faça $\overline{BC} = 1$ no triângulo da Figura 3.8.

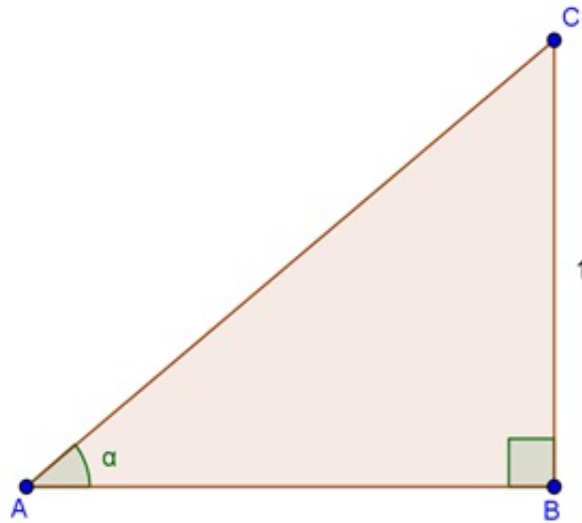


Figura 3.8: Triângulo retângulo de cateto oposto unitário

temos,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AB}} \text{ e } \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \quad (3.19)$$

assim

$$\overline{AB} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha \text{ e } \overline{AC} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha \quad (3.20)$$

Pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \quad (3.21)$$

logo,

$$\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1^2 = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad (3.22)$$

Para mostrarmos a segunda identidade trace h a altura relativa a hipotenusa $\overline{AC} = \operatorname{cosec} \alpha$. Seja H o pé da altura h , logo o triângulo BHC é retângulo, sua hipotenusa $\overline{BC} = 1$ e $h = \operatorname{sen} \theta = \cos \alpha$ pois α e θ são complementares, onde θ é a medida do ângulo \widehat{ACB} . Então, a área A do triângulo ABC é dada por

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} \quad (3.23)$$

substituindo os valores acima em A

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} &= \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} \\ \frac{\cotg \alpha \cdot 1}{2} &= \frac{\operatorname{cosec} \alpha \cdot \cos \alpha}{2} \\ \cotg \alpha &= \operatorname{cosec} \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cotg \alpha &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot \cos \alpha \end{aligned} \tag{3.24}$$

logo,

$$\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \tag{3.25}$$

Por enquanto, as funções trigonométricas foram definidas para ângulos do intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Como esses ângulos podem ser medidos em radianos estão naturalmente definidos o seno, o cosseno e a tangente de números reais no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. O próximo passo é tentar estender estas funções de modo que elas possam ser definidas para todos ou quase todos os números reais e que sejam mantidas as relações básicas

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \tag{3.26}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \tag{3.27}$$

Para isto, consideremos a função $E : R \rightarrow C$ definida do seguinte modo. Fixada uma origem A em C , e dado um número real x , percorremos sobre C , no sentido positivo se $x > 0$ e no sentido negativo se $x < 0$, um comprimento igual a x , por definição, $E(x)$ é o ponto de C assim atingido.

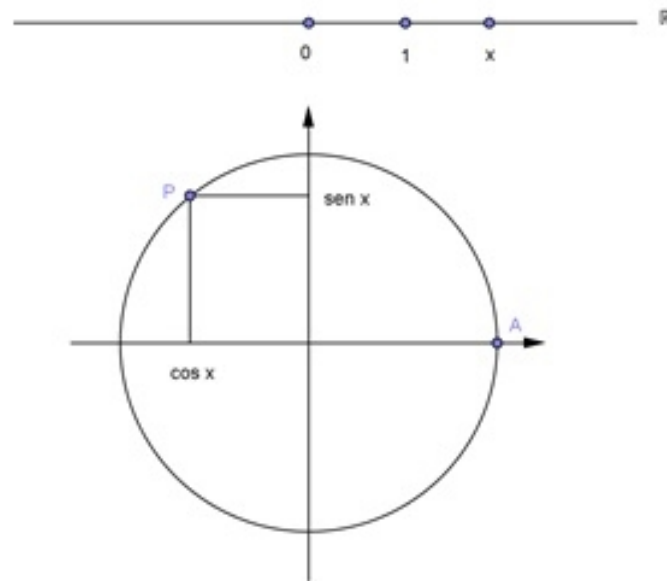


Figura 3.9: Ciclo trigonométrico

Observe que se $x > 0$ e $x > 2 \cdot \pi$, será necessário dar mais de uma volta em C , no sentido positivo, para atingir $E(x)$, uma observação análoga vale para o caso de ser $x < 0$. Seja como for, $E(x)$ é um ponto bem definido de C . Por outro lado, dado um ponto P em C , ele é imagem pela função E de uma infinidade de números reais, todos eles da forma

$$x + 2 \cdot k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq x \leq 2 \cdot \pi \quad (3.28)$$

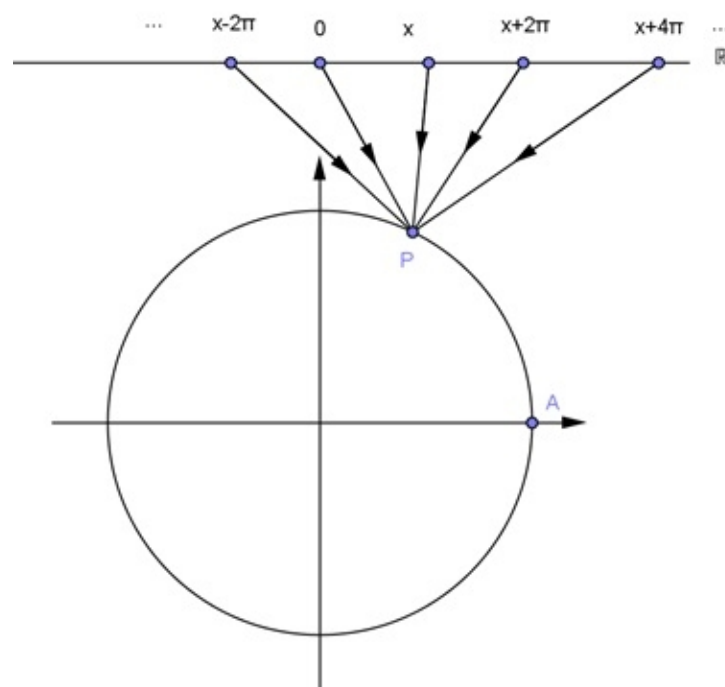


Figura 3.10: Ciclo trigonométrico e a reta

Às vezes, se costuma exprimir este fato dizendo que $x + 2 \cdot k \cdot \pi$ são as várias determinações do arco \widehat{AP} .

No sistema de coordenadas cuja origem é o centro de C e sendo $A = (1, 0)$ definimos

$$\begin{aligned} \cos x &= \text{abscissa de } P \\ \operatorname{sen} x &= \text{ordenada de } P \\ \operatorname{tg} x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \text{ se } \cos x \neq 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

É claro que esta definição coincide com a anterior quando $0 < x < \frac{\pi}{2}$ além disso, permite escrever $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$ quando $P = A$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$. Ainda, como todo ponto $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ de C está a uma distância de 1 da origem, temos

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (3.30)$$

A nova definição, portanto, estende a primeira e mantém as relações básicas. Observe que $\operatorname{tg} x$ não é definida para $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ (k inteiro), porque para estes valores $\cos x = 0$.

Podemos então restringir o estudo destas funções ao intervalo $[0, 2\pi]$ que corresponde ao estudo das coordenadas de um ponto que dá exatamente uma volta no círculo trigonométrico. As funções seno e cosseno, como coordenadas de um ponto, têm sinais que dependem do quadrante que se encontra na Figura abaixo.

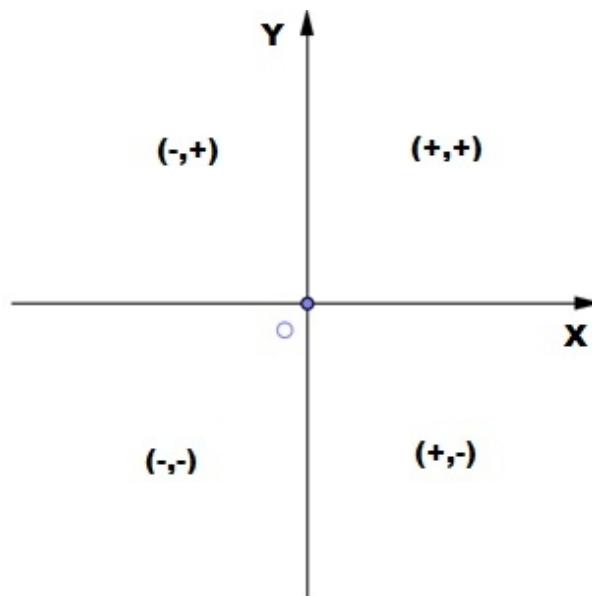


Figura 3.11: Sinais do seno e do cosseno no plano

3.3 Área de um Triângulo Qualquer

Seja ABC um triângulo. Se $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$, então o valor da área do triângulo ABC é

$$A = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\theta}{2} \quad (3.31)$$

Prova Faremos a demonstração em dois casos. Considere o triângulo ABC da Figura 3.12, com. Suponha que a medida do ângulo \hat{BAC} vale $\theta < \frac{\pi}{2}$ e b e c as medidas dos lados que formam o ângulo \hat{BAC} .

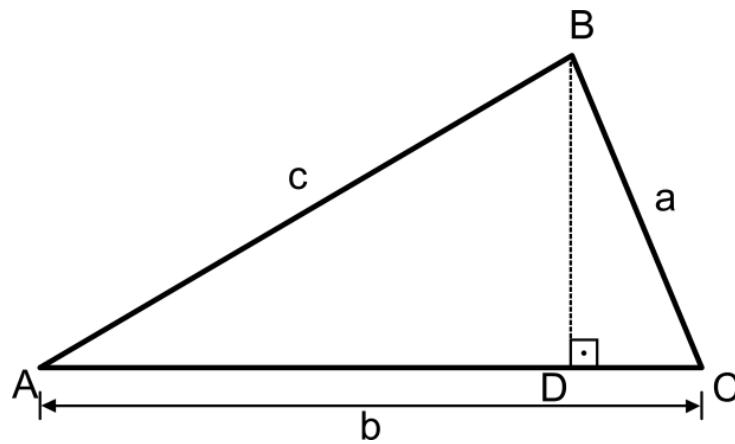


Figura 3.12: Área de um triângulo em função do ângulo agudo

Sabemos que o triângulo ADC é retângulo em D , logo pela definição da função seno podemos escrever

$$\overline{BD} = \overline{AB} \cdot \text{sen}\theta \quad (3.32)$$

como a área do triângulo ABC é dada por

$$A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} \quad (3.33)$$

então, substituindo $\overline{BD} = \overline{AB} \cdot \text{sen}\theta$ na equação acima obtemos,

$$A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \text{sen}\theta}{2} \quad (3.34)$$

$$A = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\theta}{2} \quad (3.35)$$

agora, considere $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, α O triângulo ABC abaixo é retângulo.

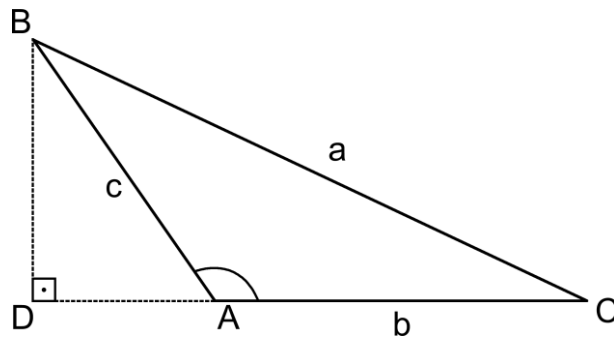


Figura 3.13: Área de um triângulo em função do ângulo obtuso

usando a definição do seno e sabendo que $\theta + \alpha = \pi$ (suplementares), $\text{sen}\alpha = \text{sen}\theta$. Temos,

$$\text{sen}\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{c}, \text{ assim } \overline{BD} = c \cdot \text{sen}\alpha = c \cdot \text{sen}\theta \quad (3.36)$$

como a área A do triângulo ABC é dada por

$$A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} \quad (3.37)$$

então, fazendo $\overline{BD} = c \cdot \text{sen}\alpha = c \cdot \text{sen}\theta$ na equação acima obtemos

$$A = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\theta}{2}. \quad (3.38)$$

Apresentaremos dois resultados que são de grande relevância na geometria, a Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos. Através destas provaremos algumas identidades trigonométricas.

3.4 Lei dos Cossenos

Teorema: Em um triângulo qualquer ABC , vale a relação,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos \theta \quad (3.39)$$

onde θ é a medida do ângulo oposto ao lado BC . **Prova** Considere ABC um triângulo qualquer e $h = \overline{BD}$ a altura relativa ao lado AC . Se $C = D$, então $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\cos \theta = 0$. Neste caso o triângulo ABC é retângulo e a lei dos cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras. Suponha que $C \neq D$ e observando a Figura 3.14.

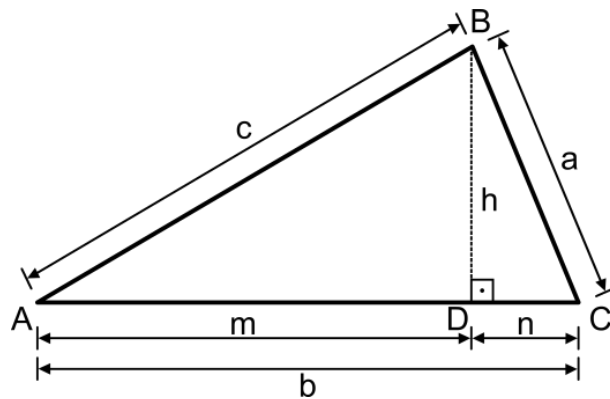


Figura 3.14: Triângulo qualquer e a Lei dos cossenos

os triângulos ABD e BDC são retângulos logo,

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \\ \overline{BC}^2 &= \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2\end{aligned}\quad (3.40)$$

se D está entre A e C , então $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$ que nos dar $\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD}$. Subtraindo as equações acima teremos

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 &= (\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2) - (\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2) \\ \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 &= \overline{DC}^2 - \overline{AD}^2 \\ \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 - \overline{AD}^2\end{aligned}\quad (3.41)$$

substituindo $\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD}$ em $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 - \overline{AD}^2$

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + (\overline{AC} - \overline{AD})^2 - \overline{AD}^2 \\ \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} + \overline{AD}^2 - \overline{AD}^2 \\ \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}\end{aligned}\quad (3.42)$$

no triângulo retângulo ADB tem-se que $\overline{AD} = \overline{AB} \cdot \cos \theta$. Assim

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \theta \quad (3.43)$$

suponha agora que A esteja entre D e C como mostra o triângulo da Figura 3.15

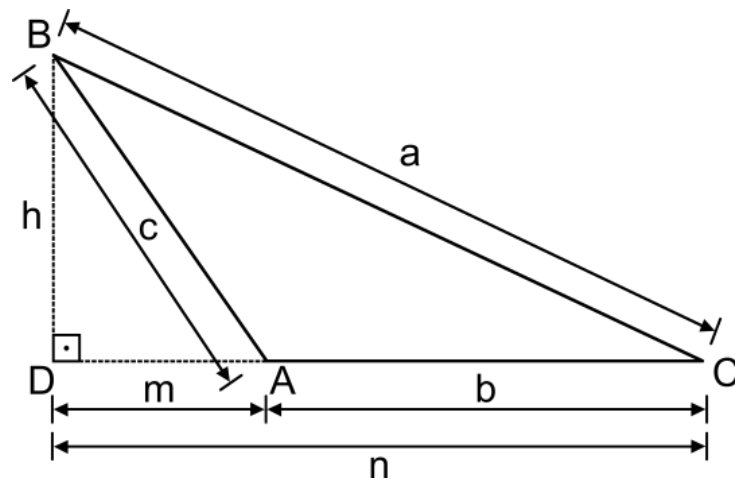


Figura 3.15: Triângulo obtuso e a Lei dos cossenos.

temos assim BDC e BDA triângulos retângulos. Logo,

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \\ \overline{BC}^2 &= \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2\end{aligned}\quad (3.44)$$

subtraindo as equações acima e substituindo $\overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AD}$

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 &= (\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2) - (\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2) \\ \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 - \overline{AD}^2 \\ \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + (\overline{AC} + \overline{AD})^2 - \overline{AD}^2 \\ \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} + \overline{AD}^2 - \overline{AD}^2 \\ \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}\end{aligned}\quad (3.45)$$

como no triângulo retângulo BDA , $\overline{AD} = \overline{AB} \cdot \cos(\pi - \theta) = -\overline{AB} \cdot \cos \theta$. Substituindo

$$\overline{AD} = -\overline{AB} \cdot \cos \theta \text{ em } \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \quad (3.46)$$

concluimos,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cos \theta \quad (3.47)$$

3.5 Lei dos Senos

Teorema: Em um triângulo qualquer ABC , vale a relação

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}\hat{C}} \quad (3.48)$$

Prova Seja ABC um triângulo qualquer, inscrito numa circunferência de raio R . Por um dos vértices B do triângulo ABC .

tracemos o diâmetro correspondente BA' e liguemos A' com C como na Figura abaixo,

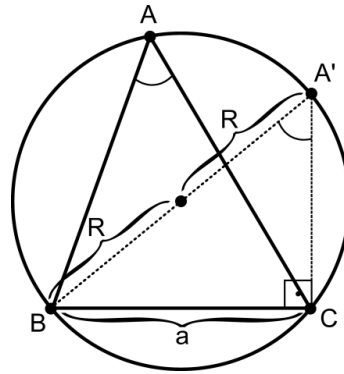


Figura 3.16: Triângulo inscrito

sabemos que $\hat{A}' = \hat{A}$ por determinarem na circunferência a mesma corda \overline{BC} , ou seja, inscrito na circunferência. O triângulo $A'BC$ é retângulo em C por está inscrito numa semicircunferência, então

$$\text{sen}\hat{A}' = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}'} = \frac{\overline{BC}}{2 \cdot R} \quad (3.49)$$

analogamente fazendo o mesmo para os ângulos \hat{B} e \hat{C} teremos

$$\text{sen}\hat{B}' = \frac{\overline{AC}}{2 \cdot R} \quad (3.50)$$

$$\text{sen}\hat{C}' = \frac{\overline{AB}}{2 \cdot R}$$

concluimos,

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}\hat{C}} = 2 \cdot R \quad (3.51)$$

4 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS E SUAS DEMONSTRAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos algumas demonstrações das fórmulas da adição de arcos e sua relação com o Teorema da Corda Quebrada e o Teorema de Ptolomeu. Em sequencia arco duplo, transformação em produto da soma dos senos de dois arcos e a relação do teorema Ptolomeu e da corda quebrada com o seno e o cosseno da soma e da diferença de dois arcos.

4.1 Cosseno e Seno da Soma e da Diferença de dois arcos

Nesta seção, vamos deduzir as fórmulas que calculam as funções trigonométricas da soma e da diferença de dois arcos cujas funções são conhecidas e para obter a primeira delas destacaremos a demonstração normalmente usada para o caso do cosseno da soma,

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \quad (4.1)$$

devemos lembrar que a distância entre dois pontos do plano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (4.2)$$

consideremos então no círculo unitário abaixo,

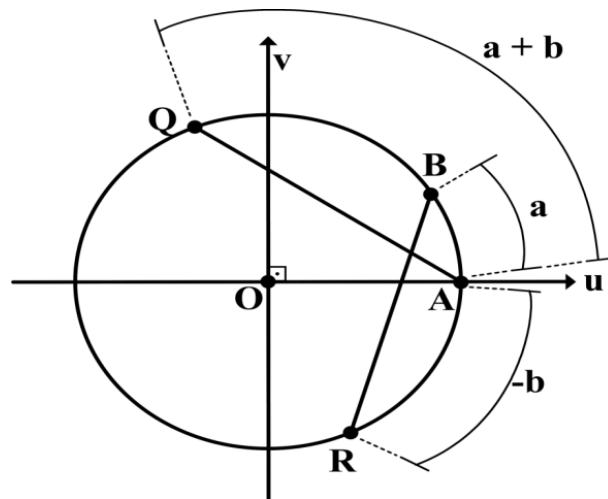


Figura 4.1: Ciclo trigonométrico e o plano

seja B, Q e R os pontos do ciclo associados aos números $a, a + b$ e $-b$, respectivamente. Em relação ao sistema uOv , as coordenadas desses pontos são $A = (1, 0)$, $B = (\cos a, \operatorname{sen} a)$, $Q = (\cos(a + b), \operatorname{sen}(a + b))$ e $R = (\cos b, -\operatorname{sen} b)$. como os arcos \widehat{AQ} e \widehat{BR} têm a mesma medida, portanto as cordas \overline{AQ} e \overline{BR} tem medidas iguais. Aplicando, então, a fórmula da distância entre dois pontos, da Geometria Analítica, que é dada por:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (4.3)$$

assim,

$$\begin{aligned} \sqrt{(\cos(a+b) - 1)^2 + (\sin(a+b) - 0)^2} &= \sqrt{(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2} \\ (\cos(a+b) - 1)^2 + (\sin(a+b) - 0)^2 &= (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 \\ 2 - 2 \cdot \cos(a+b) &= 2 - 2 \cos a \cdot \cos b + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \end{aligned} \quad (4.4)$$

A demonstração a seguir utilizaremos uma construção de um retângulo e um círculo de raio unitário. Para demonstrar o seno da diferença de dois arcos,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (4.5)$$

Demonstração:

Construa um Retângulo $ABCD$ e considere o raio do círculo igual a 1, como na figura 4.2.

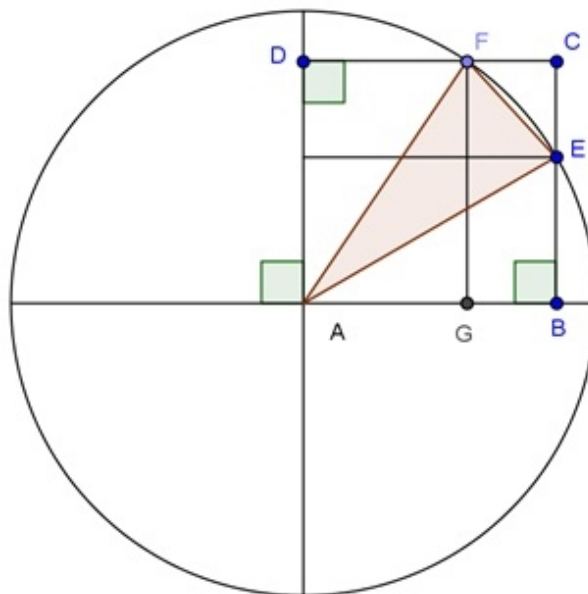


Figura 4.2: Círculo de raio unitário e o Retângulo

destacando os triângulos ABE e AFG , na figura acima, tomando $\widehat{BAE} = \beta$ e $\widehat{FAG} = \alpha$. Assim, no triângulo AEF o ângulo $\widehat{EAF} = \alpha - \beta$. Teremos também, $\overline{AB} = \cos \beta$, $\overline{BE} = \sin \beta$, pois $\overline{AE} = 1$ (visto no capítulo 2), $\overline{AG} = \cos \alpha$, $\overline{GF} = \sin \alpha$.

Como a área do retângulo $ABCD$ pode ser determinada pela soma das áreas dos triângulos ABE, AEF, FCE e ADF . Para a área do triângulo AEF usaremos o teorema 3.3. Então, a área do retângulo é dada por

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BE}}{2} + \frac{\overline{AE} \cdot \overline{AF} \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)}{2} + \frac{\overline{FC} \cdot \overline{CE}}{2} + \frac{\overline{FD} \cdot \overline{DA}}{2} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \quad (4.6)$$

sabemos pela construção acima que

$$\overline{AG} = \overline{FD}, \overline{AE} = \overline{AF} = 1, \overline{DA} = \overline{FG} = \overline{BC}, \overline{FC} = \overline{AB} - \overline{AG} \text{ e } \overline{CE} = \overline{FG} - \overline{BE} \quad (4.7)$$

substituindo os valores conhecidos na área do retângulo $ABCD$ acima teremos

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BE}}{2} + \frac{\overline{AE} \cdot \overline{AF} \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)}{2} + \frac{\overline{FC} \cdot \overline{CE}}{2} + \frac{\overline{FD} \cdot \overline{DA}}{2} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \quad (4.8)$$

$$\frac{\cos\beta \cdot \text{sen}\beta}{2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)}{2} + \frac{(\cos\beta - \cos\alpha) \cdot (\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta)}{2} + \frac{\cos\alpha \cdot \text{sen}\alpha}{2} = \cos\beta \cdot \text{sen}\alpha \quad (4.9)$$

$$\cos\beta \cdot \text{sen}\beta + \text{sen}(\alpha - \beta) + (\cos\beta - \cos\alpha) \cdot (\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta) + \cos\alpha \cdot \text{sen}\alpha = 2 \cdot \cos\beta \cdot \text{sen}\alpha \quad (4.10)$$

então,

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha \quad (4.11)$$

Vamos adiante prosseguir com mais uma construção e conseqüentemente apresentar outra demonstração para o seno da diferença de dois arcos, demonstrada logo acima. Destacamos também, que esta mesma construção chegaremos ao seno da soma de dois arcos.

Demonstração: Construa um Triângulo Retângulo ABC e considere o lado AB igual a 1 como na Figura 4.3.

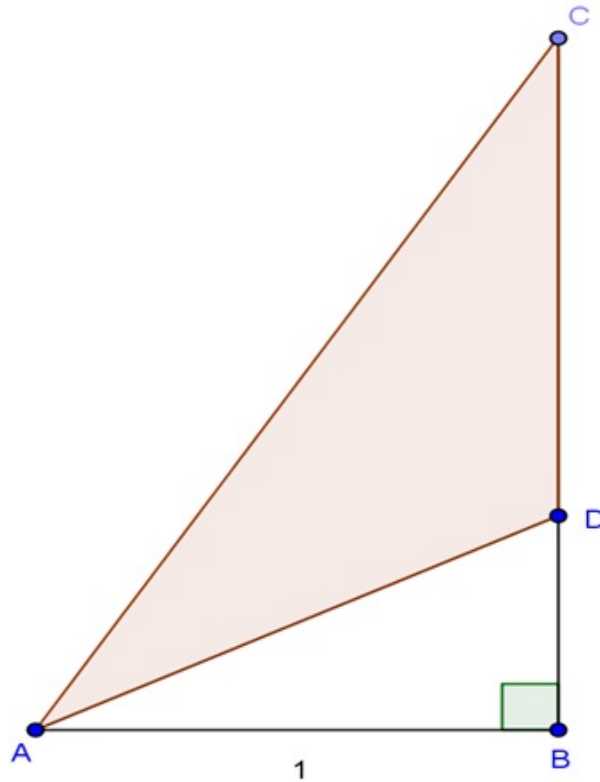


Figura 4.3: Triângulo retângulos de lado unitário comum

Destacando o triângulo retângulo ABD e ABC . Chamaremos o ângulo $\widehat{BAD} = \beta$ e $\widehat{BAC} = \alpha$. Assim, no triângulo ADC o ângulo $\widehat{DAC} = \alpha - \beta$. Aplicando as definições das razões trigonométricas nos triângulos retângulos ABD e ABC , teremos: $\overline{BD} = \operatorname{tg}\beta$, $\overline{AD} = \operatorname{sec}\beta$, $\overline{AC} = \operatorname{sec}\alpha$ e $\overline{DC} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$. Sabemos que a área do triângulo ADC pode ser escrita pelo teorema 3.3 e pela definição da área de um triângulo da seguinte forma

$$A = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{2} \quad (4.12)$$

$$\overline{DC} \cdot \overline{AB} = \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \quad (4.13)$$

substituindo os valores dados acima

$$(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot 1 = \operatorname{sec}\beta \cdot \operatorname{sec}\alpha \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \quad (4.14)$$

utilizando as definições de tangente e secante, teremos

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha} - \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{cos}\beta} = \frac{1}{\operatorname{cos}\beta} \cdot \frac{1}{\operatorname{cos}\alpha} \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \quad (4.15)$$

multiplicando ambos os membros por $\operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta$, deduzimos

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta - \text{sen}\beta \cos\alpha \quad (4.16)$$

Agora utilizando a construção da figura anterior apresentaremos outra demonstração para o cosseno da diferença de dois arcos. Aplicando, a Lei dos Cossenos demonstrada no capítulo 2, no triângulo ADC . Sabemos também que esta mesma figura encontramos o cosseno da soma de dois arcos.

Demonstração: No triângulo ADC da figura anterior, sabemos que

$$\overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2.\overline{AD}.\overline{AC}.\cos(\alpha - \beta) \quad (4.17)$$

$$\overline{DC} = \text{tg}\alpha - \text{tg}\beta \quad (4.18)$$

$$\overline{AD} = \sec\beta \quad (4.19)$$

$$\overline{AC} = \sec\alpha \quad (4.20)$$

Substituindo os respectivos valores \overline{DC} , \overline{AD} e \overline{AC} na lei dos cossenos dada do triângulo ADC , teremos

$$\overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2.\overline{AD}.\overline{AC}.\cos(\alpha - \beta) \quad (4.21)$$

$$(\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta)^2 = \sec^2\beta + \sec^2\alpha - 2.\sec\beta.\sec\alpha.\cos(\alpha - \beta) \quad (4.22)$$

$$\text{tg}^2\alpha - 2.\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta + \text{tg}^2\beta = \sec^2\beta + \sec^2\alpha - 2.\sec\beta.\sec\alpha.\cos(\alpha - \beta) \quad (4.23)$$

$$\text{tg}^2\alpha - 2.\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta + \text{tg}^2\beta = \sec^2\beta + \sec^2\alpha - 2.\sec\beta.\sec\alpha.\cos(\alpha - \beta) \quad (4.24)$$

$$2.\sec\beta.\sec\alpha.\cos(\alpha - \beta) = \sec^2\alpha - \text{tg}^2\alpha + \sec^2\beta - \text{tg}^2\beta + 2.\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta \quad (4.25)$$

sabemos que $\sec^2\alpha - \text{tg}^2\alpha = 1$ e $\sec^2\beta - \text{tg}^2\beta = 1$. Logo,

$$2.\sec\beta.\sec\alpha.\cos(\alpha - \beta) = 2 + 2.\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta \quad (4.26)$$

$$\sec\beta \cdot \sec\alpha \cdot \cos(\alpha - \beta) = 1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{\cos\beta} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \cos(\alpha - \beta) = 1 + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} \quad (4.28)$$

multiplicando ambos os membros por $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, teremos

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \quad (4.29)$$

Utilizando uma nova construção, apresentaremos outra demonstração daquela apresentada normalmente nos livros didáticos para o seno da soma de dois arcos. Aplicando área de um triângulo e o mesmo pode ser feito para o cosseno da soma basta aplicar a Lei dos Cossenos no triângulo ADC.

Demonstração: Construa um Triângulo Retângulo ADC e considere AB a altura relativa ao lado DC igual a 1, como na figura 3.14.

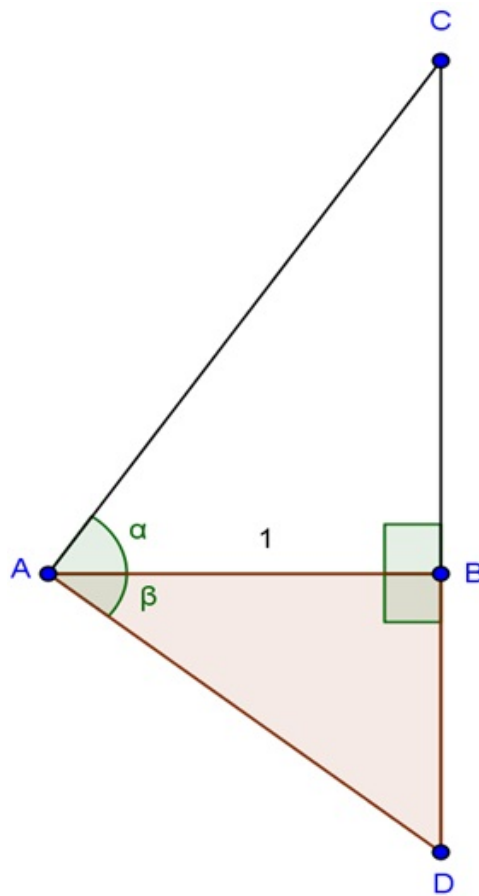


Figura 4.4: Triângulo retângulo de altura unitária

no triângulo ABC e ABD consideramos os ângulos α e β como indicado na figura acima. Usando as definições das razões trigonométricas, concluímos que

$$\overline{BD} = tg\beta, \overline{AD} = sec\beta, \overline{BC} = tg\alpha, \overline{AC} = sec\alpha \text{ e } \overline{DC} = \overline{BC} + \overline{BD} \quad (4.30)$$

substituindo estes valores na área do triângulo ADC pode ser determinada por

$$A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{2} = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{BA}}{2} \quad (4.31)$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) = \overline{DC} \cdot \overline{BA} \quad (4.32)$$

$$sec\alpha \cdot sec\beta \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) = (tg\alpha + tg\beta) \cdot 1 \quad (4.33)$$

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta} \quad (4.34)$$

multiplicando ambos os membros por $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, teremos

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha \quad (4.35)$$

Vale lembrar que cada figura construída serve tanto para mostrar o seno como o cosseno da soma e da diferença de dois arcos. Aplicando novamente a lei dos Cossenos no triângulo ADC como na demonstração anterior deduziremos o cosseno da soma de dois arcos dada por

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \quad (4.36)$$

Construindo-se um trapézio vamos novamente deduzir o seno da soma de dois arcos dada anteriormente.

Demonstração: Construa um trapézio ABEC como o da figura 3.15.

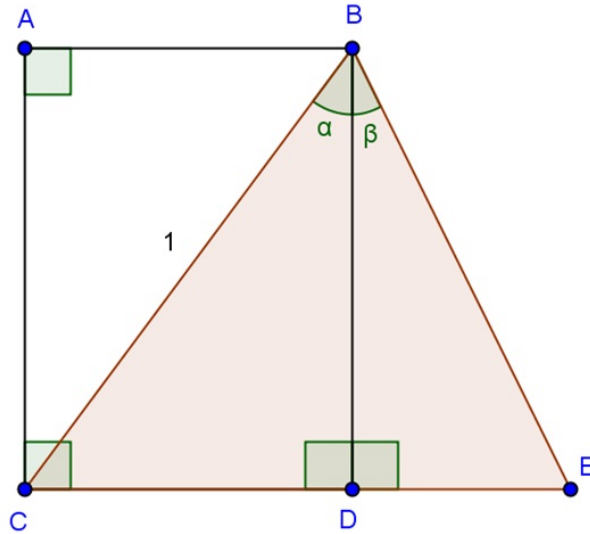


Figura 4.5: Trapézio

usando as definições das razões trigonométricas e analisando a construção da figura concluímos facilmente que:

$$\overline{CD} = \overline{AB} = \text{sen}\alpha, \overline{BD} = \overline{AC} = \text{cos}\alpha, \overline{DE} = \text{tg}\beta \cdot \overline{BD}, \overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} \text{ e } \overline{BD} = \text{cos}\beta \cdot \overline{BE} \quad (4.37)$$

sabemos que a área do trapézio é dada por:

$$\text{Área do trapézio} = \left(\frac{\overline{AB} + \overline{CE}}{2} \right) \cdot \overline{BD} \quad (4.38)$$

e esta mesma área pode ser encontrada pela soma da área do triângulo ABC e BCE e para área do triângulo BCE usaremos o teorema 3.3, já para o triângulo ABC a definição comum da área de um triângulo. Assim,

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BE} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{2} = \left(\frac{\overline{AB} + \overline{CE}}{2} \right) \cdot \overline{BD} \quad (4.39)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BE} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) = (\overline{AB} + \overline{CE}) \cdot \overline{BD} \quad (4.40)$$

substituindo os valores, acima encontrados, na igualdade imediatamente acima. Teremos,

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\alpha + 1 \cdot \frac{\overline{BD}}{\text{cos}\beta} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) = (\text{sen}\alpha + \overline{CD} + \overline{DE}) \cdot \overline{BD} \quad (4.41)$$

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\alpha + \frac{\text{cos}\alpha}{\text{cos}\beta} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) = (\text{sen}\alpha + \text{sen}\alpha + \text{tg}\beta \cdot \overline{BD}) \cdot \text{cos}\alpha \quad (4.42)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = (\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\alpha) \cdot \cos\alpha \quad (4.43)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \left(2 \cdot \operatorname{sen}\alpha + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} \cdot \cos\alpha \right) \cdot \cos\alpha \quad (4.44)$$

multiplicando ambos os membros por $\cos\beta$ e desenvolvendo encontraremos

$$\cos\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha \quad (4.45)$$

dividindo ambos os membros por $\cos\alpha$ e desenvolvendo encontraremos

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha \quad (4.46)$$

4.2 Arcos duplos e Arcos metades

Destacaremos nesta seção a propriedade reflexiva de triângulos congruentes. Para demonstrarmos o seno e o cosseno de um arco duplo que são dados por

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \quad \text{e} \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

Demonstração: Construa o triângulo isósceles como o da Figura abaixo

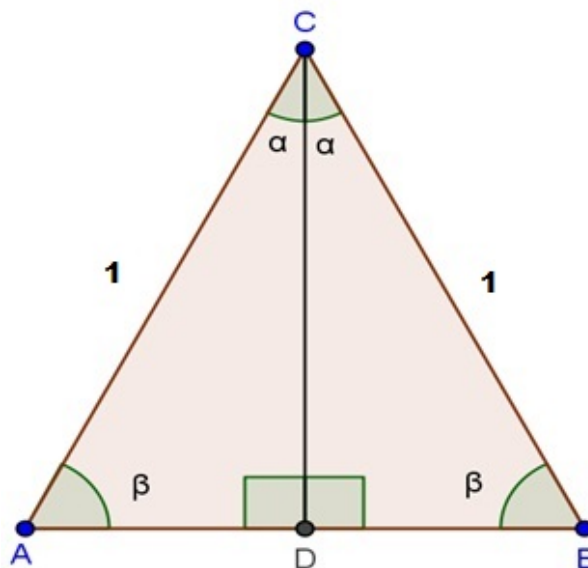


Figura 4.6: Triângulo isósceles

O triângulo ADC e BDC são iguais. Observando o ângulo α do triângulo ADC retângulo concluímos facilmente que $\overline{AD} = \overline{DB} = \text{sen}\alpha$, $\overline{AB} = 2.\overline{AD}$ e $\overline{CD} = \text{cos}\alpha$, usando a definição de área de um triângulo. Podemos assim representar a área do triângulo ABC por

$$A = \frac{\overline{AC}.\overline{BC}.\text{sen}(2.\alpha)}{2} = \frac{\overline{AB}.\overline{CD}}{2} \quad (4.47)$$

substituindo os dados acima em

$$\frac{\overline{AC}.\overline{BC}.\text{sen}(2.\alpha)}{2} = \frac{\overline{AB}.\overline{CD}}{2} \quad (4.48)$$

$$\frac{1.1.\text{sen}(2.\alpha)}{2} = \frac{2.\overline{AD}.\text{cos}\alpha}{2} \quad (4.49)$$

$$\text{sen}(2.\alpha) = 2.\text{sen}\alpha.\text{cos}\alpha \quad (4.50)$$

Agora neste mesmo triângulo isósceles acima aplicaremos a lei dos cossenos para mostrarmos o cosseno do arco duplo. Destacando assim a lei

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2.\overline{AC}.\overline{BC}.\cos(2.\alpha) \quad (4.51)$$

substituindo $\overline{AC} = \overline{BC} = 1$, $\overline{AB} = 2.\text{sen}\alpha$ e $\overline{CD} = \cos\alpha$ na lei dos cossenos, encontraremos:

$$(2.\text{sen}\alpha)^2 = 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos(2.\alpha) \quad (4.52)$$

$$4.\text{sen}^2\alpha = 2 - 2.\cos(2.\alpha) \quad (4.53)$$

$$2.\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos(2.\alpha) \quad (4.54)$$

sabemos que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, então

$$2.\text{sen}^2\alpha = \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos(2.\alpha) \quad (4.55)$$

$$\cos(2.\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \quad (4.56)$$

Apresentaremos outra construção para mostrar o seno do arco duplo que foi provado anteriormente. Para isso, construa o círculo como o da figura 4.2.

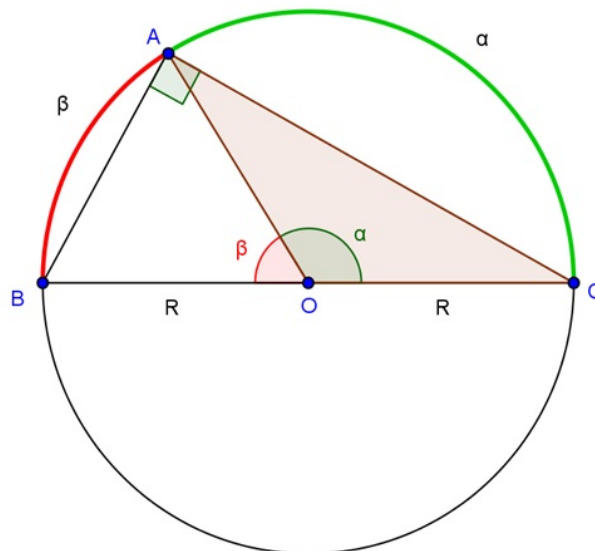


Figura 4.7: Triângulo retângulo inscrito

Sabemos que o triângulo ABC é inscrito na circunferência e que o lado BC é exatamente o diâmetro. É de se notar que \hat{A} do triângulo ABC é reto, ou seja, retângulo. Pela

definição dada no capítulo 2 de ângulo inscrito concluímos que

$$\hat{B} = \frac{\alpha}{2}, \hat{C} = \frac{\beta}{2} \quad (4.57)$$

pela lei dos Senos é de imediato que

$$\overline{AB} = 2.R.\cos(\hat{B}) \quad (4.58)$$

$$\overline{AC} = 2.R.\sen(\hat{B}) \quad (4.59)$$

pela construção,

$$\overline{BC} = 2.R \quad (4.60)$$

$$\overline{AO} = \overline{OC} = R \quad (4.61)$$

tomando $R = 1$ determinaremos a área do triângulo AOC em destaque na figura.

A área do triângulo ABC é o dobro da área do triângulo AOC . Pois, considerando a base do triângulo AOC , $\overline{OC} = R$ e a base do triângulo AOB , $\overline{OB} = R$. Assim, tanto o triângulo AOC e AOB possuem a mesma base e, por consequência a mesma altura visto que o vértice que não está contido na base é o mesmo. Logo, a área do triângulo AOC será dada por

$$A = \frac{\overline{AO}.\overline{OC}.\sen\alpha}{2} = \frac{\overline{AB}.\overline{AC}}{4} \quad (4.62)$$

substituindo $\alpha = 2.\hat{B}$, $\overline{AO} = \overline{OC} = 1$, $\overline{AB} = 2.R.\cos\hat{B}$ e $\overline{AC} = 2.R.\sen\hat{B}$ na igualdade acima

$$\frac{1.1.\sen(2.\hat{B})}{2} = \frac{2.\cos\hat{B}.\sen\hat{B}}{4} \quad (4.63)$$

$$\sen(2.\hat{B}) = 2.\sen\hat{B}.\cos\hat{B} \quad (4.64)$$

A seguir faremos uma aplicação do arco duplo mostrando que podemos demonstrar o cosseno e o seno da diferença de dois arcos, sem necessariamente, usarmos o seno e o cosseno da soma desses arcos. Nossa intenção é mostrar que arco duplo poderá ser abordado primeiro que a soma e a diferença. Para isso, basta construir a figura abaixo

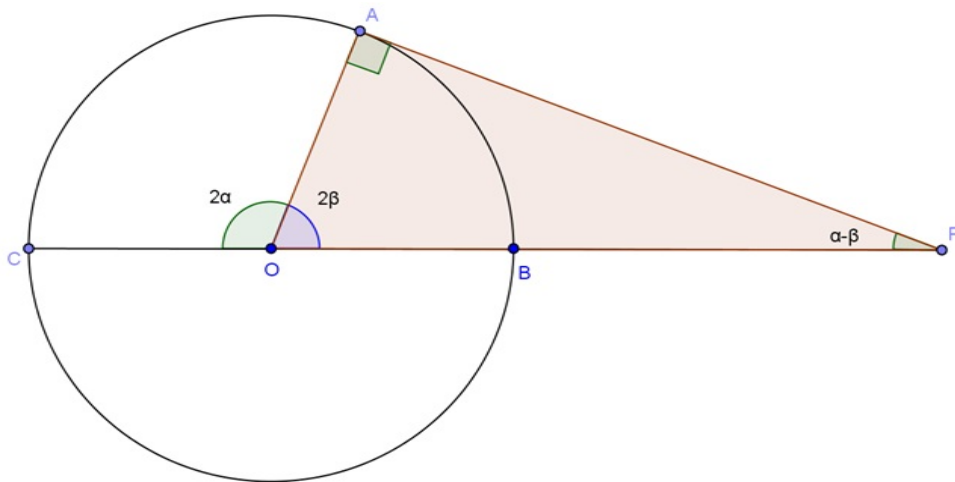


Figura 4.8: Ângulo excêntrico e o seno da diferença

Consideraremos $x = \alpha$ e $y = \beta$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ com $\alpha \neq \beta$. Pela construção P é excêntrico exterior, \overline{PA} tangente, \overline{PC} é secante e contém o diâmetro da circunferência. Sabemos também que o triângulo POA é retângulo em A e que o ângulo $\hat{A}PO = \alpha - \beta$. Pois, P é excêntrico exterior. Como $2\beta + (\alpha - \beta) = \frac{\pi}{2}$ (complementares). Assim,

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \cos(2\beta) \quad (4.65)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \text{sen}(2\beta) \quad (4.66)$$

$$\alpha \text{ e } \beta \quad (4.67)$$

são complementares também. Por isso, $\text{sen}\alpha = \cos\beta$ e $\text{sen}\beta = \cos\alpha$. Usaremos o resultado do cosseno do arco duplo em

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \cos(2\beta) \quad (4.68)$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \text{sen}^2\beta \quad (4.69)$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \cos\beta \cdot \cos\beta - \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\beta \quad (4.70)$$

substituindo $\cos\beta = \text{sen}\alpha$ e $\text{sen}\beta = \cos\alpha$, resulta

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha \quad (4.71)$$

Agora usaremos o resultado destacado acima para prova o cosseno da diferença pois

constatamos pela construção que são complementares

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \cos(2\beta) \quad (4.72)$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \text{sen}^2\beta \quad (4.73)$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \cos\beta \cdot \cos\beta - \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\beta \quad (4.74)$$

substituindo $\cos\beta = \text{sen}\alpha$ e $\text{sen}\beta = \cos\alpha$, resulta

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha \quad (4.75)$$

A demonstração a seguir é para a tangente da metade de um arco que é dada por:

$$\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (4.76)$$

Prova: Construa um quadrilátero inscrito $ABDC$ e considere a medida do lado AB igual a medida do lado AC igual a 1, como na figura 4.4.

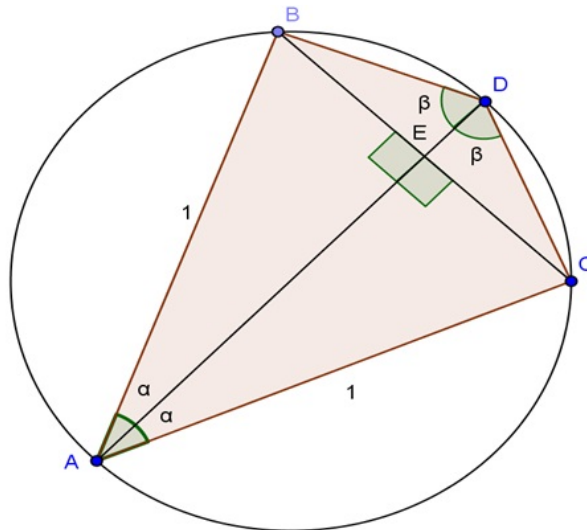


Figura 4.9: Quadrilátero inscrito de lados unitários

Pela construção temos os triângulos ABD e ACD inscritos e um de seus respectivos lados é o diâmetro da circunferência. Por isso, são retângulos. Fazendo $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \alpha$ e $\widehat{ADC} = \widehat{ADB} = \beta$, nos triângulos AEB e AEC congruentes $\overline{BE} = \overline{CE} = \text{sen}\alpha$. Pois, $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ (hipotenusa). Nos triângulos ABD e ACD um de seus catetos é 1, assim concluímos que $\overline{BD} = \overline{CD} = \text{tg}\alpha$.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC e BDC , respectivamente, teremos

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 - 2.\overline{BD}.\overline{DC}.\cos(2\beta) \quad (4.77)$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2.\overline{AB}.\overline{AC}.\cos(2\alpha) \quad (4.78)$$

Igualando as equações acima

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2.\overline{AB}.\overline{AC}.\cos(2\alpha) = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 - 2.\overline{BD}.\overline{DC}.\cos(2\beta) \quad (4.79)$$

$$1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos(2\alpha) = tg^2\alpha + tg^2\alpha - 2.tg\alpha.tg\alpha.\cos(2\beta) \quad (4.80)$$

$$2 - 2.\cos(2\alpha) = 2.tg^2\alpha - 2.tg^2\alpha.\cos(2\beta) \quad (4.81)$$

$$1 - \cos(2\alpha) = tg^2\alpha.(1 - \cos(2\beta)) \quad (4.82)$$

mas,

$$2.\alpha + 2\beta = \pi \text{ e } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ e } \cos(2\beta) = -\cos(2\alpha) \quad (4.83)$$

substituindo,

$$1 - \cos(2\alpha) = tg^2\alpha.(1 + \cos(2\alpha)) \quad (4.84)$$

$$\frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = tg^2\alpha \quad (4.85)$$

$$tg\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}} \quad (4.86)$$

fazendo,

$$B\hat{A}D = C\hat{A}D = \frac{\alpha}{2} \text{ e } A\hat{D}C = A\hat{D}B = \frac{\beta}{2} \quad (4.87)$$

teremos,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (4.88)$$

4.3 Teorema de Ptolomeu e o seno da diferença de dois arcos

Ptolomeu, por meio de seu teorema, demonstrou propriedades que na trigonometria moderna seriam seno e cosseno da soma e da diferença de dois arcos e nesta seção enunciaremos o teorema de Ptolomeu com sua demonstração e estabelecemos a relação que há entre o mesmo e a relação da soma e da diferença de dois arcos.

Teorema de Ptolomeu: "O produto dos comprimentos das diagonais de um quadrilátero inscritível é igual a soma dos produtos dos comprimentos dos pares de lados opostos".

Dado o quadrilátero $ABCD$ temos que $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$

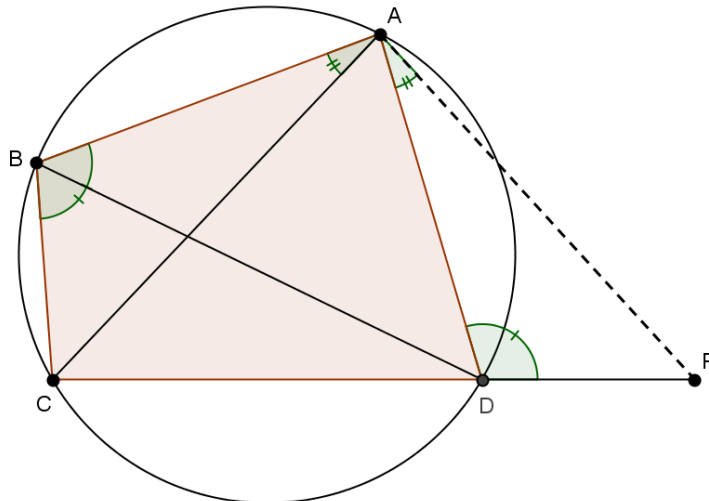


Figura 4.10: Teorema de Ptolomeu

Demonstração:

Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em um círculo conforme a figura acima, seja $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$. Seja P um ponto sobre o prolongamento do lado CD tal que os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{A}P$ sejam congruentes. Como o quadrilátero $ABCD$ é inscritível então os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}P$ também são congruentes, assim os triângulos ΔABC e ΔADP são semelhantes. Com isso

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} \implies \overline{DP} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BD}}{\overline{AB}}$$

Como os ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}P$ são congruentes $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}}$ e os triângulos ΔABD e ΔACP também são semelhantes. Assim

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \implies \overline{CP} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AB}} \quad (4.89)$$

Mas $\overline{CP} = \overline{CD} + \overline{DP}$, dessa forma

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AB}} = \overline{CD} + \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BD}}{\overline{AB}} \iff \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \quad (4.90)$$

A obra de Ptolomeu é basicamente astronômica, mas desperta o interesse dos matemáticos devido às identidades trigonométricas que ele utilizou a fim de reunir dados para a sua tábua de corda (que é aproximadamente uma tábua de senos).

Agora vamos apresentar uma demonstração para o seno da diferença de dois arcos, vista anteriormente, usando o teorema de Ptolomeu.

Demonstração: Construa um quadrilátero inscrito com um de seus lados sendo o diâmetro da circunferência de raio igual a 1 como o da figura 4.11.

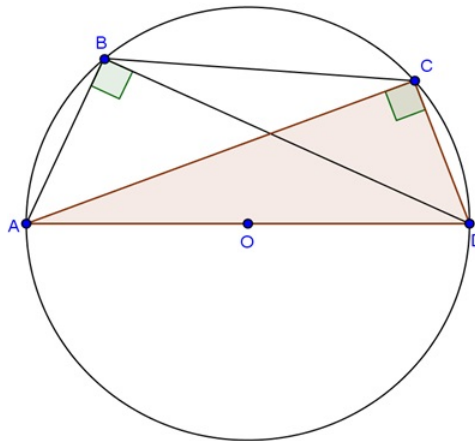


Figura 4.11: Quadrilátero inscrito e o teorema de Ptolomeu

Os triângulos ABD e ACD são retângulos e inscritos. Daí, pela definição ou pela lei dos Senos nos triângulos ABD e ACD , considerando $\hat{D}B = 2.\alpha$ e $\hat{C}D = 2.\beta$.

No triângulo ACD ,

$$\overline{AC} = 2.R.\cos\beta \quad (4.91)$$

$$\overline{CD} = 2.R.\sen\beta \quad (4.92)$$

No triângulo ABD ,

$$\overline{AB} = 2.R.\sen\hat{D} \quad (4.93)$$

$$\overline{BD} = 2.R.\text{sen}\alpha \quad (4.94)$$

$$\overline{AD} = 2.R \quad (4.95)$$

no triângulo BCD usando a lei dos senos,

$$\overline{BC} = 2.R.\text{sen}(\alpha - \beta) \quad (4.96)$$

substituindo os valores acima no teorema de Ptolomeu,

$$\overline{AC}.\overline{BD} = \overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD} \quad (4.97)$$

$$2.R.\text{sen}\hat{D}.2.R.\text{sen}\beta + 2.R.\text{sen}(\alpha - \beta).2.R = 2.R.\cos\beta.2.R.\text{sen}\alpha \quad (4.98)$$

$$\text{sen}\hat{D}.\text{sen}\beta + \text{sen}(\alpha - \beta) = \cos\beta.\text{sen}\alpha \quad (4.99)$$

como,

$$\hat{D} + x = \frac{\pi}{2}, \text{ então } \text{sen}\hat{D} = \cos\alpha \quad (4.100)$$

assim,

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta - \text{sen}\beta.\cos\alpha \quad (4.101)$$

4.4 Teorema da Corda quebrada e o seno da diferença de dois arcos

Nesta seção provaremos a fórmula do seno da diferença de dois arcos utilizando o resultado da geometria plana conhecido como o teorema da corda quebrada o qual determina o ponto médio da corda quebrada.

Entende-se por corda quebrada a união de duas cordas \overline{AB} e \overline{BC} onde A, B e C são pontos de uma circunferência este resultado é mais uma das grandes ideias de Arquimedes.

Teorema 4.4.1 (Teorema da corda quebrada) Se \overline{AB} e \overline{BC} compõem uma corda quebrada com $\overline{AB} < \overline{BC}$ e se M é o ponto médio do arco \widehat{ABC} , então o pé da perpendicular F sobre o lado é o ponto médio da corda quebrada.

Prova: Considere uma corda quebrada ABC da figura 4.12 com $\overline{AB} < \overline{BC}$ e M é o ponto médio

do arco \widehat{ABC} e seja F o pé da perpendicular baixada sobre \overline{BC} . Prolongue o segmento \overline{FB} até o ponto C' , tal que $\overline{FC} = \overline{FC'}$. Observe que os triângulos ABM e MBC' são congruentes. De fato, o ângulo $\widehat{ABM} = \widehat{MBC}$, os arcos $\widehat{AM} = \widehat{MC}$. Logo, $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{MC'}$. Assim, os triângulos possuem seus lados iguais e podemos deduzir que $\overline{BC'} = \overline{AB}$, portanto,

$$\overline{FC} = \overline{FC'} = \overline{BF} + \overline{BC'} = \overline{BF} + \overline{AB} \quad (4.102)$$

$$\overline{FC} = \overline{BF} + \overline{AB} \quad (4.103)$$

Então, F é o ponto médio da corda quebrada ABC .

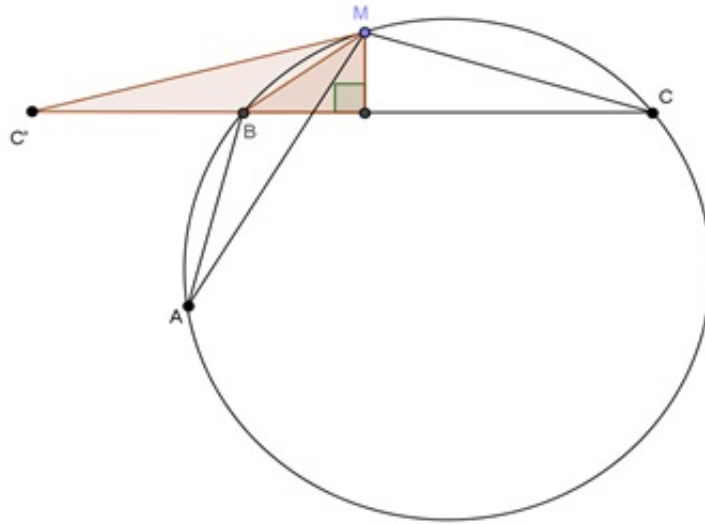


Figura 4.12: Corda Quebrada

Usaremos agora o teorema acima demonstrado para mostrar o seno da diferença de dois arcos. Para isso, observe a figura acima e denote os arcos $\widehat{AM} = \widehat{MC} = 2.\alpha$ e $\widehat{BM} = 2.\beta$. No triângulo BMC e MFC , usaremos definição das razões seno e cosseno e a lei dos senos, respectivamente. Considerando, $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{MC'} = 1$. Então,

$$\overline{MF} = \text{sen}\beta \text{ e } \overline{FC} = \text{cos}\beta \quad (4.104)$$

$$\overline{MC} = 2.R.\text{sen}\alpha = 1, \text{ assim } 2.R = \frac{1}{\text{sen}\alpha} = \text{cossec}\alpha \quad (4.105)$$

no triângulo BFM retângulo, $\widehat{FBM} = \alpha$ é a metade do arco \widehat{MC} (inscrito)

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{MF}}{\overline{BF}} = \frac{\text{sen}\beta}{\overline{BF}}, \text{ então } \overline{BF} = \frac{\text{sen}\beta}{\text{tg}\alpha} \quad (4.106)$$

no triângulo ABM retângulo, $\widehat{AMB} = \widehat{C'MB} = \alpha - \beta$ pois este é congruente ao triângulo $C'BMe$

neste triângulo $\alpha = C\hat{M}B + \beta$ (teorema do ângulo externo).

usando a lei dos senos para o triângulo ABM,

$$\overline{AB} = 2.R.A\hat{M}B = 2.R.\text{sen}(\alpha - \beta) \quad (4.107)$$

aplicando agora o teorema da corda quebrada e substituindo os valores acima

$$\overline{FC} = \overline{BF} + \overline{AB} \quad (4.108)$$

$$\cos\beta = \frac{\text{sen}\beta}{\text{tg}\alpha} + 2.R.\text{sen}(\alpha - \beta) \quad (4.109)$$

$$\cos\beta = \frac{\text{sen}\beta}{\text{tg}\alpha} + \frac{1}{\text{sen}\alpha}.\text{sen}(\alpha - \beta) \quad (4.110)$$

como,

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad (4.111)$$

$$\cos\beta = \frac{\text{sen}\beta}{\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}} + \frac{1}{\text{sen}\alpha}.\text{sen}(\alpha - \beta) \quad (4.112)$$

$$\cos\beta = \frac{\text{sen}\beta.\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} + \frac{1}{\text{sen}\alpha}.\text{sen}(\alpha - \beta) \quad (4.113)$$

multiplicando ambos os membros por $\text{sen}\alpha$, resulta

$$\text{sen}\alpha.\cos\beta = \text{sen}\beta.\cos\alpha + \text{sen}(\alpha - \beta) \quad (4.114)$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta - \text{sen}\beta.\cos\alpha \quad (4.115)$$

4.5 Transformação em produto

O matemático francês François Vieta sistematizou o estudo da trigonometria esférica, até então um amontoado de fórmulas desconexas, e mostrou que

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2.\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Além disso, deduziu fórmulas para $\text{sen}(n\theta)$ e $\cos(n\theta)$.

Por isso, nesta seção faremos uma demonstração da soma dos senos de dois arcos. Com objetivo de mostrar geometricamente a soma de senos,

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (4.116)$$

Demonstração: Construa a figura 4.13.

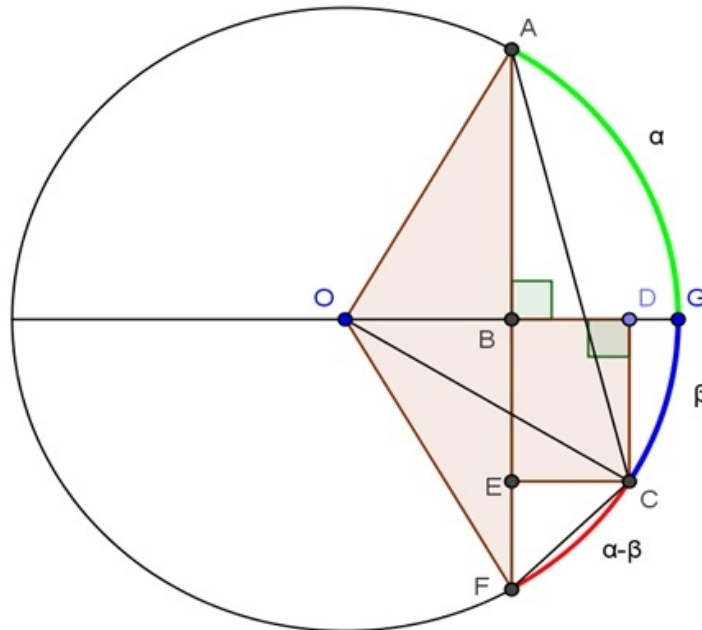


Figura 4.13: Transformação em Produto

trace \overline{AC} e \overline{OC} formando os triângulos retângulos AEC e OCD e considere o raio do círculo igual a 1.

no triângulo retângulo OAB ,

$$\overline{AB} = \operatorname{sen}\alpha \quad (4.117)$$

$$\overline{OB} = \operatorname{cos}\alpha \quad (4.118)$$

no triângulo retângulo OCD ,

$$\overline{OD} = \operatorname{cos}\beta \quad (4.119)$$

$$\overline{DC} = \operatorname{sen}\beta \quad (4.120)$$

no Retângulo $BDCE$:

$$\overline{BD} = \overline{EC}, \overline{DC} = \overline{BE} \quad (4.121)$$

no triângulo inscrito AFC , o ângulo $F\hat{A}C = \frac{\alpha - \beta}{2}$ e $A\hat{F}C = \frac{\alpha + \beta}{2}$ pois são inscritos e pela lei dos senos

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen}(A\hat{F}C)} = 2.R \quad (4.122)$$

no triângulo retângulo AEC reto em E ,

$$C\hat{A}F = \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ pois é inscrito.} \quad (4.123)$$

$$\text{sen}(C\hat{A}F) = \text{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{\overline{EC}}{\overline{AC}} \text{ e } \cos(C\hat{A}F) = \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \quad (4.124)$$

Mas, pela construção

$$\overline{EC} = \overline{OD} - \overline{OB} \text{ e } \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} \quad (4.125)$$

substituindo os valores acima em

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} \quad (4.126)$$

$$\overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AC} \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (4.127)$$

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2.R \cdot \text{sen}(A\hat{F}C) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (4.128)$$

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2.1 \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (4.129)$$

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (4.130)$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho procuramos fazer uma abordagem simples de algumas relações clássicas da Trigonometria usando resultados conhecidos da Geometria Plana.

Construímos figuras com o intuito de despertar a criatividade. Criando um ambiente favorável à busca de novos modelos de demonstrações, tornado o ensino mais prazeroso.

Embora, as demonstrações tenham um grande papel na resolução de muitos problemas, estão de certa forma deixada de lado. Visto que para muitos este processo de demonstrações é demorado, cansativo e até desnecessário.

Por isso, tanto no ensino básico quanto no ensino de graduação as demonstrações são deixadas a cargo do leitor. Vimos ao longo dos capítulos, que muitas dessas relações fundamentais são memorizadas apenas na resolução de exercícios.

Apesar desse tema está incorporado às práticas escolares e, até mesmo na formação de professores, sua forma aqui utilizada e suas generalizações para dimensões superiores, são frequentemente utilizadas em demonstrações de problemas geométricos, pois as aplicações em outros contextos como no reconhecimento de cônicas, problema da trisseção de um ângulo, nos complexos dentre outros ramos da matemática “constituem um campo rico de conexões para raciocinar sobre o plano e o espaço” (WIKIPÉDIA, 2013).

Por fim, acreditamos que a natureza desse trabalho, com a utilização construções de figuras planas, com demonstrações simples possa servir como elemento motivador para alunos e professores buscarem aprimorar seus conhecimentos em Trigonometria

REFERÊNCIAS

- BASTOS, R. Notas sobre o ensino de geometria. *Revista da APM*, Lisboa, n. 94, 2007.
- BOYER, C. B. *História da matemática*. 7 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- CARNEIRO, J. P. *Reta de Euler e números complexos*. 2013. Disponível em <http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/reta_euler.pdf>. Acesso em 25 jan. 2013.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*, 9: geometria plana. Atual, 2005.
- EVES, H. *História da Geometria*. São Paulo: Atual Editora, 1992.
- FILHO, M. F. d. A. *Geometria analítica e álgebra linear*. Fortaleza, Premium Editora. 2001.
- HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. Polinômios e equações algébricas. Material da Disciplina de Polinômios e Equações Algébricas do Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar: trigonometria. vol. 9. Atual, 1993.
- MORGADO, A.; WAGNER, E.; CARMO, M. D. Trigonometria e números complexos, 4a edição. [S.l.]. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.
- MORGADO, A.; WAGNER, E.; JORGE, M. Geometria ii. Livraria Francisco Alves, 1974.
- WIKIPÉDIA. Napoleão Bonaparte. 2013. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Napoleão_Bonaparte>. Acesso em 05 fev. 2013.