UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

AGIGLEUDO COÊLHO DE SOUSA

ATIVIDADES INTERATIVAS COM O GEOGEBRA: UMA ABORDAGEM INTRODUTÓRIA AO ESTUDO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

JUAZEIRO DO NORTE

2014

AGIGLEUDO COÊLHO DE SOUSA

ATIVIDADES INTERATIVAS COM O GEOGEBRA: UMA ABORDAGEM INTRODUTÓRIA AO ESTUDO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira.

JUAZEIRO DO NORTE

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S696a Sousa, Agigleudo Coêlho de
Atividades interativas com o GeoGebra : uma abordagem introdutória ao estudo de geometria analítica / Agigleudo Coêlho de Sousa. – 2014.
118 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira.

1. Geometria analítica. 2. Software GeoGebra. 3. Ensino auxiliado por computador. I. Título.

CDD 516.3

AGIGLEUDO COÊLHO DE SOUSA

ATIVIDADES INTERATIVAS COM O GEOGEBRA: UMA ABORDAGEM INTRODUTÓRIA AO ESTUDO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 15 / 05 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Paulo César Cavalcante de Oliveira

Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Maria Silvana Alcantara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Francisca Leidmar Josué Vieira

Profa. Ms. Francisca Leidmar Josué Vieira

Universidade Regional do Cariri (URCA)

A minha esposa, filha, pais, irmãos, e amigos, com toda minha dedicação e com todo meu esforço.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força, coragem, discernimento e determinação diante de tantos desafios nesta vida.

Aos meus pais por me ensinarem valores morais, darem exemplo e mostrarem confiança em mim.

À minha querida esposa, por me apoiar nesta empreitada e por entender todos os períodos de ausência.

Aos idealizadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) por possibilitar minha participação nesta pós-graduação stricto-sensu, mesmo estando em pleno exercício de docência em sala de aula.

Ao meu orientador professor Paulo César Cavalcante de Oliveira, pela sua razoabilidade, paciência, orientação e apoio à realização deste trabalho.

A todos os professores e tutores deste programa por todo o esforço e dedicação nas disciplinas ministradas.

À direção do Colégio Estadual Maria Emília Rabelo, pela compreensão e apoio a minha jornada de estudo mesmo em pleno exercício de docência.

Ao professor Eronilson Martins, por toda ajuda e apoio a realização das atividades desenvolvidas no Laboratório de Informática do Colégio Estadual Maria Emília Rabelo.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo investimento em conceder uma bolsa de estudo.

Aos colegas de sala pelo companheirismo e ajuda diante de dificuldades e longas jornadas de estudo.

A todos que contribuíram para este trabalho.

“É das hipóteses mais simples que mais devemos desconfiar, porque são aquelas que têm mais possibilidades de passar despercebidas”. (Poincaré)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma sequência de atividades interativas com o software de matemática dinâmica GeoGebra, abrangendo todos os principais tópicos de geometria analítica para o ensino médio. As atividades são abordadas aqui em forma de tutorial para que mesmo os usuários que não tem familiaridade com o software possam executá-las sem dificuldades. O trabalho ressalta também as vantagens de se fazer uso de recursos tecnológicos como o computador e softwares de geometria e matemática dinâmica no ensino de matemática trazendo um relato positivo de uma experiência vivida em uma escola de ensino médio do município de Morada Nova - CE. A sequência de atividades aqui mencionadas parte de atividades simples de cada tópico de geometria analítica para o ensino médio e passa para problemas essencialmente de geometria euclidiana plana que são solucionados usando o método analítico, adotando um sistema de coordenadas apropriado, permitindo a participação ativa dos alunos no seu aprendizado por construírem e manipularem os objetos estudados com o GeoGebra e usarem um raciocínio diferente ao solucionar o problema. Por fim surgem algumas atividades de lugares geométricos que possibilitam ao aluno modificar figuras e verificar a preservação de suas propriedades. Esta proposta de trabalho é uma tentativa de prover para o professor um meio adicional e diferenciado para o ensino de geometria analítica no ensino médio que pode ser fonte de motivação para o aluno e que o permita perceber de forma mais clara a forte relação entre a álgebra e a geometria.

Palavras-chave: Geometria Analítica. GeoGebra. Atividades. Ensino.

ABSTRACT

This paper presents a sequence of interactive activities with the dynamic mathematics software GeoGebra, covering all major analytical topics for high school geometry. The activities are addressed here in the form of tutorial so that even users who are not familiar with the software can run them without difficulty. The work also highlights the advantages of making use of technological resources such as computer software and dynamic geometry and mathematics in mathematics teaching bringing a positive account of lived in a high school in the city of Morada Nova - CE Experience. The sequence of activities mentioned here arises from simple activities of every topic of analytic geometry for high school and move on to problems essentially flat Euclidean geometry that are solved using the analytical method, adopting an appropriate system of coordinates, allowing the active participation of students in their learning by building and manipulating the objects studied with GeoGebra and use a different reasoning to solve the problem. Finally some activities arise loci that allow the student to modify figures and verify the preservation of their property. The proposed work is an attempt to provide for an additional teacher and differential for teaching analytic geometry in high school that can be a source of motivation for the student and that allows to realize more clearly the strong relationship between algebra through and geometry.

Keywords : Analytic Geometry . GeoGebra . Activities . Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sabemos que a aprendizagem em matemática está fortemente ligada à leitura e à interpretação de informações muitas vezes implícitas, contidas em textos, equações, representações geométricas, tabelas, enunciados de problemas, gráficos e até em situações do dia-a-dia. Ademais o principal responsável pelo processo de aprendizagem é o próprio aprendiz, ou seja, o aluno no qual pode se dispor a pensar e tomar iniciativa mediante de um envolvimento na execução de atividades propostas pelo professor. Por isso é importante que este crie situações que favoreçam a valorização da autonomia dos alunos em buscar e adquirir seu próprio conhecimento e consequentemente a compreensão efetiva do objeto de estudo.

Um dos objetos de estudo em Matemática na educação básica é a geometria analítica, que também é conhecida como método das coordenadas por fazer uso de sistemas de coordenadas e métodos algébricos na representação de pontos, retas e curvas. O estudo da geometria analítica parece ser uma excelente oportunidade de colocar o aluno diante de um ambiente de intensas relações e de diferentes representações da realidade. Além disso, a geometria analítica compõe-se de uma associação de três fatores: a expressão de uma realidade geométrica por uma relação entre quantidades variáveis, o uso das coordenadas e o princípio da representação gráfica, sendo que cada um destes três fatores surge desde muito cedo no desenvolvimento da geometria e, no entanto muitas vezes não são encadeados.

A geometria analítica está cada vez mais presente em diversas áreas do conhecimento científico e tem impulsionado o desenvolvimento tecnológico, pois está presente na Física em movimentos de partículas em função do tempo, na tecnologia do GPS, na engenharia desde a fabricação de peças de aço, na construção de cenários virtuais para o cinema, na medicina em exames por imagem computadorizada, na astronomia e no desenvolvimento da computação gráfica, só para citar alguns.

Ao estudar a geometria analítica no ensino médio é importante que o aluno seja informado sobre o desenvolvimento histórico deste conhecimento e como ele tem contribuído para os objetivos atuais, mas o mais importante é que o aluno perceba a vantagem de se estudar geometria analítica, por esta proporcionar um elo entre diferentes áreas da matemática, a saber, a geometria e a álgebra. Neste ínterim, o trabalho do professor reside em fomentar o entendimento de figuras geométricas por meio de equações, e o entendimento de equações por meio de figuras geométricas, abandonando a simples apresentação de equações sem explicações fundadas no raciocínio lógico, evitando memorizações excessivas de fórmulas. Isto favorecerá a leitura, a interpretação e a compreensão de diferentes tipos de linguagens e representações, a gráfica e a algébrica, sempre buscando a articulação, ou seja, a conversão entre estas.

Conseguir tal feito não é tarefa fácil, pois é cada vez mais crescente o número de alunos que são indiferentes quanto à aprendizagem, munidos de uma herança deficitária de conhecimentos básicos necessários para uma saudável continuidade de seus estudos, com sentimentos de incapacidade diante da matemática e mais atraídos à comodidade da vida atual do que predispostos a buscar sua formação.

Pensando nisso é que surge este trabalho, pois com o uso do software GeoGebra nesta abordagem introdutória à geometria analítica para o ensino médio, propõe-se atividades que darão oportunidade ao aluno de observar, construir e manipular objetos a fim de que este se sinta mais motivado a pensar e enfrentar situações que lhes possibilitem obter a compreensão clara das relações fortes existentes entre a álgebra e a geometria ajudando-o a perceber que a matemática não se compõe de um conjunto de temas que precisam ser tratados de forma separada.

A ideia aqui apresentada é dar ao professor um recurso adicional, que possa ser usado de forma gradual, constante e sistêmica ao ensino de geometria analítica acreditando que:

- O software GeoGebra possibilita e facilita a tradução de objetos abstratos advindos de construções mentais para objetos concretos ou virtuais construídos na tela de um computador.

- Torna o aluno agente e coautor do conhecimento, participando da construção do mesmo e tirando conclusões que o ajudarão a aprofundar sua compreensão.

- Funcionará para o professor como uma maneira de diversificar suas aulas tornando-as “talvez”, mais atrativas para o aluno tendo em vista o uso de um recurso tecnológico que pode dar significado ao aprendizado.

2 BREVE HISTÓRICO DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

Tem-se notado que já há um bom tempo o ensino de geometria no Brasil tem deixado a desejar. Os fatores são inúmeros, dentre os mais graves estão o abandono e a exclusão da geometria dos currículos por parte de muitos profissionais dentro das nossas escolas.

Felizmente, torna-se cada vez mais evidente a importância do conhecimento geométrico em muitos setores da nossa sociedade. Assim percebe-se que a geometria tem sua importância na compreensão do mundo em que vivemos e na participação do homem na construção do conhecimento científico e no desenvolvimento tecnológico. Isto fica claro quando vemos a presença da geometria na beleza da arquitetura de prédios, casas, esculturas e obras de arte, na funcionalidade de máquinas, no desenvolvimento dos esportes e na solução de problemas recorrentes da sociedade moderna, como o trânsito em grandes centros urbanos.

Falando a respeito da importância da Geometria, Lorenzato (1995) diz que esta tem função essencial na formação dos indivíduos, pois possibilita uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da Matemática.

De acordo com Fainguelernt (1995), a Geometria desempenha um papel fundamental no ensino porque ativa as estruturas mentais na passagem de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização; é tema integrador entre as diversas partes da Matemática, sendo a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução, constituintes de sua essência.

Entretanto, apesar de sua reconhecida importância, pesquisadores brasileiros como Pavanello (1989), Lorenzato (1995), Pirola (2000), Passos (2000) e Pereira (2001) apontam que a Geometria é pouco estudada nas escolas.

Quando paramos para analisar os currículos e programas nas nossas escolas percebemos que embora os livros didáticos atuais já explorem bem a geometria desde os seus conceitos básicos nas series iniciais do ensino fundamental até conceitos mais bem formulados com base axiomática e pautados em teoremas, porem cada vez mais contextualizada com a realidade, no ensino médio, há ainda uma forte tendência de se privilegiar os aspectos computacionais da aritmética nas séries iniciais do ensino fundamental havendo uma transição nas series finais do ensino fundamental e no ensino médio para um apelo mais algébrico do tratamento da matemática em detrimento da geometria. Com isso a geometria quando é trabalhada, passa a ser feita de forma separada e ministrada muitas vezes de forma somente tradicional, favorecendo certa aversão por parte de muitos alunos e não permitindo que o mesmo possa desenvolver o raciocínio visual.

Mas tudo isso é uma herança antiga: Nossa primeira estruturação do ensino, que ocorreu por volta dos anos 1930, o sistema seriado de ensino, fez nascer essa disciplina até então inexistente. Resultado da fusão da aritmética, com a álgebra e a geometria, nasce a Matemática a partir da Reforma Francisco Campos, no primeiro governo de Getúlio Vargas (Valente 2004a). Nesta época os nossos colegas professores de matemática tiveram de substituir antigas práticas pedagógicas por novas práticas. Porem isso não se deu como o desejado, a maioria dos professores dividiam as aulas em partes separadas para ministrar aritmética, álgebra e geometria, ou seja, naturalmente havia uma resistência à mudança. Por fim acabou que, na maioria dos casos devido a muitos fatores, não se tinha tempo para ministrar um extenso programa anual de conteúdos e a geometria sempre ficava de lado.

Após os anos 1950 o ensino da matemática no Brasil e no mundo passou por intensas reformulações nos currículos com o advento do Movimento da Matemática Moderna, movimento este que surgiu com a alegação de que havia a necessidade de profissionais que pudessem atender a expansão tecnológica que se tornou mais evidente após a segunda guerra mundial. Nesta época, o ensino da matemática no Brasil estava em crise, visto que esta disciplina parecia fora da realidade, difícil e de acesso a poucos. Assim muitos educadores passaram a repensar o ensino da matemática objetivando a sua melhoria.

O que o Movimento da Matemática Moderna defendia era um ensino concentrado no rigor, na abstração, no formalismo e na geometria não euclidiana. Para Pavanello (1989, p.103):

> “a ideia central da Matemática Moderna consistia em trabalhar a matemática do ponto de vista de estruturas algébricas com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos. Sob esta orientação, não só se enfatizava o ensino da álgebra, como se inviabilizava o da Geometria da forma como este era feito tradicionalmente”.

Sem dúvidas esses métodos não eram dominados pela maioria dos professores, assim o ensino da geometria deve ter se desenvolvido intuitivamente, sem uma preocupação com a construção de toda uma sistematização. Com o despreparo de muitos professores para com estes métodos, aos poucos estes deixaram de ensinar os conteúdos geométricos, trabalhando principalmente com a álgebra ou a aritmética e com a teoria dos conjuntos, conforme era recomendado.

Aqui no Brasil, o Movimento da Matemática Moderna exerceu influência por um bom tempo, só vindo a perder espaço a partir da inadequação de alguns de seus princípios básicos e das distorções ocorridas. Porém, ainda hoje, nota-se a formalização de conceitos, as poucas aplicações práticas da Matemática em sala de aula, bem como do predomínio da álgebra no Ensino Fundamental e Médio. Foi nos anos 1980 que se teve mais compreensão de aspectos sociais, linguísticos e cognitivos na aprendizagem da Matemática abrindo assim bons e novos caminhos às discussões curriculares. As práticas pedagógicas voltadas para a resolução de problemas surgem, ganhando espaço no mundo inteiro.

Todavia, pesquisas realizadas nas últimas décadas revelam que professores e alunos ainda têm muitas dificuldades em relação à Geometria. Autores como Pavanello (1989) e Lorenzato (1995) denunciam esta situação. Também Pirola (2000), Passos (2000) e Pereira (2001) enfatizaram a necessidade de que sejam empreendidos esforços no sentido de resgatar o espaço da Geometria na escola e investir na melhoria do trabalho docente.

Felizmente este cenário vem mudando, embora em passos lentos. Com o fortalecimento das avaliações externas e a adesão da maioria das universidades ao ENEM como forma de ingresso as mesmas, tem se notado um empenho maior em garantir de fato o ensino destacado da geometria nas escolas no Brasil, pois é notável o grande número de problemas que abordam a geometria nestas avaliações bem como a grande dificuldade por parte dos alunos em obter êxito nesta área do conhecimento.

2.1 O que dizem os parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio sobre o ensino da geometria

Conforme abordamos no tópico anterior o ensino da matemática no Brasil passou por grandes mudanças em sua estrutura, no currículo, até possuir diretrizes que o norteasse. Atualmente estamos regidos pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e regulamentadas por Diretrizes do Conselho Nacional de Educação, que tem entre seus objetivos principais, o de facilitar a organização do trabalho da escola em cada área de conhecimento. Deste modo estas Diretrizes explicitam que articulação deve existir entre as competências gerais que se deseja promover com os conhecimentos de cada disciplina e apresenta ao mesmo tempo um leque de sugestões de práticas educativas bem como de organização dos currículos que, passa a estabelecer temas dando assim estrutura ao ensino de cada disciplina. Além de possibilitar um diálogo sobre o projeto pedagógico escolar e de apoiar o professor em seu trabalho, o texto de tais Diretrizes traz elementos para a continuidade da formação profissional docente na escola.

O ensino de geometria é um dos componentes do currículo em que os alunos devem conviver durante toda a sua fase escolar, desenvolvendo ao longo desse tempo o seu raciocínio geométrico, reconhecendo e relacionando as formas dos objetos de seu cotidiano, sendo capaz também de observar, experimentar, fazer conjecturas e tirar conclusões lógicas.

Ademais a sociedade em que vivemos hoje exige que seus cidadãos sejam capazes de saber utilizar as mais diferentes fontes de informação e de manipular diversos recursos tecnológicos para adquirir conhecimento, possibilitando que o mesmo tenha uma compreensão mínima do mundo e seja capaz de enfrentar situações reais usando o conhecimento, as competências e as habilidades adquiridas na escola.

Por isso segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante o ensino médio, esta etapa da escolaridade básica e complementar do Ensino Fundamental para todos os alunos brasileiros. São elas:

> - A competência da representação e comunicação que envolve a leitura, interpretação e produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características desta área do conhecimento.
> - A competência da investigação e compreensão, marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências.
> - A competência da contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das ideias e recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas através do pensar e do conhecimento científico. (BRASIL, 2006, p.113).

Fica claro assim que no que diz respeito ao domínio da linguagem, é preciso dar atenção à nomenclatura, símbolos, códigos, ordens de grandeza e unidades de medida, que já estão muito presentes na linguagem cotidiana moderna. Conseguir comunicar-se por meio de gráficos, diagramas, esquemas, equações e ser capaz de fazer uso destes para interpretar, analisar em favor do desenvolvimento de atividades práticas e enfrentamento de situações problemas, é algo em que se deve estar perseguindo com constância.

Já quando pensamos na segunda competência a ser buscada, a investigação para a compreensão, vemos que em sala de aula isso deve acontecer por meio da realização de experimentos, medidas, elaboração de escalas, obtenção de modelos representativos da realidade, procedimentos explicativos das leis naturais, capacitando o aluno a interpretar fenômenos, dominar conceitos, compreender o funcionamento do objeto estudado, resultando em um aprendizado significativo, havendo o prazer da descoberta, permitindo que o aluno pense por si mesmo e motivando sua própria construção do conhecimento.

Sempre que entendemos o contexto em que estamos inseridos ou que um determinado fato ocorreu, passamos a ter uma compreensão mais plena e significativa do mesmo. No ensino não é diferente, quando o aluno se depara com um estudo contextualizado, real ou palpável, fica mais fácil se motivar e se engajar porque ele consegue ver a utilidade e praticidade do que está aprendendo, tendo a sensação de que algum dia ele poderá usar aquele conhecimento em seu favor, ou pelo menos percebe a importância e o uso deste conhecimento para o desenvolvimento tecnológico possibilitando que tenhamos diversas ferramentas hoje que são práticas e indispensáveis neste mundo moderno.

Pensando em desenvolver tais competências no ensino da matemática os PCNEM elegem um conjunto de temas que possibilitem alcançar esses objetivos relevantes. São três temas estruturadores que devem ser desenvolvidos nas três séries do ensino médio de forma concomitante, são eles:

1. Álgebra: números e funções
2. Geometria e medidas
3. Análise de dados

Cada um destes temas estruturadores possui uma organização própria no que tange a linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo. Mesmo assim, cada um destes está dividido em unidades temáticas que são parcelas autônomas de conhecimentos específicos que podem ser organizadas dentro do projeto pedagógico e do pensar didático de cada professor ou escola levando em conta as circunstancias e características de cada turma ou de cada aluno.

Dirigindo agora a atenção para o segundo tema estruturador, que é o objeto deste trabalho, verificamos que a geometria sempre esteve presente nas atividades humanas construídas e nas formas naturais, tornando-se cada vez mais importante nos sistemas produtivos e de serviços. Assim trabalhar em sala de aula com formas planas e tridimensionais, suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto tem grande importância no ensino médio. Com o objetivo de desenvolver esse tema, os PCNEM propõem quatro unidades temáticas: geometria plana, espacial, métrica e analítica.

Falando sobre as vantagens e a importância de se adotar essa prática nas nossas escolas os PCNEM dizem:

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas.
> Parte do trabalho com Geometria está estritamente ligada às medidas que fazem a ponte entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas. No entanto, o ensino das propriedades métricas envolvendo cálculos de distâncias, áreas e volumes é apenas uma parte do trabalho a ser desenvolvido que não pode ignorar as relações geométricas em si.
> Para desenvolver esse raciocínio de forma mais completa, o ensino de Geometria na escola média deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações construções com instrumentos. (BRASIL, 2006, p.123).

Na etapa final do ensino médio torna-se necessário dar um tratamento algébrico as propriedades e elementos geométricos, é aí que entra a geometria analítica. Nesta etapa o aluno é apresentado a uma forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações. Esta fase é muito rica, pois dá oportunidade ao aluno de perceber que um mesmo problema pode ser abordado e resolvido por meio de diferentes instrumentos matemáticos, podendo para isso estabelecer relações de correspondência entre algumas funções e seus gráficos com a resolução de problemas que exigiriam o estudo de posições relativas entre pontos, retas, circunferências e cônicas.

Uma das grandes vantagens de se inserir a geometria analítica no currículo, é que além de conhecer esta forma de pensar matemática, que associa formas geométricas, gráficos, curvas a equações, sistemas ou inequações, este estudo dá oportunidade ao aluno de entender certos aspectos históricos do mundo no século XVII, que deu origem ao cartesianismo. Favorece entender que o desenvolvimento histórico do conhecimento e como certo momentos da história transformaram a ciência e também a forma de viver da humanidade.

Sendo assim, os PCNEM nos lembram de que esse tema estruturador pode desenvolver no aluno habilidades relacionadas a medidas, grandezas e permite que o mesmo avance na sua percepção do processo histórico de construção do conhecimento matemático, além de apresentar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada da geometria com linguagens e raciocínios mais sofisticados do que os vistos anteriormente no ensino fundamental com a geometria euclidiana. Por isso para a geometria analítica a proposta para conteúdos e habilidades a serem desenvolvidas é:

> **Geometria analítica:** representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
> • Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
> • Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
> • Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
> • Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (BRASIL, 2006, p.125).

Neste ínterim, depois de ter os conteúdos organizados em temas e os aspectos didático-pedagógicos definidos, é preciso haver articulação dos conteúdos com as competências desejadas. Esta proposta dos PCNEM dá destaque a situações problema, de preferência tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a metodologia escolhida aqui e deve ser encarada como a postura de investigação diante de qualquer situação ou fato que possa ser questionado.

3 USO DO COMPUTADOR NO ENSINO DE GEOMETRIA

Vivemos em um tempo em que ocorre muito depressa o avanço da tecnologia e a possibilidade de acesso a tais, conjugado a isso vêm mudanças sociais marcantes que imputam novas maneiras de pensar a educação, de ensinar e de aprender, sobretudo fazendo como aliado essa tecnologia. E de fato, durante toda a história da humanidade o homem buscou aliados, instrumentos, ferramentas que lhes viessem facilitar a vida. Um exemplo disso é que D'Ambrosio (2001) refere-se à necessidade do homem, há cerca de 2 milhões de anos, de desenvolver instrumentos que o auxiliassem na obtenção de alimentos, como a pedra lascada utilizada no descarno de caças e a lança de madeira. Dessa época até aqui o desejo do homem não mudou, e a era digital bem como sua inclusão não é mais uma busca e sim uma realidade, realidade essa que ainda enfrenta resistência, mas tem sido cada vez mais aceita na educação.

É exatamente neste cenário que o ensino da geometria pode se beneficiar, com a utilização de tecnologias como o computador, a internet, softwares, tablets, aplicativos, buscando neste ínterim a construção do conhecimento por parte do aluno, fomentando o surgimento de novas práticas que sejam motivadoras, atrativas, que deem significado e praticidade ao aprendizado por parte dos professores e que possibilitem a aquisição de novas competências que o aluno necessitará em sua vida.

Apesar de tudo isso, há uma preocupação válida. Com todo esse avanço tecnológico onde o uso da informática tornou-se necessário em todos os meios, ainda se nota na prática docente algumas negativas, receios e fragilidades. Possivelmente, no seu processo de formação, o professor não teve oportunidade de acesso ao conhecimento necessário para o uso desta ferramenta. Para o professor que está no papel de interlocutor do conhecimento e tutor do processo de ensino-aprendizado é difícil encarar o fato de que seus alunos já possuem uma maior facilidade de aceitação e uso destas tecnologias, visto que já nasceram nesta era digital e desde cedo já convivem naturalmente com o uso destas. Para os alunos, usar estes recursos em sala de aula ou em outro ambiente para obter conhecimento ou fazer descobertas é até mais agradável.

Os estudos, teorias e práticas associadas à informática na educação vêm ganhando espaço em todo o mundo, justamente porque as ferramentas e mídias digitais oferecem à didática, objetos, espaços e instrumentos capazes de renovar as situações de interação, expressão, criação, comunicação, informação, cooperação e colaboração, tornando-as muito diferentes daquelas tradicionalmente fundamentadas na escrita e nos meios impressos. Ademais, o processo de inclusão digital que já é uma realidade hoje e está acontecendo nas escolas com bastante evidencia possibilita que para muitos alunos seja o único contato que eles têm com o computador ou a internet, principalmente os advindos da zona rural. O grande potencial para fins didáticos deste meio, ainda tem muito a oferecer. No entanto, a inclusão digital nas escolas não significa apenas instalar computadores, internet, equipamentos e distribuir tablets. É preciso preparar professores e toda a comunidade educacional, na perspectiva de se fazer uso direcionado para ajudar a aprendizagem. Pois o que muito se vê nas escolas são os professores reclamarem de não ter uma formação ou um treinamento para dominar o uso destas mídias e tecnologias a fim de sentir-se seguros e convencidos de que esse uso realmente possa produzir resultados que acrescentem a prática já existente.

Fica evidente que se exige do profissional da educação e por sua vez do professor de matemática a formação necessária para usar de forma eficiente essas ferramentas dando um sentido ao seu uso e ao mesmo tempo enriquecendo ambientes de aprendizagem onde o aluno interage com os objetos desse ambiente construindo o seu próprio conhecimento.

Valente (2009, p. 23) diz:

> [...] o computador apresenta recursos importantes para auxiliar o processo de mudança na escola - a criação de ambientes de aprendizagem que enfatizam a construção do conhecimento e não a instrução. Isso implica em entender o computador como uma nova maneira de representar o conhecimento provocando um redimensionamento dos conceitos básicos já conhecidos e possibilitando a busca e compreensão de novas ideias e valores. Usar o computador com essa finalidade requer a análise cuidadosa do que significa ensinar e aprender demanda rever a prática e a formação do professor para esse novo contexto, bem como mudanças no currículo e na própria estrutura da escola.

Nesse cenário, os softwares matemáticos têm papel primordial, sem eles, o computador por si só, teria pouca ou não teria nenhuma utilização no processo de ensino. Diante da variedade de softwares educativos existentes hoje no mercado, é imprescindível um bom conhecimento destes, pois seu conteúdo deve visar a uma aprendizagem significativa, aliando interatividade e informações a quem vai utilizá-los, que em geral, serão professores e alunos. Para isso, ao fazer a escolha do software o professor deve levar em consideração as características de sua turma o conteúdo a ser ministrado e montar atividades que sejam adequadas a essa realidade.

3.1 O ambiente de geometria dinâmica

Geometria Dinâmica é um termo utilizado atualmente para dar nome ou indicar um método dinâmico e interativo para o ensino e aprendizagem de geometria, bem como suas propriedades usando ambientes computadorizados destinados a esse fim. Esta metodologia possui a vantagem de permitir ao aluno manipular os objetos, fazer conjecturas, validar resultados, observar regularidades e tirar conclusões. A nomenclatura atual foi criada pela empresa Key Curriculum Press (criadores do Geometer´sSketchpad) com o objetivo de diferenciar dos demais programas existentes. Portanto, a Geometria Dinâmica não deve ser confundida como sendo uma “nova geometria” como, por exemplo, a Geometria Não-Euclidiana proposta por Lobachevsky, mas apenas um método interativo para o ensino e aprendizagem de qualquer geometria.

Esse termo “dinâmico” na matemática se refere às ideias de movimento e mudança. Geralmente os programas de Geometria Dinâmica permitem construir e a partir desta construção, o aluno poderá visualizá-la de diversas formas o que facilita a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos. Depois de realizada a construção de objetos, tais como os pontos, as retas, os círculos, as cônicas, estes poderão ser deslocados na tela conservando as relações geométricas.

Os primeiros programas de computador usados para Geometria Dinâmica foram o Geometer´sSketchpad (em 1989) e o CabriGéomètre (em 1988), mais conhecido aqui no Brasil. Esses programas agem como se fossem réguas e compassos virtuais (eletrônicos). Atualmente é possível encontrar vários outros programas de Geometria Dinâmica como os já citados CabriGéomètre e Geometer´sSketchpad, bem como o Geometriks, o GeometricSupposer, o Geometri Inventor, o Geoplan, Cinderella, Dr.Geo, Tabulae, o aplicativo Régua e Compasso e o Geogebra que se diferem por sua estrutura ou valor comercial, alguns desses programas são mais completos e vão além da geometria, podendo ser classificados como Matemática Dinâmica.

Segundo Cruz (2005) a compreensão dos conceitos geométricos é favorecida quando estes são explorados num ambiente dinâmico e interativo, pois, tal ambiente possibilita a transição entre o conhecimento que o aluno já possui e a facilidade para conjecturar que o computador proporciona.

Fato interessante é que nos primeiros anos da invenção e uso dos computadores talvez fosse inimaginável a manipulação destes aparelhos para o ensino da geometria, talvez pelo fato de que eles não possuíam uma alta resolução gráfica como a dos computadores da atualidade e os sistemas não serem tão autoexplicativos como hoje.

Mas, como podemos constatar com facilidade, já faz um tempo que os computadores passaram a ser utilizados por pessoas menos especialistas do ramo da informática, fato devido ao facilitamento da manipulação de programas e acesso à internet com elementos visuais intuitivos através de ícones que sugerem a ação futura do usuário.

Novas áreas para o uso do computador foram abertas e a escola já abriu a as portas para esse novo aliado aos processos de ensino e aprendizagem. Mas, os professores, ao utilizarem programas de Geometria Dinâmica em suas aulas, deverão adotar uma postura de análise crítica perante os resultados emitidos pelo computador. A ênfase está na construção do conhecimento matemático, onde a proposta é de explorar a geometria através de alguma interface computacional, mas que envolva um modelo de um domínio de conhecimento matemático.

3.2 O software Geogebra

A matemática pode servir para se entender e se apropriar das tecnologias digitais e por sua vez, as tecnologias digitais podem ser ferramentas para se entender a Matemática.

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que reúne conceitos de geometria, álgebra e cálculo, podendo servir para alcançar o objetivo de se entender melhor a matemática e deixá-la mais atrativa. Seu nome vem da junção de partes das palavras geometria e álgebra. Este software é de distribuição livre, escrito em linguagem java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas podendo ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS. É desenvolvido para aprender e ensinar matemática nas escolas nos vários níveis de ensino, do básico ao universitário.

Foi desenvolvido por Markus Hohenwater com o intuito de ser utilizado em ambiente de sala de aula. Este projeto teve início em 2001, na Universidade Salzburg na Áustria, e prossegue sendo aprimorado pelo seu autor e uma equipe de programadores na Universidade Atlântica da Florida, nos Estados Unidos.

O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Portanto, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

Sendo assim, ele traz muitas vantagens em relação ao trabalho no papel ou no quadro, como movimentar as figuras em diversas direções, comparar e voltar ao aspecto inicial. Por exemplo: para provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, é possível alterar a figura e ver que, quando um dos ângulos aumenta, os outros diminuem, mas a soma é sempre 180º.

Outra vantagem é que, por ser um software de Geometria dinâmica ou Matemática Dinâmica como defendem alguns, o seu layout é atraente e o programa possui um manuseio relativamente fácil, necessitando apenas que o aluno possua o conhecimento prévio do objeto estudado e assim possa observar e compreender suas propriedades e consequentemente aprofundar seu conhecimento e entendimento do conteúdo.

O GeoGebra apresenta uma barra Ferramentas de acesso rápido que será feito muitas referências a mesma neste trabalho. Essa barra apresenta 12 colunas de ícones que permite executar comandos rapidamente. Ver figura:

Figura 1- Barra Ferramentas de acesso rápido

O GeoGebra apresenta três diferentes vistas dos objetos matemáticos: A Zona Gráfica, a Zona Algébrica e a Folha de Cálculo. Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente, algebricamente e nas células da folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

Apesar de todos esses recursos e vantagens, o software GeoGebra por si só não será o milagre do ensino da matemática. É primordial a ação do professor no trabalho em sala de aula aliando seus esforços ao potencial que essa ferramenta oferece de influenciar o pensar matemático do aluno e ao mesmo tempo contribuindo para a adequação de sua prática docente a realidade atual, podendo até mesmo transformar aulas tradicionais, excessivamente diretivas e instrucionais em ações cooperativas entre alunos e professores onde todos podem se organizar como parceiros e aprendizes.

4 O RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA

No ano de 2013 desenvolvemos um projeto no Colégio Estadual Maria Emília Rabelo (CEMER) do Município de Morada Nova – CE, escola esta localizada na Av. Manoel de Castro, Nº 616 – Centro, com o seguinte título: **Geometria Dinâmica com o GeoGebra: Auxiliando o aprendizado da geometria analítica**. O citado projeto fez uso do software de geometria dinâmica (GeoGebra) no qual possui recursos de construção que promovem um envolvimento do aluno em atividades que podem auxiliar no entendimento de conceitos básicos e lhes proporcionar uma melhor assimilação de conteúdos estudados.

Como motivação para a elaboração deste projeto foi levado em consideração os fatos de que muitos alunos ainda não convivem bem com a matemática e em especial com a geometria, e ainda, os resultados apresentados pela escola no ENEM e no SPAECE não serem os desejados principalmente nas habilidades referentes à geometria, embora já fossem relativamente razoáveis, tornando-se assim necessário uma intervenção por meio deste direcionada inicialmente aos alunos de 3º ano.

Com os objetivos de propiciar uma prática pedagógica diversificada por adquirir kit multimídia (notebook e Datashow) para as salas de aula, motivar o aluno no quesito aprendizagem, estimular o gosto pela matemática e consequentemente melhorar os resultados nas avaliações internas e externas, o projeto foi trabalhado em sala de aula fazendo uso de aulas tradicionais com exposição dos conteúdos e posteriormente trabalhado no laboratório de informática fazendo uso dos computadores e do software GeoGebra.

4.1 Justificativa do projeto

Visto que hoje encontramos muitas dificuldades no ensino da matemática, em especial no ensino de qualquer geometria: alunos que não conseguem entender as definições básicas, não sabem estabelecer a relação entre a teoria e a prática, sentem-se desestimulados diante da disciplina e da resolução de exercícios e problemas sem saber onde vão aplicar aqueles conceitos na sua vida. Sabemos que muito disso se deve ao fato de que historicamente a geometria vem especificada no final do programa a ser cumprido anualmente e muitas vezes não se consegue ministrar tais conteúdos básicos necessários para uma continuidade natural da compreensão da geometria. Por tudo isso, encontramos um número tão alto de alunos que afirmam não gostar desta área tão bela, rica e promissora da matemática: A geometria.

No ensino da geometria analítica o computador pode ser um importante recurso para a inovação das aulas de matemática e um elemento adicional que propicie motivação para os alunos contribuindo assim para a efetivação da aprendizagem.

Hoje existem diversos softwares livres que podem ajudar os alunos a entender a matemática, inclusive a geometria analítica, foi usado então o Software de geometria dinâmica Geogebra para nos ajudar neste processo.

A escolha deste software se deu por ser um software de acesso livre que pode ser copiado e instalado em qualquer computador. Além disso, é um software de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo, o que nos favorece na geometria analítica visto que esta se utiliza não só da geometria, mas também da álgebra.

O GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

4.2 Objetivos e resultados pretendidos pelo projeto

Definimos aqui os seguintes objetivos:

4.2.1 Objetivos gerais do projeto

Utilizar o software GeoGebra como ferramenta adicional no ensino da Geometria analítica;

Reunir materiais, objetos, atividades e equipamentos para o laboratório de matemática.

Promover uma maior motivação dos alunos no estudo da geometria analítica.

Melhorar a prática pedagógica dos professores de matemática do 3º ano.

Contribuir para uma maior frequência dos alunos nas aulas de matemática e na redução do índice de desistência da escola.

Melhorar os resultados dos alunos de 3º ano em matemática no SPAECE e no ENEM.

4.2.2 Objetivos específicos do projeto

Identificar e utilizar os conceitos sobre plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, baricentro e condições de alinhamento de três pontos, equações da reta nas formas geral e reduzida para a resolução de problemas com o GeoGebra;

Reconhecer e aplicar fórmulas, identificando as condições de paralelismo, de perpendicularismo, de ângulos formados entre retas, da distância entre e ponto e reta e ainda da área de um triângulo ou de um polígono com o GeoGebra.

4.2.3 Metodologia do projeto

O projeto foi elaborado para ser executado em 5 etapas conforme descrito abaixo:

1º ETAPA: Inicialmente trabalhamos conteúdo sobre ponto, reta e circunferência, sequencialmente de maneira tradicional: utilizando-se do quadro, livro didático e exercícios propostos.

Os alunos estavam atentos fazendo anotações para que posteriormente pudessem resolver problemas relacionados com estes conceitos e descobrissem por meio de pesquisas onde aqueles conteúdos poderiam ser aplicados em atividades do cotidiano comum ou no meio tecnológico. Esta etapa tinha uma implicação no descobrimento de aplicações práticas quando possível, dos conhecimentos matemáticos adquiridos. (Exemplo: Uso do Google Maps como aplicação de localizações no plano cartesiano e de somas de distâncias entre dois pontos, com o intuito de verificar distâncias entre lugares conhecidos).

2º ETAPA: Em um segundo momento conduzimos os alunos ao laboratório de informática para mostrar como o uso do Software livre (GeoGebra) poderia contribuir para uma melhor compreensão daqueles conteúdos. Esta etapa teve como objetivo promover uma observação de funcionamento que posteriormente ajudou ao aluno a se familiarizar com o software GeoGebra para que o mesmo pudesse utilizá-lo durante a aplicação do projeto.

3º ETAPA: Nesta etapa foram desenvolvidas atividades que abordavam os conteúdos estudados mostrando passo a passo como poderiam ser realizadas usando-se o GeoGebra. Esta abordagem deu a oportunidade ao aluno de se familiarizar com o Software, estando assim prontos para executarem atividades específicas que possibilitou a todos os alunos comprovarem algebricamente por meio de cálculos que os resultados obtidos nas construções com o GeoGebra realmente eram válidos, (esta atividade foi chamada de atividade de comprovação algébrica). Abaixo segue uma atividade de comprovação algébrica onde os alunos resolveram com e sem o GeoGebra.

4.2.4 Atividade de comprovação algébrica

Dados os pontos $A = (1,3), B = (7,3)\ e\ C = (7,11)$.(Obs: Use o GeoGebra).

a) Localize tais pontos no sistema cartesiano.

b) Verifique geometricamente e algebricamente se tais pontos são colineares (isto é, se estão alinhados) ou se formam um triângulo.

Se formar triângulo:

c) Calcule sua área :$A(ABC)$;

d) Ache seu perímetro: $2p(ABC)$;

e) Encontre seu baricentro: $G(ABC)$;

f) Determine o comprimento de cada mediana (AM, BN, CP);

g) Ache as equações das retas suporte aos lados; $(AB\ e\ AC)$;

h) Verifique se o Triângulo ABC é isósceles, equilátero ou escaleno;

i) Determine a classificação de tal triângulo quanto aos ângulos, ou seja, se é acutângulo, obtusângulo ou retângulo.

COMPROVAÇÕES ALGÉBRICAS

a) Localização no plano cartesiano.

b) Use: Colineares se, e somente se,$\det(ABC) = 0$.

c) Use: $A(ABC) = \frac{1}{2}|\det(ABC)|$.

d) Use: $2p = d(A,B) + d(B,C) + d(A,C)$.

e) Use: $G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

f) Use uma combinação de ponto médio e distância entre dois pontos.

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \; e \; d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

g) Use: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$

h) Verifique possíveis igualdades entre $d(A,B), d(B,C) \; e \; d(A,C)$.

i) Verifique: Acutângulo se $AC^2 < AB^2 + BC^2$, obtusângulo se $AC^2 > AB^2 + BC^2$, retângulo se $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

4º ETAPA: Por fim veio uma atividade mais rica onde o aluno foi estimulado a seguir um roteiro estabelecido previamente abordando os conteúdos estudados e desenvolvidos no laboratório de informática com o GeoGebra. Nesta atividade o aluno foi induzido a fazer observações, indagações, comparações, formular conjecturas e tirar conclusões acerca de detalhes conceituais que muitas vezes passam despercebidos em uma aula tradicional. Esta atividade foi realizada em grupo para que houvesse uma troca de ideias entre os alunos sobre as construções e ao mesmo tempo um devido registro com anotações sobre suas conclusões. Neste momento foi considerado importante não apenas o aluno saber fazer aparecer corretamente na tela os resultados dos comandos executados pelo GeoGebra, mas sim saber interpretá-los corretamente e ser capaz de fazer intervenções e/ou modificações quando julgou necessário, (esta atividade foi chamada de atividade de investigação).

4.2.5 Atividade de investigação

Sejam os pontos$A = (2,4), B = (6,2), C = (8,6) \; e \; D = (4,8)$. (Obs: use o GeoGebra).

a) Localize os pontos no sistema cartesiano.

b) Verifique que polígono será formado pela ligação dos pontos $A, B, C\ e\ D$.

c) Determine a área desse polígono.

d) Calcule o perímetro desse polígono.

e) Ache as equações das retas suporte aos lados $AB, BC, CD\ e\ DA$, identificando os seus respectivos coeficientes angulares e lineares.

f) Encontre os pontos de intersecção das retas AB com BC e BC com CD.

g) Explicite as posições relativas entre as retas:

- AB e CD.
- AB e BC.

h) Construa no mesmo sistema cartesiano, as retas citadas no item g.

4.2.6 Investigação

a) O que se pode afirmar sobre os coeficientes (angular e linear) dos seguintes pares de retas?

AB e CD, AB e BC, BC e CD, AD e BC.

b) O que se pode concluir sobre o ponto em que cada uma dessas retas toca o eixo y?

c) É possível concluir qual será o ponto $P = (x, y)$ em que a reta de equação $y = 2x - 7$ corta o eixo y? E o eixo x?

d) Comparando-se as retas AB e BC, o que se pode afirmar sobre a inclinação da reta para $m > 0$ e $m < 0$?

e) Que mecanismo algébrico você usaria para determinar a área do polígono $ABCD$?

5º ETAPA: Apreciação dos resultados com os alunos por meio de apresentações de slides com as construções geométricas e comprovações algébricas de cada grupo e as suas devidas conclusões de observações feitas na atividade de investigação, onde seria verificada a aprendizagem e estimulado a expressão oral dos mesmos no laboratório de informática.

4.2.7 Resultados do projeto

Mesmo com todo o planejamento a execução do projeto não foi totalmente o ideal, a dinâmica de um calendário escolar com muitas alterações ao longo do ano, o foco voltado para a aplicação de simulados ENEM programados pela CREDE e SEDUC, fizeram com que uma das atividades não fosse executada e a 5º etapa não fosse cumprida, pois em muito se dependia de um agendamento prévio no laboratório de informática, e muitas vezes não se conseguia mais um agendamento a tempo.

No entanto a maioria dos objetivos foi alcançada, pois os alunos conseguiram perceber que poderiam fazer uso da tecnologia para auxiliá-los na aprendizagem da matemática e fizeram isso, também conseguimos reunir materiais e atividades para um futuro laboratório de matemática (atividades montadas com uso do GeoGebra), os alunos ficaram mais motivados para estudar geometria analítica, a metodologia das aulas foi mais diversificadas, o índice de abandono e de reprovação nas turmas aplicadas diminuiu e com a inscrição deste projeto nos fundos concursáveis como uma metodologia do projeto JOVEM DE FUTURO, no qual a escola participa, foi possível a aquisição de três Kits multimídia para três salas de 3º ano, favorecendo assim uma potencialidade de uso metodológico não só nas aulas de matemática, mas em todas as outras disciplinas.

É bom destacar que o fato de ter havido uma redução no índice de abandono e de reprovação nas turmas de 3º ano não foi simplesmente por causa do projeto citado, e sim por um esforço e ações conjuntas com o mesmo objetivo.

Ainda sobre estes resultados, a professora Charliana Coutinho de Sousa realizou uma pesquisa em duas das turmas em que foi aplicado o projeto, com 40 alunos cada uma, para ajudar a compreender o que os alunos das turmas trabalhadas acharam de uma nova abordagem para se trabalhar a matemática, especificamente a geometria analítica.

Com a aplicação do questionário (ver anexo) foram obtidos os seguintes resultados:

Dos 80 alunos que responderam a primeira pergunta 30 afirmaram já ter utilizado computador para aprender matemática anteriormente sem estar no laboratório de Informática, enquanto que 50 disseram não ter utilizado computador para aprender matemática sem estar no laboratório de Informática.

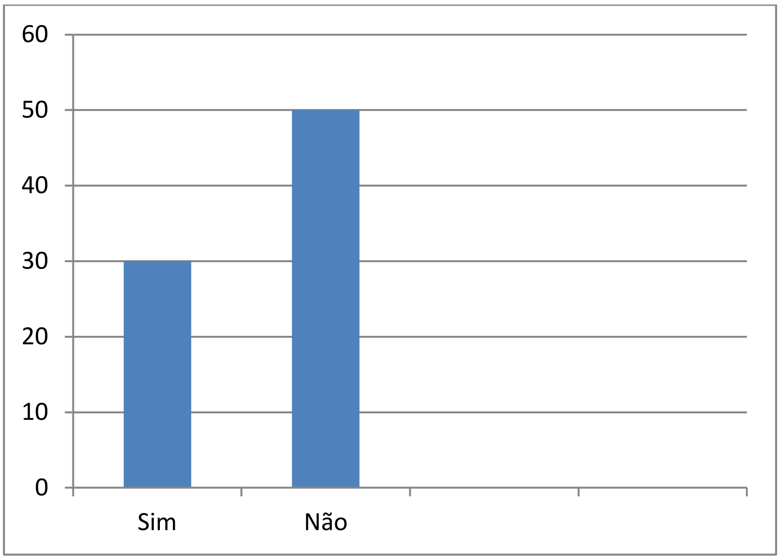


Figura 2- Gráfico referente à primeira pergunta do questionário, aplicado aos alunos do 3º ano do ensino médio, quando perguntados se utilizavam o computador para aprender matemática sem estar no laboratório de informática.

Para a segunda questão, quando perguntados sobre como eram as aulas de geometria analítica em sala de aula sem o uso do GeoGebra, 3 alunos responderam que eram ruins 50 alunos responderam que eram regulares, 22 responderam que eram boas e 5 responderam que eram ótimas.

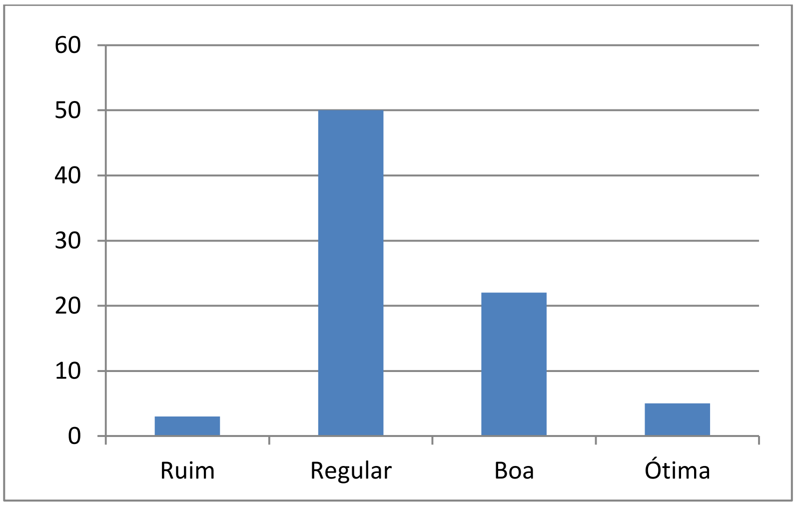


Figura 3 - Gráfico referente à segunda pergunta do questionário, aplicado aos alunos do 3º ano do ensino médio, quando perguntados como foram as aulas de geometria analítica em sala de aula sem o GeoGebra.

Na terceira questão, quando perguntados sobre como foram às aulas de geometria analítica no laboratório de Informática, nenhum aluno respondeu que foram ruins 08 alunos responderam que foram regulares, 24 responderam que foram boas e 48 responderam que foram ótimas.

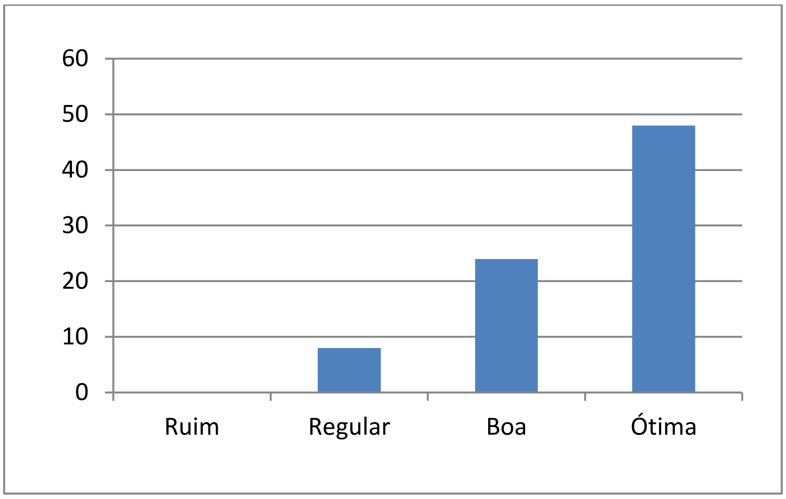


Figura 4- Gráfico referente à terceira pergunta do questionário, aplicado aos alunos do 3º ano do ensino médio, quando perguntados como foram às aulas de geometria analítica no laboratório de informática com o GeoGebra.

Na quarta questão a resposta por pouco não foi unânime, onde 78 alunos responderam que as aulas de geometria analítica foram mais interessantes e mais fáceis de compreender no laboratório de informática com o GeoGebra e somente 2 alunos responderam o contrário.

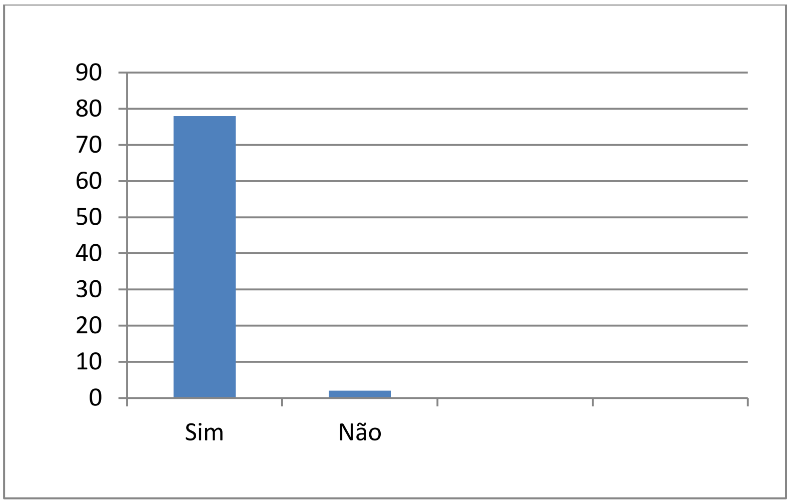


Figura 5- Gráfico referente à quarta pergunta do questionário, aplicado aos alunos do 3º ano do ensino médio, quando perguntados se as aulas de geometria analítica foram mais interessantes e mais fáceis de compreender quando realizadas no laboratório de informática com o GeoGebra.

Na quinta questão, sobre o desempenho nas atividades com o Geogebra, 10 alunos disseram que foi regular, 24 alunos disseram que foi bom e 46 responderam que foi ótimo.

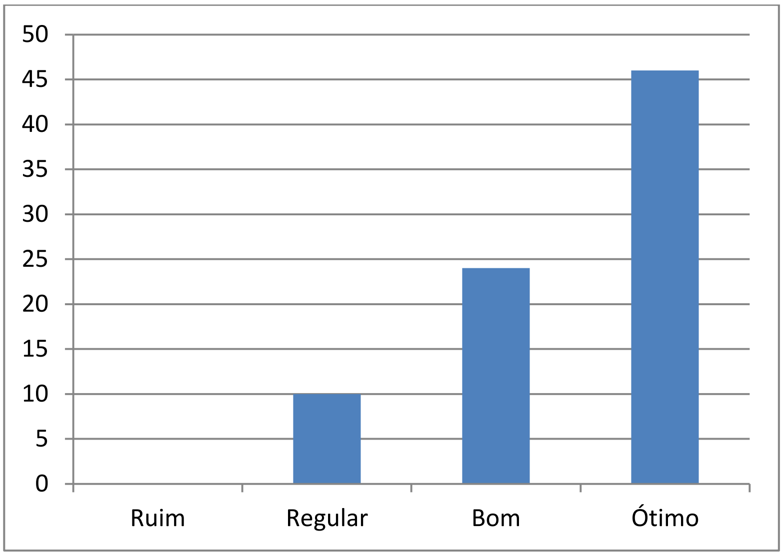


Figura 6- Gráfico referente à quinta pergunta do questionário, aplicado aos alunos do 3º ano do ensino médio, quando perguntados como foi o desempenho durante as atividades utilizando o GeoGebra.

Por último, quando perguntados sobre se ao fazer uso do GeoGebra encontraram mais facilidade para aprender geometria analítica, a resposta foi unânime, onde todos os 80 alunos responderam que sim, acharam mais fácil aprender geometria analítica utilizando o GeoGebra.

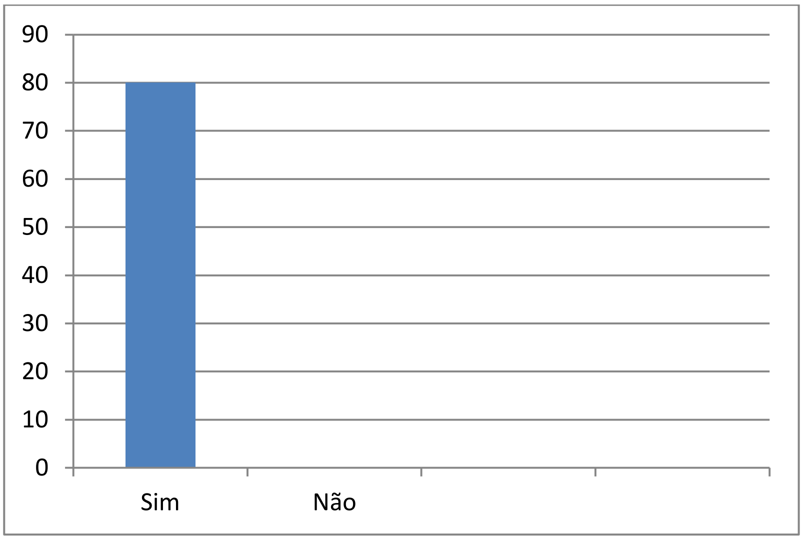


Figura 7- Gráfico referente à sexta pergunta do questionário, aplicado aos alunos do 3º ano do ensino médio, quando perguntados se ao fazer uso do GeoGebra encontrou mais facilidade para aprender geometria analítica.

5 MOTIVAÇÕES PARA A ESCOLHA DA ATUAL PROPOSTA DE TRABALHO

Esta proposta de trabalho teve inspiração no projeto citado anteriormente, onde com o uso do GeoGebra, conseguiu-se um maior engajamento e motivação por parte dos alunos para se aprender os tópicos básicos de geometria analítica. Com esta proposta atual pretende-se ampliar a abrangência deste projeto e aperfeiçoá-lo.

Mesmo nos dias atuais alguns ainda têm apresentado a matemática como uma ciência estagnada, na maioria das vezes desvinculada da realidade, de um caráter puramente mecânico, sem significado real, privilégio para uns poucos que possuem mentes supostamente iluminadas. É verdade que estudar e aprender matemática requer muito esforço, disciplina, dedicação e persistência, principalmente por que é preciso uma compreensão não superficial para que se possa ver sentido em muitos conteúdos estudados atualmente em matemática e quando se tem uma aptidão por essa área do conhecimento tudo fica mais fácil.

No entanto, apresentar nas escolas a matemática como uma ciência pronta, inquestionável, sempre abstrata e desligada da realidade é contraproducente. Só contribui para perpetuar o mito de que a matemática escolar é privilégio de poucos e difícil, fazendo com que muitos alunos acreditem que não são capazes de aprender, contribuindo assim para uma crescente aversão por essa tão bela e necessária área do conhecimento.

6 METODOLOGIA

Esta proposta de trabalho visa contribuir para uma mudança neste cenário. Usando o software livre de matemática dinâmica GeoGebra, será apresentado uma sequência de atividades de geometria analítica a serem desenvolvidas junto aos alunos de 3ºano do ensino médio que explora conceitos básicos desta disciplina de forma simples, permitindo aos alunos se familiarizarem com o software, seus comandos e ferramentas e desenvolver autonomia para que possam sempre usá-lo para seus estudos posteriores, seja como comprovação, construção ou investigação.

O fato é que nesta etapa o GeoGebra sempre será de ajuda para a compreensão e a clareza do significado de muitos cálculos algébricos executados na resolução de questões e problemas. Por meio de suas construções os alunos poderão sempre associar a álgebra com a geometria que é o fundamento básico da geometria analítica ou método das coordenadas. Muitas vezes em sala de aula priorizam-se mais os aspectos algébricos em detrimento dos geométricos de cada questão ou problema, sendo que ambos têm igual importância. Isso proporcionará que o aluno desenvolva a ideia de que muitas vezes pode-se resolver um problema algebricamente ou geometricamente, ficando por sua conta discernir qual o melhor método a ser adotado. Ademais o uso deste recurso em sala de aula proporcionará um estímulo à participação ativa do aluno no processo de aprendizagem.

Em seguida serão apresentados problemas de geometria euclidiana plana ou geometria sintética para que os alunos possam pensar se poderiam e como conseguiriam resolve-los com o uso da geometria analítica por introduzir um sistema apropriado de coordenadas. Isso proporcionará aos alunos perceberem que a matemática não é uma divisão de compartimentos estanques de temas que devem ser tratados de forma independente uns dos outros, dando oportunidade aos mesmos de vivenciarem uma forte ligação com um conteúdo estudado anteriormente. Estas atividades serão resolvidas também usando o GeoGebra, adotando o mesmo raciocínio analítico.

Para cada assunto de matemática estudado no ensino médio é vantajoso fornecer aplicações, ou seja, a possibilidade de aplicar o tema estudado em problemas da vida real, em outras áreas da matemática, ou mesmo em outras matérias do currículo escolar. A vantagem de se fazer isso reside no fato de que essas ligações tornam o ensino mais interessante, estimulante e o aprendizado mais permanente e satisfatório. Neste caso o enfoque será principalmente a associação com outro tema da matemática, ou seja, a geometria analítica com a geometria euclidiana plana, favorecendo o resgate deste conhecimento ou a oportunidade de conhecê-lo, visto que mesmo hoje muitos alunos chegam ao ensino médio sem nem mesmo terem estudado geometria plana.

Após estas atividades serão propostas algumas atividades de lugares geométricos básicos, visto que raramente este tópico é trabalhado realmente no ensino básico atual, com o intuito de mostrar para o aluno como um conjunto de pontos que possui uma propriedade específica p, constitui o lugar geométrico dessa propriedade p. Dando ênfase nas construções e permitindo ao aluno usar a imaginação para solucionar o problema, pois nas construções geométricas a solução de um problema, em geral, não ocorre imediatamente. É preciso analisar a situação e pensar. Para analisar a situação pode-se imaginar o problema já resolvido para buscar as propriedades que permitirão a solução. Além disso, essa abordagem será dinâmica, pois com o recurso de mover um objeto do GeoGebra será possível mudar a posição dos objetos estudados a fim de que se possa verificar a validade da referida propriedade envolvida no problema.

O uso desta metodologia será uma tentativa de se propor uma ferramenta adicional para o ensino de Geometria Analítica tomando como preceitos a clara compreensão da ligação existente entre os aspectos algébricos e geométricos do tema e a possibilidade de manipulação dos objetos estudados com o intuito de tornar a aprendizagem mais acessível e significativa, pois de outro modo é muito fácil os alunos absorverem o pensamento mecânico que usa sempre como muleta unicamente a memorização de técnicas, dificultando o desenvolvimento da abstração e principalmente não favorecendo nem estimulando a leitura, interpretação e compreensão.

7 ATIVIDADES BÁSICAS

CONTEÚDOS ABORDADOS NAS ATIVIDADES BÁSICAS

ESTUDO DO PONTO

- PLANO CARTESIANO – LOCALIZAÇÕES
- DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS
- PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO
- MEDIANA DE UM TRIÂNGULO
- BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO
- CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

ESTUDO DA RETA

- EQUAÇÃO GERAL DA RETA
- INTERSEÇÃO DE RETAS
- INCLINAÇÃO DE UMA RETA – COEFICIENTE ANGULAR
- EQUAÇÃO REDUZIDA DE UMA RETA
- POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Paralelas

Coincidentes

Concorrentes

Perpendiculares

- DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA
- ÁREA DO TRIÂNGULO
- ÂNGULO ENTRE RETAS

ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

- EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA
- EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA
- POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA
- POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

- INTERSEÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIAS
- POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

ESTUDO DAS CÔNICAS

- ELIPSE
- HIPÉRBOLE
- PARÁBOLA

ATIVIDADE 01. PLANO CARTESIANO – LOCALIZAÇÕES

Esta atividade deve ser executada depois de terem sido trabalhados os conceitos de plano cartesiano, coordenadas e bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares.

Localizar no plano cartesiano os pontos descritos abaixo identificando a que quadrante pertence, se pertence ao eixo das abscissas, das ordenadas, a bissetriz dos quadrantes ímpares ou a bissetriz dos quadrantes pares.

PONTOS: $\boldsymbol{A = (3, 3)}$, $\boldsymbol{B = (-5, 1)}$, $\boldsymbol{C = (-1, -6)}$, $\boldsymbol{D = (4, -4)}$, $\boldsymbol{E = (0, 4)}$, $\boldsymbol{F = (3, 0)}$, $\boldsymbol{G = (-4, 0)}$ ***e*** $\boldsymbol{H = (0, -2)}$ **.**

1. Na Zona Gráfica do GeoGebra escolha a opção exibir malha;

2. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Novo ponto”;

3. Localizar cada ponto dado no plano cartesiano da zona gráfica, levando o cursor até o ponto desejado;

4. Na caixa de entrada digitar as equações das bissetrizes $y = x$ e $y = -x$;

5. Com os pontos já localizados será possível responder se o ponto pertence a um quadrante, a um eixo ou a uma bissetriz, conforme vemos na figura abaixo.

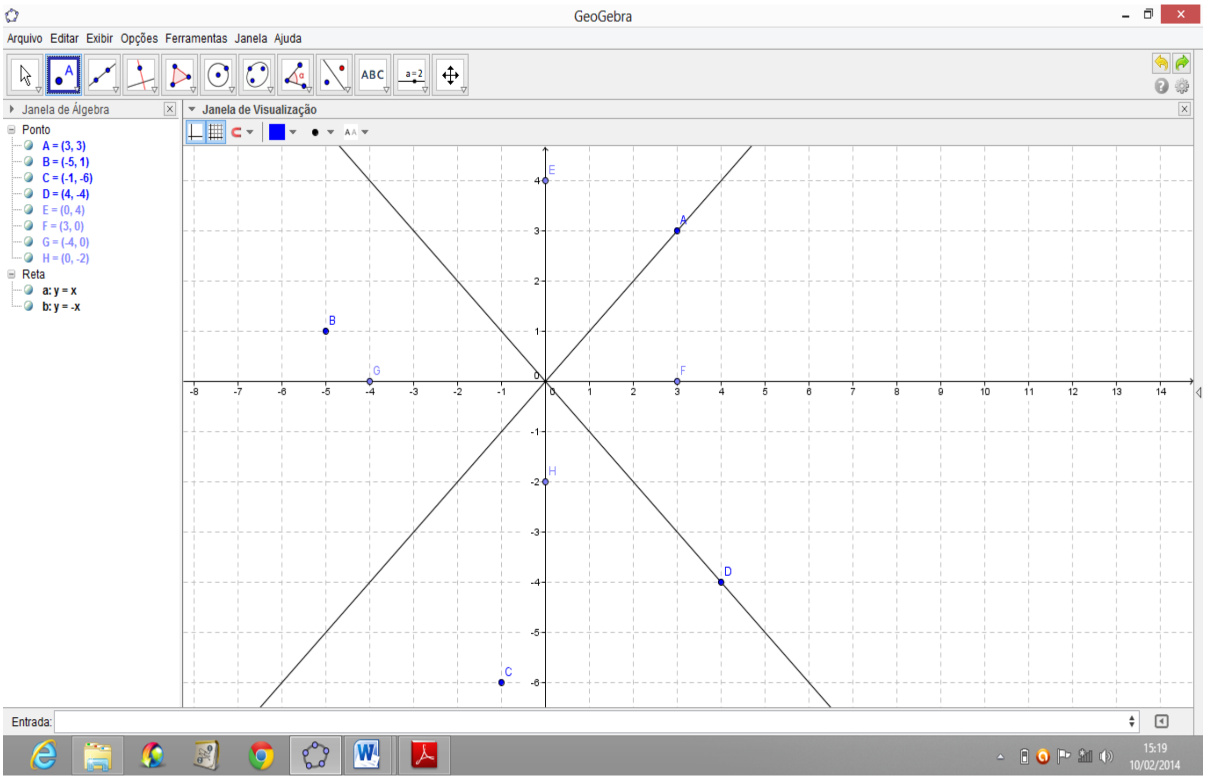


Figura 8 - Localização de pontos no plano cartesiano.

OBS$_1$: Esta atividade também pode ser executada digitando as coordenadas de cada ponto na caixa de entrada que fica na parte inferior do GeoGebra.

OBS$_2$: Embora esta seja uma atividade bem simples, não se deve desconsiderar o fato de que muitos alunos chegam ao 3º ano do ensino médio sem desenvolver a habilidade básica de localizar pontos em espaços bidimensionais. Até mesmo o ENEM, (Exame Nacional do Ensino Médio), contempla a necessidade de se desenvolver esta competência: **Competência de área 2 – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.** E também a habilidade relacionada: **H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.**

ATIVIDADE 02. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Atividade a ser desenvolvida após ser trabalhado o cálculo da distância entre dois pontos.

Distância entre dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, é a medida do segmento de extremidades A e B. Pela aplicação do teorema de Pitágoras seu cálculo será dado por:

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Dados os pontos $\boldsymbol{A = (-2,4)}$, $\boldsymbol{B = (-5,1)}$ ***e*** $\boldsymbol{C = (-6,5)}$, ***localizar estes pontos no sistema cartesiano ortogonal e determinar*** $\boldsymbol{d(A,B)}$, $\boldsymbol{d(B,C)}$ ***e*** $\boldsymbol{d(A,C)}$.

1. Na Zona Gráfica do GeoGebra escolha a opção exibir malha;

2. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Novo ponto” e localizar os três pontos dados; (ou digitá-los na caixa de entrada).

3. Na janela 3 da barra de Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento definido por dois pontos” e determinar os segmentos AB, BC e AC;

4. O GeoGebra exibirá as distâncias pedidas na janela de álgebra;

Outra opção é, depois de localizar os pontos no sistema cartesiano, ir até a janela 8 da barra de Ferramenta de acesso rápido e clicar no ícone “Distância, Comprimento ou Perímetro”, e assim determinar o comprimento dos segmentos AB, BC e AC;

Neste caso o GeoGebra exibirá o valor do comprimento de cada segmento na própria figura, na janela de visualização ou Zona Gráfica, conforme a figura abaixo.

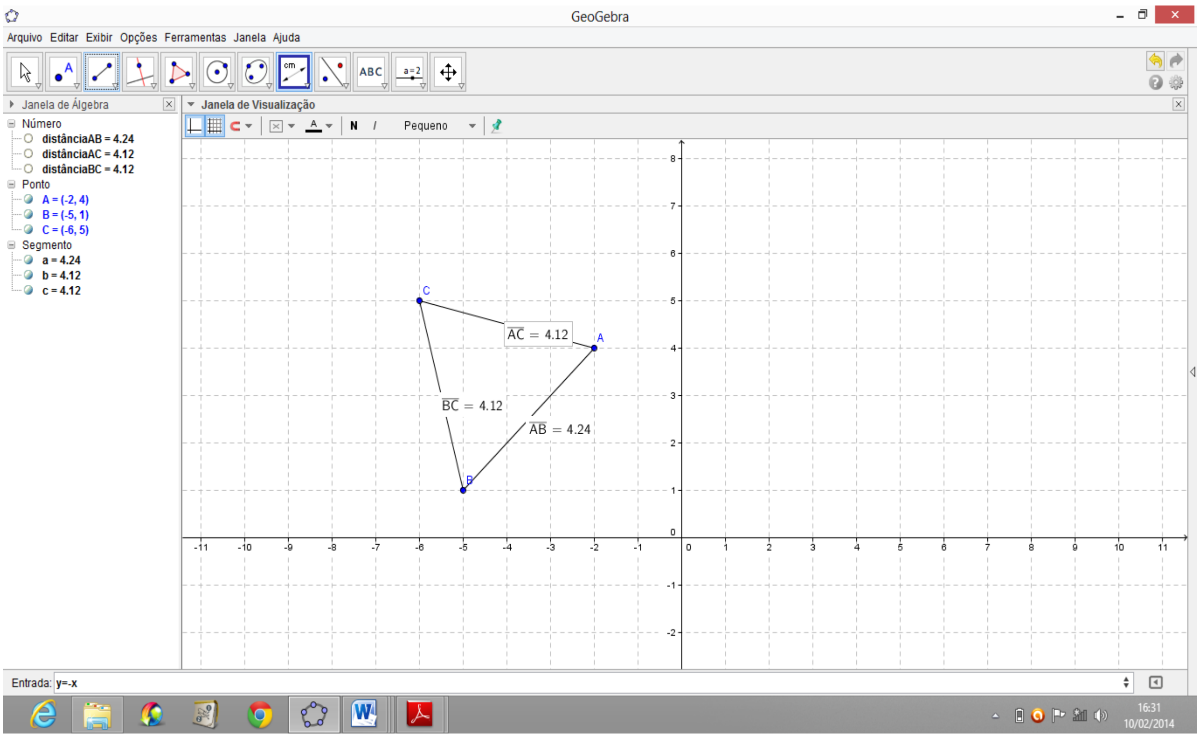


Figura 9 - Cálculo de $\boldsymbol{d(A,B)}, \boldsymbol{d(B,C)}$ ***e*** $\boldsymbol{d(A,C)}$.

ATIVIDADE 03. PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Atividade a ser desenvolvida após ser trabalhado o cálculo das coordenadas do ponto médio de um segmento de reta.

Dados dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, o ponto médio (M) é o ponto divisor que divide o segmento em duas partes iguais. O cálculo das coordenadas do ponto médio de um segmento de reta se dará pela média aritmética de suas coordenadas, ou seja:

$$\boxed{M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

Determinar o ponto M, médio de AB, quando $\boldsymbol{A = (3, -2)}$ ***e*** $\boldsymbol{B = (-1, -6)}$**.**

1. Na Zona Gráfica do GeoGebra escolha a opção exibir malha;

2. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Ponto Médio ou Centro" e localizar os dois pontos dados; ao executar estes comandos o GeoGebra automaticamente exibirá o ponto C, médio do segmento AB;

3. Clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto C e escolher a opção renomear, renomeando assim o ponto médio como ponto M. Na janela de álgebra aparecerão as coordenadas do ponto M, médio de AB, conforme vemos na figura abaixo.

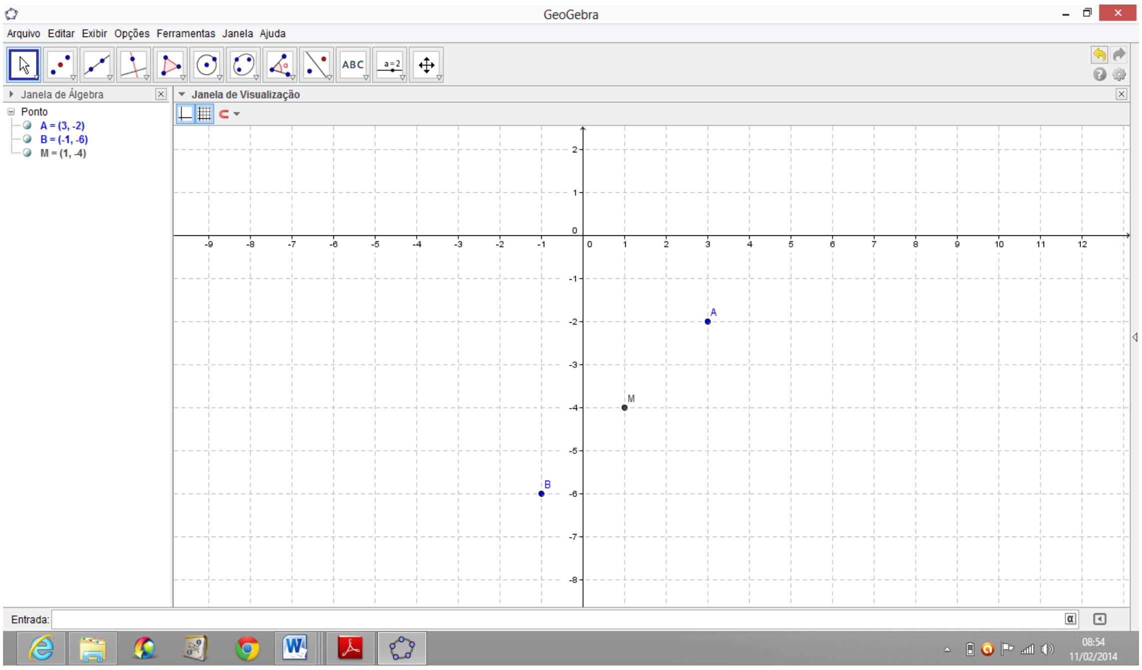


Figura 10: Cálculo das coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

ATIVIDADE 04. MEDIANAS E BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

Atividade a ser executada após serem trabalhados os conceitos de Mediana de um triângulo e Baricentro de um triângulo.

Dado um triângulo ABC de vértices $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, chamamos de mediana de um triângulo o segmento cujas extremidades são um dos vértices desse triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice. Um triângulo possui três medianas e o ponto de encontro destas três medianas é o ponto G chamado de Baricentro do triângulo. O cálculo das coordenadas do Baricentro de um triângulo se dará por:

$$\boxed{G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)}$$

Seja um triângulo ABC de vértices $A = (2,3)$, $B = (4,5)$ e $C = (6,1)$, determinar o comprimento das medianas AE, BF e CD e as coordenadas do Baricentro deste triângulo.

1. Na Zona Gráfica do GeoGebra escolha a opção exibir malha;

2. Na Janela 5 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Polígono” e localizar os três pontos dados fechando o polígono (triângulo ABC, sequência $ABCA$);

3. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Ponto Médio ou Centro” e localizar os pontos D, E e F, respectivamente médios de AB, BC e AC;

4. Na janela 3 da barra de Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento definido por dois pontos” e determinar os segmentos AE, BF e CD. O GeoGebra exibirá as distâncias pedidas, isto é, o comprimento das medianas AE, BF e CD na janela de álgebra;

5. Na janela 2 da barra de Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Interseção de Dois Objetos” e determinar o ponto G, que é a interseção das três medianas. As coordenadas de G (Baricentro) aparecerão na janela de álgebra, conforme observamos na figura abaixo.

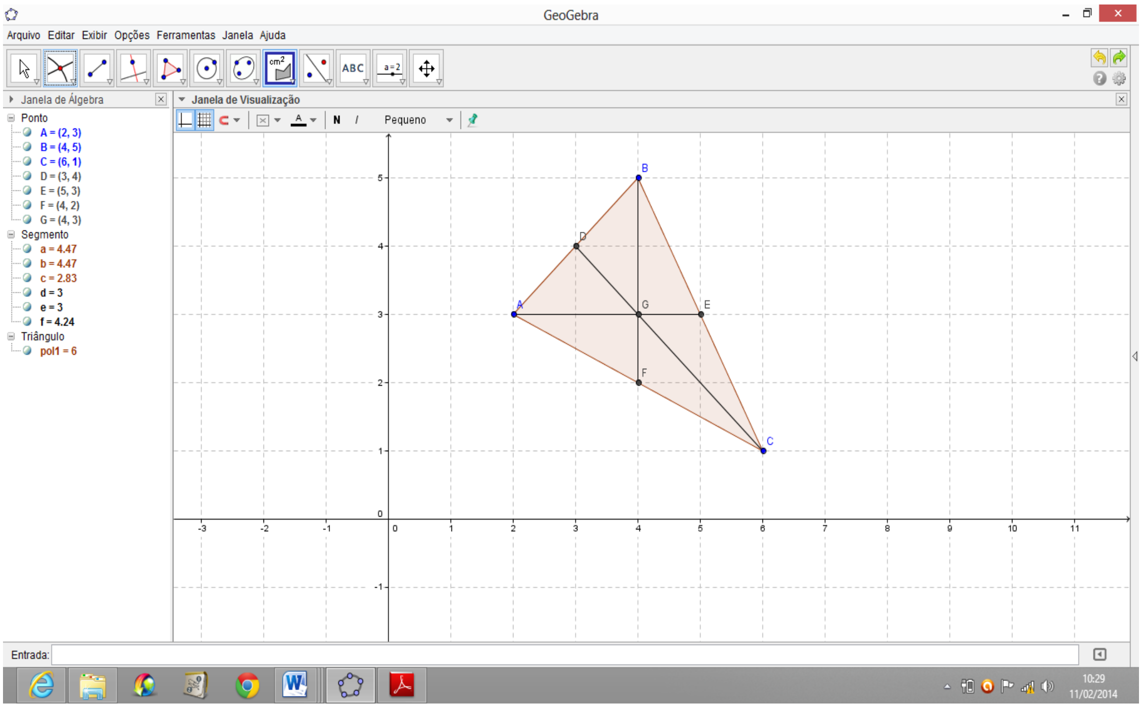


Figura11: Medianas e Baricentro de um triângulo $\boldsymbol{ABC}$

ATIVIDADE 05. CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Atividade a ser executada após ser trabalhado o conceito de condição de alinhamento de três pontos.

Dados três pontos distintos situados no plano cartesiano e de coordenadas: $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, estes pontos estarão alinhados (colineares) se existir uma reta que passe pelos três. Neste caso estarão alinhados se, e somente se, suas coordenadas verificarem:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

Verificar se cada conjunto de três pontos dados abaixo é colinear:

I. $\boldsymbol{A = (0, 2)}$, $\boldsymbol{B = (-3, 1)}$ ***e*** $\boldsymbol{C = (3, 3)}$; ***II.*** $\boldsymbol{D = (-3, 4)}$, $\boldsymbol{E = (3, 1)}$ ***e*** $\boldsymbol{F = (4, -2)}$;

1. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Novo ponto” e localizar os pontos A, B, C, D, E e F na Zona Gráfica;

2. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Reta definida por Dois Pontos” e clicar nos pontos A e B, perceberá que a reta r passará por C. Agora clicar nos pontos$D$ e E, perceberá que a reta s não passará por F, Conforme vemos abaixo.

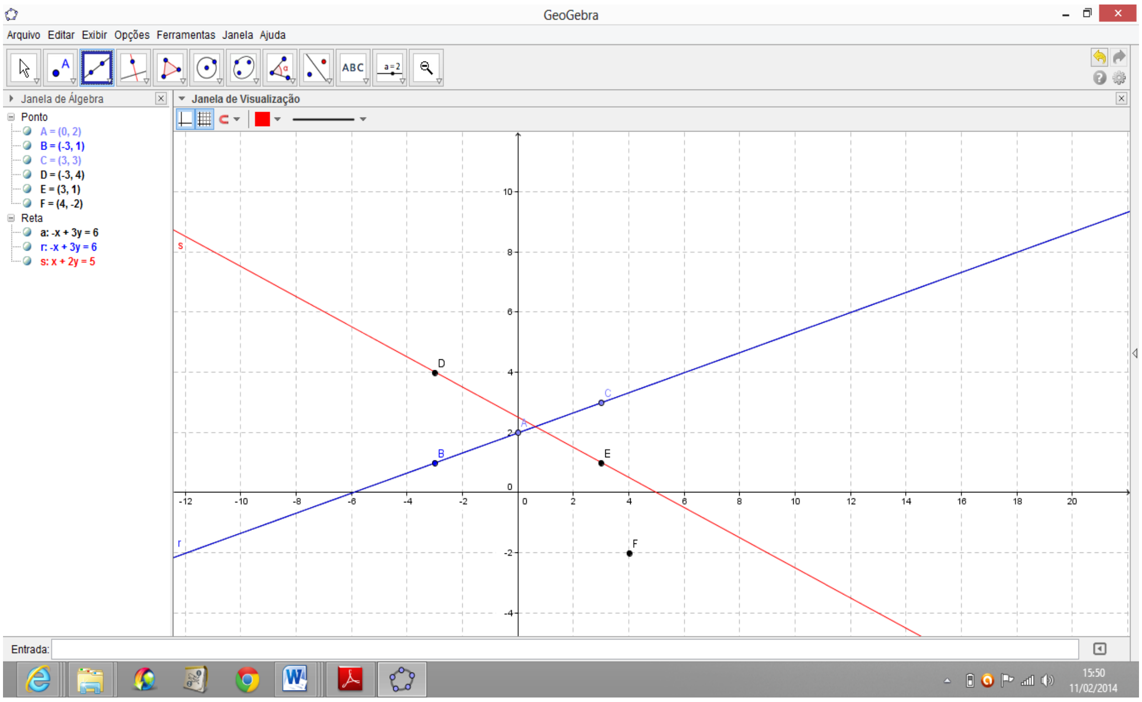


Figura 12: Condição de Alinhamento de três pontos

ATIVIDADE 06. EQUAÇÃO GERAL DA RETA

Atividade a ser executada após ser trabalhado o conceito de Forma Geral da Equação de uma Reta.

A toda reta r do plano cartesiano está associada pelo menos uma equação do tipo $ax + by + c = 0$, denominada equação geral da reta, em que a, b e c são números reais, com a e b não nulos simultaneamente e além disso x e y são as coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ genérico de r. Costuma-se escrever:

$$\boxed{r : ax + by + c = 0.}$$

Obter a equação geral da reta que passa pelo ponto $A = (1, 2)$ e pelo ponto médio do segmento BC, sendo $B = (2, -2)$ e $C = (4, 3)$.

1. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Novo ponto" e localizar os pontos A, B e C na Zona Gráfica;

2. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Ponto Médio ou Centro" e localizar o ponto D, médio de BC;

3. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Reta definida por Dois Pontos" e clicar nos pontos A e D (médio de BC). O GeoGebra construirá a reta desejada na Zona Gráfica e na Zona de Álgebra aparecerá a equação na forma $ax + by = -c$ que facilmente mudamos para $ax + by + c = 0$.

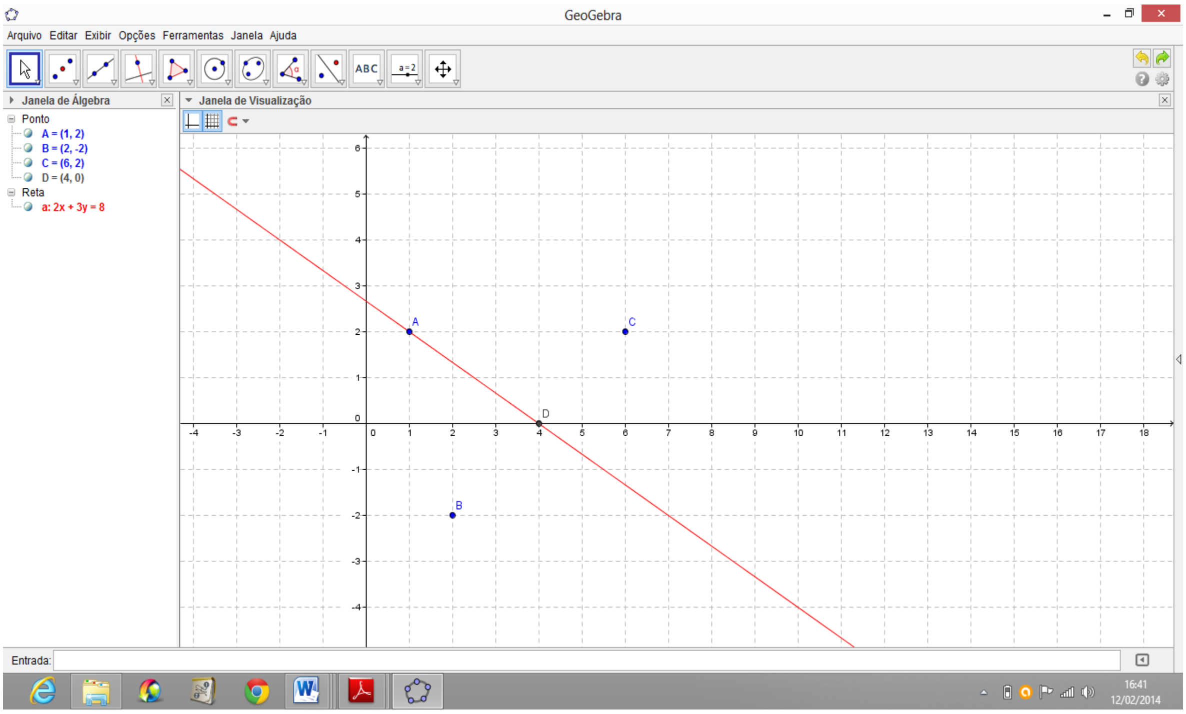


Figura 13: Equação Geral da Reta

ATIVIDADE 07. INTERSEÇÃO DE RETAS

Atividade que aborda o conceito de Interseção de duas Retas.

Todo ponto de interseção de duas retas tem de satisfazer às equações de ambas as retas. Portanto, obtemos o ponto comum $P = (x_0, y_0)$ a duas retas concorrentes resolvendo o sistema formado pelas equações:

$$\boxed{\begin{cases} r : a_1x + \ b_1\, y + \ c_1 = 0 \\ s : a_2x + \ b_2\, y + \ c_2 = 0 \end{cases}}$$

Sendo r e s duas retas concorrentes, determinar o ponto de interseção das duas retas $r : x - 2y + 2 = 0$ e $s : 3x + 2y - 10 = 0$.

1. Na caixa de entrada do GeoGebra escrever as equações das retas r e s dadas. Estas equações serão exibidas na Zona algébrica do GeoGebra e serão denominadas de retas a e b. Clicar com o botão direito do mouse sobre as retas a e b e renomea-las para retas r e s;

2. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Interseção de Dois Objetos" e localizar o ponto de interseção das duas retas clicando sobre o mesmo. O GeoGebra exibirá o ponto procurado que também é solução do sistema formado pelas equações das retas r e s.

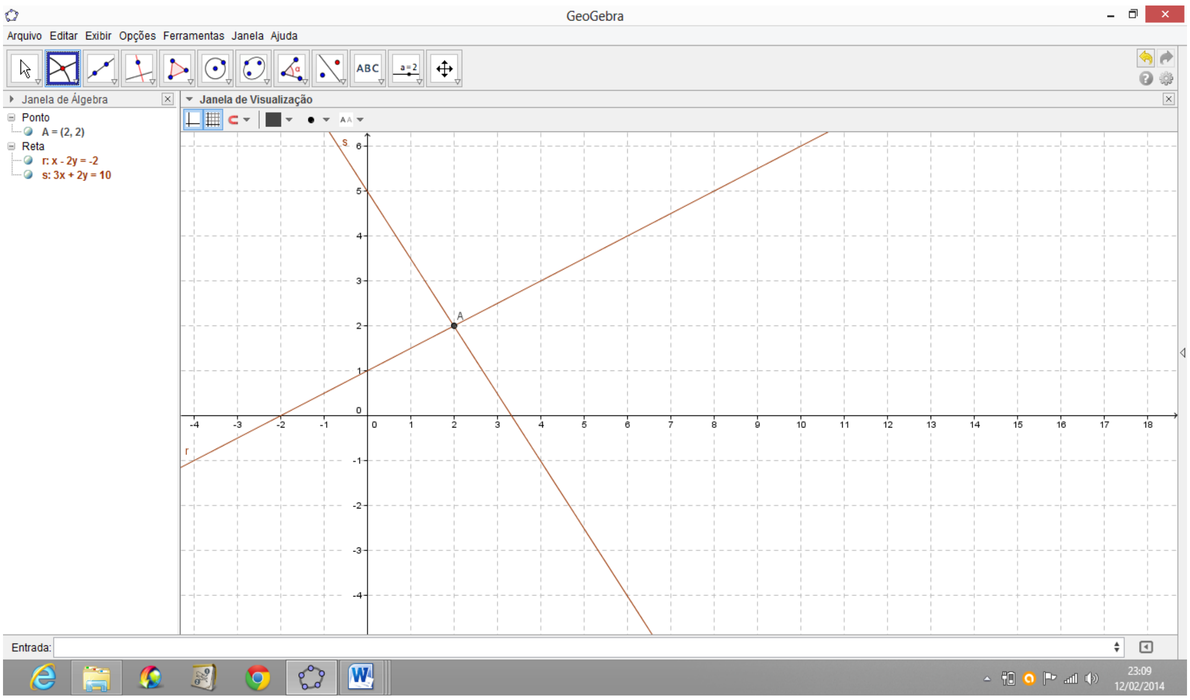


Figura 14: Interseção de duas retas

ATIVIDADE 08. INCLINAÇÃO DE UMA RETA – COEFICIENTE ANGULAR

Atividade que aborda o conceito de Inclinação de uma Reta – Declividade ou Coeficiente angular.

Consideremos uma reta r contendo os pontos $A = (x_1, y_1)\ e\ B = (x_2, y_2)$, de inclinação $\propto$ em relação ao eixo x. O coeficiente angular ou a declividade dessa reta r é o número real m que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação $\propto$, ou seja:

$$\boxed{m = tg \propto \quad ou \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Encontrar o coeficiente angular (ou declividade) m da reta que passa pelos pontos: $\boldsymbol{A = (3, 2)\ e\ B = (-3, -1)}$**.**

1. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Reta definida por Dois Pontos” e clicar nos pontos A e B dados, perceberá que a reta será construída na Zona Gráfica;

2. Na Janela 8 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Inclinação” e clicar na reta construída. O GeoGebra exibirá o coeficiente angular m na Zona Algébrica e na Zona Gráfica, chamando de a_1. Agora clicar no coeficiente angular com o botão direito do mouse e renomear ele para m.

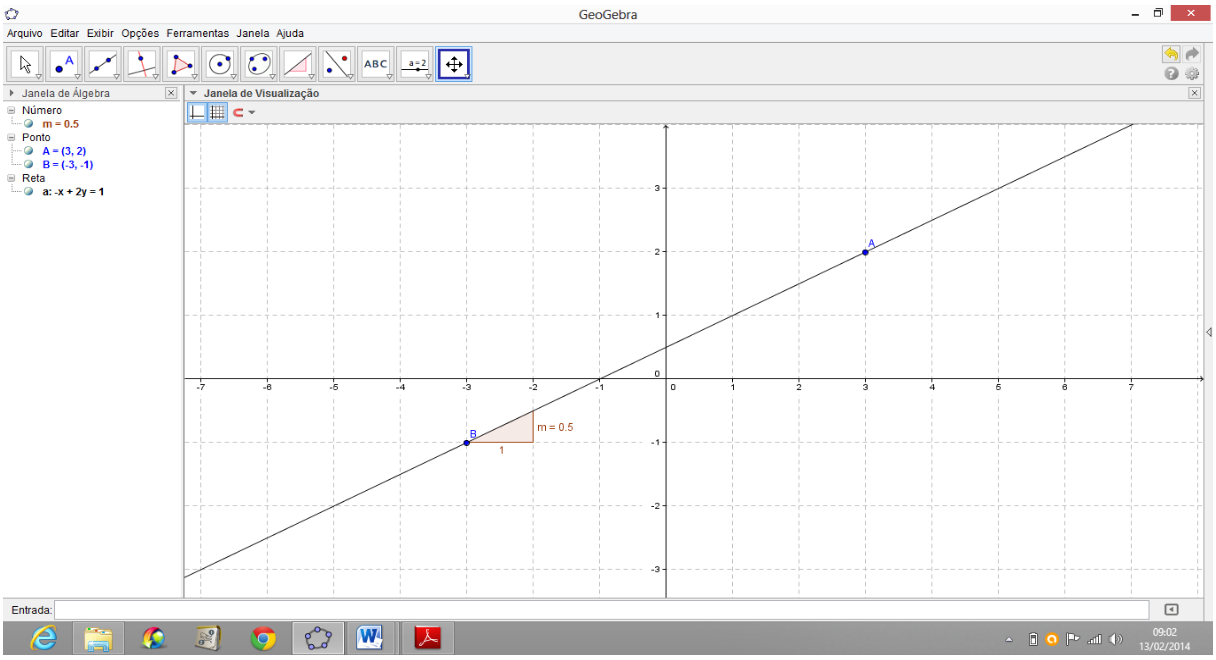


Figura 15: Inclinação ou Coeficiente Angular da Reta

ATIVIDADE 09. EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

Atividade que aborda o conceito de Forma Reduzida da Equação de uma Reta.

Sejam $r: ax + by + c = 0$ a reta cuja medida do ângulo de inclinação é $\propto$ e $P = (x, y)$ um ponto genérico de r. A reta r intercepta o eixo das ordenadas em um ponto Q cuja abcissa é nula, isto é, $Q = (0, n)$. Assim o coeficiente angular da reta que passa por $Q = (0, n)$ e $P = (x, y)$ é dado por: $m = \frac{y-n}{x-0} \Rightarrow m = \frac{y-n}{x} \Rightarrow y = mx + n$. Esta última expressão é chamada de equação reduzida da reta.

$$\boxed{y = mx + n, \quad \text{onde} \quad m = -\frac{a}{b} \ \text{e} \ n = -\frac{c}{b} \ \ se \ \ b \neq 0}$$

Escrever na forma reduzida as equações das retas r e s que passam respectivamente pelos pontos $\boldsymbol{A = (1, 1)}$ ***e*** $\boldsymbol{B = (3, 5)}$, $\boldsymbol{C = (-2, 3)}$ ***e*** $\boldsymbol{D = (1, 0)}$.

1. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Reta definida por Dois Pontos” e clicar nos pontos A e B e depois C e D dados, perceberá que as retas serão construídas na Zona Gráfica e suas respectivas equações na Zona Algébrica;

2. Clicar com o botão direito do Mouse sobre as retas e escolher a opção “Equação $y = ax + b$". O GeoGebra exibirá as respectivas equações na Zona Algébrica nesta nova forma.

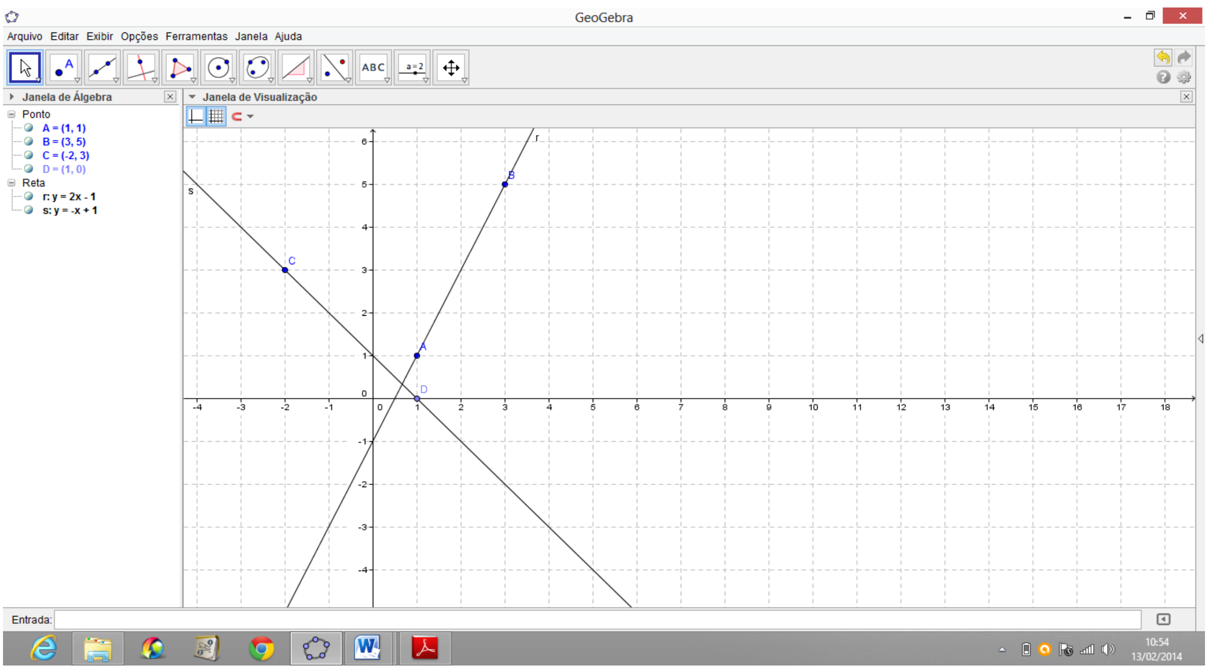


Figura 16: Equação Reduzida da Reta

ATIVIDADE 10. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Atividade que aborda o conceito de Posições Relativas entre duas Retas. (paralelas , coincidentes, concorrentes e perpendiculares)

Duas retas r e s contidas no mesmo plano são paralelas ou concorrentes. Veja:

Paralelas $\begin{cases} iguais(coincidentes), se\ r \cap s = r \\ distintas,\ \ se\ r \cap s = \emptyset \end{cases}$

Concorrentes $\begin{cases} perpendiculares, se\ r\ e\ s\ determinam\ quatro\ \text{â}ngulos\ retos \\ obl\acute{\imath}quas, se\ r\ e\ s\ determinam\ dois\ \text{â}ngulos\ agudos\ e\ dois\ obtusos \end{cases}$

De modo que ao comparar o coeficiente angular m e o coeficiente linear n de duas retas r e s no plano, teremos as seguintes possibilidades:

- $(r = s)$ Paralelas iguais (coincidentes): $m_r = m_s$ e $n_r = n_s$.
- $(r \parallel s)$ Paralelas distintas: $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$.
- $(r \times s)$ Concorrentes oblíquas: $m_r \neq m_s$ e $m_r . m_s \neq -1$.
- $(r \perp s)$ Concorrentes perpendiculares: $m_r . m_s = -1\ ou\ m_r = -\frac{1}{m_s}$.

Determinar a posição relativa entre os seguintes pares de retas:

a) $\boldsymbol{r : 2x - 3y + 5 = 0\ e\ s : 4x - 6y - 1 = 0}$**.**
b) $\boldsymbol{t : 4x - 2y + 2 = 0\ e\ u : 3x + 2y - 10 = 0}$**.**
c) $\boldsymbol{v : 2x + 3y - 5 = 0\ e\ w : 3x - 2y + 9 = 0}$**.**

1. Na caixa de entrada do GeoGebra escrever o par de equações dado, perceberá que as retas serão construídas na Zona Gráfica e suas respectivas equações na Zona Algébrica;

2. Clicar com o botão direito do Mouse sobre as retas e escolher a opção "Equação $y = ax + b$". O GeoGebra exibirá as respectivas equações na Zona Algébrica nesta nova forma;

3. Clicar com o botão direito do Mouse sobre as retas e escolher a opção "Renomear". Renomear para retas $r, s, t, u, v\ e\ w$ respectivamente;

4. Na Janela 8 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Ângulo" e clicar no par de retas dado. O GeoGebra exibirá o ângulo formado pelas duas retas na Zona

Gráfica e na Zona Algébrica, a saber: agudo ($0 < \propto < 90°$), obtuso ($90 < \propto < 180°$), nulo ($\propto = 0°$) ou reto ($\propto = 90°$).

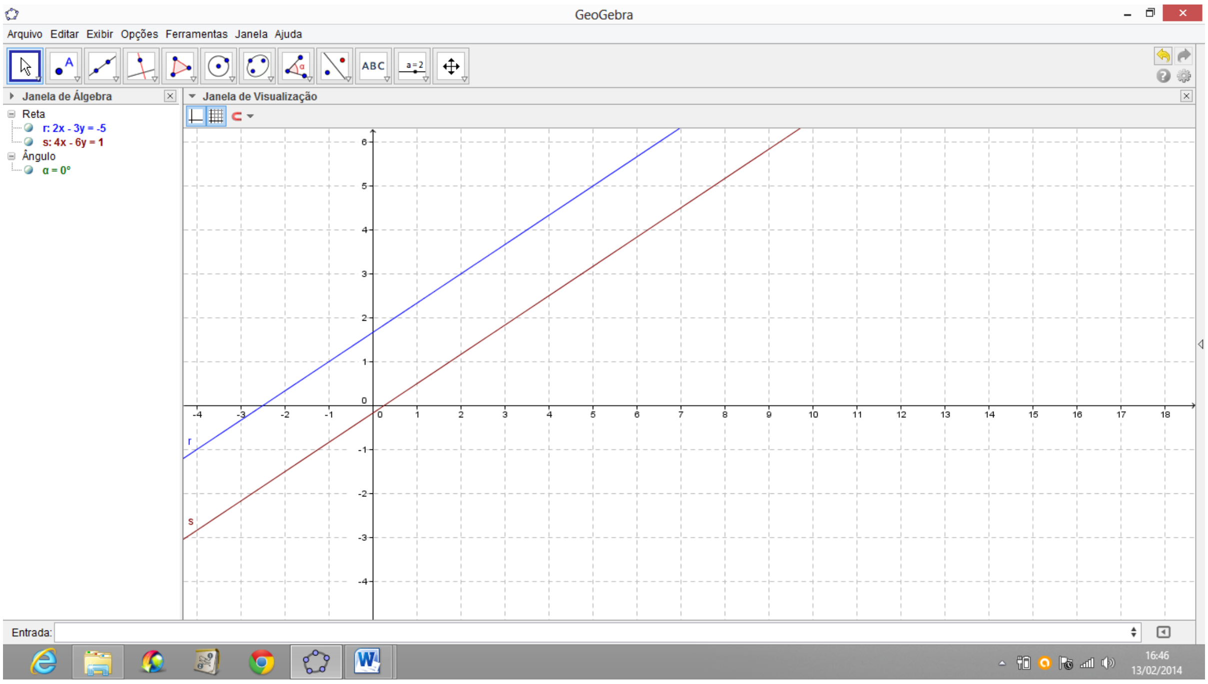


Figura 17: Retas Paralelas Distintas

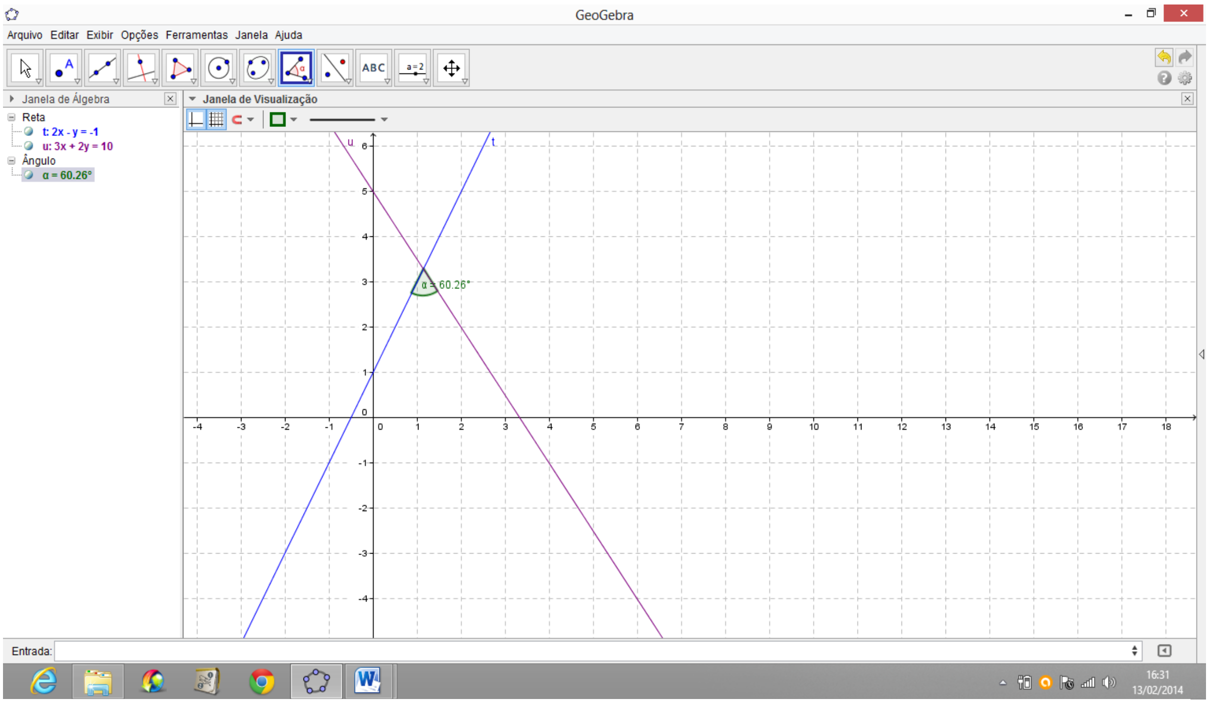


Figura 18: Retas Concorrentes

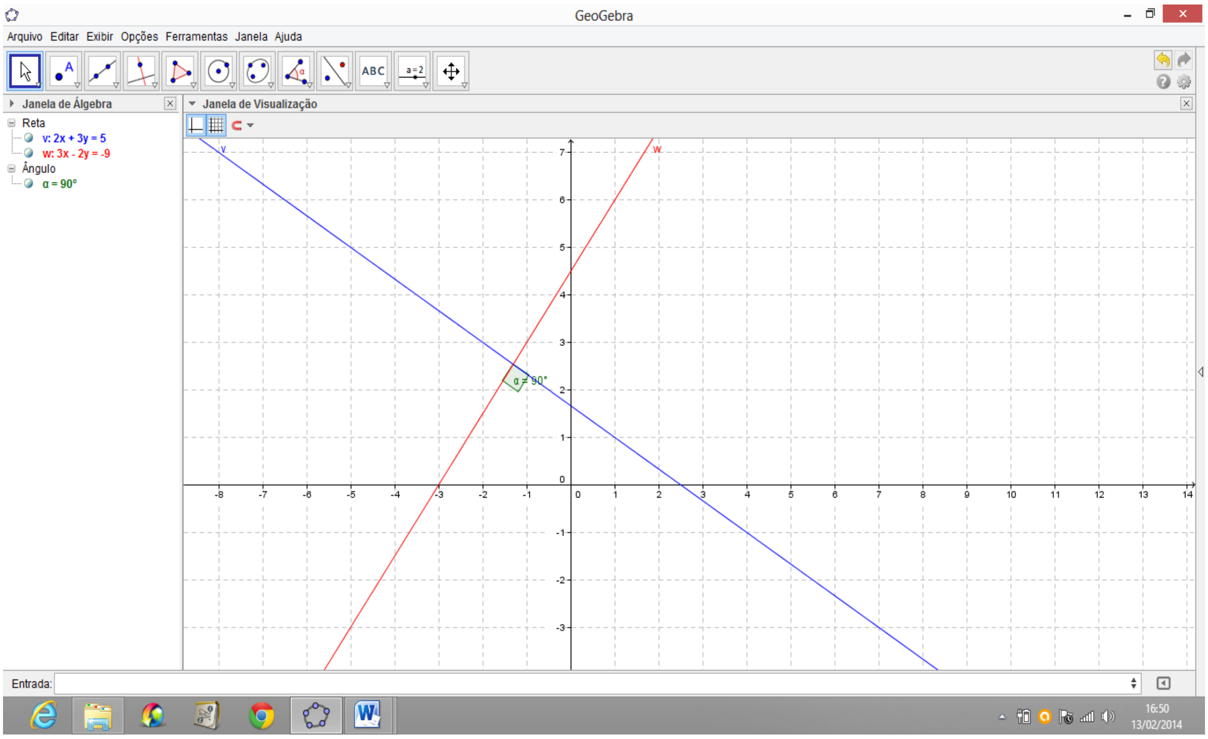


Figura 19: Retas Perpendiculares

ATIVIDADE 11. DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

Atividade que aborda o conceito de Distância entre Ponto e Reta.

A distância entre um ponto (P) e uma reta (r) é a distância do ponto (P) ao pé da perpendicular (P') à reta dada, traçada pelo ponto. Assim a distância entre $P\ e\ r$ (indica-se por $d_{P,r}\ ou\ d(P,r)$ é a distância entre $P\ e\ P'$, sendo P' o pé da perpendicular a r, conduzida por P. O ponto P' também é chamado de Projeção Ortogonal de P sobre r.

Assim a Distância de um ponto $P = (x_0, y_0)$ a uma reta $r : ax + by + c = 0$ será dado por:

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Calcular a Distância do Ponto $\boldsymbol{P = (3,3)}$ à reta $\boldsymbol{r = 3x + 4y - 1 = 0}$.

1. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Novo Ponto" e localizar o ponto pedido. O GeoGebra o designará como ponto A. Clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto A e renomear ele para ponto P;

2. Na caixa de entrada do GeoGebra escrever a equação pedida. O GeoGebra exibirá reta na Zona Gráfica. Clicar com o botão direito do Mouse sobre a reta e renomear ela para reta r;

3. Na janela 8 da barra de Ferramenta de acesso rápido clicar no ícone “Distância, Comprimento ou Perímetro”, depois Clicar no ponto P e na reta r. O GeoGebra exibirá a distância desejada na Zona Gráfica e também na Zona Algébrica, conforme podemos ver na figura abaixo.

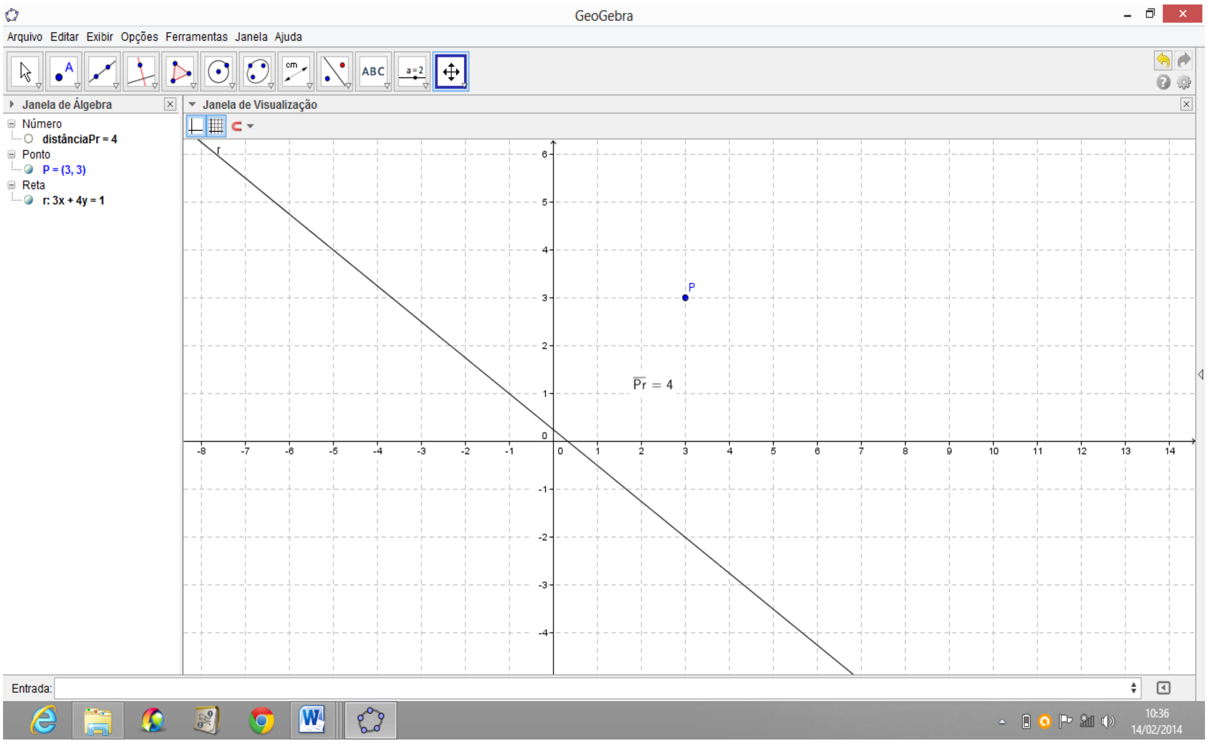


Figura 20: Distância entre Ponto e Reta.

ATIVIDADE 12. ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Atividade que aborda o conceito de Área de uma região triangular.

Dado um triângulo ABC de vértices $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, então a área dessa região triangular é dada por:

$$\boxed{\text{Área}\ (T) = \frac{1}{2}|D| \quad onde\ D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

Determinar a área do triângulo cujos vértices são os pontos $\boldsymbol{A = (4, 1)}$, $\boldsymbol{B = (-2, 3)}$ ***e*** $\boldsymbol{C = (0, -6)}$.

1. Na Janela 5 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Polígono” e localizar os três pontos dados fechando o polígono (triângulo ABC, sequência $ABCA$), O GeoGebra exibirá o polígono na Zona Gráfica;

2. Na Janela 8 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Área” e clicar dentro do polígono (triângulo ABC), O GeoGebra exibirá o valor da área do triângulo na Zona Gráfica e na Zona Algébrica.

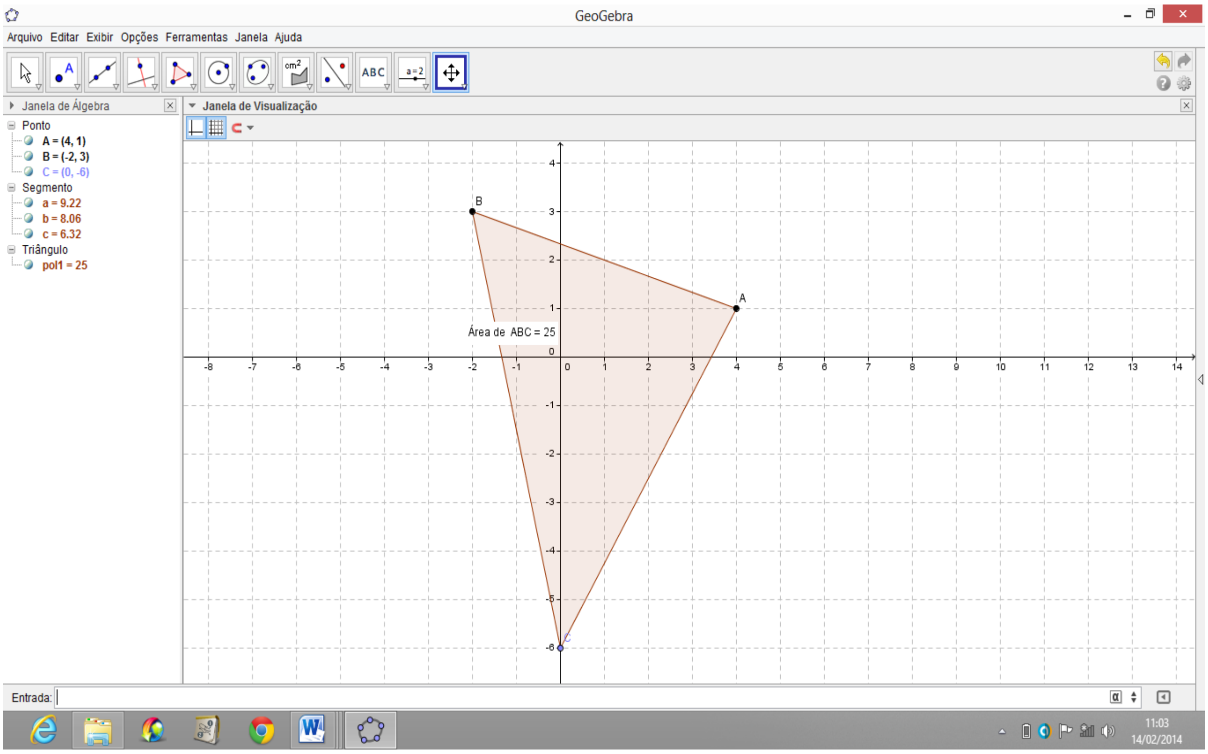


Figura 21: Área de um Triângulo

ATIVIDADE 13. ÂNGULO ENTRE RETAS

Atividade que aborda o conceito de Ângulo de Duas Retas Concorrentes.

Sejam r e s duas retas concorrentes e não perpendiculares (se $r \parallel s$ ou $r \perp s$, o problema é imediato). Elas determinam quatro ângulos, dois a dois, opostos pelo vértice e congruentes, sendo dois agudos e dois obtusos.

Considere as inclinações das retas r e s, respectivamente, $\propto_1$ e $\propto_2$. Sendo θ um ângulo formado pelas retas r e s, teremos pelo teorema do ângulo externo que: $\propto_2 = \propto_1 + \theta$ ou $\theta = \propto_2 - \propto_1$. Daí: $tg\ \theta = tg\ (\propto_2 - \propto_1)$.

Lembrando que $tg\ (a-b) = \frac{tg\ a - tg\ b}{1 + tg\ a \cdot tg\ b}$, temos: $tg\ \theta = \frac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_2 \cdot tg\ \alpha_1}$

Como os coeficientes angulares e de r e s são, respectivamente, $m_1 = \text{tg}\ \propto_1$ e $m_2 = tg\ \propto_2$, vem: $tg\ \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$ (1).

Como estamos interessados em calcular a medida do ângulo agudo formado por duas retas concorrentes e não perpendiculares, podemos considerar o módulo dessa expressão obtida em (1). Assim a medida θ do ângulo agudo formado por r e s é tal que:

$$\boxed{tg\ \theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|}$$

Em que m_1 e m_2 são, respectivamente, os coeficientes angulares de r e s.

Determinar a medida $\boldsymbol{\theta}$ do ângulo agudo formado pelas retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$, sendo $\boldsymbol{r: 3x - y - 11 = 0}$ e $\boldsymbol{s: 2x + y - 7 = 0}$.

1. Na caixa de entrada do GeoGebra escrever o par de equações dado, perceberá que as retas serão construídas na Zona Gráfica. Clicar com o botão direito do Mouse sobre as retas e escolher a opção "Renomear". Renomear para retas r e s respectivamente;

2. Na Janela 8 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Ângulo" e clicar no par de retas dado. O GeoGebra exibirá o ângulo formado pelas duas retas na Zona Gráfica e na Zona Algébrica.

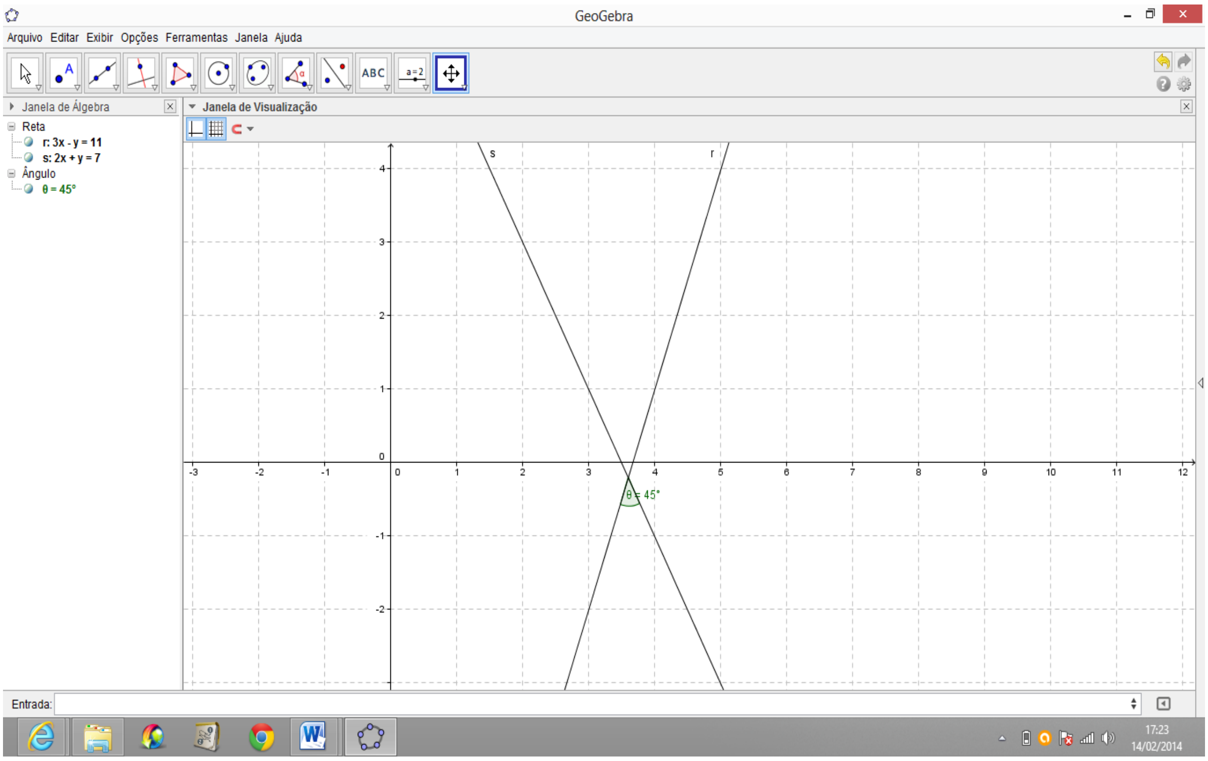


Figura 22: Ângulo Entre Duas Retas

ATIVIDADE 14. EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Atividade que aborda o conceito de Equação Reduzida da Circunferência.

Dados um ponto C, pertencente a um plano $\propto$, e uma distância r não nula, chama-se circunferência λ o conjunto dos pontos P de $\propto$ que estão à distância r do ponto C.

$$\lambda = \{P \in \propto / PC = r\}$$

Consideremos a Circunferência λ de centro $C = (a, b)$ e raio r. Um ponto $P = (x, y)$ pertence a λ se, e somente se, a distância PC é igual ao raio r.

Chama-se equação reduzida da circunferência aquela que é satisfeita exclusivamente pelos pontos $P(x, y)$ pertencentes à curva. É imediato que um ponto genérico $P \in \lambda$ verifica a condição $PC = r$. Portanto temos:

$P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, daí, vem a equação reduzida da circunferência.

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Achar a equação reduzida da circunferência de centro $C = (1, 2)$ e raio $r = 3$.

1. Na Janela 6 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Circulo dados Centro e Raio", localizar o centro e, depois, digitar a medida do raio na caixa que aparecerá na tela. O GeoGebra exibirá a circunferência na Zona Gráfica e sua equação reduzida na Zona Algébrica.

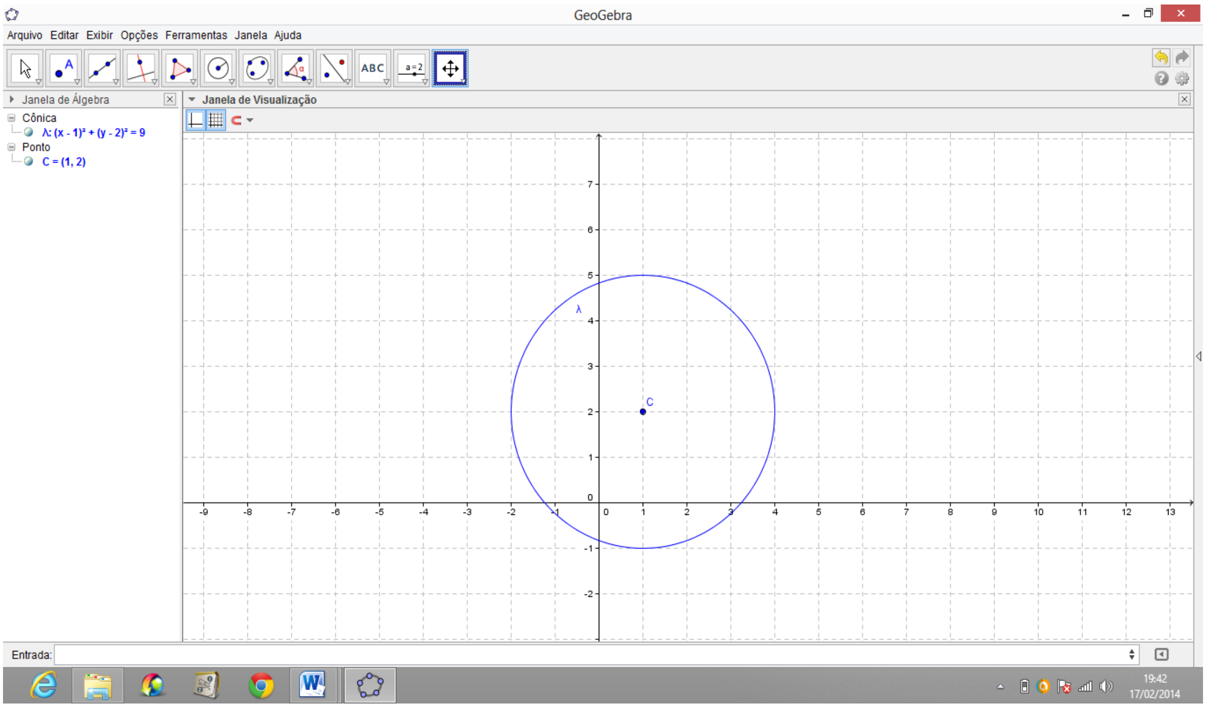


Figura 23: Equação Reduzida da Circunferência

ATIVIDADE 15. EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA

Atividade que aborda o conceito de Equação Geral da Circunferência.

Consideremos a Circunferência λ de centro $C = (a, b)$ e raio r, cuja equação na forma reduzida é: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Desenvolvendo esta equação, obtemos: $(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) = r^2$, isto é, encontramos a forma geral ou equação geral da circunferência.

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0}$$

Escrever na forma geral, a equação de uma circunferência de centro $C = (-1, 3)$ e raio $r = 4$.

1. Na Janela 6 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Circulo dados Centro e Raio”, localizar o centro e, depois, digitar a medida do raio na caixa que aparecerá na tela. O GeoGebra exibirá a circunferência na Zona Gráfica e sua equação reduzida na Zona Algébrica.

2. Clicar com o botão direito do mouse sobre a circunferência e escolher a opção Equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = -f$. O GeoGebra exibirá a circunferência na Zona Gráfica e sua equação Geral na Zona Algébrica.

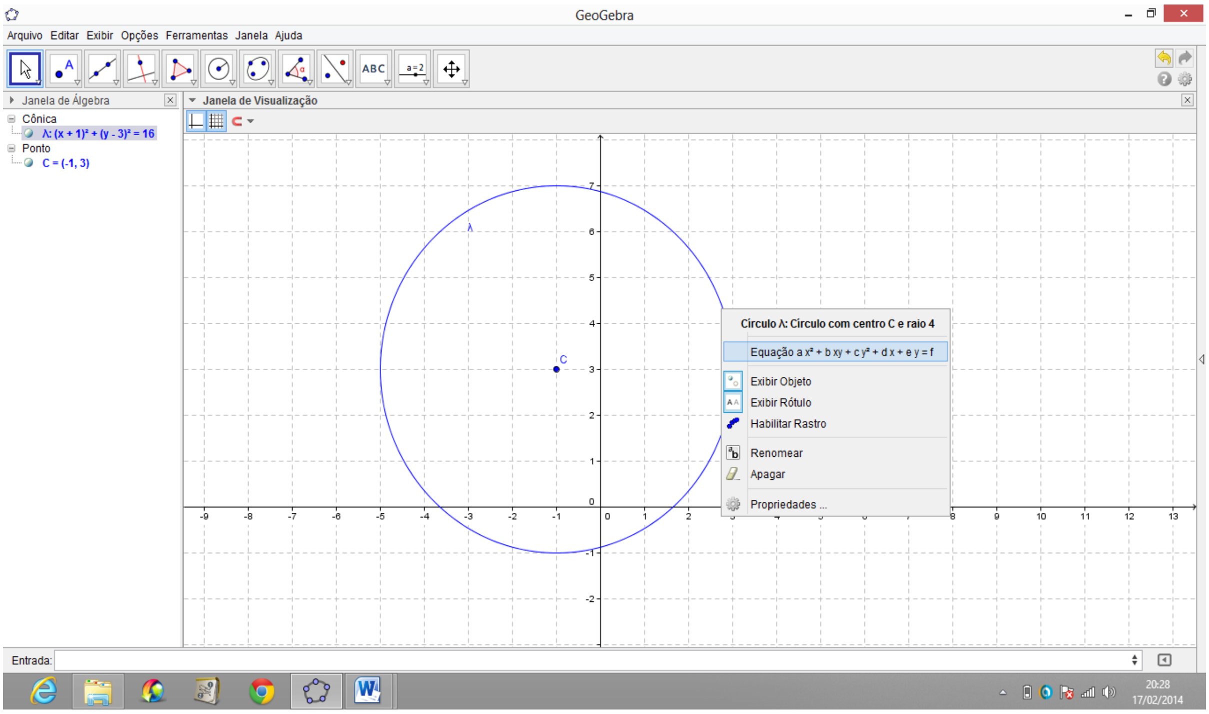


Figura 24: Equação Geral da Circunferência.

ATIVIDADE 16. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

Atividade que aborda o conceito Posições Relativas entre Ponto e Circunferência.

Quando temos um ponto $P = (x, y)$ e uma Circunferência λ de centro $C = (a, b)$ e raio r, as possíveis posições relativas de P e λ são:

1. O ponto pertence à circunferência.

$$d(P, C) = r \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow P \in \lambda.$$

2. O ponto é interno à circunferência.

$$d(P,C) < r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 < 0 \Leftrightarrow P \text{ é } interno\ a\ \lambda.$$

3. O ponto é externo à circunferência.

$$d(P,C) > r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 > 0 \Leftrightarrow P \text{ é } externo\ a\ \lambda.$$

Dada uma circunferência λ de centro $C = (5,1)$ e raio $r = 4$, dê as posições dos pontos $A = (3,2)$, $B = (5,-3)$ e $P = (2,-3)$ em relação a λ.

1. Na Janela 6 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Circulo dados Centro e Raio”, localizar o centro e, depois, digitar a medida do raio na caixa que aparecerá na tela. Após isso, localizar os pontos A, B e P. Ficará claro qual ponto, é externo, qual é interno e qual pertence a λ.

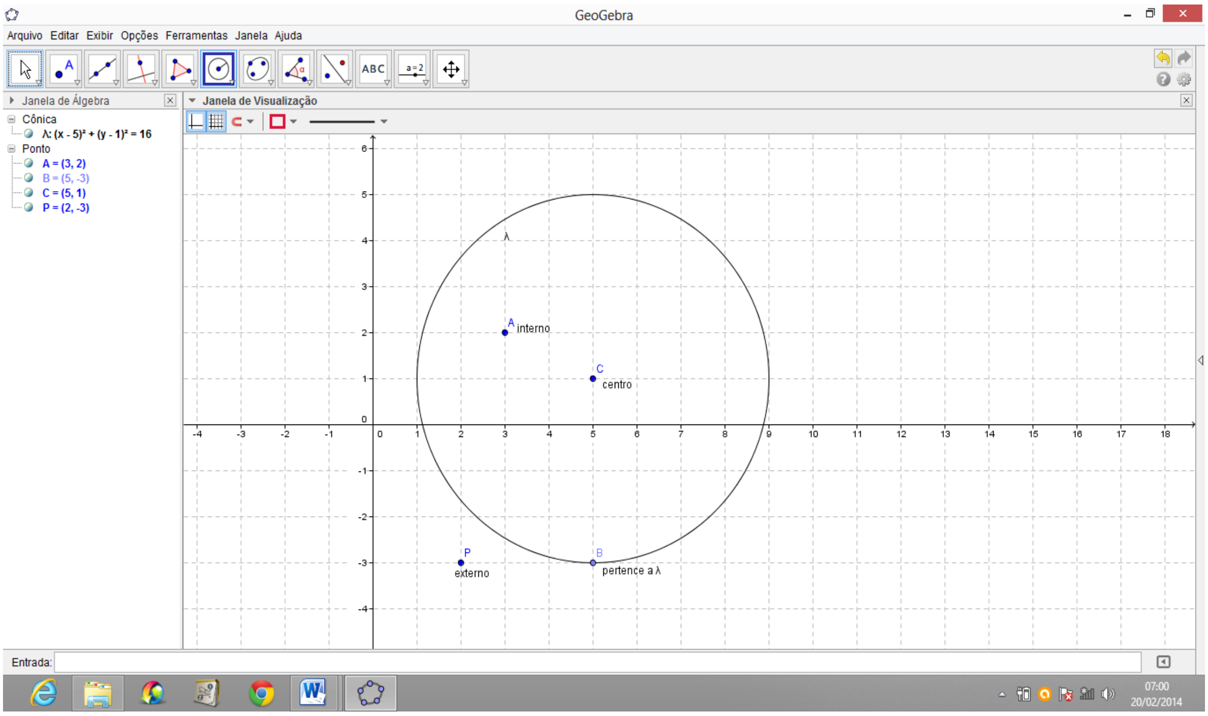


Figura 25: Posições relativas entre Ponto e Circunferência.

ATIVIDADE 17. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Atividade que aborda o conceito Posições Relativas entre Reta e Circunferência.

Seja uma circunferência λ de centro $C = (a,b)$ e raio r, no plano existem retas que tocam a circunferência em dois pontos, retas que tocam a circunferência em apenas um ponto e outras que não interceptam a circunferência em ponto algum.

Essas retas são chamadas, respectivamente, secantes, tangentes e externas à circunferência. Considere as retas: s, t e u.

Se $s \cap \lambda = \{S_1, S_2\}$, então s é secante à circunferência.

Se $t \cap \lambda = \{T\}$, então t é tangente à circunferência.

Se $u \cap \lambda = \emptyset$, então u é externa à circunferência.

Seja a circunferência $\boldsymbol{\lambda}$ de centro $\boldsymbol{C = (2, 1)}$ e raio $\boldsymbol{r = 5}$, cuja equação é $\boldsymbol{\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20}$ e sejam as retas $\boldsymbol{r: 4x + 3y - 36 = 0}$, $\boldsymbol{s: 3x - y + 5 = 0}$ e $\boldsymbol{t: x + y + 5 = 0}$, verificar as posições relativas entre tais retas e a circunferência dada.

1. Na Janela 6 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Circulo dados Centro e Raio", localizar o centro e, depois, digitar a medida do raio na caixa que aparecerá na tela. Após isso, digitar a equação de cada reta na caixa de entrada do GeoGebra. Ficará claro qual reta, é externa, qual é tangente e qual pertence a λ.

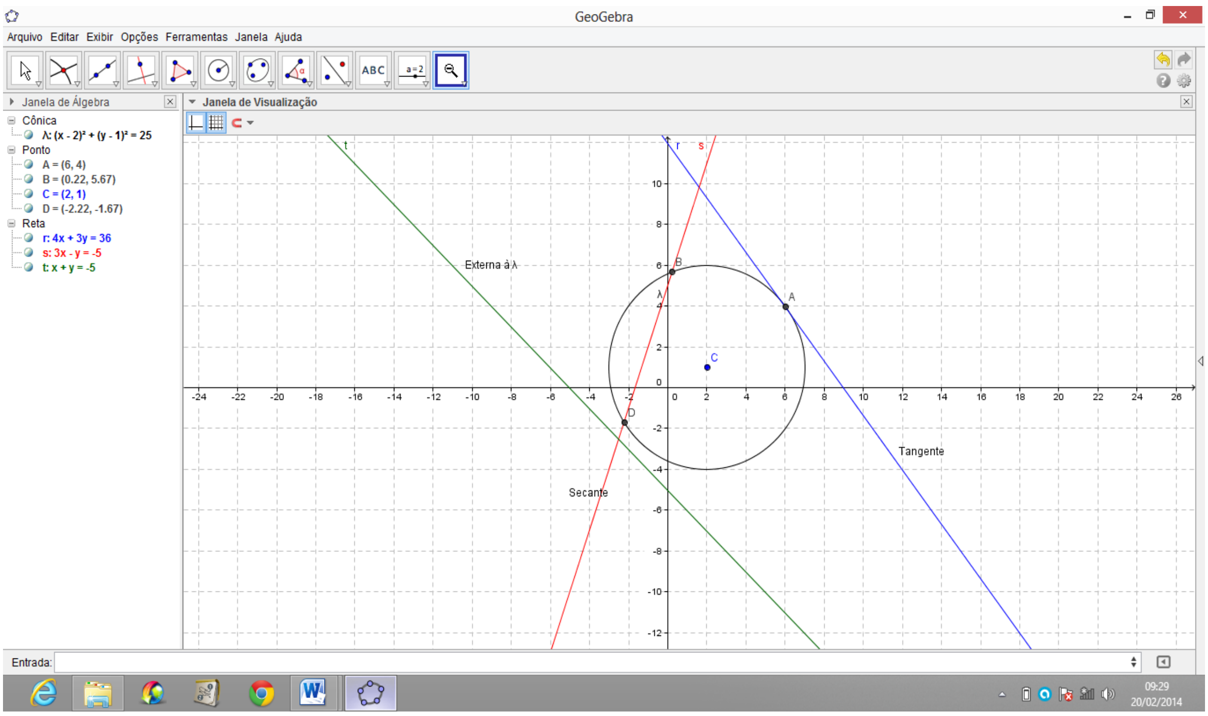


Figura 26: Posições Relativas entre Reta e Circunferência.

ATIVIDADE 18. INTERSEÇÃO DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Atividade que aborda o conceito de Interseção de Duas Circunferências.

Dadas duas circunferências λ_1 e λ_2, achar a interseção de λ_1 com λ_2 é determinar os pontos $P(x,y)$ que pertencem a ambas as curvas e que, portanto, satisfazem ao sistema formado por suas equações.

$$\begin{cases} \lambda_1: (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1^2 \\ \lambda_2: (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

Dadas as circunferências $\boldsymbol{\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0}$ ***e*** $\boldsymbol{\lambda_1: x^2 + y^2 + 2x - 4y = -1}$***, achar seus pontos de interseção.***

1. Na caixa de entrada do GeoGebra digitar as equações das duas circunferências. O GeoGebra exibirá ambas na sua Zona Gráfica e suas respectivas equações na Zona Algébrica;

2. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Interseção de Dois Objetos” e localizar os pontos de interseção das duas circunferências. O GeoGebra exibirá estes pontos na Zona Algébrica.

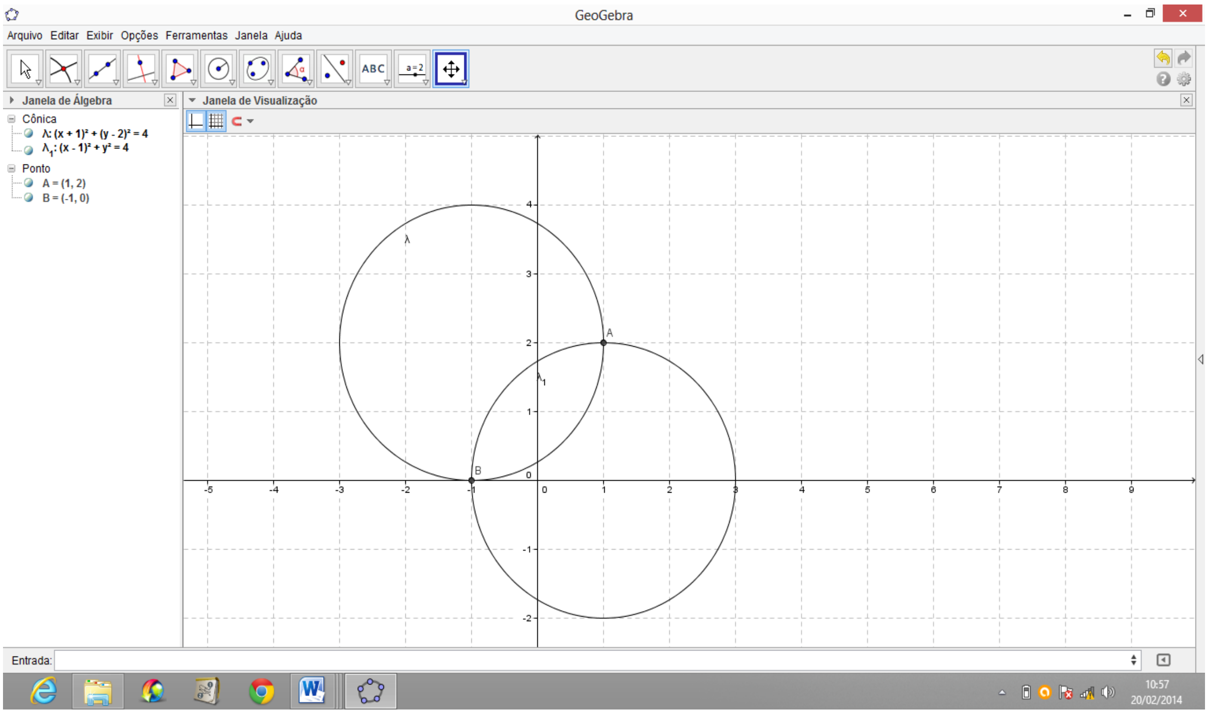


Figura 27: Interseção de Duas Circunferências.

ATIVIDADE 19. POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Atividade que aborda o conceito de Posições Relativas de Duas Circunferências.

Duas circunferências distintas podem ter dois, um ou nenhum ponto comum.

A posição relativa de duas circunferências $\lambda_1 : (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$ e $\lambda_2 : (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$ é determinada comparando a distancia C_1C_2 entre os centros com a soma $r_1 + r_2$ ou com a diferença $|r_1 - r_2|$ dos raios.

Calculada a distância entre os centros:

$d = C_1C_2 = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$, são possíveis seis casos distintos:

1º caso: Circunferências Exteriores: Nenhum ponto em comum.

$$\boxed{d > r_1 + r_2}$$

2º caso: Circunferências Tangentes Exteriormente: Um Ponto comum.

$$\boxed{d = r_1 + r_2}$$

3º caso: Circunferências Tangentes Interiormente: Um Ponto comum.

$$\boxed{d = |r_1 - r_2|}$$

4º caso: Circunferências Secantes: Dois Pontos comuns.

$$\boxed{|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2}$$

5º caso: Circunferência de menor raio é interior à outra: Nenhum Ponto comum.

$$\boxed{0 \leq d < |r_1 - r_2|}$$

6º caso: Circunferências Concêntricas (caso particular do 5º): Centro em comum.

$$\boxed{d = 0}$$

Determinar em cada caso, a posição relativa de λ e λ_1.

a) $\boldsymbol{\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0}$ ***e*** $\boldsymbol{\lambda_1: x^2 + y^2 + 4x - 12y + 24 = 0}$.

b) $\boldsymbol{\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0}$ ***e*** $\boldsymbol{\lambda_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0}$.

1. Na caixa de entrada do GeoGebra digitar as equações das duas circunferências. O GeoGebra exibirá ambas na sua Zona Gráfica e suas respectivas equações na Zona Algébrica. Ficará clara qual a posição relativa entre as duas.

2. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Interseção de Dois Objetos” e localizar os pontos de interseção das duas circunferências. O GeoGebra exibirá estes pontos na Zona Algébrica. Construir os raios de ambas as circunferências e determinar o valor da medida dos mesmos.

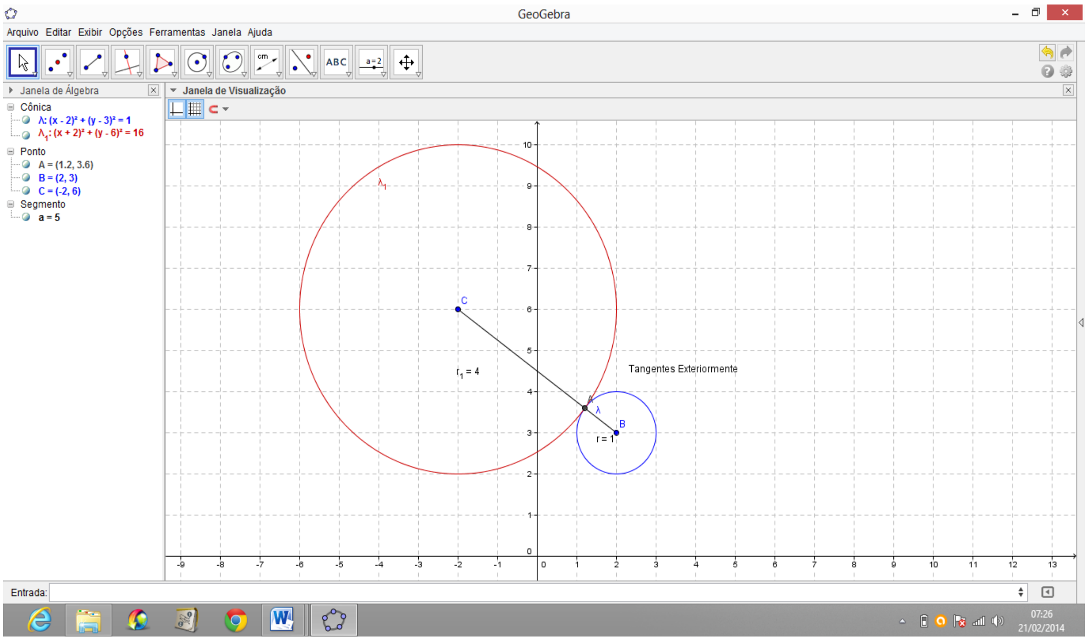


Figura 28: Circunferências Tangentes Exteriormente.

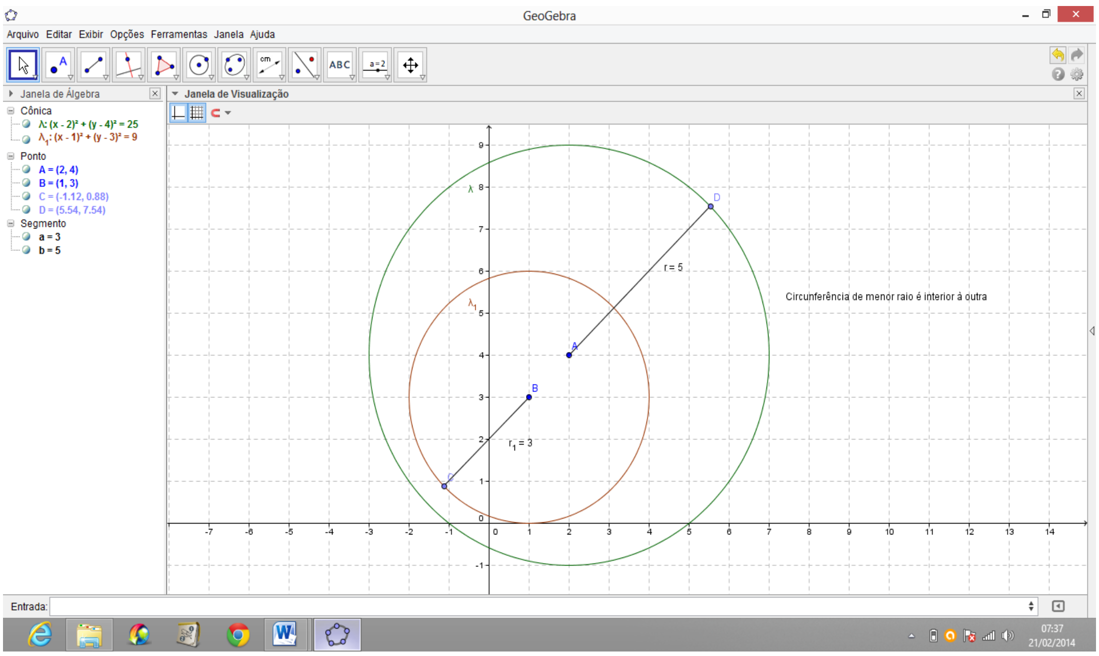


Figura 29: Circunferência de menor raio é interior à outra.

ATIVIDADE 20. ELIPSE

Atividade que aborda o conceito de Elipse.

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano $\propto$, seja $2c$ a distância entre eles. Elipse $\mathcal{E}$ é o conjunto dos pontos P de $\propto$ cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ $(sendo\ 2a > 2c)$.

$$\mathcal{E} = \left\{P \in \propto \big/ PF_1 + PF_2 = 2a\right\}$$

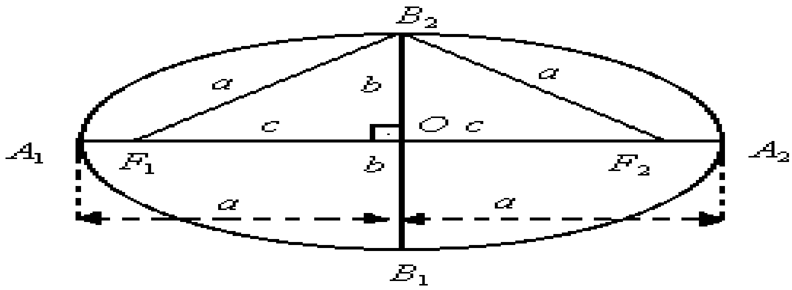


Figura 30: Elementos de uma elipse.

Da figura acima temos os seguintes elementos:

$a = d(O, A_1) = d(O, A_2)$ $semi - eixo\ focal$	$b = d(O, B_1) = d(O, B_2)$ $semi - eixo\ não\ focal$	$c = d(O, F_1) = d(O, F_2)$ $semidistância\ focal$

$a^2 = b^2 + c^2$ $relação\ fundamental$	$0 < e = \frac{c}{a} < 1$ $excentricidade$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $equação\ \ da\ elipse\ com$ $eixo\ focal\ OX\ e\ centro\ na\ origem$

Equação da elipse com eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados com centro em $C = (x_0, y_0)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \\ eixo\ focal\ horizontal\end{array}} \quad ou \quad \boxed{\begin{array}{c}\dfrac{(x - x_0)^2}{b^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \\ eixo\ focal\ vertical\end{array}}$$

Uma elipse tem os focos nos pontos $\boldsymbol{F_1 = (0, 3)}$ e $\boldsymbol{F_2 = (0, -3)}$. Se o comprimento do eixo não focal da elipse é $\boldsymbol{2}$, determinar a equação dessa elipse.

1 .Na Janela 7 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Elipse” e localizar os focos $F_1 = (0{,}3)$ e $F_2 = (0,-3)$, e sabendo que o eixo não focal da elipse é 2, levar o cursor até o ponto $P = (1{,}0)$. O GeoGebra exibirá a equação reduzida na Zona Algébrica. Após isso, clicar com o botão direito do mouse sobre a elipse e mudar a equação para a equação normal.

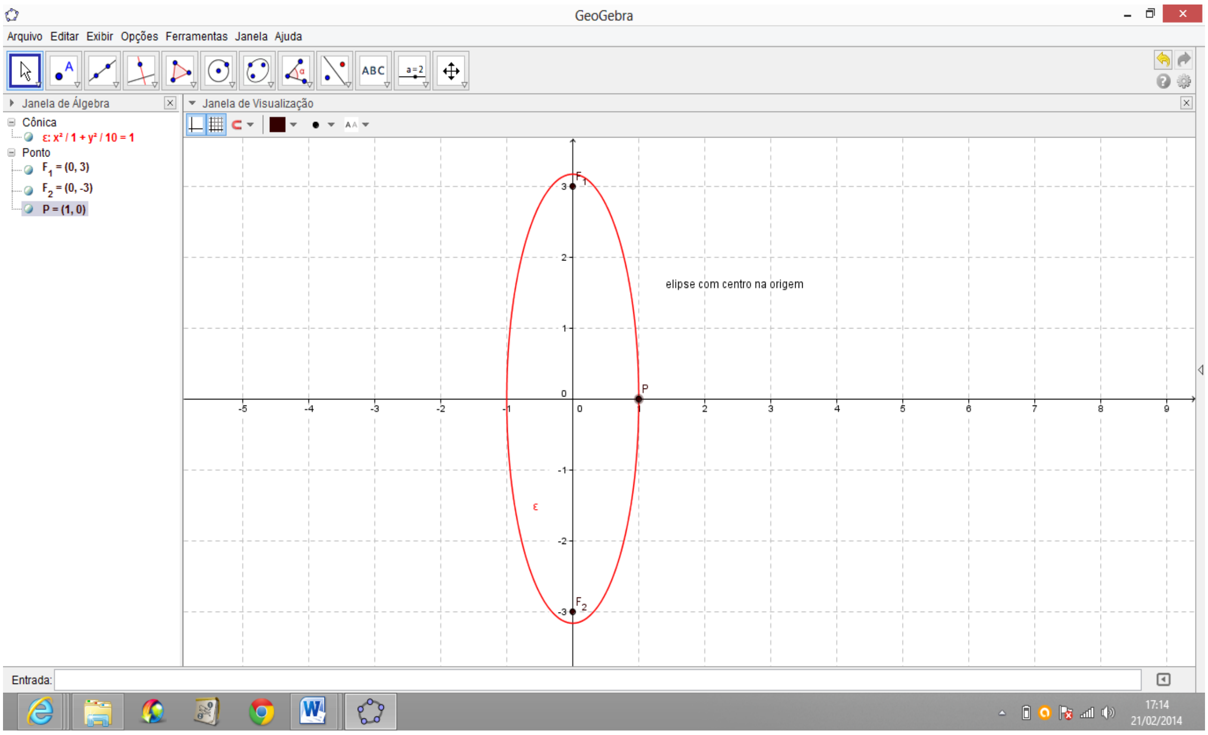


Figura 31: Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $\boldsymbol{OY}$.

***Achar a equação da elipse de centro* $(\mathbf{2},-\mathbf{1})$*, eixo focal* $\mathbf{2}\boldsymbol{a} = \mathbf{6}$ *e foco* $\boldsymbol{F_1} = (\mathbf{0},-\mathbf{1})$.**

Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Novo Ponto” e localizar o centro. Ir à Janela 7 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Elipse” e localizar os focos F_1 e F_2. Sabendo que o eixo focal da elipse é 6, levar o cursor até o ponto $P = (-1,-1)$ que está a 3 unidades do centro. O GeoGebra exibirá a equação reduzida na Zona Algébrica. Após isso, clicar com o botão direito do mouse sobre a elipse e mudar a equação para a equação normal.

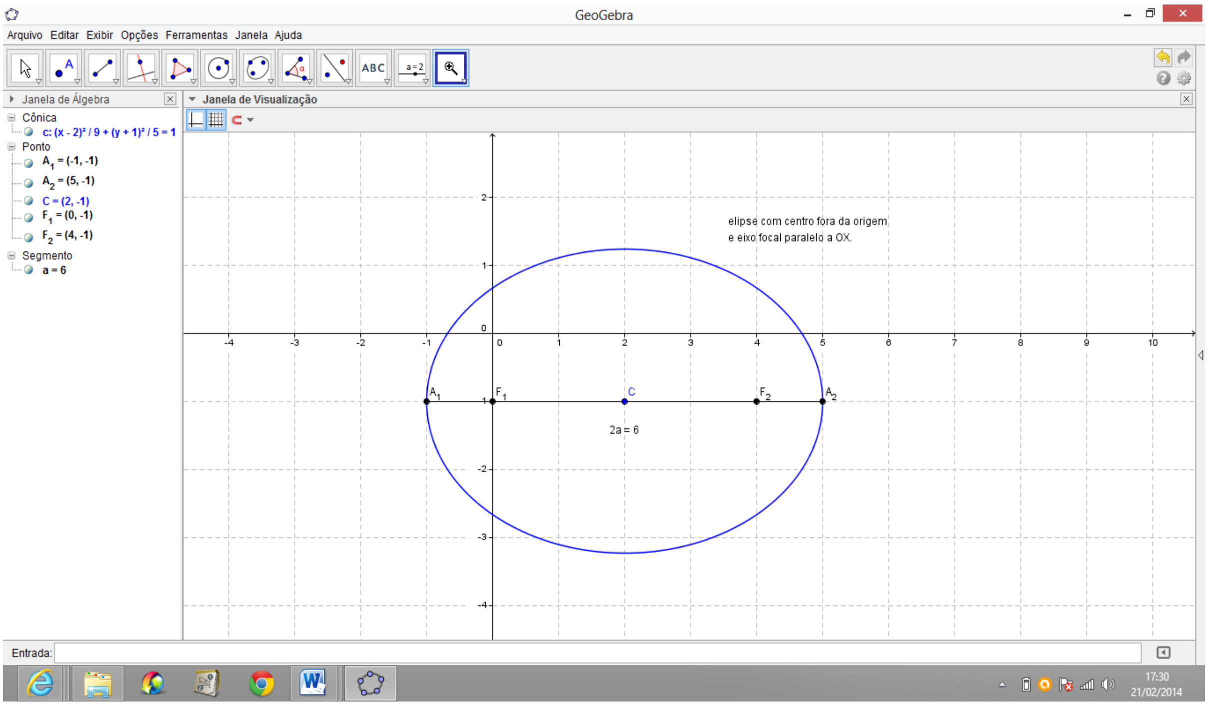


Figura 32: elipse com eixo focal paralelo ao eixo $\boldsymbol{OX}$ e com centro em $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$.

ATIVIDADE 21. HIPÉRBOLE

Atividade que aborda o conceito de Hipérbole.

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano $\propto$, seja $2c$ a distância entre eles. Hipérbole H é o conjunto dos pontos P de $\propto$ cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $0 < 2a < 2c$).

$$H = \{P \in \propto / |PF_1 - PF_2| = 2a\}$$

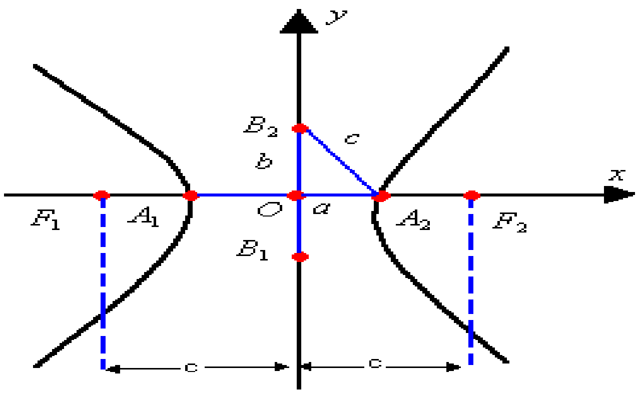


Figura 33: Elementos de uma Hipérbole.

Da figura acima temos os seguintes elementos:

$a = d(O, A_1) = d(O, A_2)$ $semi-eixo\ focal$	$b = d(O, B_1) = d(O, B_2)$ $semi-eixo\ não\ focal$	$c = d(O, F_1) = d(O, F_2)$ $semidistância\ focal$

$c^2 = a^2 + b^2$ $relação\ fundamental$	$e = \frac{c}{a} > 1$ $excentricidade$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $equação\ da\ hipérbole\ com$ $eixo\ focal\ OX\ e\ centro\ na\ origem$

Equação da hipérbole com eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados com centro em $C = (x_0, y_0)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \\ eixo\ focal\ horizontal\end{array}} \quad ou \quad \boxed{\begin{array}{c}\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1 \\ eixo\ focal\ vertical\end{array}}$$

Determinar a equação da hipérbole de focos $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$, cujo eixo focal mede 4.

1 .Na Janela 7 da barra Ferramenta Clicar no ícone “Hipérbole” e localizar os focos $F_1 = (-3,0)$ e $F_2 = (3,0)$, e sabendo que o eixo focal da hipérbole é *4*, levar o cursor até o ponto $P = (2,0)$. O GeoGebra exibirá a equação reduzida na Zona Algébrica.

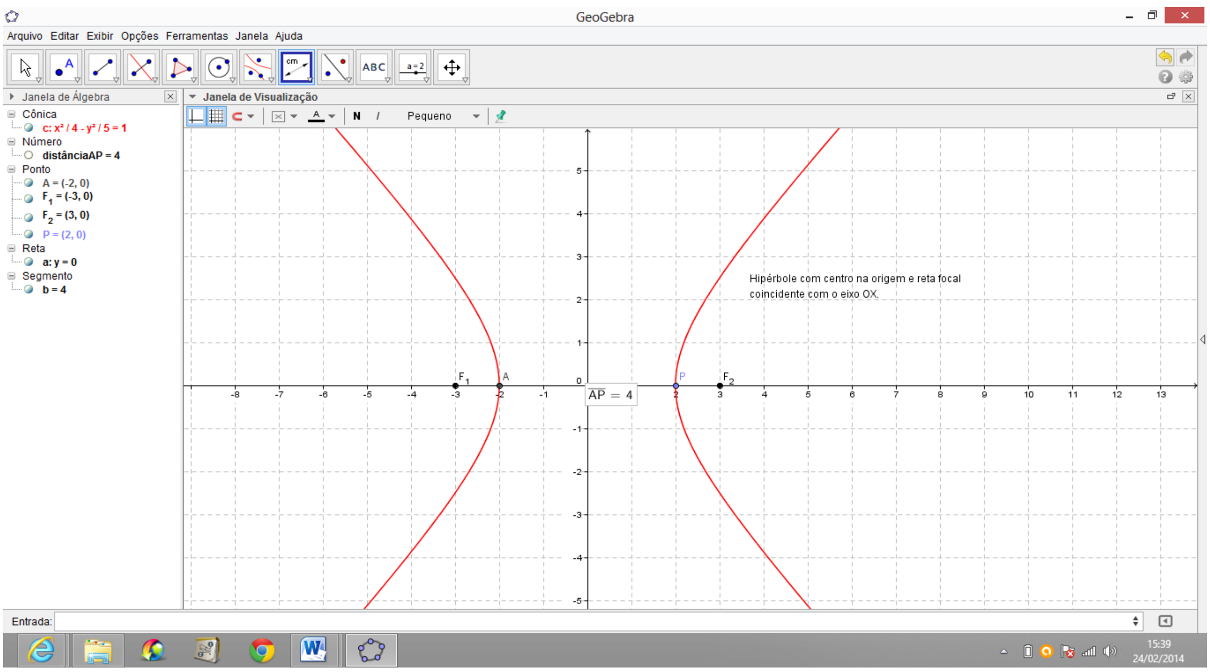


Figura 34: Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $\boldsymbol{OX}$.

Determinar a equação da Hipérbole de centro $C = (6, 5)$, focos $F_1 = (4, 5)$ e $F_2 = (8, 5)$ e cujo eixo focal é 4.

1 .Na Janela 7 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Hipérbole” e localizar os focos $F_1 = (4,5)$ e $F_2 = (8,5)$, e sabendo que o eixo focal da hipérbole é *4*, levar o cursor até o ponto $P = (7,5)$. O GeoGebra exibirá a equação reduzida na Zona Algébrica. Após isso, clicar com o botão direito do mouse sobre a hipérbole e mudar a equação para a equação normal.

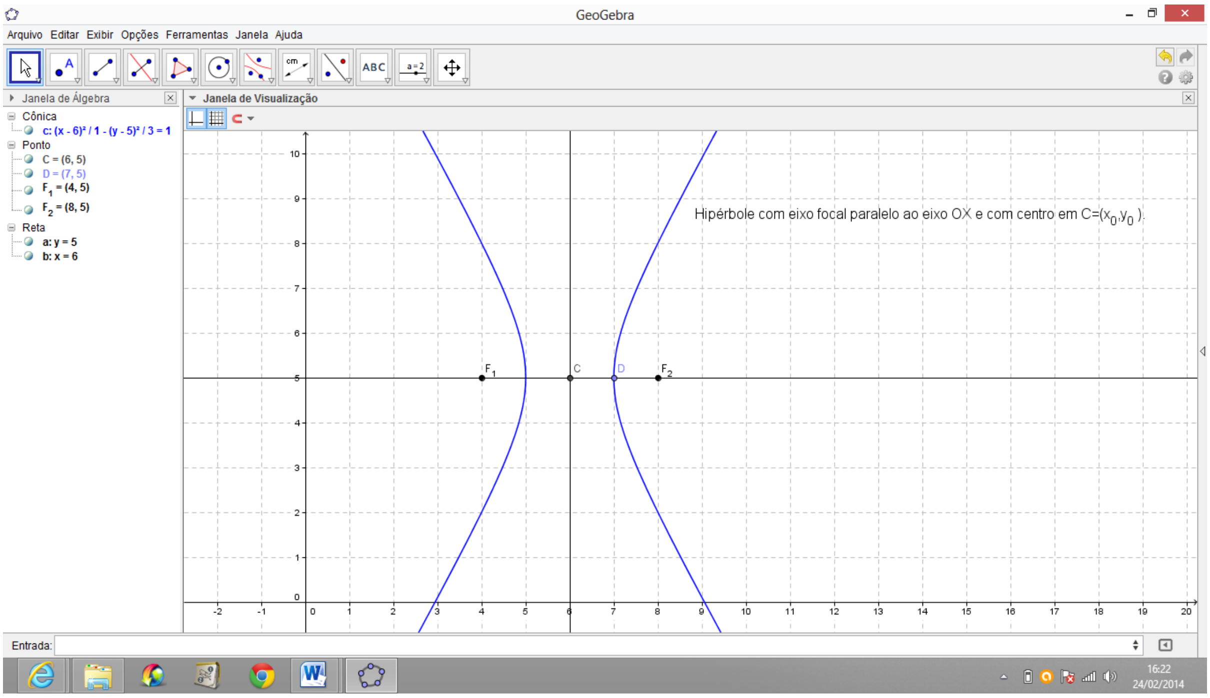


Figura 35: Hipérbole com eixo focal paralelo ao eixo $\boldsymbol{OX}$ e com centro em $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$.

ATIVIDADE 22. PARÁBOLA

Atividade que aborda o conceito de Parábola.

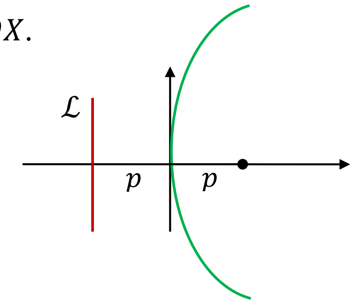
Sejam $\mathcal{L}$ uma reta e F um ponto do plano não pertencente a $\mathcal{L}$. A parábola P de foco F e diretriz $\mathcal{L}$ é o conjunto de todos os pontos P do plano cuja distância a F é igual à sua distância a $\mathcal{L}$.

$$P = \{P \in \propto / d(P, F) = d(P, \mathcal{L})\}$$

Toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal.

$$\boxed{p = d(V,F) = d(V,\mathcal{L})}$$

Equação da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX.



$$\boxed{\begin{array}{c} y^2 = 4px \\ \textit{Equação da parábola com eixo focal } OX, \textit{ vértice na} \\ \textit{origem e concavidade para a direita} \end{array}}$$

Equação da parábola com eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados com vértice em $V = (x_0, y_0)$.

$$\boxed{\begin{array}{c} (y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0) \\ \textit{eixo focal horizontal} \end{array}} \text{ ou } \boxed{\begin{array}{c} (x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0) \\ \textit{eixo focal vertical} \end{array}}$$

Obter a equação da parábola cuja diretriz é $x = 2$ e cujo foco é $F = (4, 4)$.

1 .Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Novo Ponto" e localizar o foco $F = (4,4)$. Após isso, na caixa de entrada do GeoGebra inserir a equação da reta diretriz $x = 2$. O GeoGebra exibirá tais objetos na Zona Gráfica.

2 .Na Janela 7 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Parábola" e clicar sobre o foco $F = (4,4)$ e sobre a diretriz é $x = 2$. O GeoGebra exibirá a parábola na Zona Gráfica e sua equação na Zona Algébrica.

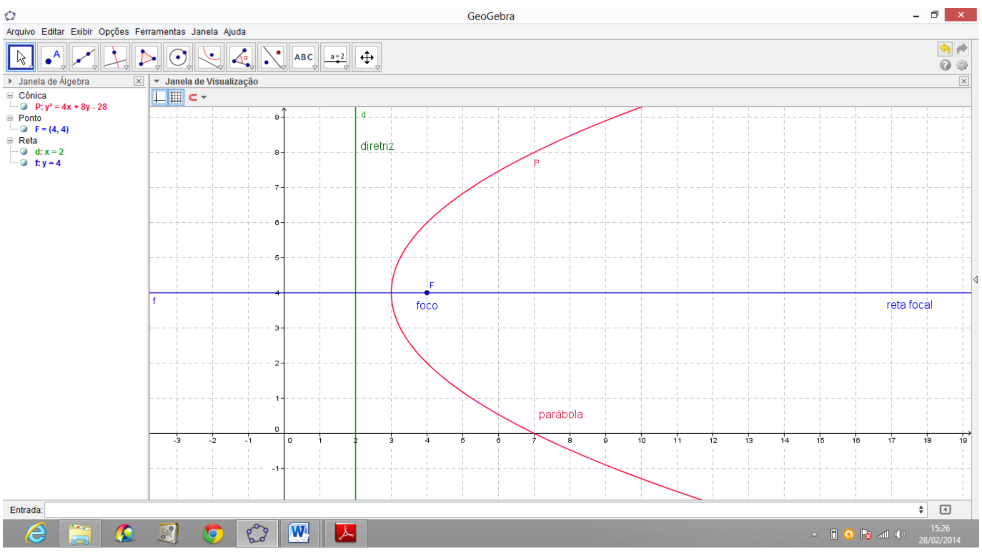


Figura 36: Parábola com eixo focal paralelo a OX e vértice em $V = (x_0, y_0)$

Determinar a equação da parábola de vértice $V = (3,4)$ e foco $F = (3,2)$.

1 .Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Novo Ponto” e localizar o foco $F = (3,2)$ e no vértice $V = (3,4)$. Como $d(V,F) = 2$, então a reta diretriz será $d = 6$. Após isso, na caixa de entrada do GeoGebra inserir a equação da reta diretriz $y = 6$. O GeoGebra exibirá tais objetos na Zona Gráfica.

2 .Na Janela 7 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Parábola” e clicar sobre o foco $F = (3,2)$ e sobre a diretriz $y = 6$. O GeoGebra exibirá a parábola na Zona Gráfica e sua equação na Zona Algébrica.

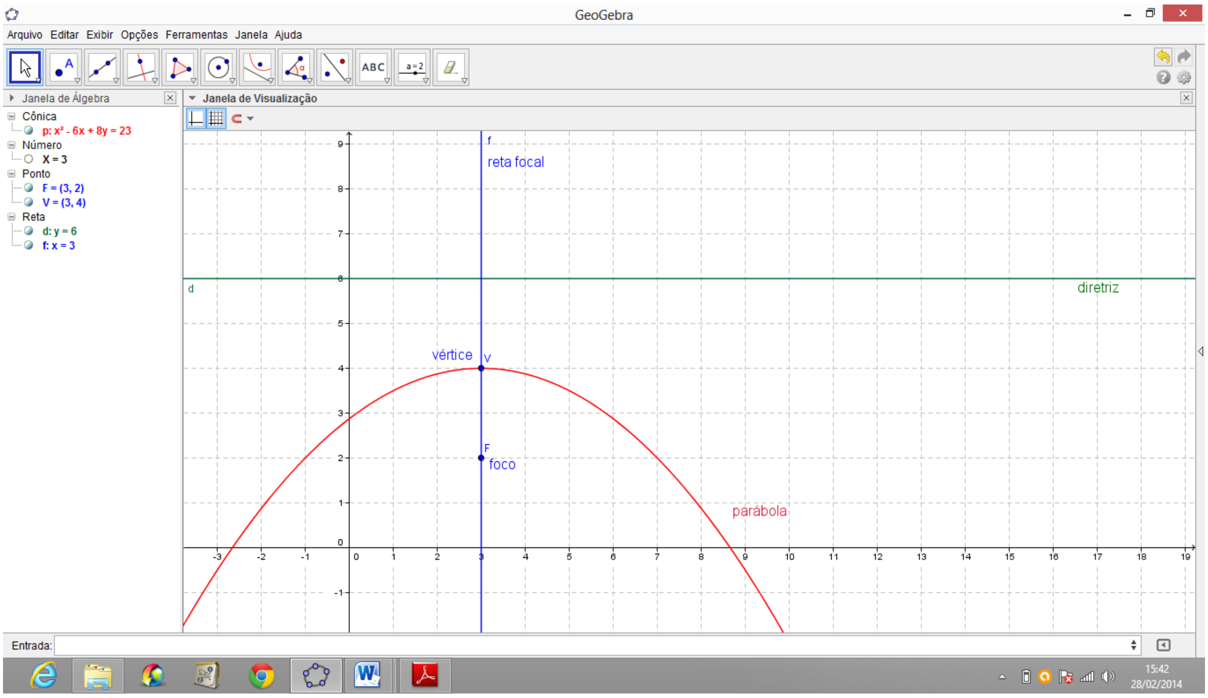


Figura 37: Parábola com eixo focal paralelo a OY e vértice em $V = (x_0, y_0)$.

8 PROBLEMAS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA SOLUCIONADOS COM O MÉTODO ANALÍTICO

Embora estes problemas sejam de geometria euclidiana plana, os mesmos podem ser resolvidos usando a geometria analítica, ou seja, o método das coordenadas. É educativo propor aos alunos problemas que lhes dê oportunidade de pensar de uma forma diferente e permita usar um sistema de coordenadas apropriado para encontrar uma solução conveniente.

PROBLEMA 1.

A figura abaixo mostra um quadrado e um triângulo equilátero, ambos de lado **1,** ***calcular a área da região sombreada.***

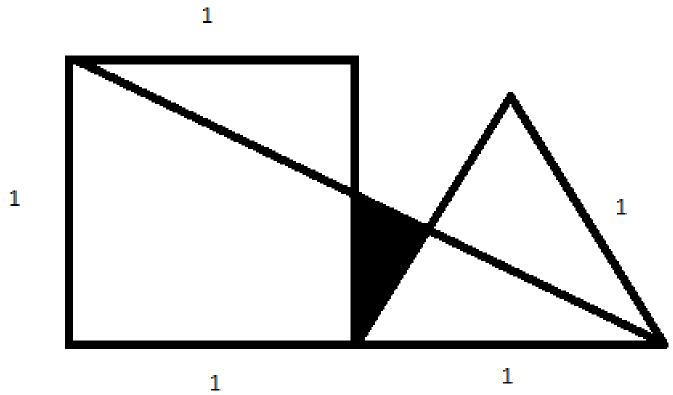


Figura 38: Quadrado e triângulo equilátero

SOLUÇÃO:

Este problema será resolvido usando o método analítico ou cartesiano ao invés do método sintético, embora o problema não apresente equações ou coordenadas.

O primeiro passo é escolher um sistema de coordenadas apropriado para inserir esta figura. Então vamos encaixa-la no primeiro quadrante do sistema cartesiano ortogonal, fazendo o vértice A coincidir com a origem do sistema. Teremos assim os pontos $A = (0,0)$, $B = (0,1)$, $C = (1,1)$, $D = (1,0)$, $E = (2,0)$ e $F = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, conforme a figura abaixo:

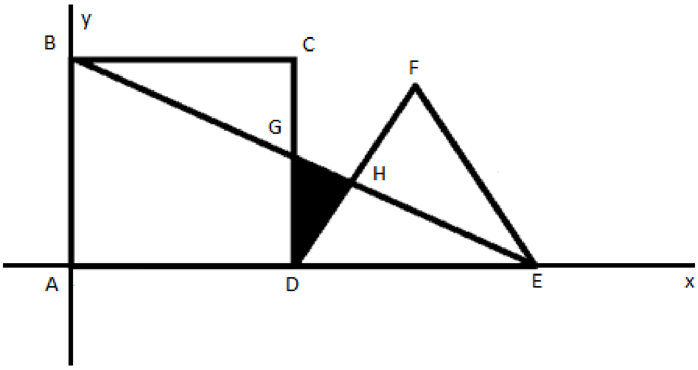


Figura 39: Quadrado e triângulo equilátero no sistema cartesiano

Torna-se necessário agora achar as coordenadas dos pontos G e H. Para isso chamaremos a reta CD de reta r, a reta DF de reta s e a reta BE de reta t.

É fácil ver que as equações das retas $r, s\ e\ t$ são: $r: x = 1$, $s: y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ e $t: y = -\frac{x}{2} + 1$. Pois r é a reta vertical que passa pelo ponto $D = (1,0)$, assim $r: x = 1$. Também s é a reta que passa por $D = (1,0)$ e possui uma inclinação de $\propto = 60°$ com o eixo x.Usando a fórmula: $y - y_0 = m(x - x_0)$ junto com o ponto $D = (1,0)\ e\ m = tg60° = \sqrt{3}$, teremos a reta $s: y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$. E por fim a reta t, que passa pelos pontos $B = (0,1)$ e $E = (2,0)$. Aplicando o determinante nestes pontos, ou seja, $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ encontramos a equação $t: 2y = -x + 2$ ou $t: y = -\frac{x}{2} + 1$.

Agora o próximo passo é encontrarmos os pontos de interseção entre as retas $r, s\ e\ t$ duas a duas, isto é os pontos $D, G\ e\ H$, conforme a figura.

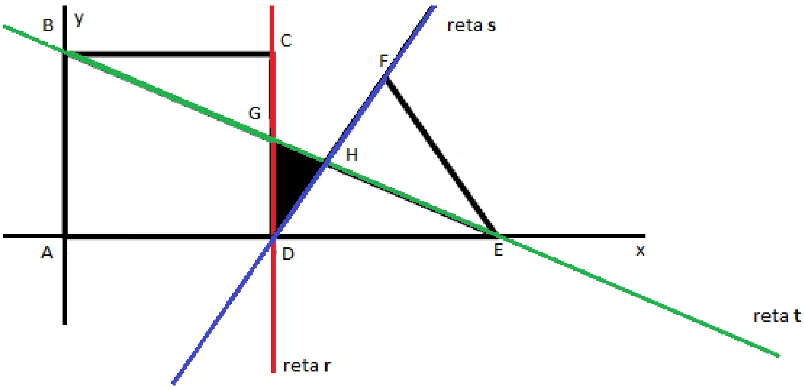


Figura 40: Interseção entre as retas $\boldsymbol{r, s\ e\ t}$.

O ponto D já é conhecido $D = (1,0)$ que é $r \cap s$. Para encontrarmos o ponto G, basta fazermos $r \cap t$. Então resolvendo temos:

$$r \cap t \begin{cases} r : x = 1 \\ t : y = -\frac{x}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ .Assim\ G = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Resta encontrar o ponto H, façamos $s \cap t$.

$$s \cap t \begin{cases} s : y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} \\ t : y = -\frac{x}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{3} = -\frac{x}{2} + 1 \Rightarrow 2\sqrt{3}x + x = 2 + 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 1} \Rightarrow x = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{2\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3} - 1} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3} - 2 + 12 - 2\sqrt{3}}{12 - 1} \Rightarrow$$

$$x = \frac{10 + 2\sqrt{3}}{11}$$

$$y = \sqrt{3}\left(\frac{10 + 2\sqrt{3}}{11}\right) - \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{10\sqrt{3} + 6}{11} - \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{10\sqrt{3} + 6 - 11\sqrt{3}}{11} \Rightarrow$$

$$y = \frac{6 - \sqrt{3}}{11} \Rightarrow H = \left(\frac{10 + 2\sqrt{3}}{11}, \frac{6 - \sqrt{3}}{11}\right)$$

Como o objetivo do problema é encontrar a área da região sombreada, então o problema se resume em determinarmos a área do triângulo DGH, usemos então:

$$Área\ (DGH) = \frac{1}{2}|det|.$$

$$Mas\ det = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{10 + 2\sqrt{3}}{11} & \frac{6 - \sqrt{3}}{11} & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow det = \frac{1}{2} + \frac{6 - \sqrt{3}}{11} - \frac{10 - 2\sqrt{3}}{22} - \frac{6 + \sqrt{3}}{11} \Rightarrow det$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{10 - 2\sqrt{3}}{22} \Rightarrow det = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{22}, logo:$$

$$Área\ (DGH) = \frac{1}{2}\left|\frac{1 - 2\sqrt{3}}{22}\right| \Rightarrow Área\ (DGH) = \frac{2\sqrt{3} - 1}{44} \Rightarrow Área\ (DGH) \cong 0{,}056$$

$$\boxed{\acute{A}rea\ (DGH) = \frac{2\sqrt{3}-1}{44}\ ou\ \acute{A}rea\ (DGH) \cong 0{,}056}$$

Esta mesma atividade pode ser resolvida mais rapidamente utilizando o GeoGebra, no entanto cabe aqui uma reflexão quanto ao uso, potencialidades e limitações dos softwares de matemática dinâmica ou de geometria dinâmica. Antes da reflexão, vamos ao problema. O primeiro passo também consiste em encaixarmos a figura no primeiro quadrante do sistema cartesiano ortogonal fazendo o vértice A coincidir com a origem do sistema e notando que os pontos que constituem os vértices do quadrado e do triângulo são: $A = (0{,}0)$, $B = (0{,}1)$, $C = (1{,}1)$, $D = (1{,}0)$, $E = (2{,}0)$ e $F = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Então se seguem os seguintes comandos no GeoGebra.

1. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Novo ponto” e localizar os pontos $A, B, C, D, E\ e\ F$ na Zona Gráfica;

2. Na janela 3 da barra de Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento definido por dois pontos” e determinar os segmentos $AB, BC, CD, DA, DE, EF\ e\ DF.$ Estes formarão a figura;

3. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Reta definida por Dois Pontos” e construir as retas CD: reta r, DF: reta s e BE: reta t;

4. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Interseção de Dois Objetos” e localizar o ponto de interseção das retas duas a duas, a saber, $r \cap s, r \cap t\ e\ s \cap t$;

5. Na Janela 5 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Polígono” e localizar os três pontos dados fechando o polígono (triângulo DGH, sequência $DGHD$);

6. Na Janela 8 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Área” e clicar dentro do polígono (triângulo DGH), O GeoGebra exibirá o valor da área do triângulo na Zona Gráfica e na Zona Algébrica. Conforme a figura:

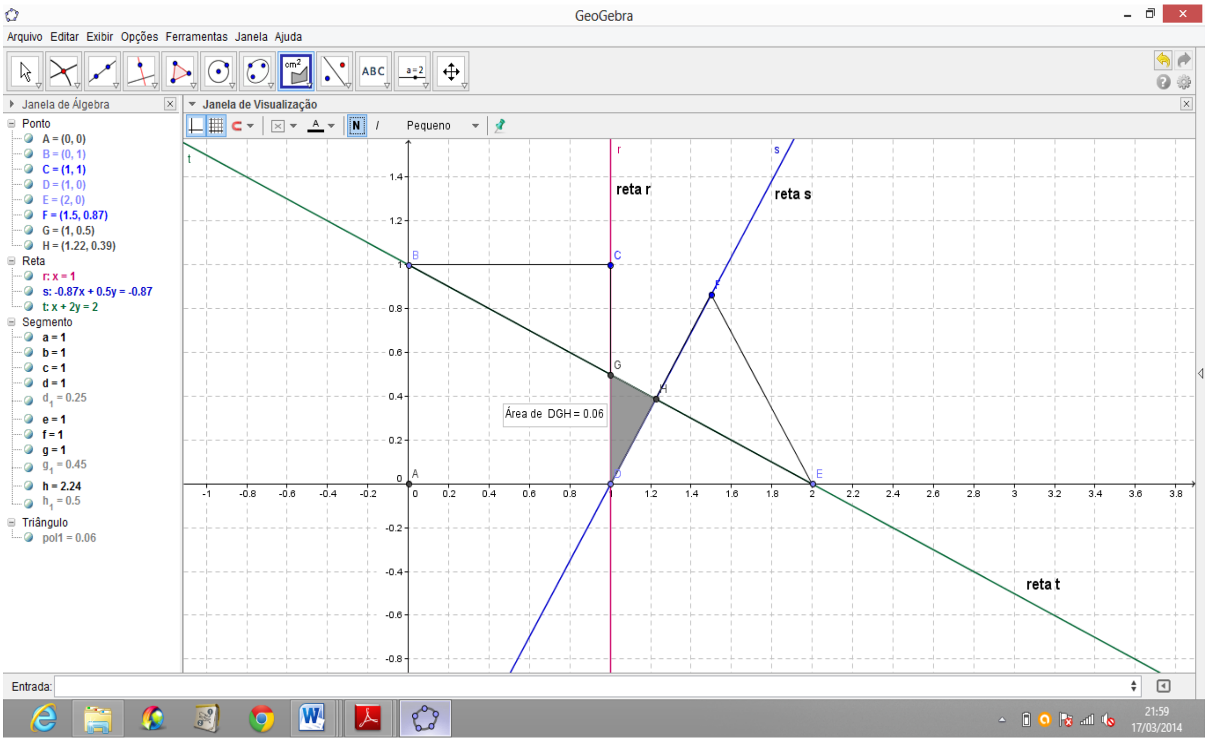


Figura 41: Área da região sombreada. Área do triângulo $\boldsymbol{DGH}$.

Ao observar o resultado final neste problema, ou seja, a área do triângulo DGH, vemos que o GeoGebra apresenta o resultado $Área\ (DGH) = 0{,}06$ enquanto que os resultados dos cálculos acima foram: $Área\ (DGH) = \frac{2\sqrt{3}-1}{44}$ $ou\ Área\ (DGH) \cong 0{,}056$, há assim uma pequena diferença nos resultados.

Este exemplo revela uma das possíveis limitações do software. Isso se deve ao fato de que o software se utiliza de aproximações e arredondamentos para gerar seus resultados, no caso aqui tratado uma aproximação para duas casas decimais gerou tal diferença no resultado final. O ponto $F = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, possui a ordenada $\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}866025403$ e o software aproximou este valor para $\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}87$ e como a área procurada é pequena então aparece mais evidente a diferença entre a área calculada no problema e a encontrada pelo GeoGebra. Para que isso não ocorra é necessário alterar em opções e arredondamento.

PROBLEMA 2.

Considere um quadrado $ABCD$ com lado medindo $\mathbf{18}$ e os pontos P e Q dividindo o lado CD em três partes iguais. Calcular a distância do vértice A ao baricentro G do triângulo BPQ.

SOLUÇÃO:

Escolhamos um sistema de coordenadas apropriado para inserir a figura. Assim vamos encaixa-la no primeiro quadrante do sistema cartesiano ortogonal, fazendo o vértice D coincidir com a origem do sistema. Teremos então os pontos $A = (0,18)$, $B = (18,18)$, $C = (18,0)$, $D = (0,0)$, $P = (6,0)$ e $Q = (12,0)$, conforme a figura abaixo:

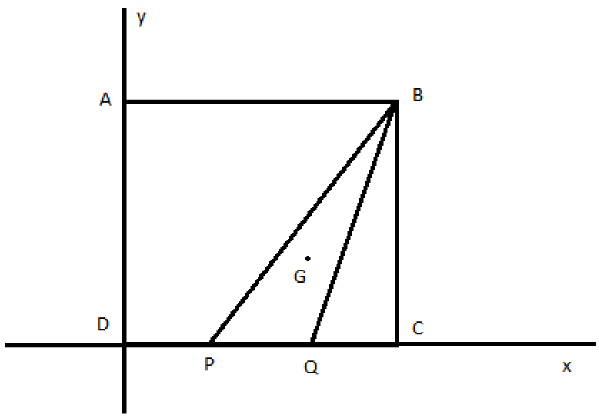


Figura 42: Quadrado $\boldsymbol{ABCD}$

Para encontrarmos as coordenadas do Baricentro usaremos:

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \Rightarrow x_G = \frac{18 + 6 + 12}{3} \Rightarrow x_G = \frac{36}{3} \Rightarrow x_G = 12$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \Rightarrow y_G = \frac{18 + 0 + 0}{3} \Rightarrow y_G = \frac{18}{3} \Rightarrow y_G = 6$$

Portanto $G = (12,6)$. Agora só nos resta encontrar a distância desejada, ou seja, $d(A, G)$. Para calcularmos esta distância usaremos: $d(A, G) = \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2}$.

$$d(A, G) = \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2} = \sqrt{(12 - 0)^2 + (6 - 18)^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}.$$

Assim a distância procurada é: $d(A,G) = 12\sqrt{2} \cong 16{,}97056275$.

Agora o problema será solucionado utilizando-se do software GeoGebra. Para isso vamos seguir os seguintes comandos:

1. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Novo ponto” e localizar os pontos $A, B, C, D, P\ e\ Q$ na Zona Gráfica;

2. Na janela 3 da barra de Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento definido por dois pontos” e determinar os segmentos $AB, BC, CD, DA, BP\ e\ BQ$. Estes formarão a figura do problema;

3. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Ponto Médio ou Centro” e localizar os pontos: médio de $BP = F$, médio de $BQ = H$ e médio de $PQ = E$;

4. Na janela 3 da barra de Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento definido por dois pontos” e determinar os segmentos $BE, FQ\ e\ PH$;

5. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Interseção de Dois Objetos” e localizar o ponto de interseção dos três segmentos $BE, FQ\ e\ PH$. Este ponto é o Baricentro do triângulo;

6. Na janela 3 da barra de Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento definido por dois pontos” e determinar os segmentos AG desejado. O GeoGebra exibirá a distância pedida na janela de álgebra;

7. Na janela 8 da barra de Ferramenta de acesso rápido, clicar no ícone “Distância, Comprimento ou Perímetro”, e assim determinar o comprimento dos segmentos AG. Neste caso o GeoGebra exibirá a distância pedida na Zona Gráfica conforme a figura.

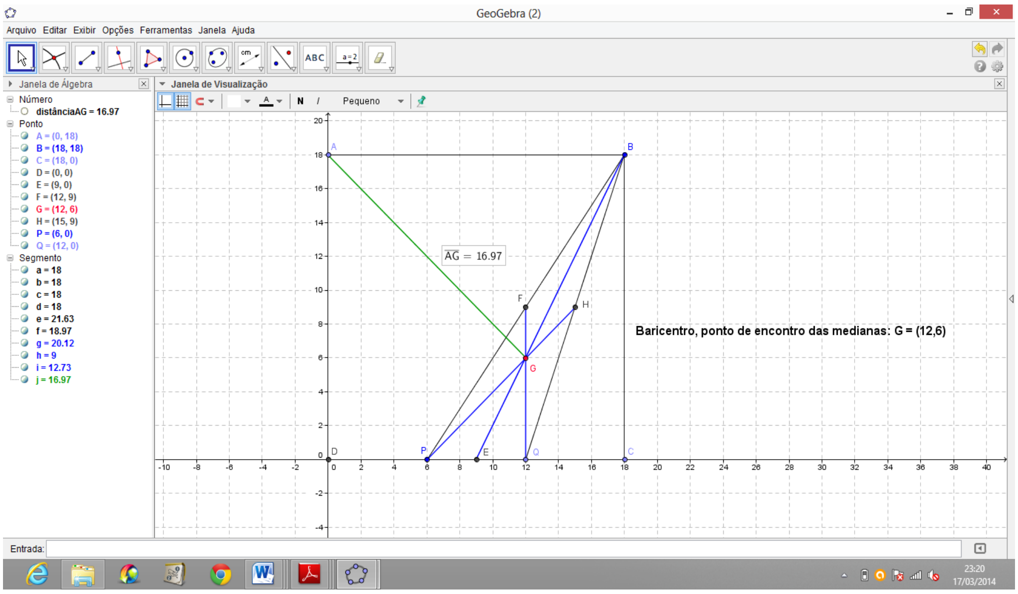


Figura 43: Comprimento do segmento $\boldsymbol{AG}$.

PROBLEMA 3. (Resolvido na RPM nº 67, p 23).

Considere um triângulo ADE retângulo em E e inscrito num trapézio retângulo $ABCD$, com $AB = 10$ cm, $AD = 30$ cm e $CD = 20$ cm. Calcular a área do triângulo ADE.

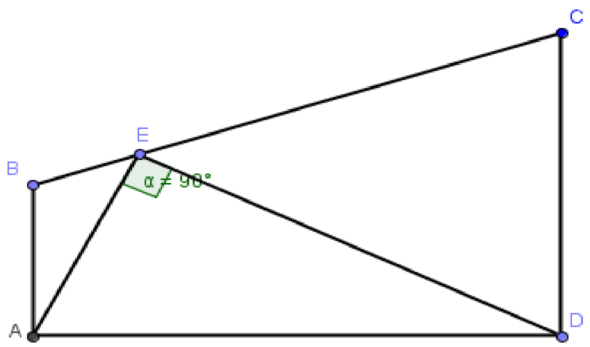


Figura 44: triângulo $\boldsymbol{ADE}$ retângulo em $\boldsymbol{E}$ e inscrito num trapézio retângulo $\boldsymbol{ABCD}$

SOLUÇÃO:

Seguindo o mesmo critério das questões anteriores, ou seja, adotando um sistema cartesiano apropriado para inserir a figura, encaixemos o trapézio $ABCD$ no primeiro quadrante do sistema cartesiano ortogonal, fazendo os lados AB e AD ficarem contidos nos eixos y e x respectivamente. Com isso teremos os pontos: $A = (0,0)$, $B = (0,10)$, $C = (30,20)$ e $D = (30,0)$, conforme a figura:

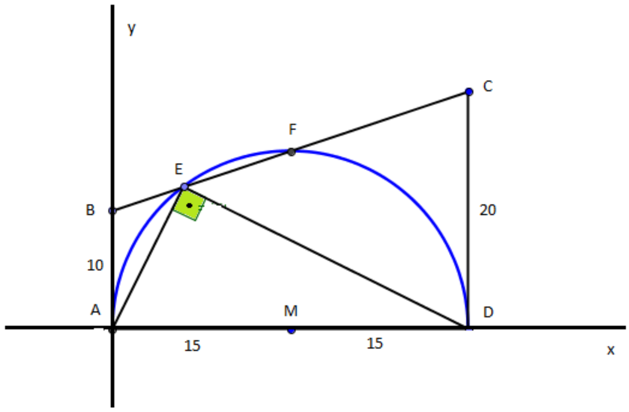


Figura 45: triângulo retângulo inscrito num trapézio retângulo no sistema cartesiano

Agora calculemos a equação da reta BC. A reta BC tem coeficiente angular:

$$m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \Rightarrow m = \frac{20 - 10}{30 - 0} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

A reta BC toca o eixo y no ponto B, que tem ordenada 10, então o coeficiente linear da reta é 10. Assim a equação reduzida da reta BC é $y = \frac{1}{3}x + 10$.

Acircunferência de diâmetro AD, raio $r = 15$ e centro $M = (15{,}0)$, passa pelo ponto E e tem equação: $(x - 15)^2 + y^2 = 15^2$. O ponto E é dado pela solução do sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 10 \\ (x-15)^2 + y^2 = 15^2 \end{cases} \Rightarrow (x-15)^2 + \left(\frac{1}{3}x + 10\right)^2 = 15^2 \Rightarrow x^2 - 30x + 225 + \frac{1}{9}x^2$$

$$+ \frac{20}{3}x + 100 = 225 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{9}x^2 - 30x + \frac{20}{3}x + 100 = 0$$

$$\Rightarrow 9x^2 + x^2 - 270x + 60x + 900 = 0 \Rightarrow 10x^2 - 210x + 900 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 21x + 90 = 0.$$

$$x' = 6 \; ou \; x" = 15$$

$$Para\; x' = 6, temos: y = \frac{1}{3}(6) + 10 \Rightarrow y = 2 + 10 \Rightarrow y = 12 \therefore E = (6{,}12).$$

$$Para\; x" = 15, temos: y = \frac{1}{3}(15) + 10 \Rightarrow y = 5 + 10 \Rightarrow y = 15 \therefore E = (15{,}15).$$

Portanto a área do triângulo ADE será:

$$Área\ (ADE) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 30 & 0 & 1 \\ 6 & 12 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow Área\ (ADE) = \frac{1}{2}(360) \Rightarrow Área\ (ADE) = 180\ cm^2$$

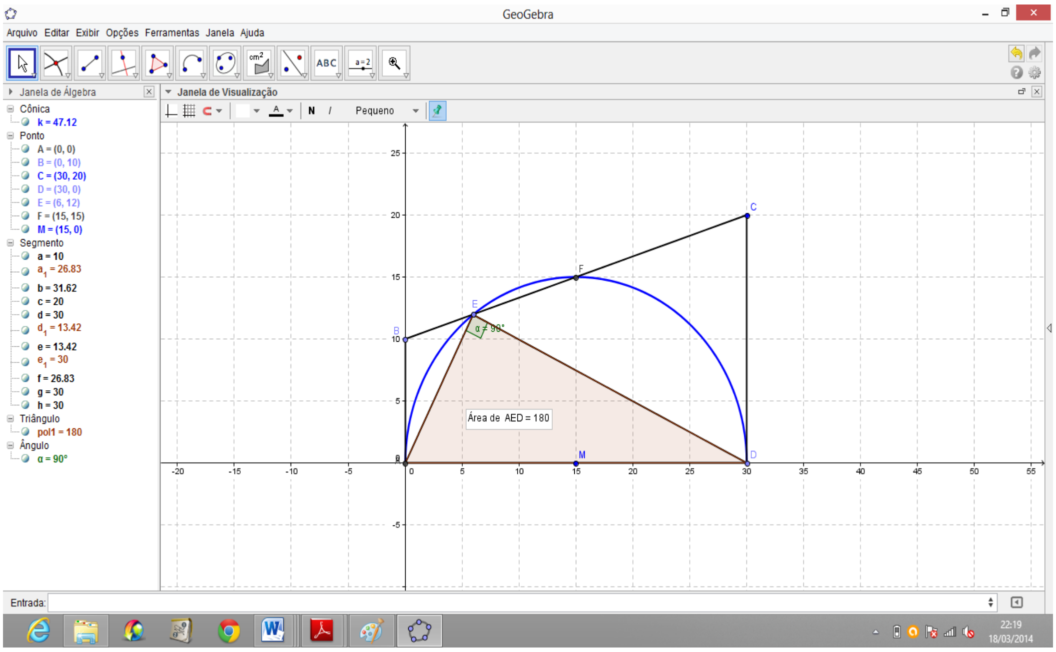


Figura 46: Área $(\boldsymbol{ADE})$

Ou

$$Área\ (ADE) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 30 & 0 & 1 \\ 15 & 15 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow Área\ (ADE) = \frac{1}{2}(450) \Rightarrow Área\ (ADE) = 225\ cm^2$$

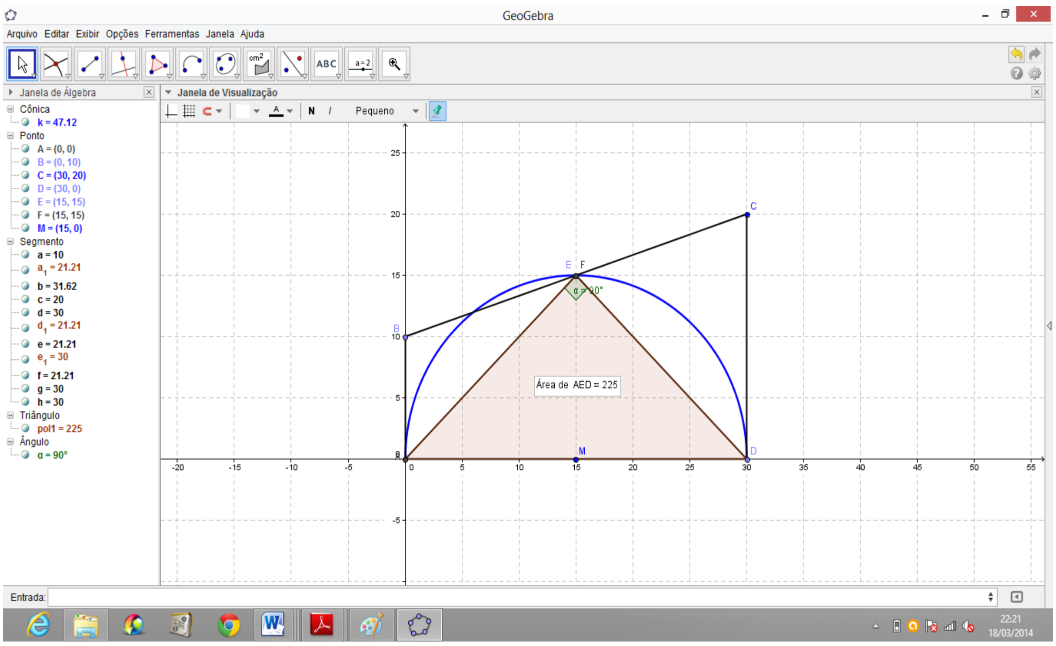


Figura 47: Área $(\boldsymbol{ADE})$.

Resolvendo o problema usando o GeoGebra:

1. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Novo ponto” e localizar os pontos $A, B, C \ e \ D$ na Zona Gráfica;

2. Na janela 3 da barra de Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento definido por dois pontos” e determinar os segmentos $AB, BC, CD \ e \ DA$. Estes formarão a figura do problema;

3. Na Janela 6 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Semicírculo Definido por Dois Pontos” e clicar nos pontos A e D. O GeoGebra construirá o semicírculo destacado de azul nas figuras acima;

4. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Interseção de Dois Objetos” e localizar os pontos de interseção do semicírculo com o segmento BC. Estes pontos, E e F, juntos com os pontos A e D, formarão os triângulos retângulos possíveis;

5. Na janela 3 da barra de Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento definido por dois pontos” e determinar os segmentos $AE \ e \ DE$;

6. Na Janela 5 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Polígono” e localizar os três pontos dados fechando o polígono (triângulo ADE, sequência $ADEA$);

7. Na Janela 8 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Área” e clicar dentro do polígono (triângulo ADE), O GeoGebra exibirá o valor da área do triângulo na Zona Gráfica e na Zona Algébrica. Conforme as duas figuras acima.

PROBLEMA 4: (Proposto na RPM nº 67, p 24).

$ABCD$ é um retângulo com $AB = 60$ e $BC = 80$. Calcule a distância da diagonal AC ao centro de uma circunferência que tangencia os lados $AD, AB \ e \ BC$.

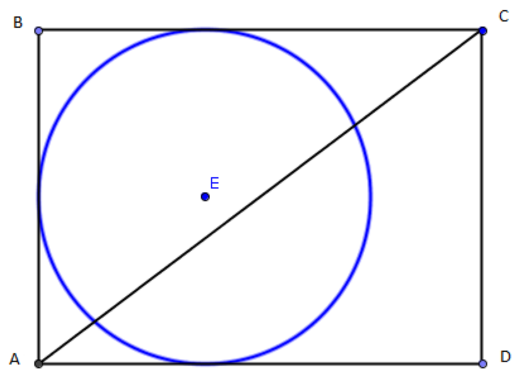


Figura 48: Retângulo $\boldsymbol{ABCD}$ e circunferência que tangencia os lados $\boldsymbol{AD}, \boldsymbol{AB}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{AC}$.

SOLUÇÃO:

Usando um raciocínio análogo aos problemas antecedentes, ou seja, adotando um sistema cartesiano apropriado para inserir a figura, encaixemos o retângulo $ABCD$ no primeiro quadrante do sistema cartesiano ortogonal, fazendo os lados AB e AD ficarem contidos nos eixos y e x respectivamente. Com isso teremos os pontos: $A = (0,0)$, $B = (0,60)$, $C = (80,60)$ e $D = (80,0)$. Para uma circunferência tangenciar os lados AD, AB e BC é necessário que ela tenha raio $r = 30$ e seu centro seja o ponto $E = (30,30)$, conforme a figura:

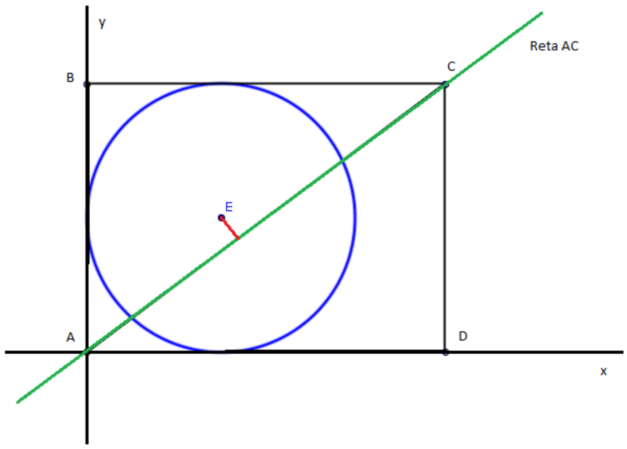


Figura 49: Distância do Centro $\boldsymbol{E}$ à reta $\boldsymbol{AC}$.

Agora calculemos a equação da reta AC. A reta AC tem coeficiente angular:

$$m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \Rightarrow m = \frac{60 - 0}{80 - 0} \Rightarrow m = \frac{60}{80} \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

A reta AC toca o eixo y no ponto A, que tem ordenada 0, então o coeficiente linear desta reta é 0. Assim a equação reduzida da reta AC é $y = \frac{3}{4}x$ e a equação geral é $3x - 4y = 0$.

Agora o problema se resume em encontrarmos a distância da reta que contém a diagonal AC até o ponto $E = (30,30)$ que é o centro da circunferência da figura. Usemos:

$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Chamemos a reta AC de reta r, assim temos:

$$d(E,r) = \frac{|3(30) + (-4)(30) + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow d(E,r) = \frac{|90 - 120|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow d(E,r) = \frac{|-30|}{\sqrt{25}} \Rightarrow$$

$$d(E,r) = \frac{30}{5} \Rightarrow d(E,r) = 6$$

Resolvendo o problema usando o GeoGebra:

1. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Novo ponto” e localizar os pontos $A, B, C\ e\ D$ na Zona Gráfica;

2. Na janela 3 da barra de Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento definido por dois pontos” e determinar os segmentos $AB, BC, CD, DA\ e\ AC$;

3. Na Janela 6 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Círculo dados Centro e Raio” e clicarmos pontos $E = (30,30)$ e informar o raio $r = 30$. O GeoGebra construirá o círculo destacado de azul nas figuras acima e determinará a figura;

4. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Reta definida por Dois Pontos” e localizar os pontos A e C. O GeoGebra construirá a reta;

5. Na janela 8 da barra de Ferramenta de acesso rápido clicar no ícone “Distância, Comprimento ou Perímetro”, depois Clicar no ponto E e na reta AC. Ver figura:

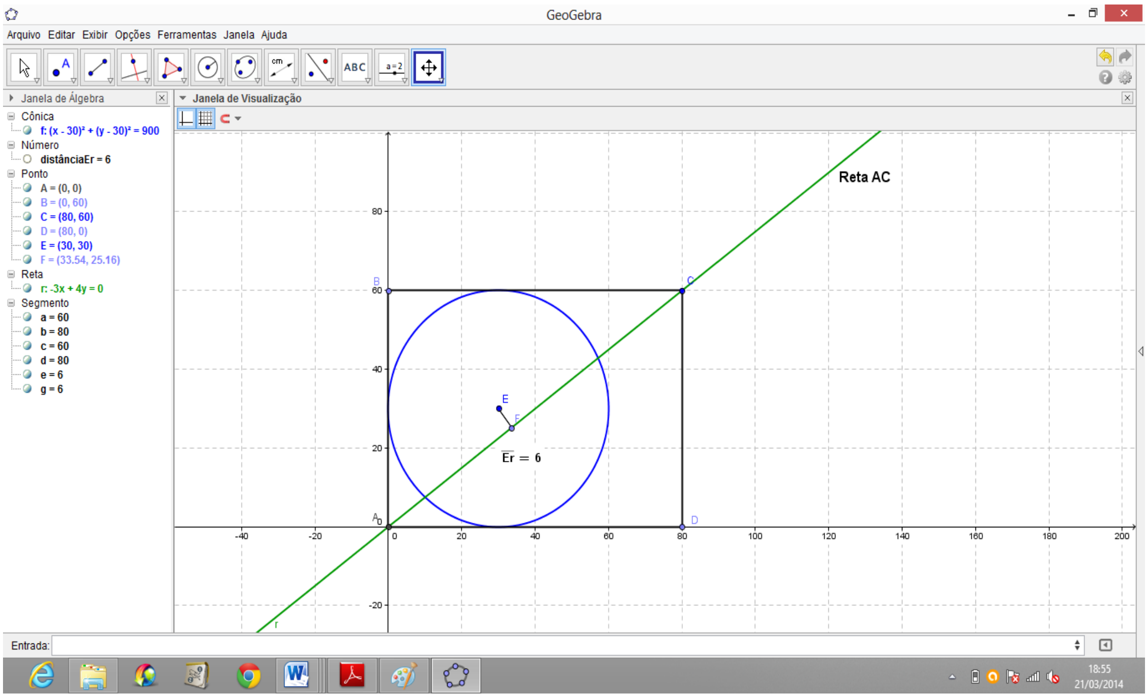


Figura 50: Distância do Centro $\boldsymbol{E = (30, 30)}$ a reta $\boldsymbol{AC}$.

PROBLEMA 5:

Considere o quadrado $ABCD$ da figura abaixo e os triângulos equiláteros ADE e CDF. Mostre que os pontos B, E e F estão alinhados.

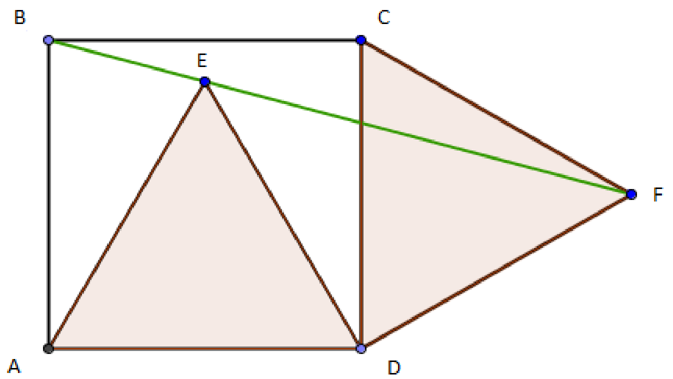


Figura 51: Quadrado $\boldsymbol{ABCD}$ e triângulos equiláteros $\boldsymbol{ADE}$ e $\boldsymbol{CDF}$.

SOLUÇÃO:

Chamando cada lado do quadrado e dos triângulos equiláteros de l, e estabelecendo um sistema de coordenadas cartesianas apropriado, com o eixo x passando por AD e o eixo y passando por AB, segue que $A = (0,0), B = (0, l), C = (l, l), D = (l, 0), E = \left(\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}l}{2}\right), F = \left(l + \frac{\sqrt{3}l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, conforme a figura.

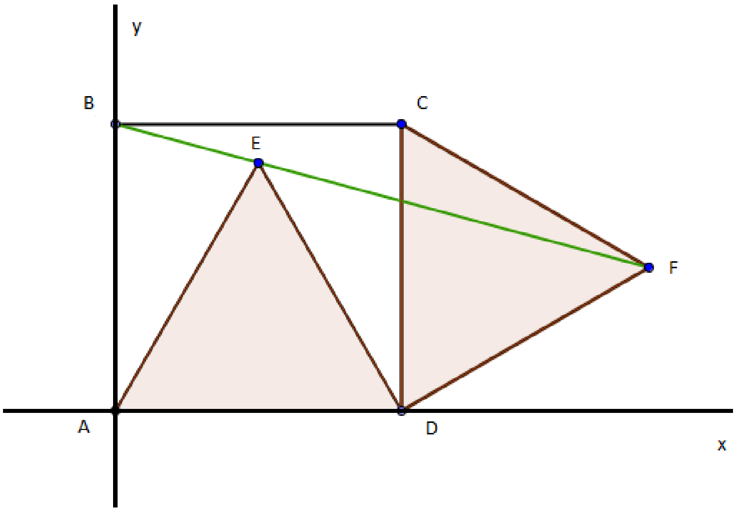


Figura 52: Quadrado $\boldsymbol{ABCD}$ e triângulos equiláteros $\boldsymbol{ADE}$ e $\boldsymbol{CDF}$ no sistema cartesiano ortogonal

Usando a condição de alinhamento de três pontos, segue que:

$$B = (0, l), E = \left(\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}l}{2}\right) \ e \ F = \left(l + \frac{\sqrt{3}l}{2}, \frac{l}{2}\right).$$

$$det = \begin{vmatrix} 0 & l & 1 \\ \frac{l}{2} & \frac{\sqrt{3}l}{2} & 1 \\ l + \frac{\sqrt{3}l}{2} & \frac{l}{2} & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow det = l^2 + \frac{\sqrt{3}l^2}{2} + \frac{l^2}{4} - \frac{\sqrt{3}l^2}{2} - \frac{3l^2}{4} - \frac{l^2}{2} \Rightarrow$$

$$det = \frac{5l^2}{4} - \frac{3l^2}{4} - \frac{2l^2}{4} \Rightarrow det = \frac{5l^2}{4} - \frac{5l^2}{4} \Rightarrow det = 0.$$

Assim os pontos $B, E \ e \ F$ estão alinhados.

Resolvendo o problema usando o GeoGebra:

1. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Novo ponto” e localizar os pontos $A, B, C, D, E \ e \ F$ na Zona Gráfica;

2. Na janela 3 da barra de Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento definido por dois pontos” e determinar os segmentos $AB, BC, CD, DA, AE, ED, CF$ e DF;

3. Na Janela 4 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Polígono” e localizar os três pontos dados em cada triângulo, fechando o polígono (triângulo ADE, sequência $ADEA$ e triângulo CDF, sequência $CDFC$);

4. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Reta definida por Dois Pontos” e localizar os pontos B e F. O GeoGebra construirá a reta e perceberemos que a mesma passa pelo ponto E, mostrando que os pontos B, E e F estão alinhados, conforme a figura.

OBS: Nesta figura adota-se $l = 4$.

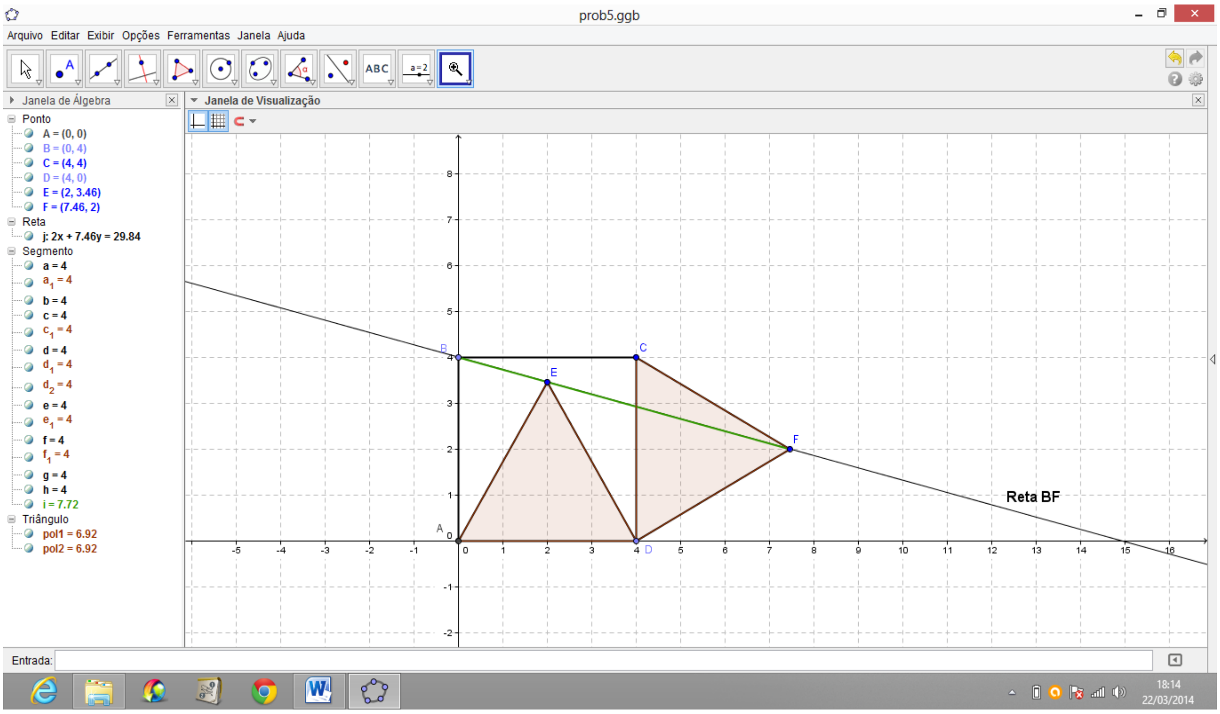


Figura 53: Pontos $\boldsymbol{B, E}$ ***e*** $\boldsymbol{F}$ alinhados.

PROBLEMA 6: (Proposto na RPM nº 55, p 38).

Considere um trapézio retângulo de bases b e B, tal que as diagonais são perpendiculares. Calcular, em função de b e B a altura do trapézio.

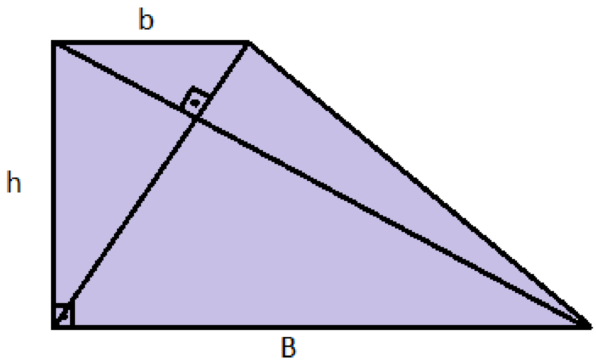


Figura 54: Trapézio retângulo de bases $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{B}$ com diagonais perpendiculares

SOLUÇÃO:

Este é um problema que se pode encontrar dificuldade em resolver por geometria sintética e tem uma solução muito fácil usando Geometria Analítica.

Escolhendo apropriadamente um sistema de eixos coordenados temos:

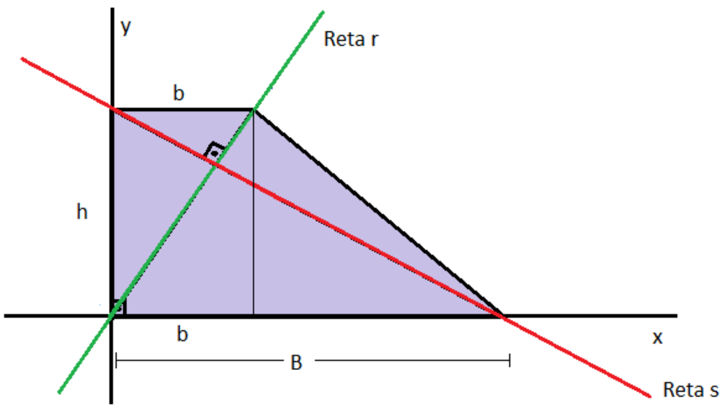


Figura 55: trapézio retângulo com diagonais perpendiculares no sistema cartesiano

As equações das retas perpendiculares r e s são:

$$r: y = \frac{h}{b}x \qquad e \qquad s: y = -\frac{b}{h}x + h$$

Pois a reta r passa pela origem, ou seja, tem coeficiente linear igual a zero, e possui coeficiente angular $m_r = \frac{h}{b}$. Já a reta s tem coeficiente linear h e coeficiente angular $m_s = -\frac{b}{h}$, pelo fato de as retas r e s serem perpendiculares.

Como o ponto $(B, 0)$ pertence a reta s temos:

$$0 = -\frac{b}{h}(B) + h \Rightarrow h = \frac{bB}{h} \Rightarrow h^2 = Bb \; ou \; h = \sqrt{bB}$$

Assim a altura h em função das bases B e b é igual à raiz quadrada do produto das medidas das bases do trapézio retângulo.

Tomemos agora o mesmo problema com bases conhecidas, por exemplo: $B = 9$ e $b = 4$. Pelo que encontramos anteriormente a altura h do trapézio retângulo cujas diagonais são perpendiculares deve ser:

$$h = \sqrt{9 \times 4} \Rightarrow h = \sqrt{36} \Rightarrow h = 6$$

Verifiquemos se este resultado é verdadeiro com o auxílio do GeoGebra.

1. Na janela 3 da barra de Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento definido por dois pontos” e determinar o segmento $AD = 9$, que representa a base maior B sobre o eixo x com extremidades em $A = (0,0) \; e \; D = (9,0)$;

2. Na Janela 6 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Semicírculo Definido por Dois Pontos”, clicar nos pontos A e D, depois localizar um ponto E qualquer sobre o semicírculo construído;

3. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Reta definida por Dois Pontos” e clicar sobre os pontos A e E bem como nos pontos D e E. O GeoGebra construirá as duas retas e perceberemos que estas serão perpendiculares entre si. Se desejar pode determinar esse ângulo reto clicando na janela 8, escolhendo a opção “ângulo” e clicando sobre os pontos $B, E \; e \; C$;

4. Na janela 3 da barra de Ferramentas de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento com Comprimento Fixo”, escolher o ponto de interseção da reta DE com o eixo y e optar pelo comprimento 4. O GeoGebra construirá esse segmento na horizontal, $BC \parallel OX$;

5. Na janela 1 da barra de Ferramentas de acesso rápido Clicar no ícone “Mover”, selecionar o ponto E sobre o semicírculo e arrasta-lo até fazer o ponto C tocar na reta AC. Nesta posição a reta BD toca no eixo y no ponto $B = (0,6)$, mostrando que a altura $h = 6$.

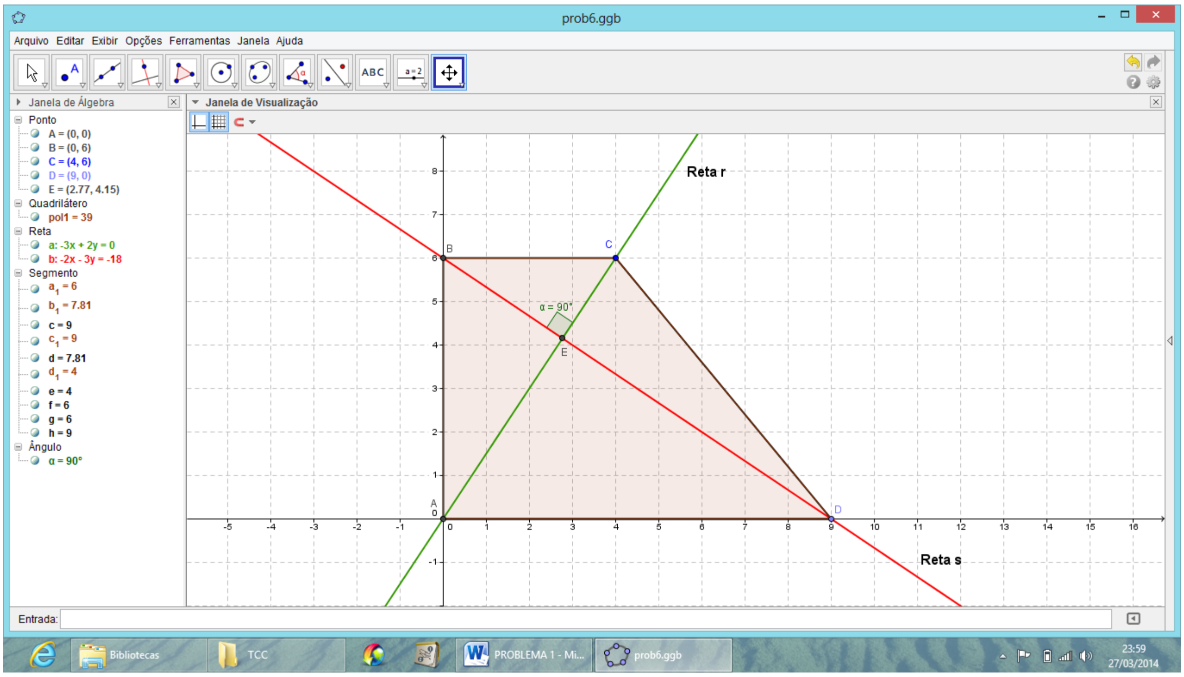


Figura 56: Altura do trapézio retângulo.

9 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE NAPOLEÃO.

O teorema de Napoleão, uma homenagem a Napoleão Bonaparte que o teria anunciado por volta de 1787, consiste em***: Se sobre os lados de um triângulo qualquer ABC forem construídos triângulos equiláteros, os ortocentros desses triângulos equiláteros formam igualmente um triângulo equilátero, independente da natureza do triângulo inicial.***

SOLUÇÃO:

Sabemos que a medida do ângulo agudo θ formado por duas retas concorrentes e não perpendiculares, r e s, em que m e m' são, respectivamente, os coeficientes angulares de r e s, é tal que:

$$\boxed{tg\ \theta = \left|\frac{m' - m}{1 + m \cdot m'}\right|}$$

Sem perda de generalidade, podemos atribuir às coordenadas dos vértices do triânguloABC os pontos $A = (a, 0), B = (b, 0)\ e\ C = (0, c)$.

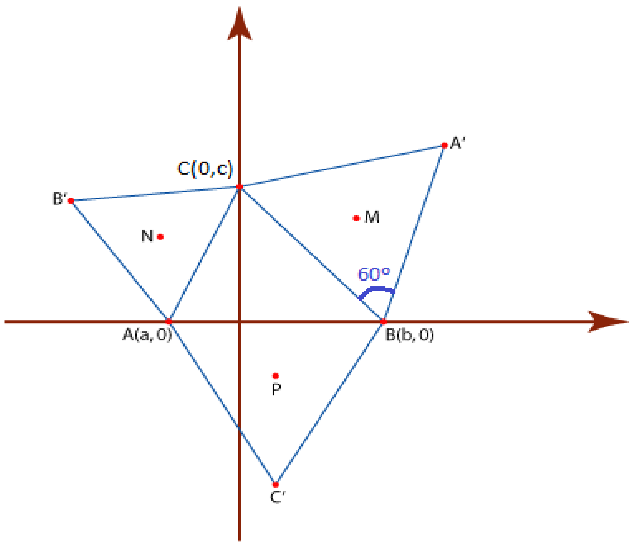


Figura 57: Triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo qualquer

Se chamarmos de m' o coeficiente angular da reta BC, segue que $m' = -\frac{c}{b}$, e o ângulo formado pelas retas $BC\ e\ BA'$ mede $60°$ e a $tg60° = \sqrt{3}$.

Aplicando a relação mencionada anteriormente, se nós chamarmos de m o coeficiente angular da reta BA', podemos encontrar m a partir da equação:

$$\frac{\frac{-c}{b}-m}{1-\frac{cm}{b}}=\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{-c-bm}{b}\cdot\frac{b}{b-cm}\Rightarrow b\sqrt{3}-cm\sqrt{3}=-c-bm\Rightarrow$$

$$-cm\sqrt{3}+bm=-c-b\sqrt{3}\Rightarrow m\left(-b+c\sqrt{3}\right)=c+b\sqrt{3}\Rightarrow m=\frac{c+b\sqrt{3}}{c\sqrt{3}-b}$$

$$\boxed{m=\frac{c+b\sqrt{3}}{c\sqrt{3}-b}}$$

Usando $y-y_0=m(x-x_0)$ e o ponto $B=(b,0)$, a equação da reta BA' é então:

$$BA':y=\left(\frac{c+b\sqrt{3}}{c\sqrt{3}-b}\right)\cdot(x-b)$$

Prosseguindo de maneira analoga, podemos encontrar a equação da reta CA':

$$CA':y=\left(\frac{-c+b\sqrt{3}}{c\sqrt{3}+b}\right)\cdot(x+b)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações das retas$BA'\ e\ CA'$, obtemos as coordenadas do ponto A'.

$$A'=\left(\frac{b+c\sqrt{3}}{2},\frac{b\sqrt{3}+c}{2}\right)$$

Repetindo o mesmo procedimento que determinou o ponto A', podemos encontrar as coordenadas do ponto B', interseção das retas $CB' e\ AB'$.

$$CB':y=\left(\frac{c+a\sqrt{3}}{c\sqrt{3}-a}\right)\cdot(x+c)\ e\ AB':y=\left(\frac{-c+a\sqrt{3}}{c\sqrt{3}+a}\right)\cdot(x-a)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações das retas $CB' e\ AB'$, obtemos as coordenadas do ponto B'.

$$B'=\left(\frac{a-c\sqrt{3}}{2},\frac{-a\sqrt{3}+c}{2}\right)$$

Da mesma forma, podemos encontrar as coordenadas do ponto C', interseção das retas $AC' e\ BC'$.

$$AC':y=-\sqrt{3}\cdot(x-a)\ e\ BC':y=\sqrt{3}\cdot(x-b)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações das retas $AC' e\ BC'$, obtemos as coordenadas do ponto C'.

$$C'=\left(\frac{a+b}{2},\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}\right)$$

Recordando agora que se um triângulo ABC tem vértices $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, o baricentro desse triângulo tem coordenadas:

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Com isso, podemos encontrar as coordenadas de $M, N\ e\ P$, que são:

$$M = \left(\frac{3b + c\sqrt{3}}{6}, \frac{b\sqrt{3} + 3c}{6}\right), N = \left(\frac{3a - c\sqrt{3}}{6}, \frac{-a\sqrt{3} + 3c}{6}\right)\ e\ P = \left(\frac{a + b}{2}, \frac{(a - b)\sqrt{3}}{6}\right)$$

Por fim, calculando as distâncias de $MN, NP\ e\ PM$ temos:

$$d(M, N) = d(N, P) = d(P, M) = \frac{1}{3}\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2) - ab - c(b - a)\sqrt{3}}$$

Mostrando assim que o triângulo MNP é realmente equilátero.

Usando o GeoGebra, adotar o seguinte roteiro simplificado para a verificação da validade do teorema da Napoleão:

1. Na Zona Gráfica construir um triângulo qualquer, por exemplo, o triângulo cujos vértices são os pontos $A = (-2,1), B = (0,3)\ e\ C = (3, -1)$;

2. Na Janela 6 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Compasso” e construir triângulos equiláteros sobre os lados $AB, BC\ e\ AC$ do triângulo ABC construído anteriormente;

3. Na Janela 4 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Mediatriz” e usa-la para encontrar os baricentros $J, K\ e\ L$ dos triângulos equiláteros $ABE, BCF\ e\ ACH$ construídos sobre os lados do triângulo ABC;

4. Na janela 3 da barra de Ferramentas de acesso rápido Clicar no ícone “Segmento Definido por dois Pontos” e construir os segmentos $JK, KL\ e\ LJ$. O GeoGebra construirá esses segmentos todos com mesma medida, mostrando que o triângulo formado pelos baricentros $J, K\ e\ L$ é realmente equilátero;

5. Na janela 1 da barra de Ferramentas de acesso rápido Clicar no ícone “Mover”, selecionar o ponto A ou B ou C e move-lo para qualquer posição, percebendo que, ao mudar a posição do ponto escolhido, o triângulo JKL continua equilátero, independente da natureza do triângulo ABC.

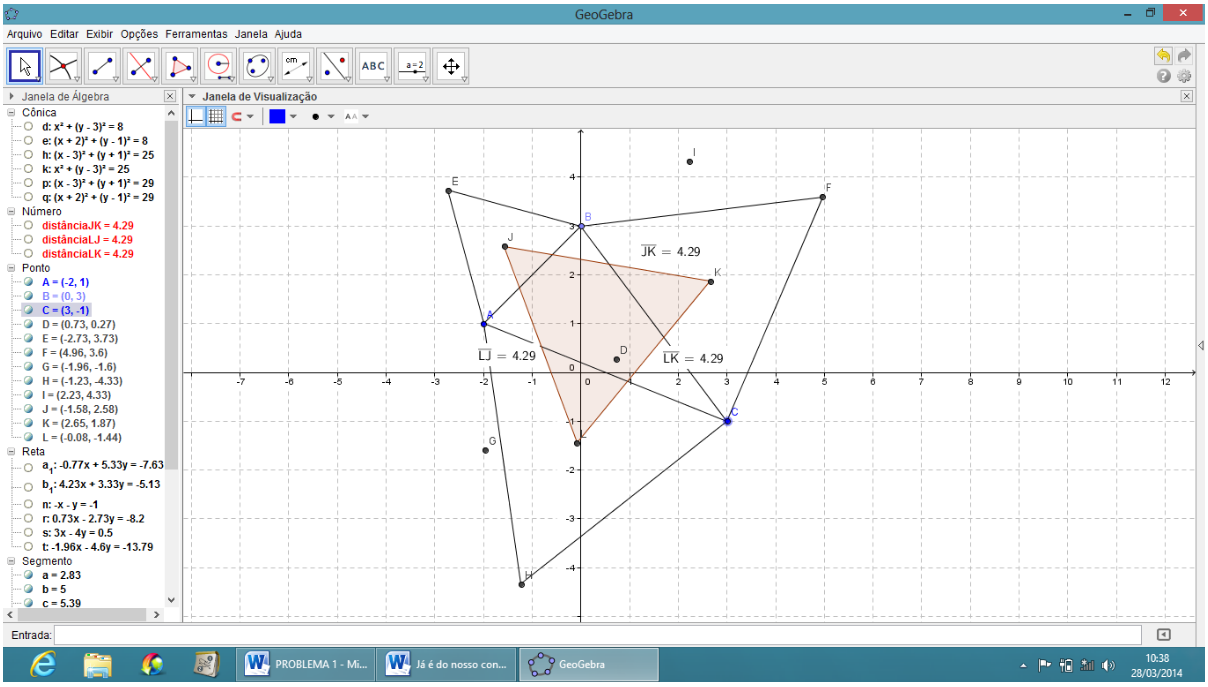


Figura 58: O teorema de Napoleão.

10 ATIVIDADES DE LUGARES GEOMÉTRICOS

10.1 Retas paralelas como lugar geométrico

Obter o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância $\mathbf{d = 3}$ de uma reta AB cujos pontos A e B são: $A = (-2, -3)$ e $B = (6, -1)$.

1. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Reta definida por Dois Pontos" e clicar nos pontos A e B dados;

2. Construir um ponto C qualquer sobre a reta AB e os pontos D e E quaisquer fora da reta AB, um acima e outro abaixo da mesma;

3. Clicar com o botão direito do Mouse sobre o ponto D que está acima da reta AB e ir em: propriedades-básico-definição e escrever: $(x(C), y(C) + 3)$;

4. Clicar com o botão direito do Mouse sobre o ponto E que está abaixo da reta AB e ir em: propriedades-básico-definição e escrever: $(x(C), y(C) - 3)$;

5. Na Janela 4 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Lugar Geométrico" e clicar nos pontos C e D e depois nos pontos C e E. O GeoGebra exibirá o par de retas paralelas à reta AB que constitui o Lugar Geométrico desejado.

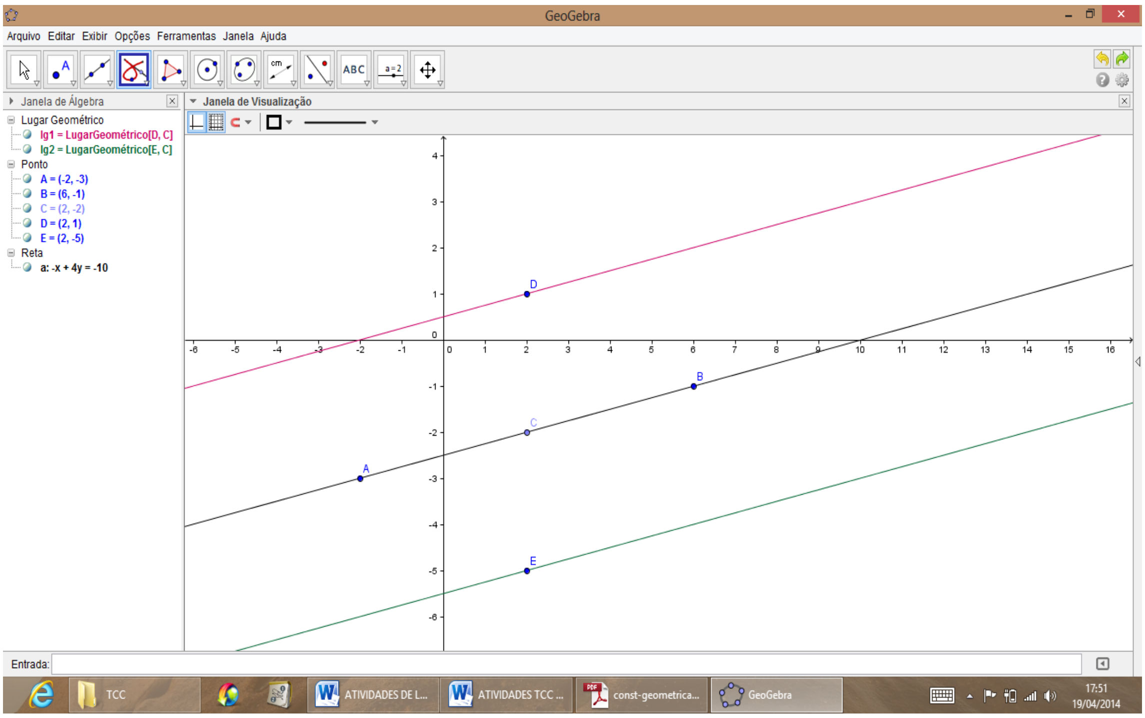


Figura 59: Retas paralelas como Lugar Geométrico.

10.2 Bissetriz dos quadrantes impares como lugar geométrico

Obter o lugar geométrico dos pontos no plano cartesiano que possuem abscissa igual a ordenada. É fácil ver que o Lugar Geométrico referido é a reta $y = x$.

1.Construir um ponto A qualquer sobre o eixo OX e um ponto B qualquer fora do eixo OX;

2. Clicar com o botão direito do Mouse sobre o ponto B que está fora do eixo OX e ir em: propriedades-básico-definição e escrever: $(x(A), x(A))$;

3. Na Janela 4 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Lugar Geométrico" e clicar nos pontos A e B. O GeoGebra exibirá a reta $y = x$ que constitui o Lugar Geométrico desejado. Obs: Pode-se também clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto B e selecionar a opção: Habilitar Rastro. Após isso, na janela 1 da barra de ferramentas de acesso rápido clicar em Mover e clicar sobre o ponto A, movendo o mesmo sobre o eixo OX. O GeoGebra desenhará o rastro do ponto B que depende de A pela propriedade $(x(A), x(A))$ formando assim a reta $y = x$, como um rastro que é o Lugar Geométrico procurado.

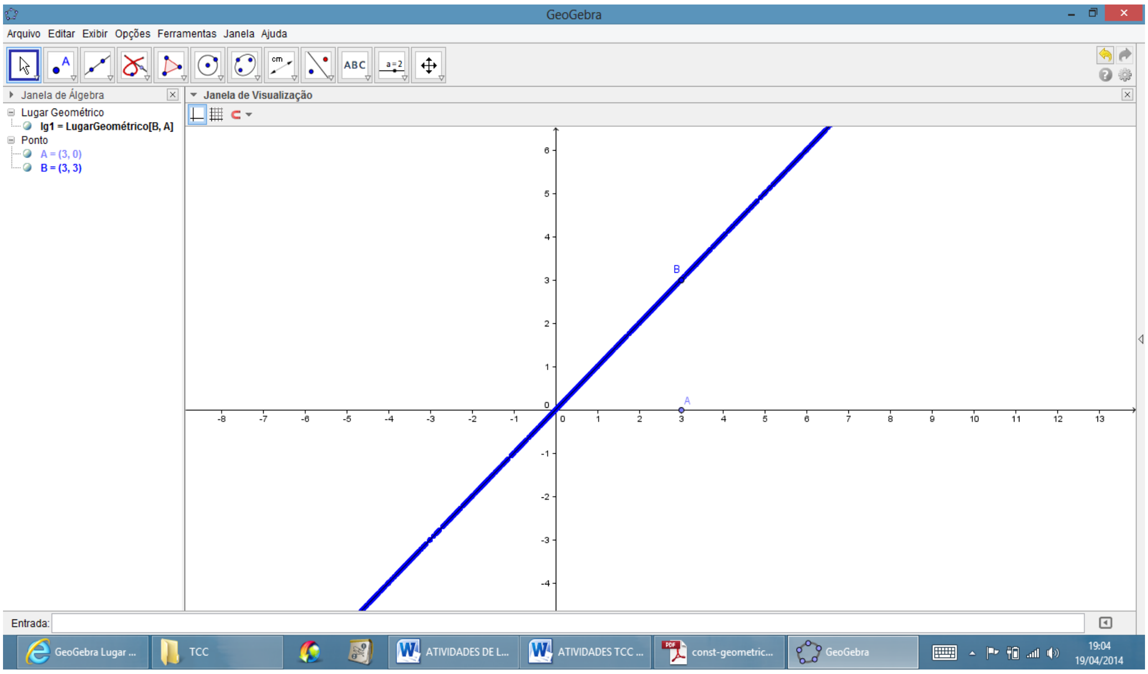


Figura 60: Bissetriz dos quadrantes impares como Lugar Geométrico

10.3 Parábola como lugar geométrico

Obter o lugar geométrico dos pontos P do plano cartesiano equidistantes de uma reta l e de um ponto F.

Considere a reta l sendo a reta formada pelos pontos $A = (-1, -1)\ e\ B = (5,1)$ e o ponto $F = (2,2)$.

1. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Reta definida por Dois Pontos" e clicar nos pontos A e B dados. A reta construída será a reta l, reta diretriz da parábola;

2. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Novo Ponto" e construir um ponto C qualquer sobre a reta l (diretriz) e um ponto F (foco) qualquer fora da reta l;

3. Na Janela 4 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Mediatriz" e construir a mediatriz do segmento CF;

4. Na Janela 4 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Reta Perpendicular" e clicar no ponto C e na reta l. O GeoGebra construirá a reta perpendicular á reta l passando pelo ponto C;

5. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Interseção de Dois Objetos" e construir o ponto de interseção E clicando na reta perpendicular construída anteriormente e na reta l;

6. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Segmento definido por Dois Pontos" e construir os segmentos $CE\ e\ EF$;

7. Clicar com o botão direito do Mouse sobre o ponto E e escolher a opção Habilitar Rastro;

8. Na Janela 1 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Mover" e clicar no ponto C, movendo o mesmo sobre a reta diretriz l. O GeoGebra desenhará o rastro do ponto E que depende de C pela propriedade $d(CE) = d(EF)$ formando assim a parábola, como um rastro que é o Lugar Geométrico procurado.

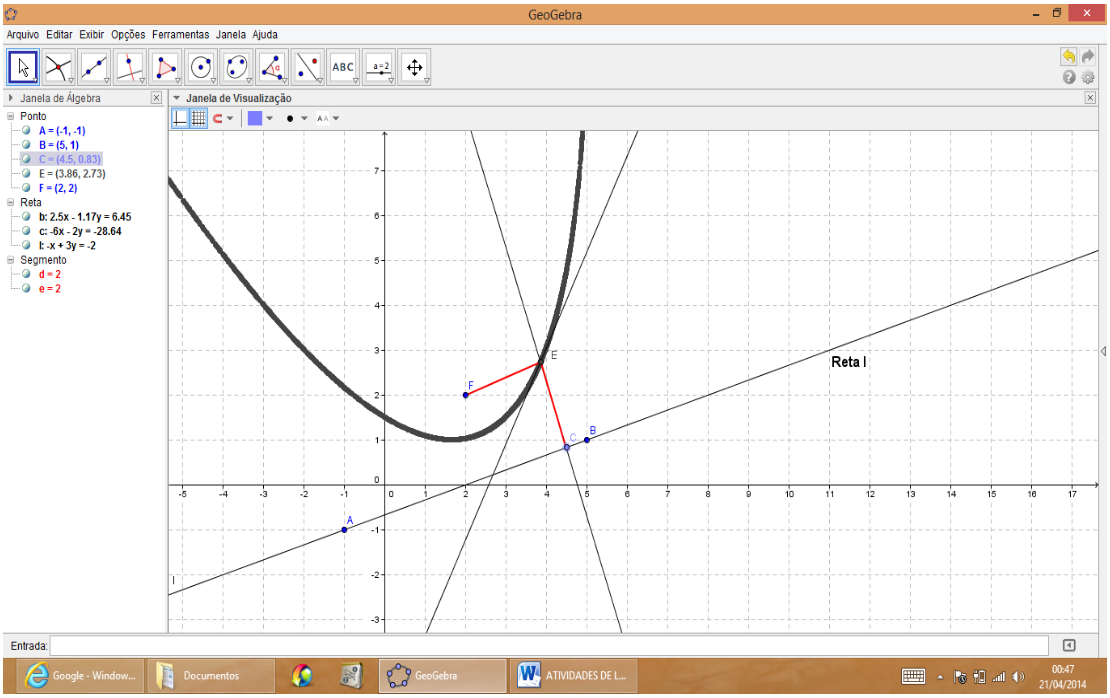


Figura 61: Parábola como Lugar Geométrico.

10.4 Elipse como lugar geométrico

Obter o lugar geométrico dos pontos P do plano cartesiano tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados focos F_1 e F_2 é constante.

Considere os pontos $F_1 = (3,2)$ e $F_2 = (7,2)$ sendo os focos.

1. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Novo Ponto" e clicar nos pontos F_1e F_2 dados;

2. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Semirreta Definida por Dois Pontos" e construir a semirreta de origem F_1e que passa por F_2;

3. Na Janela 6 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Círculo dados Centro e Um de seus Pontos" e construir o círculo de centro F_1e que contém F_2 em seu interior. Pode-se escolher o ponto $C = (8,2)$ como o ponto do círculo;

4. Na Janela 1 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Novo Ponto" e escolher um ponto D qualquer sobre o círculo e que não pertença á semirreta F_1F_2;

5. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone "Segmento definido por Dois Pontos" e construir os segmentos DF_1 e DF_2;

6. Na Janela 4 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Mediatriz” e construir a mediatriz do segmento DF_2;

7. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Interseção de Dois Objetos” e construir o ponto de interseção P clicando na mediatriz construída anteriormente e no segmento DF_1;

8. Clicar com o botão direito do Mouse sobre o ponto P e escolher a opção Habilitar Rastro;

9. Na Janela 1 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Mover” e clicar no ponto D, movendo o mesmo sobre o círculo. O GeoGebra desenhará o rastro do ponto P que depende de D pela propriedade $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$ formando assim a elipse, como um rastro que é o Lugar Geométrico procurado.

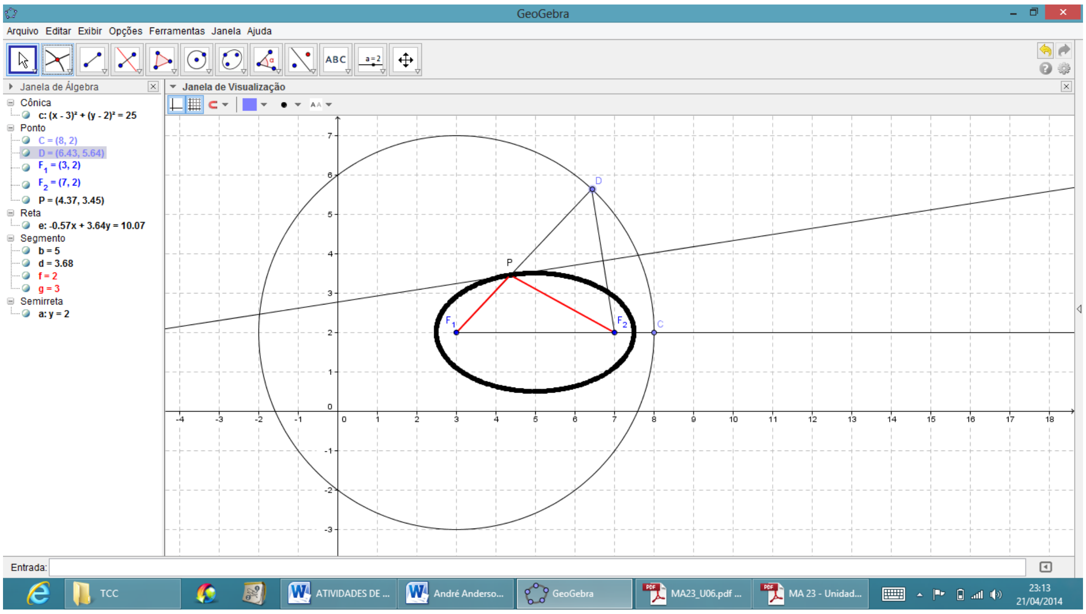


Figura 62: Elipse como Lugar Geométrico

10.5 Hipérbole como lugar geométrico

Obter o lugar geométrico dos pontos P do plano cartesiano tal que o módulo da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados focos F_1 e F_2 é constante.

Considere os pontos $F_1 = (2,1)$ e $F_2 = (6,1)$ sendo os focos.

1. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Novo Ponto” e clicar nos pontos F_1e F_2 dados;

2. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Semirreta Definida por Dois Pontos” e construir a semirreta de origem F_1e que passa por F_2;

3. Na Janela 6 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos” e construir o círculo de centro F_1e que passa por um ponto A entre os pontos F_1e F_2. Pode-se escolher o ponto pontos A como sendo $A = (5,1)$;

4. Na Janela 1 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Novo Ponto” e escolher um ponto B qualquer sobre o círculo e que não pertença á semirreta F_1F_2;

5. Na Janela 3 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Reta definida por Dois Pontos” e clicar nos pontos B e F_1, chame a reta construída de s;

6. Na Janela 4 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Mediatriz” e construir a mediatriz m do segmento BF_2;

7. Na Janela 2 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Interseção de Dois Objetos” e construir o ponto de interseção P clicando na mediatriz m construída anteriormente e na reta s;

8. Clicar com o botão direito do Mouse sobre o ponto P e escolher a opção Habilitar Rastro;

9. Na Janela 1 da barra Ferramenta de acesso rápido Clicar no ícone “Mover” e clicar no ponto B, movendo o mesmo sobre o círculo. O GeoGebra desenhará o rastro do ponto P que depende de B pela propriedade $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$ formando assim a hipérbole, como um rastro que é o Lugar Geométrico procurado.

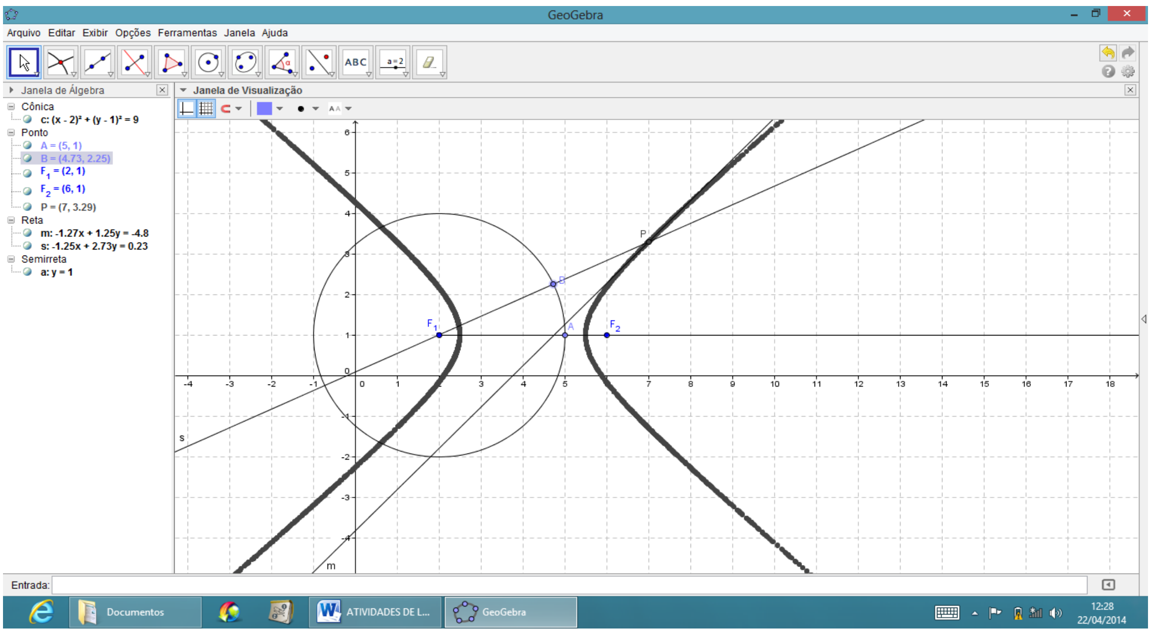


Figura 63: Hipérbole como Lugar Geométrico.

11 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho temos a oportunidade de apresentar um conhecimento belo, historicamente construido e muito útil em suas bases nos dias atuais, pois a ideia básica da geometria analítica é caracterizar um ponto do plano por meio de suas coodenadas. Parece que essa ideia surgiu na Grécia antiga, pois Apolônio de Perga (séc. III a.C.) caracterizou as secções cônicas por meio de suas coordenadas, sem as designar por esse nome e sem lhes atribuir valores numéricos. Relata-se que na mais alta antiguidade, o costume de observar, na astronomia, permitiu referenciar as direcções no espaço por duas coordenadas angulares: altura acima do horizonte e afastamento em relação ao meridiano. Hoje temos a interpretação das relações entre essas coordenadas, ou seja, a geometria analítica, que só aparece muitos séculos depois com os trabalhos de Descartes e Fermat.

Esta proposta trabalho é uma tentativa de prover um meio adicional e diferenciado para o ensino de geometria analítica no ensino médio. As atividades propostas aqui contemplam todos os tópicos de geometria analítica deste nível de ensino. A execução destas atividades permite ao aluno perceber de forma mais clara a forte relação entre a álgebra e a geometria bem como entender mais plenamente as propriedades e características de cada tópico estudado pelo fato de poderem manipular os objetos e modifica-los, verificando assim validades e a preservação de propriedades que de outro modo ficariam a cargo da sua imaginação.

Levando em consideração que os alunos hoje compõem uma geração que sem dúvida está à frente da maioria dos professores quanto ao uso das tecnologias, torna-se necessário dar suporte aos professores, fazê-los sentir-se pelo menos minimamente confortáveis quanto ao uso destas e dar treinamento adequado para que possam ser capazes de prover um direcionamento a fim de que os alunos consigam usar o computador, a internet, as mídias em geral de modo proveitoso para a aquisição do conhecimento e o entendimento de realidades vividas e historicamente construídas.

Além disso, geralmente os livros didáticos de matemática do ensino médio não contemplam atividades com uso de softwares, tornando necessário que o professor tenha a capacidade de adequar essa situação a sua realidade, criando atividades de acordo com a realidade das suas turmas e talvez de seus livros didáticos usuais. Este trabalho tem também esta finalidade, servir de suporte e tutorial para que sejam usadas estas atividades e outras inspiradas nestas, porem adequadas aos propósitos de cada um.

O uso adequado do computador e do software GeoGebra em sala de aula tende a estimular a participação ativa do aluno no processo de aprendizagem. Com estes fatos postos fica clara a necessidade de um planejamento cuidadoso e flexível a fim de que as atividades realmente sejam executadas e cumpram seus objetivos propostos, visto que estas necessitam que o executor das atividades (aluno) e o mediador (professor) conheçam os recursos, potencialidades e limitações do software em cada situação. De outro modo este esforço resultaria em frustação e desapontamento para ambas as partes fazendo abandonar esta possibilidade de abordagem e de aprendizado.

Fica a expectativa de que as ideias aqui apresentadas possam ser uteis para complementar o trabalho do professor e consequentemente garantir a efetivação da aprendizagem do aluno.

REFERÊNCIAS

ALEXANDRE, Cynthia Sodré. **Desenho geométrico – uma ferramenta para auxiliar o ensino da geometria.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2013.

ALVES, Alberto Cunha. **O Geogebra como ferramenta didática no ensino de geometria euclidiana.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

CARNEIRO, José Paulo Q. Pesquisa de lugares geométricos com o auxílio da geometria dinâmica. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.61, p. 4-9, 3º quadrimestre 2006.

COSTA, Marcelo de Moura. **Uma abordagem introdutória de cônicas para o ensino médio através do Geogebra.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2007. p. 8-99.

DELATORRE, Wagner de Oliveira. **Demonstrações geométricas com auxílio de softwares de geometria dinâmica como uma metodologia de ensino para a geometria.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 9. Ed São Paulo: Atual, 1991.

FREITAS, Basilio Alves. **Introdução à geometria euclidiana axiomática com o Geogebra.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

GARCIA, João Calixto. **Explorando as definições de cônicas.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

GOMES, Reinaldo. **Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do GeoGebra.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**. 7. ed São Paulo: Atual, 2005.

Inovações tecnológicas no processo de ensino-aprendizagem de geometria analítica e álgebra linear. **Sinergia**, São Paulo, dezembro 2011. Disponível em <http://www.cefetsp.br/edu/prp/sinergia>. Acesso em 18 de abril. 2014.

Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro. Disponível em: http://www.geogebra.imu-uff.mat.br/index.html, acesso em 03 de fevereiro de 2014.

JAHN, Marta Lena. **A Geometria de matrizes e determinantes.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2013.

LIMA, Elon Lages. Conceituação, Manipulação e Aplicações: os três componentes do ensino da matemática. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 28, p. 34-48, nov./dez. 1999.

MARINS, Leonardo de Souza. **O uso do Geogebra no ensino da geometria analítica: estudo da reta.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

MARTINS, Cesar Pereira. **Tópicos de geometria analítica: elipse.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

NAVARRO, Érica Patrícia. **Uso do geogebra no ensino de matemática com atividades de aplicação em geometria analítica: o ponto e a reta.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2013.

NERY, Chico. A Geometria analítica no ensino médio. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.67, p. 19-24, 3º quadrimestre 2008.

O Ensino e Aprendizagem da Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica. **Ulbra**, Canoas, 2010. Disponível em <http://matematica.ulbra.br>. Acesso em 18 de abril. 2014.

OLIVEIRA, Aguinaldo H. Painel II. Geometria Analítica. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.55, p. 36-38, 2004.

PAULA, Teófilo Oliveira. **O Ensino de Geometria analítica com o uso do Geogebra.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2013.

PCNEM – **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** - Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 111-129 p. Orientações curriculares para o ensino médio.

Quem somos nós, professores de matemática? **Cedes**, Campinas, jan./abril 2008. Disponível em <http://www.cedes.unicamp.br>. Acesso em 29 jan. 2014.

RIZZON, Katya. **Análise da linguagem matemática relacionada à geometria analítica no ensino médio.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

SILVA, Wellington Manoel Santos. **Uma abordagem dinâmica e inovadora para o ensino da geometria analítica no ensino médio.** 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2012.

SOUSA, Charliana Coutinho. **Utilizando o Geogebra no ensino da geometria analítica.** 2013. Monografia (Pós-graduação em Matemática) – Faculdade da Aldeia de Carapicuíba, Morada Nova, 2013.

WAGNER, Eduardo. Sobre o ensino de Geometria Analítica. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 41, p. 17-22, 1999.

WERNECK, Jorge da Silva. **Uso do Geogebra no ensino de matemática com atividades de aplicação em geometria analítica: a circunferência.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2013.

ANEXOS

COLÉGIO ESTADUAL MARIA EMÍLIA RABELO

NOME: ____SÉRIE: ___________

QUESTIONÁRIO

1. Você já utilizou o computador para aprender matemática sem estar no laboratório de Informática?
   ( ) Sim ( ) Não
   Se respondeu sim, que sites você utilizou?
   ____
   ____

2. Como foram as aulas de geometria analítica em sala de aula sem o GeoGebra?
   ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Boa ( ) Ótima Descreva:
   ____
   ____

3. Como foram as aulas de geometria analítica no laboratório de Informática com o GeoGebra?
   ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Boa ( ) Ótima
   Conseguiu entender com mais clareza os conteúdos que foram estudados? Ou prefere o método de sala de aula? Comente:
   ____
   ____

4. As aulas de geometria analítica são mais interessantes e mais fáceis de compreender quando são realizadas no laboratório de informática utilizando o GeoGebra?
   ( ) Sim ( ) Não Comente:
   ____
   ____

5. Como foi o seu desempenho durante as atividades utilizando o GeoGebra?
   ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Ótimo
   Conseguiu realizar as atividades? Ou sentiu dificuldades para utilizar o GeoGebra? Descreva.
   ____
   ____

6. Ao fazer uso do GeoGebra você encontrou mais facilidade para aprender geometria analítica?
   ( ) Sim ( ) Não
   Cite os pontos negativos e positivos da utilização do GeoGebra para aprender a geometria analítica.
   ____
   ____

Fonte: o autor

Fonte: o autor

Fonte: o autor

Fonte: o autor