UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

CRISPIANO BARROS UCHÔA

UTILIZANDO VETORES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA PLANA NAS TURMAS OLÍMPICAS DO ENSINO BÁSICO

FORTALEZA
2014

CRISPIANO BARROS UCHÔA

UTILIZANDO VETORES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA PLANA NAS TURMAS OLÍMPICAS DO ENSINO BÁSICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

U19u Uchôa, Crispiano Barros
Utilizando vetores na resolução de problemas de geometria plana nas turmas olímpicas do ensino básico / Crispiano Barros Uchoa. – 2014.
41 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Profa. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa.

1. Geometria plana. 2. Vetores. 3. Ensino básico. 4. Turma olímpica I. Título.

CDD 516.22

CRISPIANO BARROS UCHÔA

UTILIZANDO VETORES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA PLANA NAS TURMAS OLÍMPICAS DO ENSINO BÁSICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 26 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Maria Silvana Alcantara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa (Orientadora)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Juscelino Pereira Silva

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Francisco Calvi Da Cruz Junior

Prof. Ms. Francisco Calvi da Cruz Junior

Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Aos meus filhos Crispim e Cristian

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, por ter me permitido realizar este trabalho, provendo-me todas as condições para a conclusão deste Mestrado.

À minha família pelo imenso esforço, compreensão e sacrifício desprendido durante toda minha vida acadêmica.

À minha esposa Patrícia Lemos Ferreira, pelo apoio constante durante todo o curso.

Á todo o corpo docente do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, em especial aos professores da Universidade Federal do Ceará.

Aos colegas e amigos do mestrado, pelos dois anos de convivência e enriquecimento intelectual.

Á minha orientadora, Profa. Dra. Maria Sivana Alcantara Costa, pela revisão e correção do trabalho.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq) pelo apoio financeiro.

"*Tenha em mente que tudo que você aprende na escola é trabalho de muitas gerações. Receba essa herança, honre-a, acrescente a ela e, um dia, fielmente, deposite-a nas mãos de seus filhos.*".

Albert Einstein (1879−1955).

RESUMO

Este trabalho é uma proposta de abordagem de problemas de geometria plana, nas turmas olímpicas de matemática no ensino básico, tendo como base o uso de vetores para resolver esses problemas. Os vetores oferecem novas ferramentas de exploração da geometria plana e de suas propriedades. Com o uso de vetores, as demonstrações das proposições da geometria tornam-se bem mais simples. O propósito é introduzir os vetores nas turmas que estão saindo do ensino fundamental, para o ensino médio e mostrar a importância dos vetores para resolver problemas de geometria plana. Usaremos, as diversas formas de representação dos vetores e suas propriedades na demonstração, de resultados e na resolução de problemas de geometria. Um modelo conceitual será postulado e fundamentado para que os alunos tenham contato com esses instrumentais. Acreditamos que fazendo a articulação entre a representação geométrica e a representação algébrica de uma forma mais natural possível, o estudo da geometria plana com o uso de vetores facilitará o nível de aprendizagem dos alunos, uma vez que conhecerá novas ferramentas para resolver problemas.

Palavras-chave:Geometria Plana. Vetores. Ensino Básico. Turma Olímpica.

ABSTRACT

This work is a proposal of problems in plane geometry Olympic math classes in basic education approach based on the use of vectors to solve these problems. The arrays offer new tools for exploration of plane geometry and its properties. Using vectors demonstrations of the propositions of geometry become much simpler. The purpose is to introduce vectors into classes that are coming out of elementary school to high school and show the importance of vectors to solve problems of plane geometry. We will use various forms of representation of vectors and their properties in the income statement and solving geometry problems. A conceptual model is postulated and substantiated for students to have contact with these instruments. We believe that making the link between the geometric representation and the algebraic representation of a most natural way possible the study of plane geometry using vectors facilitate the learning level of the students, since meet new tools to solve problems.

Keywords: Plane Geometry. Vector. Basic Education. Olympic Class.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho, sob o tema “Utilizando vetores na resolução de problemas de geometria plana nas turmas olímpicas do ensino básico” teve como principal objetivo a construção de uma proposta de texto sobre vetores para a utilização direta na sala de aula pelos docentes, bem como pelos estudantes.

Os livros didáticos brasileiros voltados para o ensino básico não trabalham com vetores, no Ensino Médio, o estudo de vetores é apresentado pelos professores da disciplina física, pois eles são fundamentais para a compreensão dos conteúdos estudados nesta área, no entanto os alunos tem muita dificuldade em compreende-lo pois os vetores são apresentados de forma direta sem um conhecimento prévio de suas estruturas algébricas e geométricas, o que faz não perceberem a grande importância dessas estruturas matemáticas e que o conceito de vetor é puramente matemático.

Por isso, a proposta foi desenvolvida com essa peculiaridade de incluir o conhecimento de vetores na resolução de problemas da geometria plana. Como metodologia de pesquisa teórica, foi adotada a pesquisa bibliográfica, para produzir uma proposta de abordagem dos problemas sob uma ótica vetorial, buscando o equilíbrio entre conceituação e aplicação.

Baseando-se nesse propósito, esse trabalho foi dividido em duas partes, a primeira parte são os conceitos que foram expostos de forma sequencial nos cincos primeiros capítulos, e a segunda parte é a aplicação desses conceitos na resolução de problemas, que foi exposto no capítulo 6.

No Capítulo 1, intitulado Sistema de Coordenadas no Plano, apresentamos de forma bem simples o plano cartesiano, para que o aluno tenha contato com as coordenadas no plano, assim como localização e distancias.

No Capítulo 2, intitulado Vetores, apresentamos de forma intuitiva e algébrica o conceito de vetores, assim como suas características e representações, para que, de forma bem natural, o aluno tenha uma boa compreensão.

Nos Capítulos 3 e 4,apresentamos as operações com vetores: adição e multiplicação por escalar, enfatizando a forma algébrica e geométrica das operações, destacando a importância dessas operações na resolução de problemas.

No Capítulo 5, intitulado Produto Escalar, apresentamos uma operação com vetores que tem grande aplicação na resolução de problemas, destacando uma fórmula para determinar o ângulo entre dois vetores.

No Capítulo 6, intitulado Aplicação de vetores na resolução de problemas, apresentamos uma lista de problemas, que podem ser resolvidos utilizando os conceitos vistos nos capítulos anteriores, que vem a reforçar a importância desse conteúdo para os alunos do ensino básico e principalmente paras os alunos que participam de olimpíadas matemáticas.

2 SISTEMA DE COORDENADAS NO PLANO

2.1 Sistema Cartesiano Ortogonal

Quaisquer dois números reais formam um par, e quando a ordem de aparecimento é importante, são chamados de par ordenado pois obedecem uma ordem. Se x for o primeiro número real e y for o segundo, esse par ordenado será denotado por (x,y).

O conjunto de todos os pares ordenados de números reais é chamado de plano numérico, denotado por $\mathbb{R}^2$, e cada par ordenado (x,y) será um ponto no plano numérico. Da mesma forma que podemos identificar $\mathbb{R}$ como os pontos de um eixo numérico (um espaço de uma dimensão), podemos identificar $\mathbb{R}^2$ como os pontos de um plano geométrico (um espaço de duas dimensões). O método usado para marcar pontos no plano numérico $\mathbb{R}^2$ deve-se ao matemático francês René Descartes (1596-1650) aquém é atribuída a criação da Geometria Analítica.

Uma reta horizontal é escolhida no plano geométrico, sendo chamada de eixo x. Uma reta vertical é escolhida sendo chamada de eixo y. O ponto de intersecção entre os dois eixos x e y é chamado de origem, sendo denotado pela letra O. Uma unidade de comprimento é escolhida, usualmente a unidade de comprimento para os dois eixos é a mesma. Estabelecemos a direita da origem como parte positiva do eixo x, e a esquerda como sendo a parte negativa dos eixo x. Estabelecemos a parte acima da origem do eixo y como parte positiva e embaixo da origem como sendo a parte negativa. Veja a figura 1.

Associaremos um par ordenado de números reais (x,y) com um ponto no plano geométrico. No ponto x sobre o eixo horizontal e no ponto y sobre o eixo vertical, os segmentos de retas são desenhados perpendicularmente aos respectivos eixos, a intersecção desses dois segmentos perpendiculares é o ponto P, associado ao par ordenados (x,y). Veja figura 2. O primeiro número x do par ordenado é chamado de abscissa (ou coordenada x) de P, e o segundo número y é chamado de ordenada (ou coordenada y) de P.

A abscissa e a ordenada de um ponto são denominadas coordenadas cartesianas retangulares do ponto. Há uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano geométrico e $\mathbb{R}^2$; isto é, a cada ponto corresponde um único par ordenado (x,y) e a cada par ordenado (x,y) está associado um único ponto. Essa correspondência é denominado sistema de coordenadas cartesianas retangulares.

Os eixos x e y são chamados de eixos coordenados. Eles dividem o plano em quatro partes denominadas quadrantes. O primeiro quadrante é aquele em que a abscissa e a ordenada são ambas positivas (x, y), o segundo quadrante é a quele em que a abscissa é negativa e a ordenada é positiva $(-x, y)$, o terceiro quadrante é a quele que abscissa e ordenada são ambas negativas $(-x, -y)$ e o quarto quadrante é a quele em que a abscissa é positiva e a ordenada é negativa $(x, -y)$. Veja figura 3.

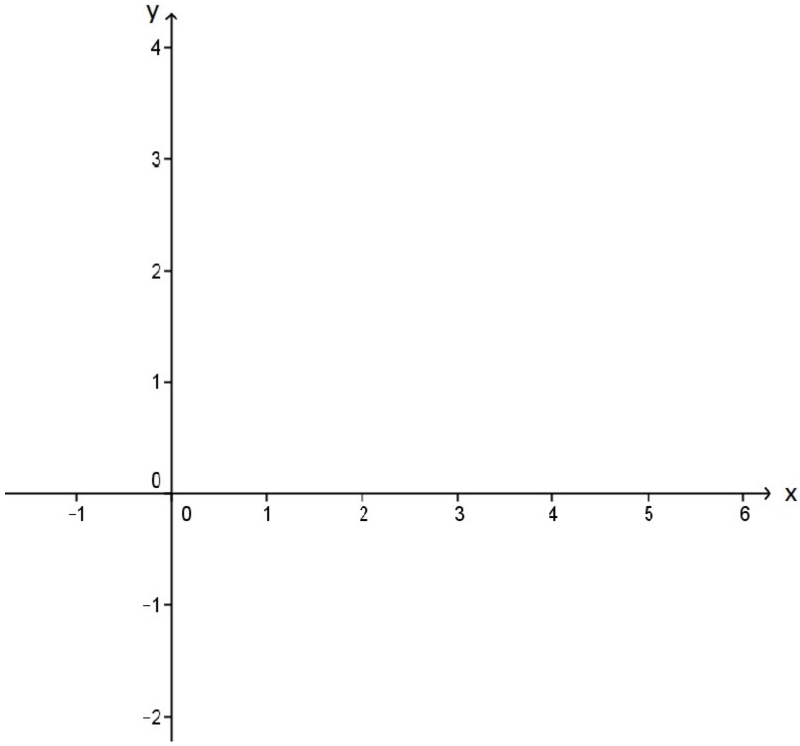

Figura 1: Plano Cartesiano

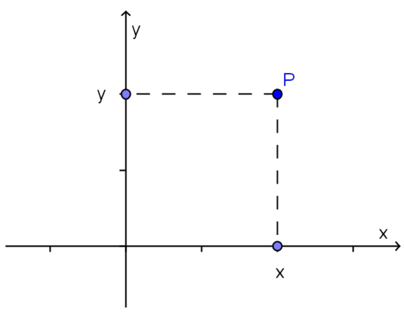

Figura 2: Ponto no plano cartesiano

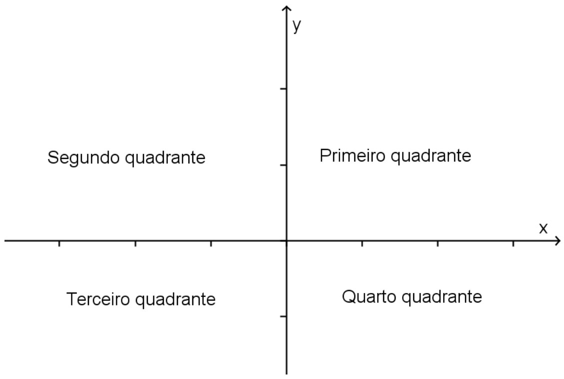

Figura 3: Quadrantes

2.2 Distância Entre dois Pontos

Vamos discutir agora o problema de encontrar a distância entre dois pontos no plano. Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, a_2)$ forem pontos do plano isto é, A e B têm a mesma ordenada, mas abscissas diferentes, então a distancia orientada de A para B será denotada por AB e definimos assim

$$AB = b_1 - a_1$$

Observe que o segmentos AB é paralelos ao eixo x. Veja a figura 4

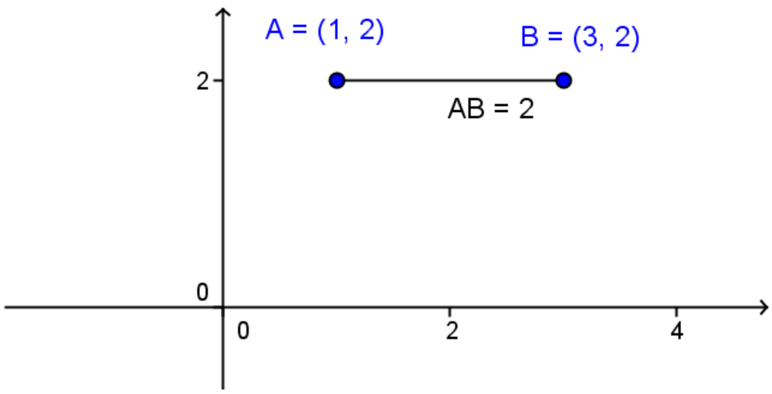

Figura 4: Distância entre dois pontos de mesma ordenada

Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (a_1, b_2)$ forem pontos do plano isto é, A e B têm a mesma abscissas, mas ordenadas diferentes, então a distancia orientada de A para B será denotada por AB e definimos assim

$$AB = b_2 - a_2$$

Assim o segmento AB é paralelos ao eixo y. Veja a figura 5

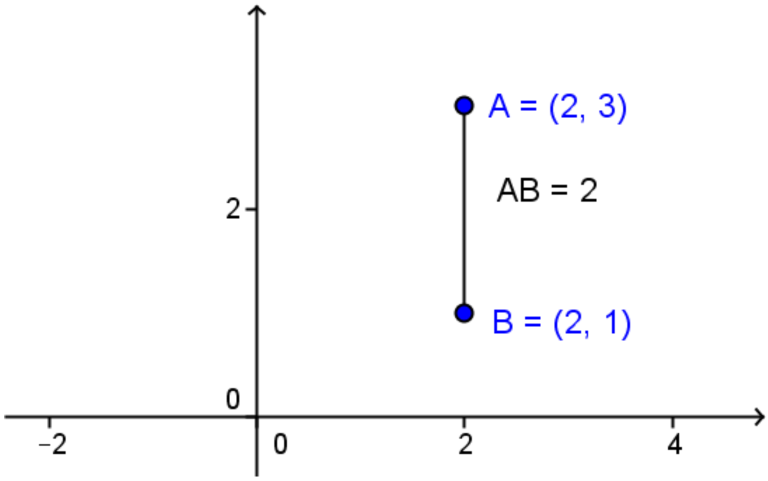

Figura 5: Distância entre dois pontos de mesma abscissa

Vamos agora determinar uma fórmula para encontrar a distância entre dois pontos quaisquer $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ do plano. Veja a figura 6

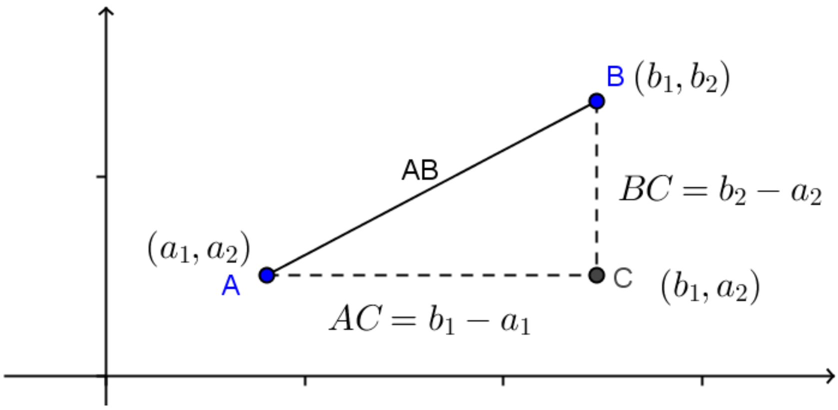

Figura 6: Distância entre dois pontos quaisquer

Note que se passarmos uma reta por A paralelo ao eixo horizontal e uma outra reta passando pelo ponto B paralela ao eixo vertical, vamos determinar um ponto C, esses três pontos A, B e C forma um triângulo retângulo em C, onde AB é a hipotenusa desse triângulo. Para determinar seu comprimento basta aplicar o teorema de Pitágoras, temos

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

logo

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Exemplo 2.1. *Determine a distância entre os pontos* $(2,5)$ *e* $(1,2)$.

Solução. Seja d a distância entre os dois pontos $(2,5)$ e $(1,2)$, usando a fórmula da distância entre dois pontos, temos

$$|d| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-5)^2}$$

$$|d| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}$$

$$|d| = \sqrt{1+9}$$

$$|d| = \sqrt{10}$$

3 VETORES

3.1 Noção Intuitiva de Vetores

Muitas quantidades mensuráveis tais como grandezas físicas, como velocidade, força, aceleração, deslocamento e impulso, para serem completamente identificadas, precisam, além da magnitude, ä direção e o sentido. Estas grandezas são chamadas grandezas vetoriais ou simplesmente vetores.

Geometricamente, vetores são representados por segmentos (de retas) orientados (segmentos de retas com um sentido de percurso) no plano ou no espaço. Veja as figuras 7 e 8. A ponta da seta do segmento orientado é chamada ponto final ou extremidade e o outro ponto extremo é chamado de ponto inicial ou origem do segmento orientado. A direção e o sentido do segmento orientado identifica a direção e o sentido do vetor. O comprimento do segmento orientado representa a magnitude do vetor.

Embora a ideia de vetores tenha sido introduzida no século XIX, sua utilidade em aplicações, particularmente em ciências físicas não foi percebida até o século XX. Recentemente os vetores tiveram aplicações em ciência da computação, estatística, economia, ciências sociais e em vários ramos da teoria matemática.

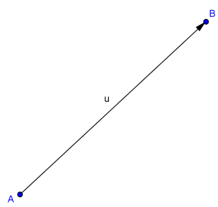

Figura 7: Vetor

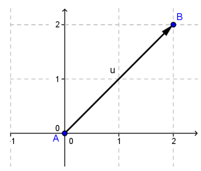

Figura 8: Vetor no plano cartesiano

3.2 Definição Geométrica de Vetores

Dois pontos distintos A e B no espaço determina uma única reta, esta reta determina uma direção no espaço, o segmento de reta entre os pontos A e B, que é a parte da reta compreendida entre esses dois pontos é suficiente para nos dar essa direção. Este segmento pode ser facilmente orientado se dermos um sentido para ele, se considerarmos um dos pontos como ponto inicial e o outro como ponto final. A figura 7 apresenta um vetor u de extremidade B e origem A.

Um vetor no plano é um par ordenado de números reais (a,b). Os números a e b são chamados de componentes do vetor.

Há uma correspondência biunívoca entre os vetores no plano e os pontos do plano. Seja $\vec{u}$ o vetor dado pelo par ordenado (a,b). Se B for o ponto (a,b), então o vetor $\vec{u}$ poderá ser representado geometricamente pelo segmento de reta orientado $\vec{OB}$, onde O é a origem do plano cartesiano.Tal segmento de reta orientado é chamando de representação do vetor $\vec{u}$. Qualquer outro segmento de reta orientado que seja igual a $\vec{OB}$ também será uma representação do vetor $\vec{u}$. A representação de um vetor que tem seu ponto inicial na origem do plano cartesiano é chamada de representação posicional do vetor.

Na figura 9 temos o vetor $\vec{u} = (2,3)$ que tem por representação posicional o segmento de reta orientado da origem ao ponto $(2,3)$. Uma representação do vetor $\vec{u}$ que tem como ponto inicial (p,q), tem como extremidade final o ponto $(p+2,q+3)$.

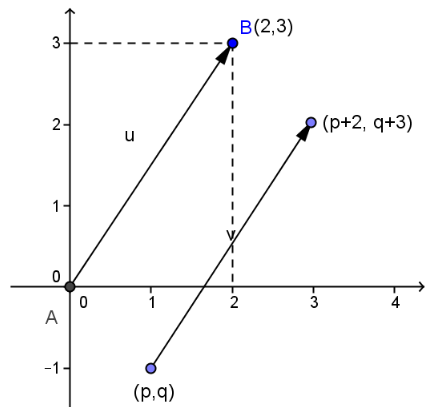

Figura 9: Vetores no plano cartesiano

3.3 Módulo de um Vetor

O módulo de um vetor é o comprimento de qualquer uma de suas representações. O módulo de um vetor $\vec{u}$ é denotado por $||\vec{u}||$.

Teorema 3.1. *Se $\vec{u}$ for um vetor de componentes (a,b) então $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2+b^2}$.*

Demonstração. Como $||u||$ é o comprimento de qualquer uma de suas representações, então $||\vec{u}||$ será o comprimento de sua representação posicional que é a distancia da origem ao ponto (a,b). Assim da fórmula da distância entre dois pontos temos,

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observe que o módulo de um vetor é um número real não negativo e que $||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

3.4 Tipos de Vetores

1. **Vetor Livre**: é o vetor que tem por origem qualquer ponto no espaço.

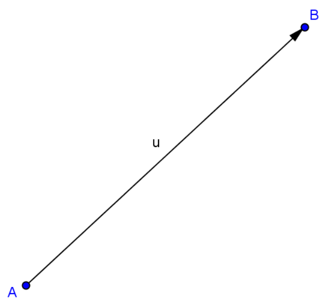

Figura 10: Vetor livre $\vec{u} = \vec{AB}$

2. **Vetor deslizante**: é o vetor cuja origem pertence obrigatoriamente a uma reta que funciona como reta suporte do mesmo.

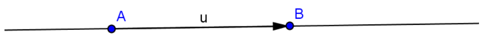

Figura 11: Vetor deslizante $\vec{u} = \vec{AB}$

3. **Vetor posição**: Também conhecido como vetor aplicado, dá a posição de um ponto qualquer em relação a origem.

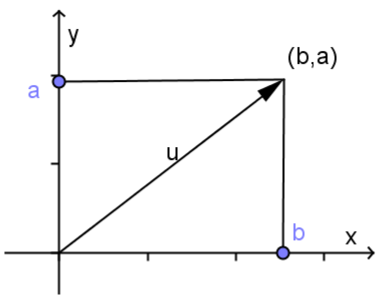

Figura 12: Vetor posição $\vec{u} = (b, a)$

4. **Vetor nulo**: é o vetor de módulo zero, ou seja, a origem coincide com a extremidade.

5. **Vetor unitário**: é o vetor de comprimento 1.

6. **Vetor oposto**: O vetor oposto do vetor $\vec{u} = \vec{AB}$ é o vetor $\vec{-u} = -\vec{AB}$. Vetores opostos possui mesmo comprimento, mesma direção, mas sentido contrário.

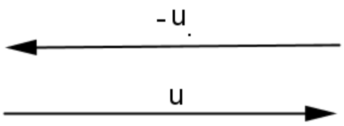

Figura 13: Vetor oposto

7. **Vetores paralelos**: São vetores que possuem a mesma direção.

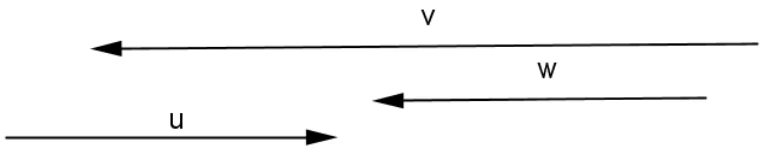

Figura 14: Vetores paralelos

8. **Vetores iguais**: São vetores que possuem o mesmo sentido, mesmo comprimento e mesma direção.

9. **Vetores coplanares**: Dois ou mais vetores são complanares se existir algum plano que contenha esses vetores.

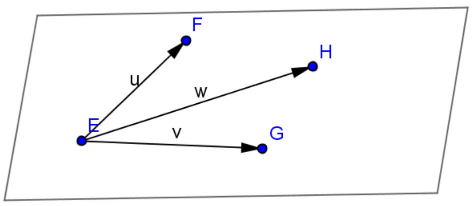

Figura 15: Vetores coplanares

Exemplo 3.1. *Sejam o vetor $\vec{u} = (-4,5)$ e o ponto $P = (6,-2)$. Trace a representação posicional de $\vec{u}$ e também a representação específica de $\vec{u}$, tendo o ponto P como ponto inicial.*

Solução. Seja $\vec{PD}$ a representação específica de $\vec{u}$, tendo P como ponto de partida. Somando as componentes do ponto B com as do ponto P temos o ponto $D = (2,3)$.
Seja B o ponto $(-4,5)$. O vetor $\vec{AB}$, que é a representação posicional de $\vec{u}$. Seja $\vec{PD}$ a representação específica de $\vec{u}$, tendo P como ponto de partida. Somando as componentes do ponto B com as do ponto P temos o ponto $D = (2,3)$. Veja a figura 16

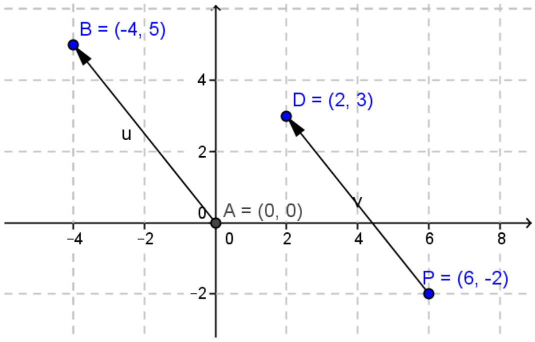

Figura 16: Vetor na posição padrão e vetor transladado por um ponto P

Exemplo 3.2. *Determine o módulo(comprimento) do vetor* $\vec{u} = (3,4)$.

Solução. Usando a relação matemática que determina o módulo de um vetor temos

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 16}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{25}$$

$$|\vec{u}| = 5$$

4 ADIÇÃO DE VETORES

4.1 Definição

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vamos definir uma operação de adição, que a cada par de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ fará corresponder o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$. Para isso procedemos do seguinte modo,vamos fixar um representante qualquer do vetor $\vec{u}$ e fazer uma translação do vetor $\vec{v}$ de modo que seu ponto inicial coincida com a extremidade final de $\vec{u}$. A soma $\vec{u}+\vec{v}$ é o vetor que sai do ponto inicial de $\vec{u}$ e vai até o ponto final de $\vec{v}$. Veja a figura 17.

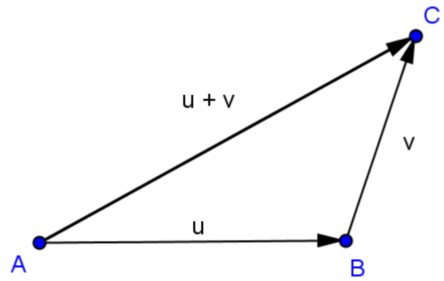

Figura 17: Soma de vetores

4.2 Regra do Paralelogramo

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vamos fixar um representante qualquer do vetor $\vec{u}$ e fazer uma translação do vetor $\vec{v}$ de modo que seu ponto inicial coincida com o ponto inicial de $\vec{u}$. Transladando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelamente a eles mesmos, obtemos um paralelogramo conforme a figura 18. Esse paralelogramo é determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a soma dos vetores corresponde a um vetor que tem ponto inicial coincidindo com o ponto inicial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e extremidade final coincidindo com a extremidade final de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. O vetor soma coincide com a diagonal do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

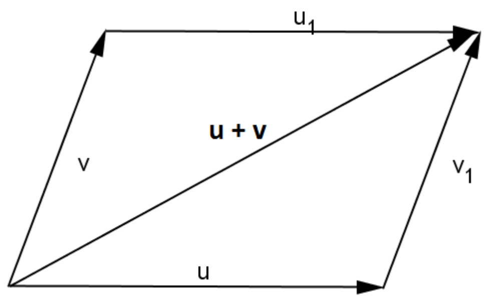

Figura 18: Regra do paralelogramo

4.3 Propriedades da Adição de Vetores

São muito importantes as regras que enunciamos a seguir, elas constitui um conjunto de ferramentas importante para o cálculo envolvendo adição de vetores.

Teorema 4.1. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer no plano, então a adição de vetores atende as seguintes propriedades:*

A1 PROPRIEDADE COMUTATIVA

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

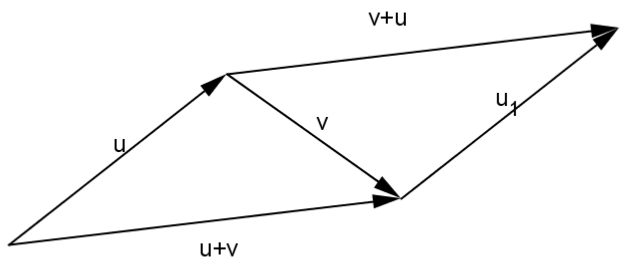

Figura 19: Propriedade comutativa

A2. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

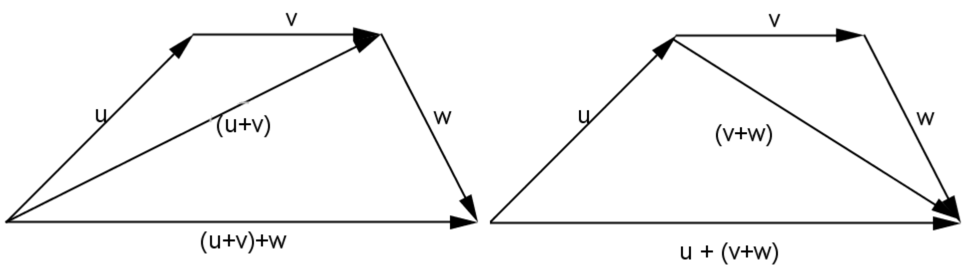

Figura 20: Propriedade associativa

A3 ELEMENTO NEUTRO

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

A4 ELEMENTO OPOSTO

Dado um vetor $\vec{u}$, existe um vetor que somado a $\vec{u}$ da como resultado o vetor nulo, que é o vetor oposto de $\vec{u}$, que indicamos por $-\vec{u}$.

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{AB} + \vec{BA} = (B - A) + (A - B) = \vec{0}$

Esta propriedade nos permite definir a subtração de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que é a soma do vetor $\vec{u}$ com o oposto do vetor $\vec{v}$.

$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

Construindo um paralelogramo ABCD, com os representantes dos vetores $\vec{u}=\vec{AB}$ e $\vec{v}=\vec{AC}$, o vetor $\vec{u}-\vec{v}$ terá como representante o segmento orientado (C,B), pois $\vec{CD}=\vec{u}$ e $\vec{BD}=-\vec{v}$. Logo as diagonais de um paralelogramo representam a soma e a subtração de dois vetores.

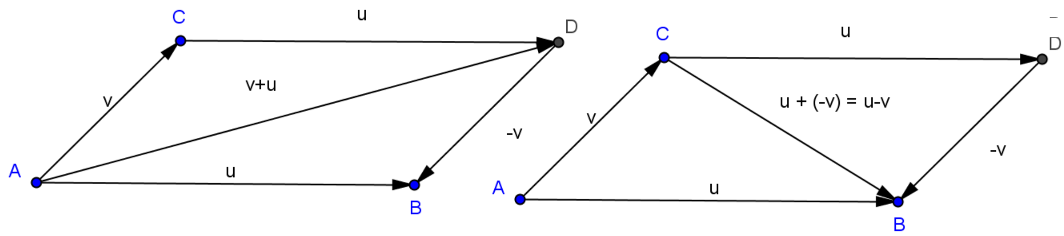

Figura 21: Subtração de vetores

Demonstração. Daremos a demonstração da propriedade A1, pois as demais são consequências imediatas. Seja $\vec{u}=(a,b)$ e $\vec{v}=(c,d)$ e a,b,c,d números reais.

$$\vec{u}+\vec{v}=(a,b)+(c,d)$$

$$=(a+c,b+d)$$

$$=(c+a,d+b)$$

$$=(c,d)+(a,b)$$

$$=\vec{v}+\vec{u}$$

Exemplo 4.1. *Prove que* $\vec{u}+\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}\Rightarrow\vec{v}=\vec{w}$

Solução . Somando aos dois membros da igualdade $\vec{u}+\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$ o vetor oposto de $\vec{u}$, obtemos

$$(-\vec{u})+(\vec{u}+\vec{v})=(-\vec{u})+(\vec{u}+\vec{w})$$

Pela propriedade associativa temos

$$(-\vec{u}+\vec{u})+\vec{v}=(-\vec{u}+\vec{u})+\vec{w}$$

Pela propriedade do elemento neutro resulta

$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{0} + \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$$

Exemplo 4.2. *Dados os vetores $\vec{u} = (2,3)$ e o vetor $\vec{v} = (1,3)$, calcule $\vec{u} + \vec{v}$.*

Solução. Para encontrar o vetor soma, basta somar as componentes correspondente.

$$\vec{u} + \vec{v} = (2+1, 3+3) = (3,6)$$

5 MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR UM VETOR

Vamos definir uma operação, que a cada número real α e a cada vetor $\vec{u}$ associa a um vetor indicado por $\alpha\vec{u}$ tal que:

Se $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = 0$, então $\alpha\vec{u} = \vec{0}$.

Se $\alpha \neq 0$, *e* $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\begin{cases} \alpha\vec{u}//\vec{u} \\ \alpha\vec{u} \; e \; \vec{u} \; tem \; mesmo \; sentido \; se \alpha > 0 \; e \; sentido \; contrario \; se \; \alpha > 0. \\ ||\alpha\vec{u}|| = |\alpha| \cdot ||\vec{u}|| \end{cases}$

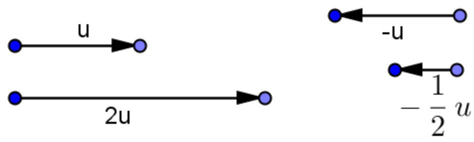

Figura 22: Múltiplos de um vetor

5.1 Propriedades da Multiplicação de um Número Real por um Vetor

Listaremos as propriedades resultantes da multiplicação de um número real por um vetor. Como nas propriedades da adição omitiremos as demonstrações algébricas, apelando mais para uma intuição geométrica.

Teorema 5.1. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores quaisquer no plano, e α, β números reais, então a multiplicação de um número real por vetores satisfaz as seguintes propriedades:*

M1. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

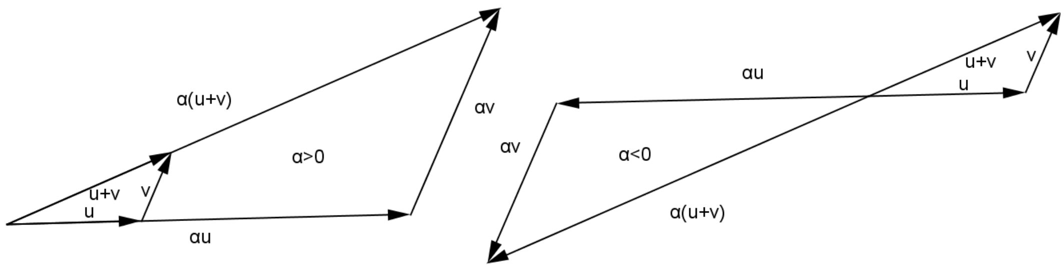

Figura 23: Propriedade M1

M2. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

M3. $1.\vec{u} = \vec{u}$

M4. $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha)\vec{u}$

Demonstração. Daremos a demonstração da propriedade M1, pois as demais são consequências imediatas. Seja $\vec{u} = (a,b)$ e $\vec{v} = (c,d)$, e a,b,c,d são números reais.

$$\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha[(a,b)+(c,d)]$$

$$= \alpha[(a+c,b+d)]$$

$$= [\alpha(a+c),\alpha(b+d)]$$

$$= [\alpha(a,b)+\alpha(c,d)]$$

$$\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$$

Exemplo 5.1. *Prove que se $\alpha\vec{v} = \beta\vec{v}$ então $\alpha = \beta$.*

Solução. Usando as propriedades temos:

$$\alpha\vec{v} = \beta\vec{v} \Rightarrow \alpha\vec{v} - \beta\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha\vec{v} + (-\beta)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\alpha-\beta)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\alpha-\beta) = 0$$

Logo $\alpha = \beta$.

6 PRODUTO ESCALAR

6.1 Definição

Já definimos adição e subtração de vetores, bem como a multiplicação de um vetor por um escalar (um número real)Definiremos agora uma multiplicação entre dois vetores, chamada de produto escalar.

Se $\vec{u} = (a,b)$ e $\vec{v} = (c,d)$ forem dois vetores do plano, então o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\vec{u}\cdot\vec{v}$ será dado por

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (a,b)\cdot(c,d) = ac+bd$$

O produto escalar de dois vetores é um número real, e não um vetor e possui as seguintes propriedades:

Teorema 6.1. *Se $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ forem vetores do plano e α um escalar então:*

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
3. $\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \alpha(\vec{u})\cdot\vec{v}$
4. $\vec{0}\cdot\vec{u} = 0$
5. $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$

Demonstração. Vamos demonstrar a propriedade 1 e as demais se faz de forma equivalente.

Sendo $\vec{u} = (a,b)$ e $\vec{v} = (c,d)$ em que $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ temos

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (a,b)\cdot(c,d)$$

$$= (ac+bd)$$

$$= (ca+db)$$

$$= (c,d)\cdot(a,b)$$

$$= \vec{v}\cdot\vec{u}$$

6.2 Ângulo Entre dois Vetores

O produto escalar também pode ser usado para determinar a medida do ângulo entre um par de vetores. No plano o ângulo entre dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ será o ângulo θ, determinado por estes dois vetores, que satisfaz $0 \leq \theta \leq 180°$. Veja a figura 24.

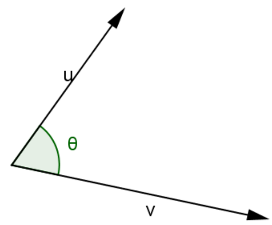

Figura 24: Ângulo entre dois vetores

6.3 Vetores ortogonais

Dois vetores são ortogonais se o ângulo entre suas representações for um angulo reto.

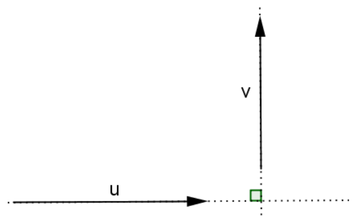

Figura 25: Vetores ortogonais

Teorema 6.2. *Se θ for a medida do ângulo entre dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| cos\theta$$

.

Demonstração. Considere o triângulo abaixo formado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, onde θ é o ângulo entre os dois vetores.

Aplicando a lei dos co-senos a esse triângulo, temos

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| cos\theta$$

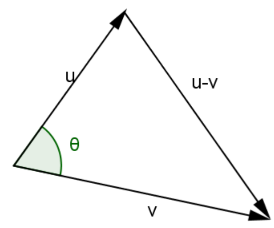

Figura 26: Ângulo entre dois vetores

Desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade acima utilizando o item 5 do teorema 4, obtemos

$$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||cos\theta$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||cos\theta$$

$$||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||cos\theta$$

$$-2\vec{u}\cdot\vec{v} = -2||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||cos\theta$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}$$

Que é a fórmula para encontrar o co-seno do ângulo entre dois vetores.

Desse teorema podemos formular o seguinte:

1. Dois vetores são paralelos se um dos vetores for múltiplo escalar do outro.

   Vimos no capítulo 4 que se dois vetores são não-nulos múltiplo escalares um do outro, então eles tem o mesmo sentido ou sentido oposto.

2. Dois vetores são ortogonais, se e somente se, o produto escalar deles for igual a zero.

   Dois vetores são ortogonais quando o ângulo entre esses dois vetores é 90° graus, como o co-seno de 90° é 0, temos que o produto escalar também é 0.

Exemplo 6.1. *Se $\vec{u}=(2,-3)$ e $\vec{v}=(3,4)$. Determine $\vec{u}\cdot\vec{v}$.*

Solução. Pela definição de produto escalar temos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,-3)\cdot(3,4)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot 3 + (-3)\cdot 4$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 6 + (-12)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -6$$

Exemplo 6.2. *Determine o ângulo entre os dois vetores* $\vec{u} = (1,3)$ *e* $\vec{v} = (2,1)$.

Solução. Tomando θ como o ângulo entre os dois vetores podemos encontrar o seu valor usando fórmula

$$cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}$$

logo

$$cos\theta = \frac{(1,3)\cdot(2,1)}{\sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$cos\theta = \frac{1.2+3.1}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{4+1}}$$

$$cos\theta = \frac{2+3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}$$

$$cos\theta = \frac{5}{\sqrt{50}}$$

$$cos\theta = \frac{5}{5\sqrt{2}}$$

$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim $\theta = 45^\circ$.

7 APLICAÇÃO DE VETORES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo vamos apresentar uma lista de problemas que podem ser resolvidos com os conceitos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

7.1 Problemas Resolvidos

Problema 1 . Mostre que na figura abaixo $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$

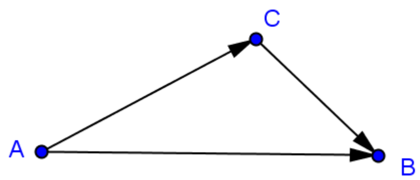

Figura 27: Problema Resolvido 1

Solução. Lembrando que por definição de adição de vetores $\vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$ e que $\vec{CA} = -\vec{AC}$ obtemos o resultado.

Problema 2 . Na figura AX é a metade da medida de XB. Determine $\vec{CX}$ em função de $\vec{CA}$ e $\vec{CB}$.

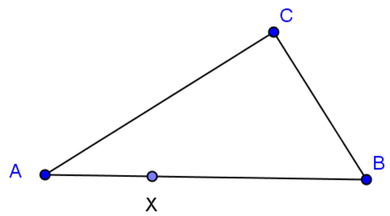

Figura 28: Problema Resolvido 2

Solução. Podemos Escrever

$$\vec{AX} = \frac{1}{2}\vec{BX}$$

$$\vec{CX} - \vec{CA} = \frac{1}{2}(\vec{CB} - \vec{CX})$$

$$\vec{CX} - \vec{CA} = \frac{1}{2}\vec{CB} - \frac{1}{2}\vec{CX}$$

$$\vec{CX} + \frac{1}{2}\vec{CX} = \frac{1}{2}\vec{CB} + \vec{CA}$$

$$\vec{CX} = \frac{1}{3}\vec{CB} + \frac{2}{3}\vec{CA}$$

Problema 3 . Prove que as diagonais de um paralelogramo tem o mesmo ponto médio.

Solução

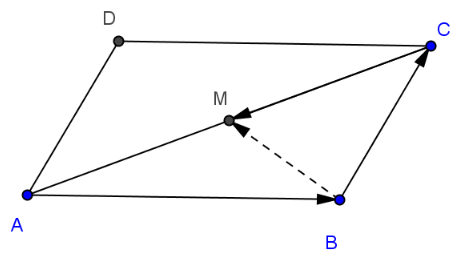

Figura 29: Problema 3

Considerando o paralelogramo ABCD da figura 6.3, de diagonais AC e DB. Seja M o ponto médio de AC. Vamos provar que M é também ponto médio de BD.

Temos que

$$\vec{BM} = \vec{BC} + \vec{CM}$$

$$\vec{BM} = \vec{AD} + \vec{MA}$$

$$\vec{BM} = \vec{MD}$$

Portanto, M é o ponto médio de BD.

Problema 4 . Prove que os segmentos que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida ametade da medida deste lado.

Solução. Seja o triângulo ABC, e seja M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente.

A afirmação feita equivale à seguinte relação: $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, pois MN é a metade de AB e são paralelos, que vamos provar agora.

Podemos escrever

$$2\vec{MC} = \vec{AC}$$

$$2\vec{CN} = \vec{CB}$$

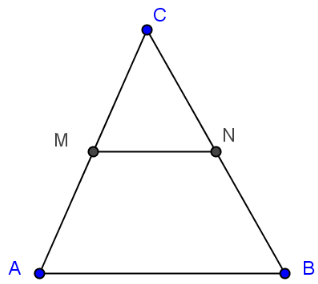

Figura 30: Problema 4

Somando membro a membro, temos

$$2(\vec{MC}+\vec{CN}) = \vec{AC}+\vec{CB}$$

$$2\vec{MN} = \vec{AB}$$

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

Problema 5 . Prove que os pontos médios dos lados de um quadriláteros são vértices de um paralelogramo.

Solução. Seja ABCD o quadrilátero, e M,N,P,Q os quatro pontos médios de seus lados, para resolver esta questão basta provarmos que $\vec{MN} = \vec{PQ}$, pois se um quadrilátero tem dois lados paralelos e congruente ele é um paralelogramo.

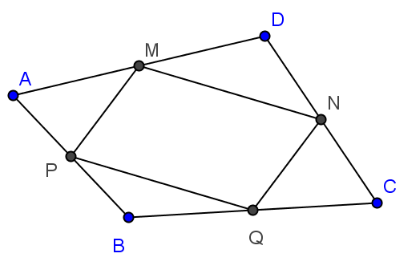

Figura 31: Problema 5

Pelo exercício anterior, considerando o triângulo ADC, podemos escrever

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AC}$$

Do mesmo modo considerando, considerando o triângulo ACB, podemos escrever

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$$

Dessas duas expressões resulta

$$\vec{MN} = \vec{PQ}$$

Problema 6 . Prove que as alturas de um triângulo se encontram em um mesmo ponto.

Solução. Vamos construir um triângulo ABC no plano cartesiano, de forma que o lado AB fique sobre o eixo x, e que o vértice C seja um ponto do eixo y. Vamos afirmar que o ponto A = $(a,0)$, B = $(b,0)$ e que o ponto C = $(0,c)$. Vamos traçar a altura relativa ao lado BC, e chamar de H = $(0,y)$ a intersecção da altura com o eixo y.

vamos supor por absurdo que a altura relativa ao lado AC não passa pelo ponto H e vamos chamar de P = $(0,p)$ o ponto de intersecção dessa altura com o eixo y, e vamos provar que P = H.

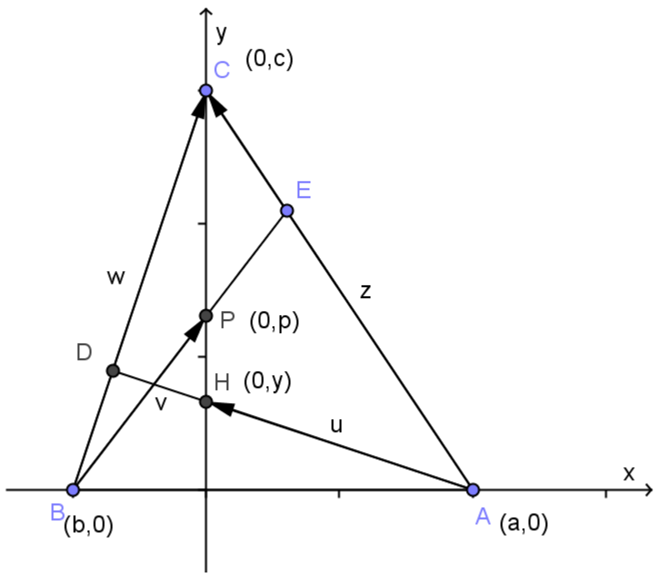

Figura 32: Problema 6

De acordo com a figura 6.6 podemos formar os seguintes vetores:

$$\vec{u} = \vec{AH} = (-a,y)$$

$$\vec{v} = \vec{BP} = (-b,p)$$

$$\vec{w} = \vec{BC} = (-b, c)$$

$$\vec{z} = \vec{AC} = (-a, c)$$

Temos que

$$\vec{u} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow ab + yc = 0 \Rightarrow y = \frac{-ab}{c}$$

$$\vec{v} \perp \vec{z} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{z} = 0 \Rightarrow ab + pc = 0 \Rightarrow p = \frac{-ab}{c}$$

Logo P = H, com o queríamos demonstrar.

7.2 Problemas Propostos

1. Prove que num triângulo as medianas se entram em um mesmo ponto.
2. Prove que as medianas de um triângulo se encontram em um mesmo ponto, que divide cada uma na razão 2:1 a partir do vértice correspondente.
3. Determina o ângulo entre as diagonais do trapézio abaixo.

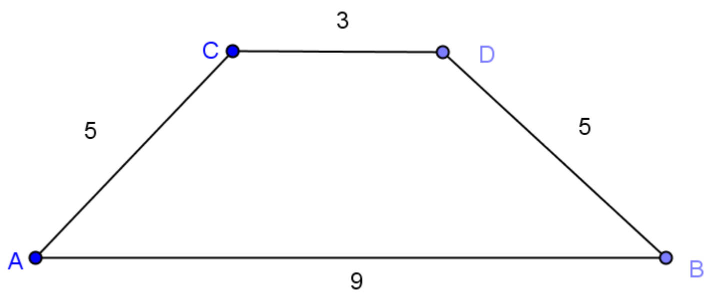

Figura 33: Problema 9

4. Mostre que as diagonais de um losango são perpendiculares.
5. Mostre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é a semi-diferença das medidas das bases.
6. Demostre que o seguimento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo as bases, e sua medida é a média aritméticas das medidas das duas bases.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo mostrar a importância de trabalharmos noções básicas de vetores para aplicarmos na resolução de problemas de geometria plana. Uma vez que vetores é um conteúdo de fácil introdução e assimilação e de grande importância em diversos campos da matemática.

Os motivos para trabalharmos vetores nas turmas olímpicas de matemática no ensino básico foram, entre outros apresentar novas ferramentas para resolver problemas e trabalhar um conteúdo que normalmente não é apresentado de forma mais completa no ensino médio, pois como sabemos, esse conteúdo é normalmente introduzido no ensino médio pelos professores da disciplina física, em que não é dado a importância necessária a compreensão de suas representações algébricas e geométricas.

Cabe observar que a proposta desse trabalho é apresentar de forma bem simples os vetores para resolução de problemas de geometria plana, mas que esses conteúdos podem ser expandidos, para toda geometria analítica plana e espacial assim como em conhecimentos mais avançados como os espaços vetoriais.

REFERÊNCIAS

WAGNER, Eduardo - **Sobre o Ensino de Geometria Analítica**. Revista Professor de Matemática, número. 41 , 2010.

LEITHOLD, Louis - **O Cálculo com Geometria Analítica V.1**. 3ª Edição, - HARBRA, 1994.

LEITHOLD, Louis - **O Cálculo com Geometria Analítica V.2** 3ª Edição, - HARBRA, 1994.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan. - **Geometria Analítica: Um tratamento Vetorial**. São Paulo: Mc Graw-Hill, 1987.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. - **Geometria Analítica**. 2ª edição. São Paulo: Makron books, 1987.

POOLE, David. - **Álgebra Linear. Thomson**, 2004.

SANTOS, Reginaldo J. - **Um Curso de geometria Analítica e Álgebra Linear**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Geometria analítica e álgebra linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios.** 5ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.