UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUACÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

ALEX DE SOUZA MAGALHÃES

ÁLGEBRA LINEAR NO ENSINO MÉDIO

JUAZEIRO DO NORTE - CE
2014

ALEX DE SOUZA MAGALHÃES

ÁLGEBRA LINEAR NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemtíca da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Ãrea de concentrção: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira.

JUAZEIRO DO NORTE - CE
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Biblioteca do Campus de Juazeiro do Norte

M188a Magalhães, Alex de Souza

Álgebra linear no ensino médio / Alex de Souza Magalhães. – 2014.
66 f. : il. color., enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Departamento de matemática,Programa em Pós-graduação em matemática em rede nacional, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Ensino de matemática
Orientação: Prof. Me. Paulo

1. Álgebra linear. 2. Espaço vetorial. 3.Matriz.I. Título.

CDD 512.5

ALEX DE SOUZA MAGALHÃES

ÁLGEBRA LINEAR NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Area de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 16 / 05 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Clarice Dias de Albuquerque
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ricardo Rodrigues de Carvalho
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, criador de tudo e de todos, por sempre atender meus pedidos.

Agradeço a minha esposa Elizângela Torres de Sá Magalhães, que foi peça fundamental nesta conquista, e que, sempre me apoia nas minhas escolhas.

Agradeço a minha filha Adrícia Torres Magalhães, que hoje, juntamente com sua mãe, representam a razão de minha vida.

Agradeço aos meus pais, João Ailton de Magalhães e Maria das graças de Souza Leão, que, entre outras coisas, me mostraram o caminho da educação.

Agradeço aos meus irmãos Ana Paula de Souza Magalhães e Fagner de Souza Magalhães, que acima de tudo acreditaram em mim, até mais do que eu.

Agradeço a todos meus alunos e ex-alunos, pois é por vocês que estou me capacitando.

Agradeço ao professor Inaldo Dionísio neto, que foi o principal responsável, pela minha formação básica em matemática, sem a qual eu certamente não estaria escrevendo estas palavras.

Agradeço ao Professor Paulo César Cavalcante de Oliveira, que sem duvidas, e não desmerecendo os demais, foi o que mais contribuiu na minha formação neste curso.

Agradeço a toda equipe que faz parte do PROFMAT, que, com toda certeza, mudará a formação de milhares de professores de Matemática do Brasil.

Por fim agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicatória

a minha esposa Elizângela

Torres de Sá Magalhães.

Resumo

Neste trabalho, faremos uma apresentação da Álgebra Linear presente no ensino médio de forma alternativa. Nesta forma, será proposto a introdução dos conceitos de espaÃ§o vetorial e variedade afim, que serão exemplificados através do estudo das matrizes e dos sistemas lineares. Sendo assim as matrizes aparecem como elementos de um espaço vetorial e o conjunto solução de um sistema linear como uma variedade afim. Neste texto nÃ£o será abordado a ideia de determinantes, acreditamos que esta pode ser, sem muitos prejuízos, retirada do currículo matemático da educação básica.

Palavras-chave: EspaçøVetorial, Matriz, Sistema Linear, Variedade Afim.

Abstract

In this work, we will make a presentation of Linear Algebra in high school this alternative form. In this way, the introduction of the concepts of vector space and affine variety, which are introduced through the study of matrices and linear systems, will be proposed. Thus the arrays appear as elements of a vector space and the solution set of a linear system as an affine variety. This text will not be addressed the idea of determinants, we believe this can be without much damage, withdrawal of the mathematical curriculum of basic education.

Keywords: Keywords: Vector Space, Matrix, Linear System, Variety In order.

Sumário

1 Espaço Vetorial **14**

1.1 Definição 14

1.2 Propriedades Adicionais 16

2 Matrizes **18**

2.1 Definição de Matriz 18

2.2 Matrizes Especiais 20

2.2.1 Matriz Linha 20

2.2.2 Matriz Coluna 20

2.2.3 Matriz Quadrada 21

2.2.4 Matriz Nula 21

2.2.5 Matriz Triangular Superior 21

2.2.6 Matriz Triangular Inferior 22

2.2.7 Matriz Diagonal 22

2.2.8 Matriz Identidade 22

2.2.9 Matriz Simétrica 22

2.3 O Espaço Vetorial das Matrizes 23

2.4 Outras Operações com matrizes 26

2.4.1 Transposição 26

2.4.2 Multiplicação 28

3 Variedade Afim **32**

3.1 Definição 32

4 Sistemas Lineares **34**

4.1 Definições 34

4.2 Sistemas Lineares e Matrizes 36

4.3 Operações Elementares e Matrizes Linhas equivalentes 39

4.4 Forma Escada, posto e nulidade de uma Matriz 42

4.5 Resolução e Estudo dos Sistemas Lineares 48

4.6 Sistema Linear, Variedade Afim e Espaço vetorial 62

5 Considerações finais **67**

Introdução

Através de alguns anos de experiência como professor e estudante de matemática, especialmente a matemática do ensino fundamental e médio, observei vários fatos interessantes e contraditórios na forma de como a matemática é transmitida para os alunos. Dentre os fatos, está a forma, praticamente homogênia, de apresentação dos conteúdos nos livros didáticos. Fato este, contraditório, pois o pensamento humano é inevitavelmente heterogêneo. Sendo assim como pode os livros didáticos serem tão semelhantes, apesar de serem escritos por diversos autores? Apesar disso, muito pouco se faz, no sentido de inovar os conteúdos matemáticos na educação básica.

Para confirmar este fato, antes de realizar este trabalho, fizemos uma análise de nove diferentes coleções de livros didáticos de matemática para o ensino médio. Nesta análise ficou bem clara a forma estática de apresentação da matemática. As coleções, muito semelhantes entre si, não apresentavam diferenças significativas, no que se refere ao modo de apresentação da teoria e nos exercícios.

Através desta análise pôde-se inferir, de forma qualitativa, alguns aspectos relevantes destas obras, vejamos.

Primeiro, ficou evidente a falta de inovação na apresentação dos conteúdos, até mesmo os exercícios apresentavam semelhanças, alguns eram praticamente idênticos, distinguindo-se apenas por valores numéricos.

No que se refere a álgebra linear no ensino médio, ficou evidente que a grande maioria dos livros didáticos de matemática, apresenta os tópicos desta área de conhecimento matemático da mesma forma. Forma esta que se restringe a apresentação de matrizes, determinantes e sistemas lineares. Em oito dos nove livros analisados os tópicos de álgebra linear são apresentados na seguinte ordem: i) matrizes; ii) determinantes; e iii) sistemas lineares. E em um dos livros mudava esta ordem no aspecto de apresentar sistemas lineares antes de determinantes.

Sendo assim, ficou evidente a semelhança dos livros, na apresentação da álgebra linear. Outra importante característica, é que em todas as coleções analisadas a apresentação do conteúdo se dava através de conceitos, propriedades e variados exercícios de caráter computacional, prevalecendo assim uma grande ênfase na repetição de exercícios.

Reconhecemos que esta abordagem tem suas vantagens, principalmente pela forma simplista de apresentação dos conteúdos, facilitando o primeiro contato dos alunos com estes temas. Mas acreditamos que existem algumas incoerências lógicas nesta apresentação. Dentre estas questionamos: A ordem da apresentação dos conteúdos e a utilidade e aplicações destas informações, além do mais, deveriam existir novas formas de abordagem, pois a álgebra linear é uma parte da matemática muito rica de conhecimento, e como tal, poderia ser melhor explorada no ensino básico.

A ordem de apresentação dos conteúdos que é mais comum nos livros didáticos (matrizes, determinantes e sistemas lineares, respectivamente) acreditamos não ser a mais adequada no sentido teórico. Além disso, será que matrizes, determinantes, sistemas lineares são os melhores tópicos de álgebra linear que devem ser ensinado no ensino médio?

No que se refere ao estudo das matrizes, acreditamos que sua apresentação no ensino médio é adequada. Mas é de certa forma vaga, no sentido de coerência lógica do assunto, sendo que isso se dá, pois não é enfatizado pelos livros a sua principal aplicação neste nível de ensino, que é na resolução de sistemas lineares.

O ensino de determinantes é equivocado na educação básica, especialmente na forma que é apresentado, por dois motivos. Primeiro não faz muito sentido falar de determinantes antes de sistema linear, afinal este tópico é utilizado, no ensino médio, simplesmente para estudar e resolver sistemas lineares, além de outras aplicações menos relevantes. Segundo, podemos estudar e resolver sistemas lineares de uma forma mais eficaz e eficiente sem o uso de determinantes, então é realmente necessário o ensino de determinantes na educação básica? Além do mais, as outras aplicações de determinantes da educação básica podem ser feitas de outras maneiras. De onde podemos concluir que é possível a exclusão do ensino de determinantes do currículo do ensino básico.

Já o estudo de sistemas lineares, assunto que é com certeza o mais importante da álgebra linear na educação básica, é apresentado de forma satisfatória, mas que pode ser feito de outra maneira, até mais prática para este nível de ensino. Atualmente, existe um grande ênfase do estudo de sistema linear através de determinantes, e a resolução através da regra de Cramer. Mas será realmente necessária esta abordagem? Talvez, o simples uso da eliminação, através do método de Gauss-Jordan seja mais simples e suficiente no ensino médio.

Neste trabalho apresentaremos uma abordagem alternativa, que neste contexto fica isenta das críticas anteriores, mas é claro que não é isento de novas críticas. Nesta forma de apresentação da álgebra linear no ensino médio temos como características a introdução dos conceitos de espaço vetorial, variedade afim, a exclusão dos determinantes na apresentação da teoria, e o estudo e resolução dos sistemas lineares através da eliminação, enfatizando a noção de posto e nulidade, segundo linhas de uma matriz através do método de Gauss-Jordan.

Por fim, cabe agora, destacar o principal objetivo deste trabalho. Que é mostrar uma forma alternativa ou complementar de apresentar a álgebra linear no ensino médio. Esta forma poderá ser usada por professores em sala de aula de forma regular, substituindo os textos comuns dos livros didáticos, ou como texto complementar para o aluno, de forma a ampliar seu horizonte sobre a matemática.

Capítulo 1

Espaço Vetorial

1.1 Definição

A primeira noção que vamos colocar no texto será a de espaço vetorial, que é a ideia base de toda a álgebra linear. Através deste conceito, vários dos objetos matemáticos estudados serão considerados espaços vetoriais.

Antes de definir espaço vetorial cabem algumas observações. Todo espaço vetorial é antes de tudo um conjunto, e como tal, será definido por propriedades, seus elementos serão tais que, gozam destas propriedades. Quando mencionarmos a palavra escalar estamos nos referindo a um número real, ou seja, neste texto os espaços vetoriais serão reais.

Um espaço vetorial é um conjunto E, que seus elementos serão chamados vetores, onde estão definidas duas operações. A primeira operação, chamada adição , associa a cada dois vetores u e v em E um elemento w em E tal que $w = u + v$. A segunda operação, chamada multiplicação por escalar, associa a cada escalar α e a cada elemento v em E, um elemento h em E tal que $h = \alpha \cdot v$. Além disso, para quaisquer escalares α e β e u,v e w em E estas operações devem gozar das seguintes propriedades:

1. $u + v = v + u$,

2. $(u + v) + w = u + (v + w)$,

3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$,

4. Existe um vetor em E, chamado vetor nulo, representado pelo símbolo 0, que satisfaz a seguinte propriedade, $v + 0 = v$ para todo v em E,

5. Para todo vetor v em E, existe um vetor denotado por $-v$ em E, tal que $v + (-v) = 0$, este vetor $(-v)$ será chamado de inverso aditivo do vetor v,

6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,

7. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

8. $1 \cdot v = v$, para todo v em E.

Antes de mostrar exemplos de espaços vetoriais, cabe aqui destacar que, cada espaço vetorial tem suas operações definidas de alguma maneira, sendo que, as operações de adição e multiplicação por escalar de um espaço vetorial, podem ser bem diferentes das operações de outro espaço vetorial. Para cada espaço, devemos conhecer seus elementos, suas operações e provarmos suas propriedades.

Agora vamos apresentar dois espaços vetoriais, que já são de alguma forma, conhecidos. O conjunto dos pares ordenados do plano cartesiano e o conjunto das funções reais de variável real.

Exemplo 1. *No primeiro ano do ensino médio foi visto que um plano pode ser sistematizado, de tal modo que a cada ponto P do plano associa-se um par de números reais (a, b), e a cada par de números reais (a, b) associa-se um ponto P. Além do mais esta relação é biunívoca, ou seja, todo ponto está relacionado com um único par ordenado, e cada par ordenado está relacionado um único ponto. Esta relação, de grande importância em Matemática, é a ideia básica da Geometria Analítica, além do mais é um belo exemplo de espaço vetorial. Seja E o conjunto de todos os pares ordenados de números reais. Dados u e v em E vetores tais $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ e α um número real. Podemos definir as operações de adição e multiplicação por escalar da seguinte maneira:*

- *Adição:* $u + v = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,

- *Multiplicação por escalar:* $\alpha \cdot u = \alpha \cdot (a, b) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b)$.

Mostra-se facilmente que estas operações, assim definidas neste conjunto satisfazem as oito propriedades da definição de espaço vetorial. Deste modo o conjunto de todos os pares ordenados de números reais é um espaço vetorial.

Exemplo 2. *Outro exemplo, não menos relevante, de espaço vetorial é o conjunto de todas as funções reais de variável real, ou seja, as funções que têm como domínio e contradomínio o conjunto dos números reais. Além do mais, estas funções, são o principal objeto de estudo do primeiro ano do ensino médio. Desta forma seja* F *o conjunto de todas as funções reais de variável real. Tomando* f *e* g *em* F *duas funções, onde* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são os valores assumidos por estas funções em um arbitrário valor* x *do domínio. Dado* α *um número real definimos as operações de adição e multiplicação por escalar da seguinte maneira:*

- *Adição: A adição de* f *com* g*, resulta na função* $f + g$ *também real de variável real, que é definida por* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

- *Multiplicação por escalar: A multiplicação do escalar* α *pela função* f*, denotada por* $\alpha \cdot f$*, é uma função real de variável real, definida por* $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.

Também mostra-se facilmente que estas operações, assim definidas no conjunto F *satisfazem as oito propriedades da definição de espaço vetorial. Deste modo* F *é um espaço vetorial.*

1.2 Propriedades Adicionais

Veremos agora algumas propriedades adicionais dos espaços vetoriais que resultam da definição.

Proposição 1. *Sejam u, v e w vetores de um espaço vetorial E. Se $u+v=u+w$ então $v=w$.*

Demonstração. basta notar que:

$$
\begin{aligned}
v &= 0+v \\
&= (-u+u)+v \\
&= -u+(u+v) \\
&= -u+(u+w) \\
&= (-u+u)+w \\
&= 0+w \\
&= w\,.
\end{aligned}
$$

□

Proposição 2. $0 \cdot u = 0$ *para todo u vetor de um espaço vetorial E.*

Demonstração. Note que $u+0\cdot u = 1\cdot u + 0\cdot u = (1+0)\cdot u = 1\cdot u = u = u+0$. Logo $u + 0\cdot u = u+0$ consequentemente decorre da Proposição 1 que $0\cdot u = 0$. □

Proposição 3. *Seja α um número real, dado $0 \in E$, onde E é um espaço vetorial, temos que $\alpha \cdot 0 = 0$.*

Demonstração. Note que $\alpha\cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha\cdot(0+0) = \alpha\cdot 0 = \alpha\cdot 0 + 0$. Logo, $\alpha\cdot 0+\alpha\cdot 0 = \alpha\cdot 0 + 0$ portanto, segue-se da Proposição 1 que $\alpha\cdot 0 = 0$. □

Proposição 4. *Sejam α um número real e u um vetor de um espaço vetorial E. Se $\alpha\cdot u = 0$ então $\alpha = 0$ ou $u = 0$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\alpha \neq 0$ e $u \neq 0$. Como $\alpha \neq 0$ decorre o seguinte: $\alpha\cdot u = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\cdot u = \frac{1}{\alpha}\cdot 0 \Leftrightarrow u = 0$, contradição. □

Proposição 5. *Seja u um vetor de um espaço vetorial E. Temos que $(-1)\cdot u = -u$.*

Demonstração. basta notar que $u+(-1)\cdot u = 1\cdot u + (-1)\cdot u = (1+(-1))\cdot u = 0\cdot u = 0 = u+(-u)$. Assim $u+(-1)\cdot u = u+(-u)$. Agora segue da Proposição 1 que $(-1)\cdot u = -u$. □

Capítulo 2

Matrizes

2.1 Definição de Matriz

Apresentaremos agora um conceito de grande relevância para a matemática, que é a ideia de matriz. Esta ideia será muito útil, especialmente, quando estudarmos sistemas lineares, pois, a mesma facilita bastante a forma de resolução dos sistemas através do método da eliminação, especialmente no método de Gauss-Jordan.

Neste contexto diremos que uma matriz é uma tabela de números organizada através de linhas e colunas. Assim, a seguinte tabela

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz de duas linhas e três colunas. Observe que um elemento fica bem determinado sabendo em que linha e coluna o mesmo se encontra. De fato, sabemos que o elemento da segunda linha e primeira coluna é o número 2. Neste texto toda matriz será representada por uma letra maiúscula de nosso alfabeto. Dizemos que uma matriz A que possui m linhas e n colunas, é de ordem $m \times n$. É comum denotarmos um elemento genérico dessa matriz A através do símbolo a_{ij}, onde i e j denotam, respectivamente, a linha e a coluna nas quais se encontra esse elemento. Nesse caso $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Desta forma, uma representação genérica dessa matriz A pode ser feita da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Podemos ainda representar esta mesma matriz A escrevendo $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Além do mais cabe destacar que uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ vai ser igual a uma matriz $B = [b_{ij}]_{k\times w}$ quando $m = k$, $n = w$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e todo j.

Exemplo 3. *Vamos agora determinar os valores de x e y para que as matrizes abaixo sejam iguais.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3^2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \log x & 0 \\ 3^2 & y^2 \end{bmatrix}$$

Vê-se facilmente que para $A = B$ devemos ter $x = 1$ e que $y = \pm\sqrt{10}$.

Exemplo 4. *Vamos determinar a matriz $A = [a_{ij}]_{3\times 2}$ tal que $a_{ij} = -2i + j$. Basta notar que a matriz tem 3 linhas e 2 colunas e como $a_{ij} = -2i + j$, temos:*

- $a_{11} = -2 \cdot 1 + 1 = -1$,
- $a_{12} = -2 \cdot 1 + 2 = 0$,
- $a_{21} = -2 \cdot 2 + 1 = -3$,
- $a_{22} = -2 \cdot 2 + 2 = -2$,
- $a_{31} = -2 \cdot 3 + 1 = -5$,
- $a_{32} = -2 \cdot 3 + 2 = -4$,

Sendo assim,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

2.2 Matrizes Especiais

Existem casos especiais de matrizes, que ganham nomes particulares, devido a algumas de suas propriedades. Vejamos:

2.2.1 Matriz Linha

Chama-se matriz linha, toda matriz que possui apenas uma linha, ou seja, toda matriz de ordem $1 \times n$.

Exemplo 5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 15 & 31 & \dots & 2^n - 1 \end{bmatrix}$$

Note que esta matriz possui 1 *linha e* n *colunas,*

2.2.2 Matriz Coluna

Chama-se matriz coluna, toda matriz que possui apenas uma coluna, ou seja, toda matriz de ordem $m \times 1$.

Exemplo 6.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ \dots \\ 2^m - 1 \end{bmatrix}$$

Note que esta matriz possui m *linhas e* 1 *coluna.*

2.2.3 Matriz Quadrada

Chama-se matriz quadrada, toda matriz na qual o número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, sempre que $m = n$.

Exemplo 7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -7 \\ 5 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 1 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que esta matriz possui 4 *linhas e* 4 *colunas.*

2.2.4 Matriz Nula

Uma matriz $[a_{ij}]_{m\times n}$ onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, é classificada como matriz nula quando $a_{ij} = 0$, para todo i e todo j.

Exemplo 8.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.5 Matriz Triangular Superior

Uma matriz quadrada $[a_{ij}]_{m\times m}$ é chamada de matriz triangular superior quando tem a seguinte propriedade: Se $i > j$, então $a_{ij} = 0$.

Exemplo 9.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2.2.6 Matriz Triangular Inferior

Uma matriz quadrada $[a_{ij}]_{m\times m}$ é chamada de matriz triangular Inferior quando tem a seguinte propriedade: Se $i < j$, então $a_{ij} = 0$.

Exemplo 10.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2.2.7 Matriz Diagonal

Uma matriz quadrada $[a_{ij}]_{m\times m}$ é chamada de matriz diagonal quando tem a seguinte propriedade: Se $i \neq j$, então $a_{ij} = 0$.

Exemplo 11.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.2.8 Matriz Identidade

Uma matriz quadrada $[a_{ij}]_{m\times m}$ é chamada de matriz identidade quando tem as seguintes propriedades: (i) se $i \neq j$ então $a_{ij} = 0$; (ii) se $i = j$ então $a_{ij} = 1$

Exemplo 12.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.9 Matriz Simétrica

Uma matriz quadrada $[a_{ij}]_{m\times m}$ é chamada de matriz simétrica quando tem a seguinte propriedade: $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e j.

Exemplo 13.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

2.3 O Espaço Vetorial das Matrizes

Se tomarmos o conjunto de todas as matrizes que possuem m linhas e n colunas, denotado aqui por $M(m,n)$, é possível definir as operações de adição e multiplicação por escalar, satisfazendo todas as oito propriedades de espaço vetorial. Deste modo este conjunto se caracteriza como espaço vetorial. Vejamos a adição:

Dada as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ em $M(m,n)$, definimos a adição destas matrizes do seguinte modo: $A + B = C = [c_{ij}]_{m\times n}$ onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Note que C também é uma matriz com m linhas e n colunas, ou seja, C é uma matriz de $M(m,n)$.

De outro modo, dadas as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

temos que

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 14. *Dadas as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & -1+2 & 2+3 & -2+4 \\ 3+4 & -3+3 & 4+2 & -4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Estando definida a adição de matrizes, vamos definir a multiplicação por escalar.

Dados o escalar α e a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ em $M(m,n)$, definimos a multiplicação por escalar do seguinte modo: $\alpha \cdot A = D = [d_{ij}]_{m \times n}$ onde $d_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$. Note que D também é uma matriz com m linhas e n colunas, ou seja, D é uma matriz de $M(m,n)$.

De outro modo, dado o escalar α e a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

temos que

$$\alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 15. *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

temos que

$$2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -4 \\ 6 & -6 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

Agora que estão definidas as operações de adição e multiplicação por escalar no conjunto $M(m,n)$, para saber se este conjunto é realmente um espaço vetorial, devemos verificar todas as propriedades da definição de espaço vetorial, que também são as propriedades da adição e multiplicação por escalar de matrizes.

Proposição 6. *O conjunto $M(m,n)$ é um espaço vetorial.*

Demonstração. Para que um conjunto seja caracterizado como um espaço vetorial, devemos definir as operações de adição e multiplicação por escalar, além de verificar se estas operações gozam das oito propriedades da definição de espaço vetorial. Como já definimos as operações para o conjunto $M(m,n)$, basta verificar as propriedades. Dados os números reais α e β e as matrizes A, B e C de $M(m,n)$, tais que $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ e $C=[c_{ij}]$ temos:

1. $A+B=B+A$. De fato, $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]=[b_{ij}+a_{ij}]=B+A$.

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$. De fato, $(A+B)+C=[a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}]=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]=[a_{ij}]+[(b_{ij}+c_{ij})]=A+(B+C)$.

3. $(\alpha\cdot\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)$. De fato, $(\alpha\cdot\beta)\cdot A=[(\alpha\cdot\beta)\cdot a_{ij}]=[\alpha\cdot(\beta\cdot a_{ij})]=\alpha\cdot(\beta\cdot A)$.

4. Existe uma matriz em $M(m,n)$, chamada matriz nula, representada pelo símbolo 0, que satisfaz a propriedade, $A+0=A$, para todo A em E. Basta tomar $0=[0_{ij}]$ em $M(m,n)$ tal que $0_{ij}=0$ para todo i e j, pois,

$$A+0=[a_{ij}+0_{ij}]=[a_{ij}+0]=[a_{ij}]=A.$$

5. Para toda matriz A em $M(m,n)$, existe uma matriz denotada por $-A$ em $M(m,n)$, tal que $A+(-A)=0$. Esta matriz $(-A)$ será chamada de inverso aditivo da matriz A, ou seja, $-A=[-a_{ij}]$ em $M(m,n)$. De fato,

$$A+(-A)=[a_{ij}+(-a_{ij})]=[0]=[0_{ij}]=0.$$

6. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$. De fato

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\cdot A &= [(\alpha+\beta)\cdot a_{ij}] = [\alpha\cdot a_{ij} + \beta\cdot a_{ij}] \\
&= [\alpha\cdot a_{ij}] + [\beta\cdot a_{ij}] = \alpha\cdot A + \beta\cdot A
\end{aligned}
$$

7. $\alpha\cdot(A+B) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\alpha\cdot(A+B) = [\alpha\cdot(a_{ij}+b_{ij})] = [\alpha\cdot a_{ij} + \alpha\cdot b_{ij}] \\
[\alpha\cdot a_{ij}] + [\alpha\cdot b_{ij}] = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B
\end{aligned}
$$

8. $1\cdot A = A$, para toda matriz A em $M(m,n)$. De fato,

$$1\cdot A = [1\cdot a_{ij}] = [a_{ij}] = A$$

Sendo assim, o conjunto $M(m,n)$ é realmente um espaço vetorial. □

2.4 Outras Operações com matrizes

Veremos agora outras operações com matrizes que vão além da definição de espaço vetorial.

2.4.1 Transposição

A transposição de matrizes é uma operação que associa a cada matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz $B = [b_{ji}]_{n\times m}$ tal que $b_{ji} = a_{ij}$. Esta matriz é denotada pelo símbolo A^t e chamada de transposta de A, ou seja $A^t = B$.

Exemplo 16. *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

sua transposta é dada por

$$A^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

Um caso interessante acontece com a matriz simétrica, que é igual a sua transposta.

Exemplo 17. *Dada a matriz*

$$A = A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Proposição 7. *Seja α um número real e A e B matrizes tais que $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Neste contexto são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. $(A^t)^t = A$,

2. $(A+B)^t = A^t + B^t$,

3. $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$.

Demonstração. De fato, basta observar as seguintes justificativas.

1. Seja $A^t = [b_{ji}]_{n\times m}$ tal que $b_{ji} = a_{ij}$ a matriz transposta de A. Seja $(A^t)^t = [c_{ij}]_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = b_{ji}$ a matriz transposta de A^t. Como $c_{ij} = b_{ji} = a_{ij}$, podemos concluir que $(A^t)^t = A$.

2. Seja $(A+B)^t = [c_{ji}]_{n\times m}$ tal que $c_{ji} = a_{ij} + b_{ij}$ a matriz transposta de $A+B$. Sejam $A^t = [d_{ji}]_{n\times m}$ tal que $d_{ji} = a_{ij}$ e $B^t = [e_{ji}]_{n\times m}$ tal que $e_{ji} = b_{ij}$ as matrizes transpostas de A e B respectivamente. Disso resulta que

$$\begin{aligned} (A+B)^t = [c_{ji}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}] \\ [d_{ji}] + [e_{ji}] = A^t + B^t \end{aligned}$$

3. Seja $(\alpha \cdot A)^t = [c_{ji}]_{n\times m}$ tal que $c_{ji} = \alpha \cdot a_{ij}$ a matriz transposta de $\alpha \cdot A$. Seja $A^t = [d_{ji}]_{n\times m}$ tal que $d_{ji} = a_{ij}$ a matriz transposta de A. Multiplicando a igualdade $d_{ji} = a_{ij}$ por α obtemos que $\alpha \cdot d_{ji} = \alpha \cdot a_{ij}$. Disso resulta que

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot A)^t &= [c_{ji}] = [\alpha \cdot a_{ij}] = [\alpha \cdot d_{ji}] \\ &= \alpha \cdot [d_{ji}] = \alpha \cdot A^t \end{aligned}$$

□

2.4.2 Multiplicação

A multiplicação de matrizes é uma operação que associa a duas matrizes, cujo o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda, uma nova matriz $A \cdot B$ que possui o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B. Dessa forma sejam $A = [a_{ik}]_{m\times s}$ e $B = [b_{kj}]_{s\times n}$ duas matrizes. Definimos a multiplicação da matriz A pela matriz B, denotada por $A \cdot B$, do seguinte modo: $A \cdot B = [c_{ij}]_{m\times n}$ onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Cabe aqui algumas observações:

1. A expressão $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$ pode ser entendida como a multiplicação da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B, note que esta, está bem definida, pois cada linha da matriz A tem o mesmo número de elemento de cada coluna da matriz B,

2. Note que $A \cdot B$ é realmente uma matriz, e cada elemento c_{ij} é a multiplicação da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B, e nessa ordem podemos organizar estas multiplicações em uma tabela de ordem $m \times n$, note ainda, que como temos m linhas na matriz A e n colunas na matriz B, podemos fazer esta multiplicação de $m \cdot n$ maneiras.

Exemplo 18. *Dada as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

Sendo assim,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$$

Esta operação goza de certas propriedades, enunciadas na proposição a seguir.

Proposição 8. *Sendo possíveis as realizações das operações abaixo são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,
2. $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$,
3. $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$,
4. $I_1 \cdot A = A$ *e* $A \cdot I_2 = A$, *onde* I_1 *e* I_2 *são matrizes identidades,*
5. $B^t \cdot A^t = (A \cdot B)^t$,
6. $0_1 \cdot A = 0$ *e* $A \cdot 0_2 = 0$, *onde* 0_1 *e* 0_2 *são matrizes nulas,*
7. $(\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$.

Demonstração. 1. Sejam as matrizes $A = [a_{ik}]_{m \times r}$, $B = [b_{kl}]_{r \times s}$ e $C = [c_{lj}]_{s \times n}$. Fazendo

$$A \cdot B = [d_{il}]_{m \times s} \text{ onde } d_{il} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot b_{kl}$$
$$B \cdot C = [e_{kj}]_{r \times n} \text{ onde } e_{kj} = \sum_{l=1}^{s} b_{kl} \cdot c_{lj}$$

temos que

$$(A \cdot B) \cdot C = [d_{il}]_{m\times s} \cdot [c_{lj}]_{s\times n} = [\sum_{l=1}^{s} d_{il}c_{lj}]_{m\times n} = [\sum_{l=1}^{s}(\sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot b_{kl})c_{lj}]_{m\times n} =$$
$$[\sum_{k=1}^{r} a_{ik}(\sum_{l=1}^{s} b_{kl}c_{lj})]_{m\times n} = [\sum_{k=1}^{r} a_{ik}e_{kj}]_{m\times n} = [a_{ik}]_{m\times r} \cdot [e_{kj}]_{r\times n} = A \cdot (B \cdot C)$$

2. Sejam as matrizes $A = [a_{ik}]_{m\times r}$, $B = [b_{ik}]_{m\times r}$ e $C = [c_{kj}]_{r\times n}$. temos que

$$(A + B) \cdot C = [a_{ik} + b_{ik}]_{m\times r} \cdot [c_{kj}]_{r\times n} = [\sum_{k=1}^{r}(a_{ik} + b_{ik})c_{kj}]_{m\times n} =$$
$$[\sum_{k=1}^{r}(a_{ik}c_{kj} + b_{ik}c_{kj})]_{m\times n} = [\sum_{k=1}^{r} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{r} b_{ik}c_{kj}]_{m\times n} =$$
$$[\sum_{k=1}^{r} a_{ik}c_{kj}]_{m\times n} + [\sum_{k=1}^{r} b_{ik}c_{kj}]_{m\times n} = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$

3. Sejam as matrizes $A = [a_{ik}]_{m\times r}$, $B = [b_{kj}]_{r\times n}$ e $C = [c_{kj}]_{r\times n}$. temos que

$$A \cdot (B + C) = [a_{ik}]_{m\times r} \cdot [b_{kj} + c_{kj}]_{r\times n} = [\sum_{k=1}^{r} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})]_{m\times n} =$$
$$[\sum_{k=1}^{r}(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj})]_{m\times n} = [\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{r} a_{ik}c_{kj}]_{m\times n} =$$
$$[\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}]_{m\times n} + [\sum_{k=1}^{r} a_{ik}c_{kj}]_{m\times n} = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

4. Dada $A = [a_{ik}]_{m\times n}$. Para este caso I_1 será a matriz identidade de ordem m e I_2 será a matriz identidade de ordem n.

   Na multiplicação de I_1 por A o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna será formado pela multiplicação da linha i da matriz I_1 pela coluna j da matriz A, só que a linha i de I_1 todos seus elementos são iguais a zero, com exceção do i-ésimo que é igual a um, de onde podemos concluir que nesta multiplicação de linha por coluna o único termo diferente de zero é $1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$. Sendo assim $I_1 \cdot A = [a_{ij}]_{m\times r} = A$.

   Na multiplicação de A por I_2 o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna será formado pela multiplicação da linha i da matriz A pela coluna j da matriz I_2, só que a coluna j de I_2 todos seus elementos são iguais a zero, com exceção do j-ésimo que é igual a um, de onde podemos concluir que nesta multiplicação de linha por coluna o único termo diferente de zero é $a_{ij} \cdot 1 = a_{ij}$. Sendo assim $A \cdot I_2 = [a_{ij}]_{m\times r} = A$.

5. Sejam as matrizes $A = [a_{ik}]_{m\times r}$ e $B = [b_{kj}]_{r\times n}$. Fazendo

$$A \cdot B = [e_{ij}]_{m\times n} \text{ onde } e_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$
$$A^t = [c_{ki}]_{r\times m} \text{ onde } c_{ki} = a_{ik}$$
$$B^t = [d_{jk}]_{n\times r} \text{ onde } d_{jk} = b_{kj}$$
$$(A \cdot B)^t = [f_{ji}]_{n\times m} \text{ onde } f_{ji} = e_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

temos que

$$B^t \cdot A^t = [\sum_{k=1}^{r} d_{jk}c_{ki}]_{n\times m} = [\sum_{k=1}^{r} b_{kj}a_{ik}]_{n\times m}$$
$$= [\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}]_{n\times m} = [e_{ij}]_{n\times m} = [f_{ji}]_{n\times m} = (A \cdot B)^t$$

6. Dada $A = [a_{ik}]_{m\times r}$. Sabemos que, para quaisquer matrizes nulas 0_1 e 0_2, suas linhas e colunas têm todos os elementos iguais a zero, portanto, toda multiplicação de linha por coluna, nestes casos, terão como resposta zero. Sendo assim $0_1 \cdot A = 0$ e $A \cdot 0_2 = 0$.

7. Sejam as matrizes $A = [a_{ik}]_{m\times r}$ e $B = [b_{kj}]_{r\times n}$ e α um número real. Fazendo

$$\alpha A = [\alpha a_{ik}]_{m\times r}$$

temos que

$$(\alpha A) \cdot B = [\sum_{K=1}^{r} (\alpha a_{ik})b_{kj}]_{m\times n} = [\sum_{K=1}^{r} a_{ik}(\alpha b_{kj})]_{m\times n} = A \cdot (\alpha \cdot B)$$

$$(\alpha A) \cdot B = [\sum_{K=1}^{r} (\alpha a_{ik})b_{kj}]_{m\times n} = [\alpha \sum_{K=1}^{r} a_{ik}b_{kj}]_{m\times n} = \alpha \cdot (A \cdot B)$$

$\square$

Capítulo 3

Variedade Afim

A noção de variedade afim, foi criada para classificar conjuntos, que de alguma forma não se enquadram na definição de espaço vetorial, mas que se comportam de modo semelhante, como veremos adiante. Além disso, a caracterização de um conjunto como variedade afim é menos forte que a caracterização desse conjunto como espaço vetorial, no sentido de que todo espaço vetorial é uma variedade afim, mas nem toda variedade afim é um espaço vetorial. Assim como a ideia de espaço vetorial, a ideia de caracterizar um conjunto como variedade afim é relevante, pois como tal, o conjunto gozará de todas as propriedades de uma variedade afim. Apesar disso, nesse texto não serão apresentadas estas propriedades, pois nosso objetivo é simplesmente caracterizar o conjunto solução de um sistema linear como uma variedade afim.

3.1 Definição

Seja E um espaço vetorial. Dizemos que um subconjunto V de E é uma variedade afim, quando para quaisquer elementos x e y em V e t um número real qualquer, vale a seguinte propriedade:

$$tx + (1-t)y \text{ é elemento de } V$$

Exemplo 19. *O conjuntos de pontos de uma reta é uma variedade afim. Seja T uma* *reta qualquer, sabemos que se os pontos* $x = (x_1, y_1)$ *e* $y = (x_2, y_2)$ *pertencem a reta* T *existem números reais* $a \neq 0$ *e* b *tais que* $y_1 = ax_1 + b$ *e* $y_2 = ax_2 + b$. *Sendo assim temos que* $x = (x_1, ax_1 + b)$ *e* $y = (x_2, ax_2 + b)$. *Agora note que para todo* t *real* $t \cdot x + (1-t)y$ *está em* T, *de fato, temos o seguinte:*

$$\begin{aligned} tx + (1-t)y &= t(x_1, ax_1 + b) + (1-t)(x_2, ax_2 + b) \\ &= (tx_1, tax_1 + tb) + (x_2, ax_2 + b) + (-tx_2, -tax_2 - tb) \\ &= (tx_1 + x_2 - tx_2, tax_1 + tb + ax_2 + b - tax_2 - tb) \\ &= (tx_1 + x_2 - tx_2, a(tx_1 + x_2 - tx_2) + b) = (x_3, ax_3 + b)\,, \end{aligned}$$

onde $x_3 = tx_1 + x_2 - tx_2$.

Proposição 9. *Se o conjunto* E *é um espaço vetorial, então* E *é uma variedade afim.*

Demonstração. Seja x e y vetores de E. Como E é um espaço vetorial então para todo número real t temos que tx e $(1-t)y$ são vetores de E. Sabendo que a soma de dois vetores do espaço vetorial E ainda é um vetor de E, temos que $tx + (1-t)y$ ainda é um vetor de E. Sendo assim E é uma variedade afim. □

Exemplo 20. *Como todo espaço vetorial é uma variedade afim o conjunto* $M(m \times n)$, *de todas as matrizes com* m *linhas e* n *colunas, é uma variedade afim. Assim como o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e o conjunto de todas as funções de domínio e contradomínio reais.*

Capítulo 4

Sistemas Lineares

A partir de agora faremos a apresentação dos sistemas lineares, objetivando o estudo e a resolução desses sistemas. Esta apresentação se dará através do processo de eliminação, mais especificamente através do método de Gauss-Jordan. Para isso vamos relacionar diferentes matrizes a cada sistema, o que torna a resolução mais simples e de grande apelo computacional. Serão usadas operações entre linhas das matrizes, chamada operações elementares, e assim definidas e determinadas matrizes linha equivalentes de uma matriz, entre estas as quais matriz linha reduzida a forma escada. Através da ideia de posto e nulidade poderemos estudar e encontrar as soluções de um sistema linear.

4.1 Definições

Um equação linear com n incógnitas é uma igualdade do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde a_1, a_2, $\cdots$, a_n, b são números reais. Uma solução desta equação é uma $n-$upla de números reais $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que satisfaça a igualdade que define a equação.

Exemplo 21. *Na equação,* $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$*, uma solução é* $(1, 1, 0)$*, ou seja* $x_1 = 1$*,* $x_2 = 1$ *e* $x_3 = 0$*. Outra solução é* $(10, 5, 30)$*.*

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

onde a_{ij} e b_i, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, são números reais. Uma solução deste sistema é uma $n-$upla de números reais $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, que é solução de cada equação do sistema.

Exemplo 22. *No seguinte sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ -x_1 + -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases},$$

uma de suas soluções é $(\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{2})$*, ou seja,* $x_1 = \frac{7}{2}$*,* $x_2 = 0$ *e* $x_3 = \frac{7}{2}$*. Outra solução do sistema é* $(\frac{3}{2}, 1, \frac{7}{2})$

Note que no exemplo anterior foi apresentada duas soluções para o sistema. Na verdade existem infinitas soluções deste sistema. De fato para cada número real t temos a seguinte solução $(\frac{7}{2} - 2t, t, \frac{7}{2})$.

No decorrer deste capítulo veremos que além de sistemas lineares com infinitas soluções, existem sistemas que não possuem solução e sistemas que apresentam um única solução. Encontrar as soluções de um sistema linear, caso existam, que é resolver o sistema e classificar entre estas três possibilidades é que chamaremos de estudar o sistema linear, e o que faremos.

Para isso, usaremos o método da eliminação, neste método usaremos matrizes associadas ao sistema a ser resolvido e estudado.

4.2 Sistemas Lineares e Matrizes

A todo sistema linear podemos associar quatro matrizes chamadas: matriz de coeficientes, matriz de incógnitas, matriz de termos independentes e a matriz ampliada do sistema. Vejamos:

No sistema linear abaixo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

temos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

como a matriz de coeficientes

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

como a matriz de incógnitas e

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

como a matriz de termos independentes. Por fim temos

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

como a matriz ampliada do sistema.

Note ainda que o sistema inicial pode ser escrito da seguinte forma:

$$A \cdot X = B$$

ou de outra maneira

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo 23. *Dado o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -13 \end{cases}$$

podemos representar o mesmo como a seguinte multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ -5 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Neste sistema temos como matriz de coeficientes, matriz de incógnitas, matriz de termos independentes e matriz ampliada do sistema, nesta ordem, as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ -5 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 15 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -13 \end{bmatrix}$$

4.3 Operações Elementares e Matrizes Linhas equivalentes

Definiremos agora operações sobre as linhas de uma matriz, chamadas operações elementares, que servirá para definir matrizes linhas equivalentes, e posteriormente sistemas lineares equivalentes, que são sistemas lineares que possuem mesma solução.

Três são as operações elementares sobre as linhas de uma matriz, vejamos:

1. permutar a i-ésima linha de uma matriz pela j-ésima linha da matriz, que aqui denotaremos por $(L_i \to L_j)$.

   Exemplo 24. *Nas matrizes abaixo temos* $(L_2 \to L_4)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Substituir a i-ésima linha de uma matriz pela multiplicação desta linha por número real α, que aqui denotaremos por $(L_i \to \alpha \cdot L_i)$.

   Exemplo 25. *Nas matrizes abaixo temos* $(L_3 \to 5 \cdot L_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 10 & -10 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Substituir a i-ésima linha de uma matriz, pela soma da i-ésima linha com a multiplicação de um número real α pela j-ésima linha da matriz, que aqui denotaremos por $(L_i \to L_i + \alpha \cdot L_j)$.

Exemplo 26. *Nas matrizes abaixo temos* $(L_1 \to L_1 + 3 \cdot L_2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Proposição 10. *As operações elementares, da forma que foram definidas no texto, são reversíveis.*

Demonstração. basta notar que:

1. $(L_j \leftrightarrow L_i) \Leftrightarrow (L_i \leftrightarrow L_j)$

2. $(\alpha \cdot L_i \to \alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot L_i = L_i)$

3. $(L_i + \alpha \cdot L_j \to L_i + \alpha \cdot L_j + (-\alpha) \cdot L_j = L_i)$

□

Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$. Diremos que B é linha equivalente a A quando podemos obter B a partir de um número finito de operações elementares sobre A.

Proposição 11. *Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$. A é linha equivalente a B se, e somente se, B é linha equivalente a A.*

Demonstração. Admitindo que A é linha equivalente a B, temos que podemos obter a matriz A a partir de um número finito de operações elementares sobre B, como cada operação elementar é reversível, revertendo as operações podemos obter, através de um número finito de operações elementares, B a partir de A. Assim B é linha equivalente a A. De modo análogo mostra-se que, se B é linha equivalente a A então A é linha equivalente a B. □

Proposição 12. *Dadas as matrizes A, B e C. Se A é linha equivalente a B e A é linha equivalente a C então B é linha equivalente a C e C é linha equivalente a B.*

Deixaremos esta demonstração como exercício para o leitor.

Exemplo 27. *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *é linha equivalente a seguinte matriz* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. *De fato fazendo na matriz B, $L_2 \to -1 \cdot L_2$, obtemos:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

fazendo agora na matriz acima, $L_2 \to L_1 + L_2$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

fazendo agora, $L_2 \to \dfrac{1}{3} \cdot L_2$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

fazendo agora, $L_1 \to L_1 + (-2) \cdot L_2$, obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neste último exemplo ficou explícita cada operação elementar sobre as linhas da matriz A. Aqui cada operação foi feita de forma individual entre as passagens das matrizes equivalentes. A partir de agora deixaremos as operações implícitas, e não necessariamente de forma individual. Sendo assim, cabe ao leitor verificar cada passagem e quais operações elementares foram feitas.

4.4 Forma Escada, posto e nulidade de uma Matriz

Uma matriz se diz linha reduzida a forma escada quando goza das seguintes propriedades

1. Em toda linha não nula da matriz o primeiro elemento não-nulo é igual a 1;

2. Em toda coluna que contém algum primeiro elemento não-nulo de uma linha, todos os outros elementos da coluna são nulos;

3. Toda linha nula da matriz aparece abaixo das linhas não nulas; e

4. O primeiro elemento não-nulo de cada linha não-nula situa-se à esquerda dos primeiros elementos não-nulos das linhas seguintes.

Exemplo 28. *As matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *estão na forma escada, como se vê facilmente.*

Exemplo 29. *As matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ *não estão na forma escada, como se vê facilmente.*

Proposição 13. *Toda matriz é equivalente a uma única matriz linha reduzida a forma escada.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que toda matriz é equivalente a uma a matriz linha reduzida a forma escada.

Essa demonstração pode ser feita por indução sobre o numero de colunas n de uma matriz qualquer. Sendo assim, seja uma matriz qualquer com m linhas e apenas uma coluna, ou seja, com $n = 1$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Agora analisaremos dois casos.

1. Primeiro, Se $a_{11} \neq 0$ substituimos a linha 1 pela multiplicação dessa linha por $(a_{11})^{-1}$, e obtemos

   $$\begin{bmatrix} 1 \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

   Agora substituimos toda linha $i \neq 1$ por $-a_{i1} \cdot L_1 + Li$. Assim,

   $$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

   que está na forma linha reduzida a forma escada.

2. Segundo, se $a_{11} = 0$ então dada a sequêcia $(a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{m1})$ tomaremos o primeiro termo $a_{i1} \neq 0$ e operaremos de modo análogo ao caso de $a_{11} \neq 0$, obtendo assim, uma matriz linha reduzida a forma escada.

   Em todo caso toda matriz com uma única coluna é equivalente a uma matriz linha reduzida a forma escada.

Agora suponha que a afirmação seja verdadeira para um certo k natural. Ou seja que toda matriz que possui k colunas seja equivalente a uma matriz linha reduzida a forma escada. Sendo assim, dada uma matriz com m linhas e k colunas do tipo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix},$$

podemos, através de um número finito de operações elementares, obter sua matriz linha reduzida a forma escada equivalente, que denotamos aqui por

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

. Agora dada uma matriz com m linhas e $k+1$ colunas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2(k+1)} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & a_{m(k+1)} \end{bmatrix}$$

usando as mesma operações elementares que usamos na matriz de k colunas, obtemos

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & c_{1(k+1)} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & c_{2(k+1)} \\ \vdots & & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} & c_{m(k+1)} \end{bmatrix}$$

Dada a sequência $(b_{m1}, b_{m2}, \cdots, b_{mk})$, de termos da última linha, analisaremos os três casos.

1. Se pelo menos um $b_{mj} \neq 0$, então a matriz acima será linha reduzida a forma escada.

2. Se todos os $b_{mj} = 0$ e $c_{m(k+1)} = 0$, então a matriz acima, também, será linha reduzida a forma escada.

3. Se todos os $b_{mj} = 0$ e $c_{m(k+1)} \neq 0$, então multiplicaremos a última linha por $(c_{m(k+1)})^{-1}$ e obteremos um nova matriz

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & d_{1(k+1)} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & d_{2(k+1)} \\ \vdots & & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} & d_{m(k+1)} \end{bmatrix}.$$

   Nesta nova matriz toda linha $i \neq m$ pode ser substituida $-d_{i(k+1)} \cdot L_m + L_i$, de onde obtemos um matriz linha reduzida a forma escada.

Em todo caso, supondo que uma matriz com m linhas e k colunas é equivalente a uma matriz linha reduzida a forma escada, resulta que uma matriz com m linhas e $k+1$ coluna é equivalente a uma matriz linha reduzida a forma escada. E sendo assim, pelo princípio de indução a proposição é verdadeira.

Agora mostraremos que esta matriz linha reduzida a forma escada é única.

De fato, seja A uma matriz com duas matrizes linha equivalentes na forma escada B e C. Como B é equivalente a A e C também é equivalente a A, resulta que B é equivalente a C. Sendo assim, podemos a partir de B obter C através de um número finito de operações elementares. Mas nessas operações elementares não podemos permutar a i-ésima linha da matriz B pela j-ésima linha da matriz B, a fim de obter C, pois nesta operação deixaríamos de ter uma matriz reduzida na forma escada. Assim como não podemos substituir a i-ésima linha da matriz B, pela soma da i-ésima linha com a multiplicação de um número real α pela j-ésima linha da matriz B, a fim de obter C, pois, também teríamos matriz não reduzida a forma escada. Já na operação de substituir a i-ésima linha de uma matriz pela multiplicação desta linha por número real α, pode ser feito, desde que $\alpha = 1$, pois se $\alpha \neq 1$, também, não obteríamos uma matriz linha reduzida a forma escada, mas fazendo $\alpha = 1$ nessa operação sempre obteremos a matriz B. Nestas circunstâncias $B = C$. Portanto, a matriz linha reduzida a forma escada de um matriz A qualquer é única. $\square$

Agora definiremos a ideia de posto e nulidade, segundo linhas, de uma matriz. Seja B a matriz linha reduzida a forma escada de uma matriz A de ordem $m \times n$. Definimos o posto da matriz A como sendo o número de linhas não nulas de B. Definimos também a nulidade da matriz A como sendo a diferença entre o número de colunas da matriz A e seu posto. Sendo assim, e denotando o posto da matriz A por p, temos que a nulidade da matriz A será $n - p$.

Exemplo 30. *Vamos agora determinar o posto e a nulidade da seguinte matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Inicialmente determinaremos, através de operações elementares, a matriz linha reduzida a forma escada de A. Vejamos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo assim a matriz linha equivalente da matriz A possui 3 linhas não-nulas, ou seja, o posto da matriz A deve ser $p = 3$, e como a matriz A possui 4 colunas, sua nulidade é dada por $n - p = 4 - 3 = 1$.

Exemplo 31. *Determine os postos e as nulidades das matrizes ampliada e de coeficientes do seguinte sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

Da matriz ampliada do sistema, através de operações elementares obtemos a matriz linha reduzida a forma escada equivalente, vejamos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 & 2 \\ 0 & -\frac{11}{2} & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 & 2 \\ 0 & -\frac{11}{2} & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{11} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{11} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{11} & 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz linha reduzida a forma escada equivalente a matriz ampliada do sistema possui duas linhas não-nulas temos que o posto da matriz ampliada é 2, ou seja, $p = 2$. *Como o número de colunas da matriz ampliada é quatro, ou seja,* $n = 4$, *temos que sua nulidade é dada por* $n - p = 4 - 2 = 2$.

Da matriz de coeficientes do sistema, através de operações elementares obtemos a matriz linha reduzida a forma escada equivalente. Vejamos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{11}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{11}{2} & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{11} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{11} \end{bmatrix}.$$

Como a matriz linha reduzida a forma escada equivalente a matriz de coeficientes do sistema possui duas linhas não-nulas temos que o posto da matriz de coeficientes também é 2, ou seja, $p = 2$. *Como o número de colunas da matriz de coeficientes é três, ou seja,* $n = 3$, *temos que sua nulidade é dada por* $n - p = 3 - 2 = 1$.

É importante salientar que as matrizes linha reduzida a forma escada da matriz ampliada e da matriz de coeficientes, no exemplo anterior, são muito semelhantes. De fato, note que retirando a última coluna da reduzida equivalente da matriz ampliada, obtemos a reduzida da matriz de coeficientes. Na verdade este fato sempre acontece para qualquer sistema. Basta observar que, as operações elementares aplicadas na matriz de coeficientes, podem ser aplicadas, também, na matriz ampliada, de forma a encontrar sua equivalente na forma escada. Pode acontecer, como no exemplo anterior, destas operações serem suficientes, caso contrário, além desta, serão necessárias um número finito de operações elementares de modo a obter a matriz linha reduzida a forma escada equivalente a matriz ampliada. Mas estas operações aplicadas na matriz de coeficientes garantem a semelhança entre as duas.

4.5 Resolução e Estudo dos Sistemas Lineares

Assim como já foi visto, a todo sistema linear podemos associar quatro matrizes, em particular a matriz ampliada. Desta ideia definiremos sistemas lineares equivalentes. Diremos que dois sistemas lineares são equivalentes quando suas matrizes ampliadas são linha equivalentes.

Exemplo 32. *O seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

.

De fato, pelo exemplo 30 suas matrizes são linha equivalentes, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 33. *Agora veremos que o seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 18 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

.

De fato, dado a matriz ampliada do primeiro sistema, através de operações elementares, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 5 & 6 & 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 16 & 64 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 16 & 64 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Agora da matriz ampliada do segundo sistema, através de operações elementares, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 & 17 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 17 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 & -3 \\ 0 & -11 & 3 & 12 \\ 0 & -15 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & -\frac{12}{11} \\ 0 & -15 & 4 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & -\frac{12}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{11} & -\frac{4}{11} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & -\frac{12}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & -\frac{12}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

.

Sendo assim, como a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ *é linha equivalente as matrizes ampliadas do primeiro e segundo sistema, temos que estas matrizes são equivalentes. E como os dois sistemas têm matrizes ampliadas equivalentes, estes sistemas são equivalentes.*

Como já foi visto, um sistema de equações lineares pode não ter solução, ter mais de uma solução, ou ter uma única solução. Quando o sistema não tiver solução diremos que o sistema é impossível, quando o sistema tiver mais de uma solução, diremos que este é possível e indeterminado, e por fim, quando o sistema tiver uma única solução diremos que o sistema é possível e determinado. A próxima afirmação vai servir para classificar estes três casos para um sistema linear qualquer. Vejamos:

Proposição 14. *Dados um sistema linear com m equações e n incógnitas temos:*

1. *O sistema admite solução quando o posto da matriz de incógnitas é igual ao posto da matriz de coeficientes, caso contrário o sistema não admite solução;*

2. *Se o sistema for possível e a nulidade da matriz de coeficientes for nula, ou seja $n - p = 0$, a solução será única;*

3. *Se o sistema for possível e a nulidade da matriz de coeficientes não for nula, ou seja $n-p \neq 0$, o sistema admite $n-p$ incógnitas livres e mais de uma solução.*

Demonstração. Seja o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Suas matrizes ampliadas e de Coeficientes são, respectivamente,

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

que admitem como matrizes linha reduzida a forma escada, as seguites matrizes respectivamente

$$S = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & d_m \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Agora note que não podemos ter o posto da matriz de coeficientes maior que o posto da matriz ampliada, pois toda linha não nula da matriz linha equivalente na forma escada da matriz de coeficientes é uma linha não nula da matriz linha equivalente na forma escada da matriz ampliada.

Agora vejamos dois casos:

1. Se o posto da matriz ampliada for maior que o posto da matriz de coeficientes então a última linha não nula da matriz linha equivalente na forma escada da matriz

ampliada terá todos os termos $c_{ij} = 0$ e $d_i = k \neq 0$. Isso significa uma equação da forma $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = k$ que não possui solução. Consequentemente o sistema não possui solução neste caso.

2. Se o posto da matriz ampliada for igual ao posto da matriz de coeficientes, denotado aqui por p, então temos, novamente, três casos a considerar. Primeiro, $p = n \Leftrightarrow n - p = 0$, onde n é o número de incógnitas do sistema, neste caso a i-ésima linha, com $1 \leq i \leq n$, da matriz linha equivalente na forma escada da matriz ampliada significa $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_{(i-1)} + 1x_i + 0x_{(i+1)} \cdots + 0x_n = d_i$, de onde temos que $x_i = d_i$ e portanto $(d_1, d_2, \cdots, d_m)$ é a única solução do sistema. Segundo, $p < n \Leftrightarrow n - p \neq 0$, neste caso a i-ésima linha, $1 \leq i \leq p$, da matriz linha equivalente na forma escada da matriz ampliada significa $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_{(i-1)} + 1x_i + 0x_{(i+1)} \cdots + 0x_p + c_{i(p+1)}x_{p+1} + \cdots + c_{in}x_n = d_i$, de onde temos que $x_i = d_i - c_{i(p+1)}x_{p+1} - \cdots - c_{in}x_n$, fazendo $x_{p+1} = t_1, x_{p+2} = t_2, \cdots, x_n = t_{n-p}$, obtemos como solução do sistema:

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1(p+1)}t_1 - \cdots - c_{1n}t_{n-p} \\ x_2 = d_2 - c_{2(p+1)}t_1 - \cdots - c_{2n}t_{n-p} \\ \vdots \\ x_p = d_p - c_{p(p+1)}t_1 - \cdots - c_{pn}t_{n-p} \\ x_{p+1} = t_1 \\ x_{p+2} = t_2 \\ \vdots \\ x_n = t_{n-p} \end{cases}$$

como $t_1, t_2, \cdots, t_{n-p}$ podem assumir uma infinidade de valores o sistema, neste caso, possui uma infinidade de soluções.

O caso de $p < n \Leftrightarrow n - p \neq 0$ não foi analisado, pois sob estas condições a matriz não está na sua forma escada. O que não faz sentido nesse contexto. $\square$

Proposição 15. *Dado abaixo o sistema linear*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

que possui como matriz ampliada

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

qualquer operação elementar sobre a matriz S vai gerar uma nova matriz que será a matriz ampliada de um novo sistema que possui o mesmo conjunto solução do sistema inicial.

Demonstração.

1. Se permutar a i-ésima linha da matriz S pela j-ésima linha da matriz, obteremos a matriz ampliada de novo sistema, que se diferenciará do inicial, apenas pela permuta de duas equações. Neste caso é óbvio que toda solução do sistema inicial é também solução do novo sistema.

2. Se substituir a i-ésima linha da matriz A pela multiplicação desta linha por número real α, obteremos a matriz ampliada de novo sistema, que se diferenciará do inicial, apenas pela i-ésima equação que será $\alpha a_{i1}x_1 + \alpha a_{i2}x_2 + \cdots + \alpha a_{in}x_n = \alpha b_i$. Dada uma solução $x = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$ do sistema inicial, temos que

$$\alpha a_{i1}r_1 + \alpha a_{i2}r_2 + \cdots + \alpha a_{in}r_n = \alpha(a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \cdots + a_{in}r_n) = \alpha b_i$$

e, sendo assim, $x = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é solução da equação $\alpha a_{i1}x_1 + \alpha a_{i2}x_2 + \cdots + \alpha a_{in}x_n = \alpha b_i$. Como todas as outras equações do sistema são iguais ao sistema inicial, segue-se que $x = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é solução do sistema inicial.
Reciprocamente, dada uma solução $y = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ do novo sistema, temos que

$$\alpha a_{i1}s_1 + \alpha a_{i2}s_2 + \cdots + \alpha a_{in}s_n = \alpha b_i \Leftrightarrow a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n = b_i$$

e, sendo assim, $y = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é solução da equação $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$. Como todas as outras equações do sistema inicial são iguais ao do novo sistema, segue-se que $y = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é solução do novo sistema. Logo, o sistema inicial e o novo sistema terão o mesmo conjunto solução.

3. Se substituir a i-ésima linha da matriz A, pela soma da i-ésima linha com a multiplicação de um número real α pela j-ésima linha da matriz A, obteremos a matriz ampliada de novo sistema, que se diferenciará do inicial, apenas pela i-ésima equação que será $(a_{i1} + \alpha a_{j1})x_1 + (a_{i2} + \alpha a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + \alpha a_{jn})x_n = (b_i + \alpha b_j)$. Dada uma solução $x = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ do sistema inicial, temos que

$$(a_{i1} + \alpha a_{j1})r_1 + (a_{i2} + \alpha a_{j2})r_2 + \cdots + (a_{in} + \alpha a_{jn})r_n =$$
$$(a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \cdots + a_{in}r_n) + \alpha \cdot (a_{j1}r_1 + a_{j2}r_2 + \cdots + a_{jn}r_n) = (b_i + \alpha b_j)\ .$$

Sendo assim, $x = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é solução da equação $(a_{i1} + \alpha a_{j1})x_1 + (a_{i2} + \alpha a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + \alpha a_{jn})x_n = (b_i + \alpha b_j)$. Como todas as outras equações do sistema são iguais ao sistema inicial, segue-se que $x = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é solução do novo sistema. Reciprocamente dada uma solução $y = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ do novo sistema, suponha, por absurdo, que

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n \neq b_i.$$

Como a equação j no novo sistema e do sistema inicial são as mesmas, temos que

$$a_{j1}s_1 + a_{j2}s_2 + \cdots + a_{jn}s_n = b_j$$

Sendo assim, obtemos

$$\alpha a_{j1}s_1 + \alpha a_{j2}s_2 + \cdots + \alpha a_{jn}s_n = \alpha b_j,$$

onde

$$\begin{gathered} a_{i1}s_1 + \alpha a_{j1}s_1 + a_{i2}s_2 + \alpha a_{j2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n + \alpha a_{jn}s_n \neq b_i + \alpha b_j \Leftrightarrow \\ (a_{i1} + \alpha a_{j1})x_1 + (a_{i2} + \alpha a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + \alpha a_{jn})x_n \neq (b_i + \alpha b_j) \end{gathered}$$

o que é uma contradição.

Dessa forma, $y = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é solução da equação $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$. Como todas as outras equações do sistema inicial são iguais ao do novo sistema, resulta que $y = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é solução do sistema inicial. Logo, o sistema inicial e o novo sistema terão o mesmo conjunto solução.

□

Proposição 16. *Dois Sistemas lineares equivalentes possuem as mesmas soluções.*

Demonstração. Sejam S_1 e S_2 sistema lineares equivalentes. Dada suas matrizes ampliadas A e B, respectivamente, temos que A é equivalente a B , sendo assim a partir de B podemos, através de um número finito n de operações elementares, obter A. Usando a proposição anterior n vezes, em cada uma destas operações elementares, vemos que o sistema S_1 possui as mesmas soluções do sistema S_2. De modo análogo ver-se que o sistema S_2 possui as mesmas soluções do sistema S_1. □

Vejamos agora como usar as proposições anteriores para resolver e estudar alguns sistemas lineares, levando em consideração que, a expressão resolver um sistema linear, quer dizer encontrar todas as soluções do sistema, se existirem, e a expressão estudar um sistema linear, se refere a classificar se o sistema é impossível, se é possível e determinado ou se é possível e indeterminado. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 34. *Resolva e estude o seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}.$$

Para isso, vamos aplicar inicialmente as operações elementares, de modo a obter a matriz linha reduzida a forma escada equivalente a matriz ampliada do sistema. Vejamos

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 10 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 10 \\ 2 & 2 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 10 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 10 \\ 0 & -1 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deste modo a matriz ampliada do sistema tem posto $p = 3$.

Agora para obter a matriz linha reduzida a forma escada equivalente a matriz de coeficientes do sistema, basta tomar a matriz linha reduzida a forma escada equivalente a matriz ampliada e excluir a última coluna, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz linha reduzida a forma escada equivalente a matriz de coeficientes tem duas linhas não-nulas, temos que o posto da matriz de coeficientes é $p = 2$.

Notemos também que o posto da matriz ampliada é diferente do posto da matriz de coeficientes. Logo, pela proposição 14, o sistema não admite solução, sendo, assim, um sistema impossível.

Exemplo 35. *Vamos agora resolver e estudar o seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 15 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 45 \end{cases}.$$

Da matriz ampliada temos

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & 15 \\ 3 & 2 & 1 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 15 \\ 2 & -1 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 15 \\ 0 & -5 & 3 & -20 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 15 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 15 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Deste modo a matriz ampliada e a matriz de coeficientes tem o mesmo posto $p = 3$. Portanto, o sistema admite solução. Como a matriz de coeficientes possui $n = 3$ colunas, temos que a nulidade do sistema será $n - p = 3 - 3 = 0$. Logo a solução do sistema é única. Sendo assim, podemos concluir que o sistema é possível e determinado. Da matriz linha reduzida a forma escada equivalente a matriz ampliada do sistema, decorre que a solução é

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 10 \\ x_3 = 10 \end{cases}.$$

Exemplo 36. *Vamos agora resolver e estudar o seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ 6x_1 + 6x_3 = 12 \end{cases}.$$

Da matriz ampliada temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 6 & 0 & 6 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deste modo a matriz ampliada e a matriz de coeficientes têm o mesmo posto $p = 2$. *Sendo assim, o sistema admite solução. Como a matriz de coeficientes possui* $n = 3$ *colunas, temos que a nulidade do sistema será* $n-p = 3-2 = 1$. *Logo, o sistema admite uma incógnita livre, garantindo, portanto, que o sistema admite mais de uma solução. Assim, podemos concluir que o sistema é possível e indeterminado. Da matriz linha reduzida a forma escada equivalente a matriz ampliada do sistema, está associado um novo sistema que é equivalente ao sistema inicial, sendo bem mais simples. Vejamos:*

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}.$$

Portanto $x_1 = 2 - x_3$ *e* $x_2 = -2$. *Admitindo que* $x_3 = t$, *onde* t *é um número real, temos que qualquer tripla ordenada do tipo* $(2-t, -2, t)$ *é solução do sistema. Logo* $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ *e* $x_3 = 0$ *é uma solução do sistema. E* $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ *e* $x_3 = 3$ *é outra solução do sistema.*

Exemplo 37. *Vamos agora resolver e estudar o seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ 3x_1 + 9x_2 - x_3 - x_4 = 15 \end{cases}$$

Da matriz ampliada temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 9 & -1 & -1 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 3 & 9 & -1 & -1 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & \frac{3}{3} & -\frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & \frac{3}{3} & -\frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{22}{6} & -\frac{10}{6} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{64}{6} & \frac{28}{6} & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{22}{6} & -\frac{10}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

Deste modo a matriz ampliada e a matriz de coeficientes têm o mesmo posto $p = 2$. *Sendo assim, o sistema admite solução. Como a matriz de coeficientes possui* $n = 4$ *colunas, temos que a nulidade do sistema será* $n-p = 4-2 = 2$. *Desta forma o sistema admite duas incógnitas livres e o sistema admite mais de uma solução. Logo, podemos concluir que o sistema é possível e indeterminado. Da matriz linha reduzida a forma escada equivalente a matriz ampliada do sistema, está associado um novo sistema que é equivalente ao sistema inicial, sendo este bem mais simples. Vejamos:*

$$\begin{cases} x_1 + \frac{64}{6}x_3 + \frac{28}{6}x_4 = 5 \\ x_2 - \frac{22}{6}x_3 - \frac{10}{6}x_4 = 0 \end{cases}$$

Daí decorre que $x_1 = 5 - \frac{64}{6}x_3 - \frac{28}{6}x_4$ *e* $x_2 = \frac{22}{6}x_3 + \frac{10}{6}x_4$. *Admitindo que* $x_3 = t_1$ *e* $x_4 = t_2$, *onde* t_1 *e* t_2 *são números reais, temos que* $(5 - \frac{64}{6}t_1 - \frac{28}{6}t_2, \frac{22}{6}t_1 + \frac{10}{6}t_2, t_1, t_2)$ *é solução do sistema. Variando* t_1 *e* t_2 *encontramos uma infinidade de soluções, por exemplo fazendo* $t_1 = t_2 = 6$, *obtemos como solução* $x_1 = -87$, $x_2 = 32$, $x_3 = 6$ *e* $x_4 = 6$.

Exemplo 38. *Um par de tênis, duas bermudas e três camisetas custam juntos 100 reais. Dois pares de tênis, cinco bermudas e oito camisetas custam juntos 235 reais. Vamos determinar quanto custa um par de tênis, uma bermuda e uma camiseta.*

Denotemos por x_1 *o preço, em reais, de um par de tênis, por* x_2 *o preço, em reais, de uma bermuda, e por* x_3 *o preço, em reais, de uma camiseta. Do enunciado do exemplo, podemos tirar o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 100 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 235 \end{cases}$$

.

Neste sistema temos como matriz ampliada a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 100 \\ 2 & 5 & 8 & 235 \end{bmatrix}$$

Agora usando operações elementares nesta matriz, obtemos sua matriz linha equivalente na forma escada. Assim

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 100 \\ 2 & 5 & 8 & 235 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 35 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 35 \end{bmatrix}.$$

Desta matriz linha reduzida a forma escada está associada o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 30 \\ x_2 + 2x_3 = 35. \end{cases}$$

Note que este sistema é equivalente ao sistema inicial, pois suas matrizes ampliadas são linha equivalentes.

Do último sistema temos que $x_1 = 30 + x_3$ *e* $x_2 = 35 - 2x_3$. *Sendo assim:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = (30 + x_3) + (35 - 2x_3) + x_3 = 65.$$

Portanto, o preço de um par de tênis, uma bermuda e uma camiseta é de 65 reais.

Exemplo 39. *Dada uma função* f *de domínio e contradomínio reais, tal que*

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$;

2. $f(-1) = 2$;

3. $f(1) = 6$*;*

4. $f(2) = 11$*;*

5. $f(3) = 18$*,*

onde a*,* b *e* c *são números reais. Vamos determinar quanto vale a expressão* $E = a + b + c$*.*

Como a função é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$*, temos:*

1. $f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 2$*;*

2. $f(1) = a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) + c = 6$*;*

3. $f(2) = a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + c = 11$*;*

4. $f(3) = a \cdot (3)^2 + b \cdot (3) + c = 18$*.*

Assim, $f(-1) = 2$*,* $f(1) = 6$*,* $f(2) = 11$ *e* $f(3) = 18$*. Disso tudo podemos tirar o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ a + b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 11 \\ 9a + 3b + c = 18 \end{cases}$$

que tem como matriz ampliada a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 11 \\ 9 & 3 & 1 & 18 \end{bmatrix}.$$

Desta matriz, através das operações elementares, temos:

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 12 & -8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 12 & -8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta última matriz temos $a = 1$, $b = 2$ *e* $c = 3$. *Sendo assim* $E = a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6$.

4.6 Sistema Linear, Variedade Afim e Espaço vetorial

Proposição 17. *O conjunto solução de um sistema linear qualquer é uma variedade afim.*

Demonstração. Dado um sistema linear genérico com m equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

este pode ser impossível, possível e determinado ou possível e indeterminado.

1. Se o sistema for impossível, este não admite solução. Suponha por absurdo, que neste caso a proposição seja falsa. Sendo assim devem existir soluções x e y, não necessariamente $x \neq y$, tais que $tx + (1 - t)y$ não é solução do sistema, para algum t real. Absurdo! pois o sistema não admite solução. Donde se pode concluir que a proposição é vedadeira neste caso.

2. Se o sistema for possível e determinado, este admitirá uma única solução. Seja x esta solução. Note que para todo t real $tx + (1-t)x = tx + x - tx = x$, que é solução do sistema. Donde se pode concluir que a proposição é verdadeira neste caso.

3. Se o sistema for possível e indeterminado, então dada duas soluções quaisquer x e y do sistema, tais que $x = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ e $y = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, para a equação i do sistema vale

$$a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \cdots + a_{in}r_n = b_i \text{ e } a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n = b_i$$

como

$$\begin{gathered} tx + (1-t)y = t(r_1, r_2, \ldots, r_n) + (1-t)(s_1, s_2, \ldots, s_n) \\ = (tr_1, tr_2, \ldots, tr_n) + (s_1, s_2, \ldots, s_n) - (ts_1, ts_2, \ldots, ts_n) \\ = (tr_1 + s_1 - ts_1, tr_2 + s_2 - ts_2, \ldots, tr_n + s_n - ts_n) \end{gathered}$$

seque-se que

$$\begin{gathered} a_{i1}(tr_1 + s_1 - ts_1) + a_{i2}(tr_2 + s_2 - ts_2) + \cdots + a_{in}(tr_n + s_n - ts_n) \\ t(a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \cdots + a_{in}r_n) + (a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n) - t(a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n) \\ tb_i + b_i - tb_i = b_i \end{gathered}$$

o que mostra que $tx + (1-t)y$ é também é solução da equação i. Como este raciocínio vale para todas as equações do sistema, resulta que $tx+(1-t)y$ é solução do sistema. Donde se pode concluir que a proposição é também verdadeira neste caso.

□

Já foi visto no texto que todo espaço vetorial é uma variedade afim, mas nem toda variedade afim é um espaço vetorial. Cabem então algumas perguntas. Como o conjunto solução de um sistema linear é uma variedade afim, esta variedade é um espaço vetorial? Caso contrário, pode existir, pelo menos, algum sistema linear, no qual seu conjunto solução é um espaço vetorial? As respostas destas perguntas serão vistas nas seguintes afirmações.

Proposição 18. *Existe pelo menos um sistema linear tal que seu conjunto solução não é um espaço vetorial.*

Demonstração. Basta tomar um sistema linear, possível e determinado com solução única $x \neq 0$. No conjunto $E = \{x\}$ não podemos definir a multiplicação por escalar, pois dado $t \neq 1$ real temos que $tx \neq x$, sendo assim, tx não é um elemento de E. Desta forma E não pode ser um espaço vetorial. □

Pela proposição fica claro a existência de sistemas lineares tal que seu conjunto solução, apesar de ser uma variedade afim, não é um espaço vetorial. Mas existe um caso particular de sistema linear tal que seu conjunto solução forma um espaço vetorial. Este caso acontece com os sistemas lineares homogêneos. Um sistema linear homogêneo é todo sistema no qual os termos independentes de cada equação são nulos, ou seja, dada a i-ésima equação do sistema $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$, temos que $b_i = 0$.

Proposição 19. *O conjunto solução de um sistema linear homogêneo é um espaço vetorial.*

Demonstração. Dado um sistema linear homogêneo de m equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Seja S o conjunto solução do sistema. Note que S é formado por n - upla ordenada de números reais. Tomando $x = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $y = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, soluções do sistema, e α um número real. Definimos que:

$$x + y = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \ldots, r_n + s_n)$$
$$\alpha \cdot x = (\alpha r_1, \alpha r_2, \cdots, \alpha r_n).$$

sendo assim, dada a i-ésima equação do sistema vale o seguinte

$$a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \cdots + a_{in}r_n = 0$$
$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n = 0.$$

Logo,

$$a_{i1}(r_1 + s_1) + a_{i2}(r_2 + s_2) + \cdots + (a_{in}(r_n + s_n) =$$
$$(a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \cdots + a_{in}r_n) + (a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n) = 0 + 0 = 0$$

o que mostra que a soma de duas soluções ainda é uma solução da equação i, como esta ideia vale para todas as equações do sistema, a soma das soluções é solução do sistema. Agora note que

$$a_{i1}(\alpha r_1) + a_{i2}(\alpha r_2) + \cdots + a_{in}(\alpha r_n) = \alpha(a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \cdots + a_{in}r_n) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Portanto a multiplicação por escalar de uma solução é ainda uma solução da equação i. Como esta ideia vale para todas as equações do sistema, a multiplicação por escalar é também solução do sistema.

Concluímos, portanto, que no conjunto S estão bem definidas as operações de adição e multiplicação por escalar. Agora para confirmar que S é um espaço vetorial, devemos verificar se as oito propriedades da definição de espaço vetorial são verdadeiras para estas operações. Para isso sejam x, y e t tais que $x = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $y = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ e $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ soluções do sistema, e sejam ainda α e β números reais. Temos:

1. $x + y = y + x$. De fato,

$$x + y = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \ldots, r_n + s_n) = (s_1 + r_1, s_2 + r_2, \ldots, s_n + r_n) = y + x.$$

2. $(x + y) + t = x + (y + t)$. De fato,

$(x+y)+t = (r_1+s_1, r_2+s_2, \ldots, r_n+s_n)+(t_1, t_2, \ldots, t_n) = (r_1+s_1+t_1, r_2+s_2+t_2, \ldots, r_n+s_n+t_n) = (r_1, r_2, \ldots, r_n)+(s_1+t_1, s_2+t_2, \ldots, s_n+t_n) = x+(y+t).$

3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$, De fato,

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot x = ((\alpha \cdot \beta)r_1, (\alpha \cdot \beta)r_2, \cdots, (\alpha \cdot \beta)r_n) =$$
$$(\alpha \cdot (\beta \cdot r_1), \alpha \cdot (\beta \cdot r_2), \cdots, \alpha \cdot (\beta \cdot r_n)) = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

4. Existe uma solução em S, chamada solução nula, representada pelo símbolo 0, que satisfaz a seguinte propriedade, $x + 0 = x$ para todo x em S. Basta tomar $0 = (0, 0, \ldots, 0)$, vê-se facilmente que 0 é solução do sistema e que

$$x + 0 = (r_1 + 0, r_2 + 0, \ldots, r_n + 0) = (r_1, r_2, \ldots, r_n) = x.$$

5. Para toda solução x em S, existe uma solução denotado por $-x$ em S, que é tal que $x + (-x) = 0$, esta solução $-x$ será chamada de inverso aditivo da solução x. Basta tomar $-x = (-r_1, -r_2, \ldots, -r_n)$, vê-se facilmente que $-x$ é solução do sistema e que

$$x + (-x) = (r_1 + (-r_1), r_2 + (-r_2), \ldots, r_n + (-r_n)) = (0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

6. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$. De fato,

$$(\alpha + \beta) \cdot x = ((\alpha + \beta)r_1, (\alpha + \beta)r_2, \ldots, (\alpha + \beta)r_n) = (\alpha r_1 + \beta r_1, \alpha r_2 +$$
$$\beta r_2, \ldots, \alpha r_n + \beta r_n) = (\alpha r_1, \alpha r_2, \ldots, \alpha r_n) + (\beta r_1, \beta r_2, \ldots, \beta r_n) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$. De fato,

$$\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot (r_1 + s_1), \alpha \cdot (r_2 + s_2), \ldots, \alpha \cdot (r_n + s_n)) = (\alpha r_1 + \alpha s_1, \alpha r_2 +$$
$$\alpha s_2, \ldots, \alpha r_n + \alpha s_n) = (\alpha r_1, \alpha r_2, \ldots, \alpha r_n) + (\alpha s_1, \alpha s_2, \ldots, \alpha s_n) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

8. $1 \cdot x = x$, para toda solução x em S. De fato,

$$1 \cdot x = (1 \cdot r_1, 1 \cdot r_2, \ldots, 1 \cdot r_n) = (r_1, r_2, \ldots, r_n) = x.$$

Sendo assim, o conjunto S é realmente um espaço vetorial. □

Capítulo 5

Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos uma iniciação de Álgebra Linear, de uma forma diferente dos tradicionais textos apresentados nos livros didáticos de matemática, o que por si só, já representa um avanço, visto que pouco se faz, no sentido de inovar, os conteúdos matemáticos do ensino médio. Foram introduzidos conceitos novos neste nível de ensino, tais como espaço vetorial, posto segundo linhas de uma matriz, nulidade de uma matriz e variedade afim. Neste contexto, ganhamos na construção teórica e na valorização do caráter lógico da matemática, coisa que vem sendo esquecida no processo de ensino-aprendizagem da educação básica de matemática. Cabe ainda destacar que em nenhum momento no texto foi mencionado a ideia de determinantes, mostrando que este conteúdo, pode ser retirado do currículo da matemática da educação básica, sem muitos prejuízos. Além do mais, acreditamos, que a Álgebra Linear, vista desta forma, facilitará futuros estudos dos alunos que tenham contado com este texto, de modo que, no futuro, ao nível universitário, o contato deste aluno com essa disciplina seja mais agradável e menos traumático. Apesar disso, cabe deixar bem claro que esta forma de apresentação, não fica isenta de críticas, aliás, estas são bem vindas e podem trazer melhorias.

Referências Bibliográficas

[1] Bueno, H.P., *Algebra Linear - um segundo curso* , Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matematica, 2006.

[2] Filho, M. F. de A., *Geometria Analitica e Algebra Linear* , Fortaleza: Edições Livros Tecnicos, 2003.

[3] Hefez, A. Fernandez, C. de S., *Introdução a Algebra Linear* , Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matematica, 2013. (Coleção matematica PROFMAT).

[4] Lima, E.L., *Algebra Linear* , Rio de Janeiro: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2011. (Coleção matematica universitaria).

[5] Lima, E.L., *Geometria Analitica e Algebra Linear* , Rio de Janeiro: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2011. (Coleção matematica universitaria).

[6] Teixeira, R. C., *Algebra Linear. Exercicios e soluções* , Rio de Janeiro: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2012. (Coleção matematica universitaria).