UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT

ERYVELTON ALVES SOUSA

A MATEMÁTICA NOS TRUQUES, ADIVINHAÇÕES E ENIGMAS

Juazeiro do Norte-Ceará

2014

ERYVELTON ALVES SOUSA

A MATEMÁTICA NOS TRUQUES, ADIVINHAÇÕES E ENIGMAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), ministrado pela Universidade Federal Do Ceará, como requisito para a obtenção do Grau de Mestre.

Área de atuação: Ensino da Matemática

Orientador: Prof. (Mestre Zélalber Gondim)

Juazeiro do Norte CE

1º Semestre de 2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri

S725m Sousa, Eryvelton Alves.
A matemática nos truques, adivinhações e enigmas/ Eryvelton Alves Sousa. – 2014.
73f. il. color, enc.; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.
Área de concentração: Ensino de Matemática
Orientação: Profº. Me. Zélalber Gondim

1. Ensino Matemática. 2. Problemas matemáticos. I. Título.

CDD 510.76

ERYVELTON ALVES SOUSA

A MATEMÁTICA NOS TRUQUES, ADIVINHAÇÕES E ENIGMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 21 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Zelalber Gondim Guimarães

Prof. Ms. Zelalber Gondim Guimarães (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Plácido Francisco de Assis Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Júnio Moreira de Alencar

Prof. Ms. Junio Moreira de Alencar

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Este trabalho é dedicado aos meus pais Maria Valderes e Napoleão, pessoas que sempre me mostraram a importância do estudo, a meus irmãos Ewerton e Valéria, e a Helayne de Melo, uma pessoa muito especial na minha vida e que teve muita paciência ao longo desse trabalho; aos meus amigos de faculdade, do curso de mestrado pela grande ajuda em todo o curso, do trabalho pela paciência e apoio e também às pessoas que sempre me apoiaram e me deram ânimo para nunca desistir.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, depois às pessoas que idealizaram essa forma de aperfeiçoamento dos professores em matemática.

À CAPES, que contribuiu com o apoio financeiro necessário no decorrer do curso.

Ao professor Orientador Zélalber Gondim pelo grande apoio nas horas mais necessárias.

Ao professor Paulo César que contribuiu muito com a minha vida acadêmica.

Agradeço também aos professores da graduação e do mestrado por sempre darem mais do que aulas, darem motivos para prosseguir nos estudos.

RESUMO

Esta dissertação aborda problemas matemáticos conhecidos como truques, adivinhações ou enigmas, com o intuito de mostrar a professores e alunos a beleza com que pode ser encontrada a matemática. É através de situações menos rotineiras que buscamos um despertar matemático nos estudantes. Apresentamos também um breve embasamento pedagógico fundamentado nas necessidades do professor conhecer o ensino da matemática e como abordar situações problemas durante um curso, e uma exposição teórica de conteúdos de forma não axiomática mas que possam garantir a boa interpretação dos problemas listados.O objetivo foi reunir uma lista de problemas sobre álgebra para fundamentar e motivar os alunos a se interessarem mais pela matemática usando um lado sutil que muitas vezes é deixado de lado no ensino da matemática do ensino fundamental e médio.

Palavras-chave: Problemas, Truques, Adivinhações, Álgebra, Ensino.

ABSTRACT

This paper discusses mathematical problems known as tricks, riddles or puzzles, in order to show the teachers and students with the beauty that can be found in mathematics. It is through less routine situations we seek to foster in students a mathematician. We also present a brief pedagogical foundation based on the needs of the teacher teaching mathematics to know how to approach situations and problems during a course, and not a theoretical axiomatic exposition of content but so that they can ensure the correct interpretation of the problems listados.O goal was to gather a list of issues to support and motivate students to become more interested in mathematics using a subtle side that is often neglected in the teaching of mathematics in elementary and middle school.

Keywords: Problems, Tricks, Riddles, Algebra, Teaching.

LISTA DE FIGURAS

3.1 Segmentos 36

3.2 Quadrado 36

3.3 Sistema de enumeração 46

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

2 MATEMÁTICA E ENSINO 14

2.1 Ensino da matemática 14

2.2 Matemática é um Problema? 20

2.3 A resolução de problemas 26

3 A MATEMÁTICA POR TRÁS DOS TRUQUES, ADIVINHAÇÕES E ENÍGMAS 32

3.1 Expressões algébricas e polinômios 32

3.1.1 O uso de letras para representar o desconhecido. 32

3.1.2 O uso de expressões contendo letras 33

3.1.3 Valor numérico de uma expressão algébrica 34

3.1.4 Monômios 35

3.1.5 Termos Semelhantes 36

3.1.6 Soma algébrica de termos semelhantes 37

3.1.7 Polinômios 37

3.2 Equações 38

3.2.1 Propriedades 40

3.3 Sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas 41

3.3.1 Classificação de um sistema linear quanto as soluções 42

3.4 Sistema de numeração 44

3.4.1 O sistema de numeração decimal 45

3.4.2 O princípio da posição decimal 47
3.5 Equações diofantinas lineares 51
3.6 Probabilidades 53
3.6.1 Experimentos aleatórios 53
3.6.2 Espaço amostral 53
3.6.3 Eventos 54
3.6.4 Probabilidade de um evento ocorrer 55
3.7 Sequências 56
3.7.1 Sucessões ou sequências 56
3.7.2 Definição de sequência 57
3.7.3 Progressão Aritmética 57
3.7.4 Soma dos termos de uma P.A. 59

4 Truques, adivinhações e enigmas matemáticos **61**

4.1 Truques numéricos 61

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS **78**

Referências **80**

Anexo 1 **81**

Como resolver um problema 81
Primeiro 81
Segundo 81
Terceiro 82
Quarto 82

1 INTRODUÇÃO

A matemática está presente desde muito na história da humanidade e ao longo de séculos e milênios ela aparece ora com maior, ora com menor intensidade. O seu estudo e como foi passado através do tempo mudou muito, porém a matemática não exerce fascínio apenas por ser capaz de existir por se só, mas também por tratar de algo que sempre esteve presente na vida dos seres humanos: os problemas.

Aprender a lidar com problemas, e interpretá-los foi ao longo de períodos um fator poderoso às civilizações que tentavam se firmar sobre a terra. Muitas culturas deixaram seu legado em tratados, construções e formas de pensar e raciocinar. Hoje temos a nossa disposição muitos dos problemas que instigavam os antigos e podemos admirar as soluções que muitas vezes outros povos em épocas diferentes conseguiam apresentar. Embora muitos problemas já tenham sido resolvidos ainda existem muitos problemas em aberto. Fazer com que as novas gerações se interessem pela matemática e pelo seu poder é algo que está ficando mais difícil devido a presença de tantos atrativos do mundo atual.

O texto que se segue é uma tentativa de motivar tanto os alunos do ensino fundamental e médio como os professores para a mágica que a matemática possui, algo quase místico, ou como diriam alguns povos antigos, um conhecimento digno apenas dos deuses. Usar problemas que pareçam adivinhações ou truques, que permitam aos alunos um olhar diferente e curioso a cerca dessa disciplina que vem sendo tratada como para os sábios e intelectuais, desmitificar essa cultura que a matemática é difícil por isso os alunos não gostam e consequentemente não aprendem. Todas os conhecimentos possuem o seu grau de dificuldade, podemos tentar mudar o ponto de vista e atentar para o lado da matemática que possui beleza em seus resultados para assim quando nos depararmos com suas dificuldades não desistirmos frente a eles, aprender a gostar desse modo de pensar que permite novas descobertas.

Não pretendemos fazer um tratado sobre como resolver problemas, Polya já fez isso muito bem, nem escrever um estudo axiomático da matemática em sua forma mais pura como está nos livros didáticos. O que fazemos aqui é apresentar uma forma que possa fazer alunos e professores a construírem uma matemática que esteja ligada a problemas com os quais os estudantes possam se identificar e se importar com esses problemas porque pensar sobre eles traz prazer e sem perder o foco na parte teórica, porém que ajude a fixar ideias e métodos na construção de resoluções de situações mais atraentes aos alunos.

O trabalho está dividido em três partes: a primeira parte se destina ao ensino da matemática e da resolução de problemas, a segunda parte, trata do conhecimento matemático como encontramos nos livros de ensino fundamental, médio e também superior e por último uma parte destinada aos problemas, com comentários e soluções usando a teoria matemática apresentada.

Com relação ao ensino da matemática, destacamos a importância em mesclar em um curso, conceitos já enraizados pela matemática como a manipulação algébrica, mas sem perder o foco na parte conceitual e nas aplicações. Também destacamos a relevância dos problemas que a matemática traz, mas que através de ferramentas podemos encontrar soluções e métodos de como interagir com os problemas. Por fim, ressaltamos a forma com que devemos abordar os problemas e quais mecanismos e passos são essenciais na busca das suas soluções e como usar o conhecimento adquirido para resolver novos problemas.

Já no que se diz respeito a matemática em sua forma usada nos livros, destacamos uma série de tópicos necessários para a resolução dos problemas que serão apresentados. Podemos encontrar problemas motivantes em praticamente todos os conteúdos, aqui listamos apenas alguns, e como são tratados em livros de ensino. Começamos com a parte algébrica tão comumente usada nas salas de aula, mas que muitas vezes cai na rotina e passa para os alunos que esse conhecimento está preso apenas aos livros e as provas, e não possui sua devida atratividade demonstrada aos estudantes. Outros assuntos como equações, sistemas de equações, sistemas de numeração, além de probabilidade e sequências são apresentados a fim de tornar mais proveitoso ao professor a exploração dos problemas e suas soluções.

Com relação aos problemas, estes foram selecionados por possuírem uma peculiaridade de serem tratados não como apenas situações do cotidiano ou como geralmente são nos livros, mas como curiosidades, truques, adivinhações e enigmas. Acreditamos que a mente humana se consegue se importar com uma situação e realmente se intriga com uma questão, ela não se detém e busca intensamente uma explicação, uma solução muitas vezes por tentativa. Cabe ao professor instigar essa busca para que os estudantes se acostumem com problemas e por procurar soluções, sem desistir e a medida de se acostumarem com esses problemas, possam buscar cada vez mais novos desafios bem como meios de como resolvê-los.

A partir de formas metodológicas, podemos conseguir um meio termo entre teoria e prática, possibilitando um maior aprendizado da matemática e de seus métodos. O estudante que realmente aprender os conceitos básicos enquanto na vida escolar, acarretará em um adulto com maior poder de interpretação crítica de mundo e o ajudará a tomar decisões ao longo de sua vida.

2 MATEMÁTICA E ENSINO

2.1 Ensino da matemática

Durante toda a vida de uma pessoa ela se depara com inúmeros problemas e situações que a fazem pensar, parar e raciocinar um pouco mais, em muitas dessas situações, ela usa mão do raciocínio dito matemático, muitas vezes sem sequer saber disso.

No entanto, quando iniciamos nossa jornada estudantil, somos apresentados a uma sequência de saberes acumulados e vamos nos adaptando a diversas situações e em um determinado momento nos deparamos com um saber, uma disciplina que, ora parece estar presente em nosso cotidiano, ora tão distante que talvez se chegue a questionar sua verdadeira utilidade, essa disciplina, é a Matemática, uma Ciência Exata que acumula amores e ódios da sociedade.

É comum encontrarmos pessoas que já concluíram o ensino básico que possuem uma imensa aversão à matemática, muitas dessas pessoas chegam a falar, se vangloriando, que não sabem de nada de matemática, outras acham que a matemática se resume a fazer cálculos com uma calculadora e enfim, tudo que viram na vida escolar é inútil e não tem nenhuma serventia na vida prática, essa aversão e esse pensamento são consequências de um ensino sem pretensões de aplicabilidade da matemática, se uma pessoa demonstra algum saber matemático pós escola, essa pessoa é dita quase que um gênio, alguém muito inteligente, onde o que essa pessoa às vezes demonstra era o que, em tese, toda uma sociedade que concluiu o ensino fundamental soubesse.

Sabemos que o estudo das disciplinas de matemática e de português ocupam uma grande parte de carga horária na grade curricular, então era de se esperar que os estudantes saíssem da escola com uma bagagem extensa de conhecimentos nessas áreas, no entanto, poucas pessoas alegam sua deficiência no português, ninguém sai falando que escreve tudo errado, que não é capaz de escrever uma redação, ou então que não consegue falar com concordância, porém já está impregnado na sociedade que ninguém sabe operar com frações e nem mesmo usar as operações fundamentais simples sem usar por exemplo uma calculadora para realizar uma divisão por um número de dois dígitos ou mais, o que se esperar de alguém que concluiu o ensino médio e sai com essas deficiências?

Muitas dos conteúdos ensinados em todas as disciplinas, não são assimilados pela maioria das pessoas, aparecem as muitas dificuldades, mesmo naqueles que concluíram o ensino superior, não é relativo a minha área, dizem os professores, como um meio de escapar da defasagem que mesmo esses profissionais que deveriam servir de exemplo à sociedade, não possuem o conhecimento dito básico em outras áreas, e justificam que não devem se importar com nada do que foi ensinado de outra disciplina, apenas à qual se limitaram é importante, é comum dizer que porque não se formaram em matemática por exemplo, nada dessa disciplina é importante, o mesmo acontece se talvez um professor de matemática fosse indagado sobre algo de geografia ou inglês.

Dessa forma, não é de esperar muito dos alunos que são ensinados por professores com essa postura criem um círculo vicioso que apenas sua matéria, sua disciplina, que chega a soar quase como que patenteado, não sejam estimulados a aprender e compreender que toda o conhecimento que é repassado seja arquivado e utilizado ao longo da vida como algo que realmente seja importante na formação de um cidadão.

É isso que se passa de uma forma geral nas escolas e no ensino, quando se trata de educação, então não devemos generalizar e colocar estigmas em disciplinas ou conteúdos que sejam mais difíceis ou mais importantes do que outros, a educação vai mal por inúmeros motivos, o ensino apresenta problemas em todos os níveis de escolaridade, vamos tratar especificamente da matemática, mas ressaltando que não será a matemática que terá a responsabilidade de melhorar a educação em um país, mas que tampouco sem ela não haverá melhoras.

Quanto ao seu ensino, a Matemática no âmbito pedagógico está sempre em meios às discussões, que fazem surgir novas teorias e novas metodologias que visem uma maior assimilação por parte dos estudantes, há aqueles que a defendem com uma força enorme, geralmente, profissionais da área, e há também muitos que a criticam, que discutem o seu valor em uma sociedade e a importância que seu ensino traz a uma nação. Várias avaliações e exames vêem na matemática uma forma de explorar o potencial da mente humana, os concursos públicos por sua vez tentam usar mão do raciocínio lógico como uma forma de penetrar nas outras áreas do conhecimento humano, onde muitas vezes esse Raciocínio Lógico é apenas um saber matemático.

Mas, saindo da parte dita pedagógica, uma forma bem sutil em que a matemática deve ser organizada é dita por Elon Lages Lima em seu livro, Matemática e Ensino, pag 139, cap 15.

> De didática não trataremos aqui. Em vez disso, diremos como o ensino da matemática deve ser organizado levando em conta a natureza desta matéria, os alunos aos quais ela se destina e os motivos de sua inclusão no currículo.(...) o ensino da matemática deve abranger três componentes fundamentais, que chamaremos de Conceituação, Manipulação e Aplicação.

No que consiste em Conceituação, somos direcionados a uma abordagem formal e muitas vezes mal interpretada dos alunos e porque não dizer de alguns professores, existe aqui a necessidade e objetividade das proposições levando-se em conta as afirmações e suas recíprocas.

Muitos professores, talvez por inexperiência, ou por consequência do preparo que obtiveram nas faculdades, empregam a conceituação a um nível bem superior ao ano que lecionam, fazendo assim com que os alunos criem uma antipatia por conceitos, definições e axiomas. A longo prazo tal forma de transmitir o conhecimento gera a visão de que o saber matemático consiste em termos e afirmações que não possuem uma relação direta com o dia a dia dos estudantes.

Porém a conceituação, acompanhada de uma visão cuidadosamente planejada para o público a qual se destina é essencial para conseguir sucesso nas aplicações vindouras.

O processo de ensino da matemática vem se resumindo ao de saber lidar e operar algebricamente com seus símbolos, essa manipulação é necessária desde os primeiros anos no ensino da matemática, saber operar e realizar cálculos, bem como utilizar com eficácia as regras que permitem resolver complexas equações, porém a matemática não pode se resumir a isso.

Nas salas de aula julgam-se os que não sabem matemática pelo poder de manipulação que esses alunos possuem, aos que não conseguiram internalizar tais conhecimentos, são ditos não aptos a conseguirem sucesso nessa disciplina, muitos professores se limitam a passar simples formas de manipulação que os estudantes precisam memorizar e utilizar quando verem um problema desse tipo.

A matemática se diferencia muito de algumas outras disciplinas no quesito de bagagem, é necessário saber de um conjunto de regras e as vezes fórmulas para resolver os mais diversos problemas, o caráter cumulativo da matemática é muitas vezes o que a faz difícil de ser assimilada pela maioria dos alunos, portanto cabe muitas vezes ao professor de não tornar a manipulação um fim para o conhecimento matemático e sim um meio.

Não restam dúvidas da importância que se deve dar a manipulação de números e equações, os alunos uma vez que dominarem tal ferramenta, e assim poderíamos chamar, se sentirão mais confortáveis a lidar com os exercícios. Fazer com que a forma de utilizar essa ferramenta para a melhoria do ensino é um ponto a ser abordado com cuidado, pois em cada etapa escolar, em cada faixa etária, temos os conhecimentos prévios que são necessários para se ter um bom resultado e um bom aprendizado, vale ainda ressaltar que para que esse conjunto de aptidões seja desenvolvido é preciso que o professor em sala de aula, em cada ano escolar, tenha tido a formação e a orientação necessária de como fazer e bons exemplos a seguir.

O que acontece na prática é que muitos dos professores que atuam nos primeiros anos do ensino fundamental, são professores ditos polivalentes, ou seja, que possuem uma formação, nem sempre com nível superior, mas são obrigados a trabalhar todas as disciplinas, eventualmente, haverá ao menos uma disciplina que o profissional não domina em sua totalidade, então dessa forma como poderá dentro das suas limitações fazer com que o aluno desenvolva as competências esperadas dele no ano em que está? Tendo em vista que nem o professor em sala as conhece?

Já no decorrer do ensino fundamental, os professores em sua maioria possuem um nível superior na área que atuam , isso ajuda e muito na qualidade do ensino, mas sabemos que em matemática, os assuntos que se estudam nesses cursos, não refletem o que realmente o professor deverá ensinar em sala de aula, na faculdade, o futuro professor não tira suas próprias dúvidas nas salas de aula da universidade, e quando se depara com o que deve ensinar, aparecem n indagações sobre como proceder e onde buscar apoio.

Essa é praticamente a mesma realidade do ensino médio, nos últimos três anos da educação básica, nesse período que a matemática deveria ser a solução para os problemas do cotidiano com suas aplicações, somos novamente apresentados com métodos e mais métodos de manipulações.

Quando os órgãos públicos dedicarem uma maior atenção a esses problemas iniciais, teremos dado um grande passo a frente em busca da tão almejada qualidade do ensino não só da matemática, mas de todas as ouras disciplinas.

Uma pergunta que é quase constante a todo professor de matemática é:*Professor para que serve isso?* E frente a essa já conhecida pergunta e muitas vezes sem resposta, o aluno deve buscar interesse e motivação para estudar e aprender em sala de aula.

Saber aplicar o que se aprende é uma tarefe árdua, dosar as aplicações, em meio ao ensino é uma sutil forma de fazer com que o estudante perceba o motivo pelo qual deve se estudar tal assunto e manter-se motivado para encontrar mais e mais respostas, o aluno espera que tudo que se venha explicar na sala de aula tenha além de um guia de para que serve, venha acompanhado de fórmulas mágicas que resolvam tudo sem esforço.

A aplicação do conhecimento matemático consiste em saber utilizar as teorias e noções vistas em prol de obter resultados. Encontrar conclusões de problemas nas mais diversas áreas e conseguir associar a teoria vista com um problema do cotidiano, bem como reconhecer nos avanços tecnológicos a presença das matérias e conteúdos é um desafio, que deve ser sempre instigado por meio de exemplos e explorado de forma a motivar o uso da criatividade do ser humano.

Vemos uma grande urgência no modo de aplicar, uns defendem o uso das tecnologias, outros uma forma mais concreta de ensinar, vemos que nem sempre ter em mão bons recursos tecnológicos são formas de conseguir um melhor resultado no ensino.

A tecnologia deve vir sempre acompanhada do recurso pedagógico, tanto para evitar o seu mau uso como para evitar o que acontece hoje com muitos professores, o medo tecnológico, a se achar ultrapassado ou que essas tecnologias não podem apresentar avanços.

O fato é que devemos verificar e adequar qual recurso tecnológico pode ou não apresentar resultados satisfatórios em sala de aula, um aluno nos primeiros anos do ensino fundamental, deve antes de saber operar com uma calculadora por exemplo, ser capaz de realizar manualmente esses cálculos, a fim de que entenda que o recurso tecnológico muitas vezes deve ser usado para se realizar o mesmo processo em um tempo mais curto, da mesma forma o uso de softwares específicos de cada disciplina.

O professor que conseguir utilizar tanto os recursos tecnológicos como adequar as aplicações a turma, levando em conta o conhecimento da parte teórica da conceituação e manipulação para tornar o curso balanceado e apoiado em todos as componentes do saber.

Então, temos como a necessidade de levantar assuntos dignos de relevância, que sirvam de métodos para conquistar um melhor desempenho no ensino da matemática, planejar com antecedência qual o melhor caminho a ser utilizado, uma vez que os obstáculos sempre existirão, mas diante de uma boa preparação e empenho resultarão em pequenos avanços que somados e encorajados a motivar mais intervenções a fim de melhorar o ensino como um todo.

Realizar uma discussão que acarrete em uma forma de motivar e preparar alunos e professores deve ser a busca incansável dos órgãos que regem a educação do país, observando o público-alvo em cada região e realidade, principalmente na forma com que se trabalha em cada faixa etária, no que diz respeito à matemática, é fundamental que em cada etapa de escolaridade os alunos aprendam os pré-requisitos necessários e por sua vez podendo gerar as devidas competências para prosseguir nos estudos.

A dificuldade enfrentada pelo ensino e aprendizagem da matemática é muitas vezes gerada pela falta de acúmulo de conhecimentos prévios, fazendo os alunos não terem os conceitos básicos e gerando descontentamento e falta de motivação pelos mesmos. O uso do material também deve ser escolhido com uma análise sempre se verificando a conceituação, a manipulação exigida e também as aplicações usadas pelo autor, o autor que conseguir mesclar conscientemente esses ingredientes poderá servir de apoio para preparar um curso melhor.

No entanto, não podemos falar que a dificuldade no aprendizado é consequência dos professores e do material usado, sabemos da importância do acompanhamento familiar em todo ensino e porque não dizer do ensino da matemática, os pais devem fazer parte e agir como parceiros em conjunto com as escolas, uma vez que existe essa atenção da família, o aluno sente que aquilo que está estudando é importante, não apenas porque o professor ensina, mas será importante para sua formação como pessoa e estudante. Trabalhar a consciência desde os primeiros anos servirá para formar nos alunos um caráter e uma responsabilidade dignas de um cidadão.

Em virtude da atual sociedade, está cada vez mais difícil conseguir que os jovens levem a educação e o ensino a sério, com o acesso da internet difundido em quase que sua totalidade, a política de facilidades tornam ainda mais árduas a tarefa do professor de matemática, lembrando que essa disciplina requer em muitas pessoas uma maior atenção e concentração, o que na sociedade imediatista não é mais visto como uma tendência, os estudantes passam a priorizar tudo que vem fácil e rápido, e menosprezar àquilo que requer dedicação e empenho.

O professor fica em um impasse entre o que sabe que é necessário para a formação do aluno e o mostrado e ensinado pela sociedade e mídia de uma forma geral, quem nunca presenciou na televisão, pessoas famosas, as ditas celebridades, errarem simples perguntas sobre multiplicação e ainda serem estereótipos de sucesso e exemplos, fazendo com que os jovens pensem, se ela não sabe nem multiplicar e é rica e famosa, porque vou precisar me dedicar aos estudos, uma inversão de valores no que diz respeito a educação, a mente do jovem que está em formação, é influenciada a tomar caminhos diferentes e não valorizar os valores e saberes passados pela escola.

Cabe assim, ao tripé: família, escola e sociedade agirem de modo a incentivar atos que resguardem os valores e prezem pela boa educação para os nossos jovens, tornando-os pessoas que possam analisar situações e formarem suas próprias opiniões críticas de mundo.

2.2 Matemática é um Problema?

Parecem até sinônimos, as palavras Problema e Matemática, se não são, a sociedade quase que como um todo já declarou esta "igualdade", no imaginário popular a palavra problema está muito presente em nossas vidas, então por que a matemática não haveria de estar? Muitas pessoas passam a vida se queixando dos problemas que enfrentam, como saúde, emprego, e com as finanças. A matemática não poderia deixar de ser um problema e se tornar uma forma de buscar soluções para esses e outros problemas?

Com o atual desenvolvimento do mundo, a matemática, ganha cada vez mais espaço, diante das novas tecnologias, o comércio e até a quantidade de informação que recebemos durante o dia, a forma de se viver tem se adaptado ao longo da história, e se pararmos para pensar, desde o homem da caverna, com seus instrumentos arcaicos já realizava marcações em pedras, em tábuas de argila e ainda fazendo corresponder pedras a animais.

Hoje temos um mundo que nos apresenta novas necessidades que podem ser semelhantes ou não aos casos de outrora, uma criança pode passar por problemas muito similares aos de nossos antepassados e desenvolver formas de pensar e raciocinar bem semelhante ao que a humanidade já passou, vemos e acompanhamos como uma criança aprende e desenvolve sua forma de interagir com o mundo e com os problemas que lhe são apresentados.

A medida que nos deparamos com um curso somos apresentados a diversos saberes que foram acumulados e organizados ao longo do tempo, esse saber foi dividido e meio que mapeado de acordo com suas semelhanças, depois esses saberes são repassados em uma forma metodológica no decorrer de nossas vidas.

Com a matemática não poderia deixar de ser igual, desde o primeiro contato com o mundo somos apresentados a conceitos muitas vezes abstratos como por exemplo a ideia de número, então nesse emaranhado de saberes, temos uma ordem, que define como devemos aprender e o que devemos estudar, quais conteúdos necessitamos ver e em qual ordem. Esses conteúdos hoje se encontram distribuídos em livros de forma que tudo o que devemos saber para seguir adiante na aquisição de conhecimento, está em tese no livro anterior.

> As dificuldades com a Matemática ficam mais evidentes à medida que vamos progredindo na nossa educação escolar institucional. Os alunos da Escola Fundamental não têm dúvidas sobre a utilidade imediata do que estão estudando. Nesse nível, a Matemática é mais do que simples habilidade, ela é uma medida de cidadania. Ninguém pode se considerar verdadeiramente inserido na sociedade se não tiver alguma familiaridade com as quatro operações aritméticas, as frações, as unidades de medida e os conhecimentos básicos de Geometria. Ao nos aproximarmos do Ensino Médio, fica mais difícil identificar a utilidade imediata da Matemática. (A Matemática não é um Problema, Folhetim 06, Maio de 2005, TV Escola, Salto para o Futuro.)

Assim, fica designado a todo estudante o que devemos estudar, embora sabemos que cada ser humano é único e tem seu tempo de amadurecimento e pode estar apto ou não a seguir adiante nos estudos, uma vez em que o meio onde o indivíduo está inserido pode ou não ajudar nesses estudos. Observar cuidadosamente o que estamos de fato estudando ajuda a evitar deslizes e criar problemas sem necessidade, podendo tirar o foco do que realmente devemos estudar em cada faixa etária, pois uma vez que o que se precise estudar não seja a primeira vista significativo podemos comprometer o que devemos aprender.

O fato de necessitarmos acumular saberes influencia muitas vezes o que se é passado, agora como saber se conseguimos aprender tudo ou todo assunto estudado, saber se o fato de ter visualizado o conhecimento implica na sua aprendizagem. Vemos que na prática os alunos não conseguem acumular os assuntos em cada ano do ensino e assim comprometem o ensino dos anos posteriores, o todo visto em um determinado ano não se faz presente ao longo da vida do estudante.

Na matemática onde a maioria dos assuntos necessita já de um apoio em lições passadas esse problema se agrava, se ao lado de outras disciplinas que nem sempre necessitam desse pré-requisito a matemática pode se torna a vilã das matérias que se lecionam.

Portanto o que se realmente aprende em matemática deve ser sutilmente avaliado, um mal acompanhamento por parte dos professores e pais pode trazer inúmeros prejuízos ao jovem estudante, novamente fazendo a matemática deixar de se tornar atrativa. Sendo assim, o objeto de estudo deve ser constantemente analisado enfatizando a necessidade do que se deve aprender para evitar maiores problemas no futuro.

Ao lado da discussão do estudado e aprendido, a atenção ao tema de como se deve ou não raciocinar pode ajudar a esse processo, uma simples prática de cálculo pode ter um significado ou não para o aluno.

Em diversas situações problemas a forma com que se "ataca" esse problema pode determinar a vitória ou o fracasso, é nesse ponto onde o que se estudou e se aprendeu pode ser verificado, a forma como pensamos a respeito, como interagimos com a situação. Na matemática no mesmo conteúdo podemos ter diversas formas de pensar, o método empregado quando determinado assunto foi estudado e espera-se aprendido, pode surtir efeito e determinar a solução do problema, mas se o aluno não aprendeu como se raciocina diante dessa situação, uma sutil mudança no mesmo problema pode gerar angústia no aluno acarretando na não solução do mesmo.

Através de discussões e análise dos fatos podemos gerar formas mais eficientes de se ensinar a raciocinar e conseguir interpretar problemas diversos, pois cada caso tem suas formas particulares de ser visto e discutido.

A sociedade cada vez mais vem buscando avanços em todas as áreas do conhecimento humano, a matemática vem ganhando mais espaço principalmente nos campos de tecnologia, as diversas engenharias vem assumindo maior destaque no cotidiano humano, buscando novos aperfeiçoamentos e melhores formas de interagir com o homem.

As novas necessidades do mundo moldam a forma com que devemos interagir com ele, o ensino é o molde do ser humano para a vida em sociedade, logo é natural esperarmos que este mesmo ensino possa trazer as respostas para a vida moderna e ser usado para continuarmos nosso avanço enquanto povo. Nossas necessidades hoje não são as mesmas de um mundo onde a internet por exemplo não existia, nem mesmo os problemas podem ser os mesmos, no entanto algumas formas de se ensinar e aprender continuam presas a um mundo que não existe mais, se não migrarmos para esse "novo mundo" podemos não estar preparados para as próximas mudanças.

Recentemente com o surgimento dos computadores e a atual era da informação, a demanda por um indivíduo melhor preparado está cada vez mais intensa, está em constante aperfeiçoamento é quase que uma obrigação para não ser deixado para trás. O mercado exige muito e será que esse mesmo mercado e a escola podem dar a população esse aperfeiçoamento contínuo? Os próprios professores estão recebendo formações adequadas para lidar com essa realidade de mundo atual?

A sociedade busca indivíduos capazes de trabalhar em grupo, mas que possam atuar em liderança caso seja necessário, alguém que lide com desafios com naturalidade e possa inovar em meio a tempos de crise, que possua um conhecimento de mundo sempre atualizado e que carregue dentro de si saberes aprendidos desde o período escolar. Para uma pessoa ser considerada preparada deve possuir não só essas características mas outras particulares e, ainda novas que surgem a cada dia.

Porém, em se tratando do conhecimento escolar é sempre um problema, sabemos que o que aprendemos durante o ensino básico é realmente como o nome diz, básico. Mas não vemos isso no nosso meio, muitas pessoas não fazem a menor ideia do que viram, estudaram ou aprenderam na época da escola, então é difícil acreditar que a escola está preparando bem o futuro cidadão.

No que diz respeito a matemática, poucas pessoas conseguem trabalhar com conceitos algébricos e geométricos, se uma pessoa deve possuir o discernimento e a criticidade de um mundo atual, ela deveria ao menos saber conceito simples e suas implicâncias. Se não os possui, esperar que esse cidadão lide com autoridade sobre os mais diversos assuntos pode exigir um nível de raciocínio que este não adquiriu ou sequer vai adquirir.

Uma pessoa que não percebe em situações comuns a ideia de conjuntos, ou mesmo potências e frações, pode de acordo com a situação a tomar más decisões, um simples problema de resolver um sistema de equações com duas ou mais incógnitas pode levar essa pessoa a passar a vida tentando resolvê-lo sem saber se ao menos a solução existe, ou então dividir um número em partes diretamente ou inversamente proporcionais, tais conceitos são básicos uma vez que seus estudos se fazem na maioria dos casos no ensino fundamental, mas em diversas vezes os próprios alunos acabam passando de ano sem aprender como esses assuntos passados sem uma contextualização apropriada podem ser úteis.

Não raro ver concurso públicos que usam apenas o conteúdo de matemática visto apenas no ensino fundamental e mesmo assim os candidatos se assustam por não terem a menor ideia de como usar assuntos vistos a muito tempo na escola, aí onde procuram o apoio dos cursos preparatórios e esses candidatos vão pagar para rever e estudar os conteúdos que a sociedade já esperava que soubessem.

Cabe uma reflexão, sobre esses temas, o conteúdo que foi transmitido em determinada época consistia de necessidade para o jovem em sala de aula? Se o professor for motivar um aluno do sétimo ano do ensino fundamental a respeito da necessidade de aprender sobre por exemplo a divisão de número em partes diretamente ou inversamente proporcionais a outros números, dizendo que, quando o jovem for prestar um concurso aquele saber será importante, vai realmente surtir efeito? Muitas propostas e pontos de vista cabem a esse respeito, porém adequar as necessidades atuais do aluno o conteúdo que se deseja que ele aprenda pode ajudar na aquisição desse conhecimento, para no futuro fazendo ele uma analogia à sua necessidade anterior encontre e possua usar novamente o assunto ou matéria já aprendido.

Um auxílio para os professores na hora de decidirem o que deve ser destaque na hora de ser lecionado, ou ainda como deve ser lecionado é um conhecimento dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que norteia o ensino de modo a estabelecer formas para o professor não venha a perder o sentido do conteúdo que leciona. Definido assim o objetivo, e podendo a partir dele traçar melhores formas de conseguir o aprendizado dos estudantes. Os parâmetros cita o seguinte objetivo no que diz respeito ao ensino da Matemática:

> Objetivo Geral do Ensino da Matemática: Analisar informações relevantes do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número de relação entre elas, fazendo uso do conhecimento matemático para interpretá-las e avaliá-las criticamente.(Parâmetros curriculares nacionais : Introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília : MEC/SEF, 1997.pag 48.)

Assim, independente de quais assuntos o professor esteja trabalhando com os alunos, na sua mente deve permanecer claro o objetivo geral da matemática, para a partir daí, sim virem os objetivos específicos de cada assunto, dessa forma independente da região onde um aluno estiver o eixo será mais fácil de ser mantido, ficando em mente que a escola e seus professores seguem as mesmas referências na hora de elaborar um curso, o aluno será assim beneficiado na sua vida acadêmica, ajudando a ser um cidadão que possui um senso crítico desenvolvido ao longo da sua jornada em sala de aula.

Os professores desempenham um importante, se não o mais importante dos papéis, pois estão cotidianamente em sala de aula dispondo de um tempo na vida desse estudante que pode acarretar em uma grande influencia em suas vidas, é necessário assim, sempre uma melhor formação para esses profissionais e também constantes aperfeiçoamentos em suas disciplinas como nas outras áreas, já que como profissionais da educação necessitam de informação a respeito das constantes mudanças que ocorrem no mundo e principalmente, adequar seus conhecimentos no que diz respeito à disciplina que lecionam, evitando assim que caiam em desuso devido à aplicações já defasadas e desatualizadas. O professor assim, precisa estar ciente que independe da disciplina que lecione, essa disciplina interage com o mundo e com os cidadãos de uma forma direta ou ora sutil. Negar isso, tornará sem atrativos o conteúdo que explica, e assim não cumprirá com os objetivos gerais de ensino.

No caso do professor de matemática, muitas vezes se ensinam assuntos que possuem séculos ou até mesmo milênios, não é surpresa que sendo assim, a matemática seja vista de forma errônea pelos estudantes, levando a acreditar que a matemática não está presente no mundo moderno. As novas tecnologias que usam mais diretamente ferramentas matemáticas devem ser sempre usadas como exemplos a fim de estreitar as distâncias que podem surgir entre os alunos e a matemática. O profissional bem como o aprimoramento dado a ele devem ser palco de constantes discussões nas secretarias de ensino, para desse modo poderem combater os problemas e as dificuldades que permeiam a vida dos estudantes.

> A Matemática é uma das chaves do desenvolvimento atual e futuro da nossa sociedade. Uma prática consciente dos professores e de todas outras instâncias envolvidas é fundamental para responder aos anseios desta sociedade da qual nossos alunos fazem parte e na qual devem também ser capazes de atuar com consciência e competência. (pag 5. A Matemática não é um Problema, Folhetim 06, Maio de 2005, TV Escola, Salto para o Futuro.)

Deve partir de todos o desejo de mudança em busca de formas de usar os avanços tecnológicos em prol das disciplinas, em especial a matemática tem muito a se fazer presente, pois ela aparece com frequência e até destaque em diversos cursos de nível superior e cursos técnicos, elevando assim o seu prestígio, cabe aí aos cursos de licenciatura em matemática explorarem esse fato a seu favor e moldarem seus cursos para preparar melhor a matemática usada no ensino básico. Professores bem formados e informados, com capacidade de fazer a matemática uma peça presente e usada pelos jovens tanto nas escolas como na vida.

2.3 A resolução de problemas

Não há como negar o fascínio que o desconhecido exerce na mente humana. Esse sentimento de descoberta que permeia a mente das pessoas e que as faz buscar novas ideias e não se sentirem nunca saciadas quando aparece diante de si uma situação inesperada, uma novidade, algo ainda não explicado, ou seja, um problema.

Quantas descobertas a espécie humana já não realizou, movida por uma força misteriosa que faz aparecerem indagações quando olhamos o mundo que nos cerca, inúmeras situações que a mente transforma em problemas e a partir dessa premissa, um mundo de descobertas e pesquisas vem à tona. Desde o tempo mais remoto, o ser humano vem desejando ver até onde pode chegar, quer seja aos céus e espaço, ou ao mar mais profundo, quer dominar a eletricidade ou o fogo. Como? De que forma? Entre tantas outras indagações servem para mover a centelha da descoberta que parece ser algo interior, que é capaz de mover as pessoas e suas atitudes e realizar o que até então era considerado impossível.

A sede de resolver problemas vem junto, uma vez que criada e analisada uma situação qualquer, desejamos com todas a nossas forças saber como tal fato é possível, ou se não como pode ser impossível. Parece que quando jovens desejamos com mais convicções saber o porquê das coisas e a medida que o tempo vai passando muitas pessoas deixam essa vontade ir desaparecendo. Quem nunca se viu intrigados com adivinha e enigmas, muitas culturas tem passado problemas de geração em geração, sempre fazendo com que a pessoa perguntada fique em busca de encontrar a tal solução, nesse contexto a imaginação ganha força na tentativa desesperada de conseguir ultrapassar esse obstáculo que é o problema. Nem sempre se consegue a resposta procurada, mas o simples fato de aceitar o desafio proposto já haje na mente de forma a expandi-la além do não imaginado.

Na vida escolar, o prazer pelo novo acompanha as crianças e os jovens, sobre o que terão de novidades, o que aprenderão. Uma nova escola, novos professores, um novo ciclo, tudo serve para motivar os alunos a cada novo passo. Mas nem sempre essa sede de novidades é instigada por esse novo ambiente, os jovens não encontram aquilo que almejavam e muitas vezes aprece o oposto, uma aversão a toda novidade que a vida escolar poderá vir a trazer. Como lidar com esse problema é um fator crucial e que influenciará toda a vida estudantil do aluno. Talvez os problemas não sirvam para motivar essa ou qualquer outra juventude, ou simplesmente a forma com que estão apresentados não seja suficiente para manter vivo o prazer pela descoberta e assim afastem o saber dos estudantes em vez de conquistá-los.

No contexto da matemática, os problemas encontram-se presentes desde muito cedo na vida acadêmica e hão de acompanhar os estudantes por todo o ensino básico, e em muitos caso no ensino superior. Esses problemas variam de acordo com o nível de interpretação e grau de manipulação desejado para sua solução. Mas é essencial que cada problema venha acompanhado de um contexto para que exista a preocupação com a sua solução, quem irá se importar com um problema que não lhe atrai ou pareça importante naquele determinado momento? Como querer buscar uma solução que a priori não mudará em nada a vida do estudante? Essa simples preocupação pode determinar se o que está sendo estudado será realmente aprendido pelo estudante, ou seja, poderá ser utilizado novamente em uma outra situação-problema semelhante.

De um modo geral, devemos estabelecer uma forma de estruturar nosso pensamento e uma forma de como argumentar em cada problema encontrado. Sabemos também que o aluno não possui ainda um certo acúmulo de saberes matemáticos na maioria das vezes que o deixem confortável diante da maioria dos desafio que a matemática lhe propõem, então o professor deve estar preparado para agir de forma a incutir no aluno o desejo por alcançar a resposta bem como o sentimento que é capaz, bastando para isso, esforço e seguir as orientações do professor, de um livro didático, e muito mais adiante, seus instintos que propiciarão formas e métodos para buscar a solução. Um passo importante é construir um caminho, o mais simples possível e que sirva de amparo aos alunos, tanto àqueles com maior domínio das definições e manipulações como dos demais que possuam ainda certas dificuldades. A partir daí, sim, resolver e resolver problemas que possam servir de base para problemas mais complexos e que no futuro, o aluno tenha percebido o seu progresso, e porque não dizer o professor também.

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação.Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mão e com os pés para manterem suas cabeças fora da água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas.(A Arte de Resolver Problemas, Um Novo Aspecto do Método matemático, G Polya, pag 3.)

Fazer com que o aluno conheça uma forma de começar a analisar o problema e não o deixar sem ponto de partida é imprescindível para que o mesmo não desista diante das primeiras dificuldades, é necessário a curto e longo prazo lembrar dessas sutilezas que cada problema possui. O aluno não pode também ser enganado que sabendo de alguns caminhos poderá resolver qualquer problema de um assunto específico. Usar o processo de imitação e prática, o levará a lembrar de conceitos básicos e saber como aplicar bem a teoria em cada caso. Mas uma vez que não for possível a solução do problema, também devemos orientá-lo sobre como deverá proceder e não simplesmente deixá-lo se sentir decepcionado por não consegui resolver o problema, mesmo depois de já ter praticado antes e lembra de métodos e fórmulas.

Para auxiliar um estudante em busca da solução para um problema, alguns pontos merecem destaque, pontos esse já utilizados por G. Polya, em seu livro: A Arte de Resolver Problemas, em seu livro Polya, propõem uma lista de perguntas que devem ser utilizadas em determinada ordem, para orientar o professor como proceder com o aluno e para o aluno detectar possíveis falhas que possa cometer ou fatos que poderá deixar passar despercebido. (VIDE anexo 1).

Polya divide sua lista de perguntas em quatro fases, e em cada uma delas apresenta determinadas perguntas que permitirão ao aluno ter um embasamento de como deverá ver o problema, bem como analisar os dados, criar um plano, executá-lo e enfim verificar a solução encontrada através de um retrospecto. Nessa lista as perguntas são formuladas da forma mais simples possível para que esteja acessível aos alunos em qualquer nível de etapa de escolaridade, a ideia é justamente agir de forma simples porém concisa em qualquer problema encontrado.

A primeira fase consiste na compreensão do problema, nesse ponto inicial, alguns fatos são fundamentais para a interpretação do texto. Deve-se reconhecer a incógnita aqui, ou saber qual dado deverá ser encontrado, sabendo o que se procura, ajudará a reconhecer os dados do problema, quais são as informações no enunciado, bem como quais delas são necessárias, pode-se verificar se as mesmas são suficientes, se serão utilizadas a princípio ou não. Para prosseguir é indispensável não haver dúvidas relativas a quem é a incógnita e quais são os dados. Ainda nesse ponto, utilizar figuras para ajudar na interpretação também é uma estratégia válida, quando o aluno faz o seu esboço, e nele marca anotações frutos de sua interpretação, o estudante passa a conhecer o problema e pode visualizá-lo de diversos ângulos, tudo acompanhado de uma notação condizente com a maturidade do estuante.

Na segunda fase, usa-se tudo produzido na primeira fase, para criar um plano, esse plano será bem sucedido se forem tomadas alguns cuidados. O primeiro ponto a considerar é o quanto familiar é o problema, o aluno possui alguma lembrança de problemas anteriores que remetam ao atual? Se isso acontecer, o método empregado anteriormente poderá ser reutilizado para buscar a solução. Mas se o problema não for de inteiro análogo, alguma parte pode ser resolvida tomando como base a situação já conhecida. Em ambos os casos, usar as definições e ter o cuidado se está utilizando todas os dados ajudarão na solução do problema.

Ainda na criação do plano, deve ficar claro a busca por um método para ajudar a resolver a situação, o professor deve ajudar com muita cautela na construção do plano, nem demais para que não sobre nada para o aluno fazer, nem de menos deixando o aluno à deriva, perdido diante do enunciado. Encontrar esse meio termo é algo que cada professor deverá sempre procurar, pois cada aluno possui sua forma única de aprender, resta ao professor usar de sua experiência para se adequar a cada aluno.

> (...) Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma "ideia brilhante". A melhor coisa que um professor pode fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa. As indagações e sugestões que passamos tendem a provocar a tal ideia. (A Arte de Resolver Problemas, Um Novo Aspecto do Método matemático, G Polya, pag 5.)

Encontrar a "ideia" ou forçar o aluno a buscá-la, será o objetivo do professor de matemática no processo de ensino. Conquistar os estudantes por meio do que a matemática tem a seu favor, a beleza do raciocínio dedutivo e encadeamentos lógicos. Uma vez que os alunos descubram o prazer que existe nesse processo, aprender se tornará algo muito mais divertido e desafiador. Parabenizar o aluno por suas tentativas, acertos e porque não dizer fracasso, já que aprendemos também com os insucessos da vida. Poder tirar algo de proveitoso em cada situação, usar a mente como ferramente principal na resolução de problemas, enfim valorizar o ser e não o ter.

A forma que deverão surgir os caminhos, e como avaliar as hipóteses, deve ser sempre valorizada ao máximo pelo professor e pela turma. Anotar tudo que for aparecendo relativo ao problema, para uma vez que esgotarem as especulações, poder construir o plano em busca da solução. Nesse passo a pesquisa pelos métodos deve ser enfatizada, uma vez que o aluno conquista a autonomia como forma de buscar as respostas, nesse caminho o conhecimento adquirido pode ser bem maior do que aquele passado pelo professor. O inimigo aqui será a pressa em ter a resposta imediata, mostrar ao aluno que existem problemas que perduram por século e problemas que ainda não se sabem ainda como resolver e nem se possuem a resposta, pode justificar que a pressa não é o melhor caminho na resolução de problemas.

Já na terceira fase, o poder de manipulação merece destaque, aqui será feita a execução do plano, nesse estágio pôr em prática o que já se tem como verdade de forma a agir com bastante cuidado na aplicação de cada passo. A manipulação pode ser uma dificuldade a mais no problema caso o professor não conheça as habilidades do aluno. Cada passo da solução pode conter diferentes níveis de dificuldade, o professor pode mostrar a melhor forma de execução mas sempre incentivando o aluno a partir do que se possui, e com base nas definições, aplicar cada passo. Muito importante que após cada passo, uma reflexão e análise seja feira, a fim de inibir erros nas etapas iniciais e prejudicar todo as etapas seguintes, muito comum o aluno cometer um erro logo nos primeiros passos, e no final chegar a uma resposta errada, e quando o professor orienta e explica que o erro está logo nos primeiros passo forçando o aluno a refazer tudo, fazendo aparecer um desânimo que poderá repercutir no abando do problema. Portanto, nessa etapa, um olhar cauteloso sobre os passos e como cada passo influencia o problema como um todo, possibilita até uma correção menos trabalhosa.

A última fase a ser trabalhada é a da verificação do resultado obtido, antes de saber se está certo ou errado, pode-se questionar a coerência do resultado obtido, se por exemplo o resultado for um número negativo, essa resposta poderia acontecer, existe essa condição no caso em questão, bem como o aparecimento de números, racionais ou até irracionais. Depois de verificada a coerência da solução obtida, o resultado como um todo pode ser analisado. Sendo o resultado alcançado satisfatório, realizar um retrospecto do problema, as definições usadas, métodos e fórmulas que apareceram na solução.

> (...) Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer solução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução.(A Arte de Resolver Problemas, Um Novo Aspecto do Método matemático, G Polya, pag 10.)

O professor pode dar ainda mais importância ao problema analisado, fazendo conjecturas sobre a possibilidade de algum método trabalhado no problema venha a ser importante para outros problemas, ou ainda que o seu resultado seja válido para outros casos e situações. Assim, o aluno poderá valorizar ainda mais o feito que foi encontrar a solução. Levar consigo o resultado ou então a ideia já discutida como uma nova ferramenta que poderá tornar futuros problemas mais simples.

Quando o problema se mostrar valoroso não só pela sua resposta como pelo método necessário em sua resolução, esse conhecimento se tornará assim parte da pessoa que o usou. Essa é uma forma de usar a solução de problemas como meta na preparação de um curso, estruturar dessa forma tornará o curso mais relevante na formação dos estudantes, e ao professor caberá o sentimento de transformação, dado que a metodologia foi importante ao lado da teoria. Saber que as ferramentas usadas resultarão no avanço do estudante e assim, um nível de maturidade maior será alcançado.

3 A MATEMÁTICA POR TRÁS DOS TRUQUES, ADIVINHAÇÕES E ENÍGMAS

3.1 Expressões algébricas e polinômios

3.1.1 O uso de letras para representar o desconhecido.

Para tratar de um novo tipo de problemas no ensino fundamental, as equações, uma abordagem nova surge: a representação de letras para simbolizar a parte que falta, essa parte que se procura costuma causar algumas dificuldades na hora de interpretar e resolver esses novos desafios.

A Álgebra, como é chamada, é uma linguagem fundamental na matemática. Pois a partir dela, foi possível a introdução de símbolos mais precisos para operar com números e representar situações genéricas.

Observemos o problema inicial de um livro do 7º ano do ensino fundamental:

"Disse ao professor:

'Peguei a idade que tinha quando me casei, subtraí 3, dividi o resultado por 6, somei com $\frac{1}{3}$ dessa idade e obtive 10 com resultado final.'

Quantos anos tinha minha professora quando se casou?"

Propondo um enigma, no início da seção para apresentar uma situação motivante aos alunos, para depois empregar métodos e técnicas para justificar o estudo da álgebra. Tais situações serão comuns após esse ano do ensino fundamental, sendo muito importante que os primeiros conceitos teóricos relativos a parte inicial de álgebra sejam bem compreendidos.

3.1.2 O uso de expressões contendo letras

Para lidar com os novos problemas de caráter algébrico e poder usar todas as técnicas desse cálculo, devemos conhecer uma linguagem nova, saber traduzir da linguagem corrente para a linguagem matemática.

Vejamos a seguinte situação:

Em um parque de diversões a entrada custa R$ 10,00, para brincar uma vez em cada brinquedo o custo é de R$ 5,00 por pessoa. Se uma pessoa entrar nesse parque, qual será seu gasto se usar 1 brinquedo uma vez? E se usar 4 brinquedos uma vez cada? Existe um forma de encontrar o valor pago de acordo com o número de brinquedos que usar?

Fazendo algumas anotações:

Anotações	
Nº de brinquedos usados	Gasto (R$)
1	$10+5\cdot 1=15$
4	$10+5\cdot 4=30$
x	$10+5\cdot x$

Podemos observar que o gasto pode ser calculado da seguinte forma Gasto $= 10+5\cdot$ número de brinquedos

Uma vez que usamos a letra x para representar um número de brinquedos, estamos escrevendo uma expressão em linguagem matemática.

Assim, temos:

$$10+5\cdot x \qquad \text{ou} \qquad 10+5x$$

Podemos a partir da linguagem falada, ou linguagem corrente escrever uma expressão em linguagem matemática

Em linguagem corrente	**Em linguagem matemática**
O dobro de 5	$2\cdot 5$
A quinta parte de -30	$-30\cdot\frac{1}{5}$
O triplo de -9	$3\cdot(-9)$

Agora, usando símbolos vamos escrever "o dobro de um número".

Esse "número", que a priori não sabemos o que significa, será representado por uma letra do nosso alfabeto por exemplo $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ etc.$

Assim teremos simbolicamente, usando a letra x:

$$2 \cdot x$$

ou apenas:

$$2x$$

Omitindo-se o sinal da multiplicação.

Nesse caso a letra x representa um número qualquer, x é chamado de variável.

Essa forma de representar expressões pode ser aplicada a diversos casos, vejamos o quadro abaixo:

Em linguagem corrente	**Em Linguagem matemática**
A diferença entre dois números	a-b
O quíntuplo	$5 \cdot c$
A metade de um número	$\frac{1}{2} \cdot m$
A soma de 5 com um número	$5 + y$
O quociente entre dois números	$\frac{p}{q}$

Essas expressões em linguagem matemática são chamadas de expressões algébricas. Formadas com letras, números e sinais de operações.

3.1.3 Valor numérico de uma expressão algébrica

O ato de substituir cada letra, a variável em questão por um valor e efetuando as operações indicadas, chama-se cálculo do valor numérico da expressão.

Observemos os exemplos:

- O valor numérico da expressão $5+y$ para $y=-4$ é: $5+(-4)=5-4=1$.
- O valor numérico da expressão $\frac{1}{2}\cdot m$ para $m=8$ é: $\frac{1}{2}\cdot 8=\frac{8}{2}=4$.
- O valor numérico da expressão $m+n$ para $m=-1$ e $n=7$ é: $-1+7=6$.

Usar letras para representar o desconhecido, é um forma muita antiga que a humanidade usa para resolver problemas. A palavra Álgebra, tem sua possível origem na palavra árabe al-jabr, que aparece no livro hisab al -jabr w´al-muqabalah, que data de aproximadamente do ano de 825 e tem seu autor o matemático Al´Khowarizmi. Uma tradução desse livro pode ser: A Ciência das Equações.

Um dos documentos mais importantes da matemática antiga, é o Papiro de Rhind, ele foi escrito por volta do ano 1650 a.C. e relata diversos problemas com quantidades desconhecidas. Para tratar dessas quantidades, as incógnitas como chamamos atualmente, existia um hieróglifo hau ou aha, que significava"montão", Esse papiro também é chamado de Papiro de Aha.

Atualmente, o Papiro de Rhind está no Museu Britânico em Londres, e possui esse nome porque foi adquirido pelo banqueiro e antiquário Henry Rhind em 1858, na cidade de Luxor, no Egito. Esse papiro foi escrito pelo escriba Ahmes, sendo assim também conhecido.

3.1.4 Monômios

Observe as seguintes expressões algébricas:

$$\frac{1}{2}\cdot m \qquad 5\cdot xy \qquad -\frac{2}{3}\cdot m^4n^2 \qquad a$$

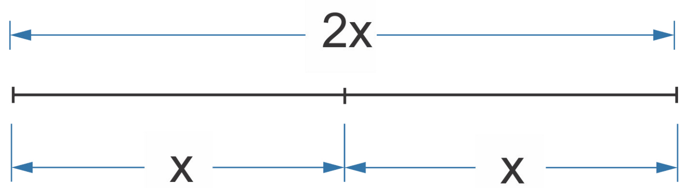
O que todas elas tem em comum? Todas representam produtos. Nenhuma possuem somas ou diferenças, nem divisão por variável.

Definição:

Expressões matemáticas envolvendo número e/ou letras contendo apenas a operação de produto são chamadas *monômios*.

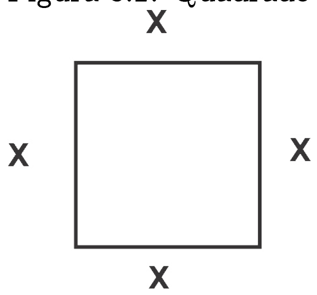
Em monômios temos duas partes:

Figura 3.1: Segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.2: Quadrado



Fonte: Elaborada pelo autor

- a constante (parte numérica);
- a variável (parte representada por letras ou parte literal).

Definição:

O Grau de um monômio será a soma dos expoentes da parte literal do monômio.

Por exemplo o monômio $2x^3$ é do grau 3, e o monômio m^4n, tem grau $4+1=5$.

Na tabela a seguir, mostramos alguns termos algébricos e destacamos em cada um o coeficiente e a parte literal deles.

3.1.5 Termos Semelhantes

A medida do segmento da figura 3.1 é representada por $2x$.

O perímetro da figura 3.3 é representado por $4x$.

Os termos algébricos $2x$ e $4x$ têm a mesma parte literal, dizemos que eles são **termos semelhantes**.

Veja outros exemplos.

a) $-3ab$ e $5ab$ são termos semelhantes, porque possuem a mesma parte literal.

b) $6x^2y$ e $9xy^2$ não são termos semelhantes, porque as partes literais são diferentes ($x^2y \neq xy^2$), apesar de as variáveis x e y serem as mesmas.

3.1.6 Soma algébrica de termos semelhantes

Dados monômios semelhantes, podemos aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e adicionar os termos com a mesma parte literal.

Observe os exemplos:

a. $2x + 9x = (2 + 9)x = 11x$

b. $3m - 7m = (3 - 7)m = -4m$

c. $4ab + \frac{2}{3}ab = (4 + \frac{2}{3})ab = \frac{14}{3}ab$

Para adicionar termos semelhantes, somamos os coeficientes e conservamos a parte literal.

3.1.7 Polinômios

Observe as expressões algébricas a seguir:

- $3x$. Monômios
- $5x + 2y$. Estas expressões são somas de monômios
- $2x^2 + 3x - 4$

Definição:

As expressões matemáticas que representam somas algébricas de monômios são chamadas de *polinômios*.

O grau de um polinômio é dado pelo maior grau do monômio que ele possui.

Os polinômios formados por até três termos recebem nomes especiais:

1 termo: Monômio

2 termos: Binômio

3 termos: Trinômio

4 termos ou mais: Polinômios

Exermplo:

As expressões a seguir possuem nomes que as diferenciam:

a. $-12x+3$: binômio

b. $2x^2+3x-1$: trinômio

c. $a+b+c+d$: polinômios

Uma observação que deve ser feita é com relação ao uso da presença dos termos comumente associados ao seu estudo no português, sujeito e predicado, na matemática.

Sentenças são orações onde aparece o sujeito, o termo sobre o qual se declara algo, e o predicado, o que se declara sobre o sujeito.

Assim, nos casos abaixo:

- Três menos um é igual a dois;
- O dobro de um número é igual a setenta e seis.

No primeiro caso, três menos um é o sujeito, já é igual a dois, é o predicado.

No segundo caso, o sujeito é o dobro de um número, enquanto o predicado é o termo: é igual a setenta e seis.

3.2 Equações

Uma das principais ferramentas que a Matemática possui para resolver problemas são as equações. Uma linguagem que permite escrever problemas de situações concretas em linguagem simbólica, e a partir daí usar um conjunto de técnicas e métodos para se resolver esses problemas.

Vamos analisar a seguinte situação:

Exemplo:

O quíntuplo de um número subtraído de 7 resulta no próprio número acrescido de 1. Qual é esse número?

Solução:

Podemos usar uma letra qualquer para representar essa quantia desconhecida. Por exemplo x. Assim, o quíntuplo de um número será $5x$. Dessa forma temos:

$$5x - 7 = x + 1$$

ou ainda,

$$5x - x = 7 + 1$$

que resulta em:

$$4x = 8$$

ou seja,

$$x = 2$$

Podemos observar que, todos os procedimentos aplicados estão ligados ao valor desconhecido, nessa situação temos uma **equação polinomial de 1º grau com uma variável**.

Vejamos a seguinte definição:

Definição:

Chamamos de **equação polinomial do 1º grau na variável x**, uma sentença da forma:

$$ax + b = 0$$

onde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e x é um número real chamado de incógnita.

Assim, toda sentença matemática que possui uma igualdade e números desconhecidos formados por letras é dita uma equação.

3.2.1 Propriedades

Uma analogia feita ao iniciar os trabalhos com equações consiste em ver a situação como uma balança de dois pratos em equilíbrio e a medida que acrescentamos algo em um prato devemos retirar em igual quantidade para não perder o equilíbrio. Essa analogia consiste nas seguintes propriedades:

Propriedade 1. Dois números iguais permanecem iguais ao serem ambos adicionados da mesma quantia, ou seja,

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c.$$

Esse número c, pode ser tanto positivo quanto negativo, assim por exemplo se considerarmos a equação:

$$2x + 5 = 1$$

Podemos adicionar -5 em ambos os lados da equação, obtendo:

$$(2x + 5) - 5 = 1 - 5, \text{ou seja, } 2x = -4.$$

Propriedade 2. Dois números iguais permanecem iguais ao serem ambos multiplicados pela mesma quantia, ou seja,

$$a = b \Rightarrow a \cdot c = a \cdot c.$$

Assim, sendo $2x = -4$, podemos multiplicar os dois lados da equação por $\frac{1}{2}$. Obtendo:

$$2x \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \frac{1}{2}, \text{ou seja, } x = -2.$$

Voltando a equação $ax + b = 0$, para encontrarmos sua solução vamos aplicar as duas propriedades acima:

Primeiro, vamos adicionar $-b$, aos dois lados da equação, obtendo:

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b), \text{ ou seja, } ax = -b.$$

Agora, como $a \neq 0$, podemos multiplicar ambos os lados da última equação por $\frac{1}{a}$.

Logo, a solução da equação $ax + b = 0$, é:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Assim $ax\left(\frac{1}{2}\right) = -b\left(\frac{1}{a}\right)$, resulta em $x = -\frac{b}{a}$,

Logo, a solução da equação $ax + b = 0$, é:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

3.3 Sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas

Para darmos início a essa sessão, vamos considerar o seguinte problema:

Exemplo:

Cícero possui 15 cédulas, sendo algumas de 10 reais e outras de 5 reais. Quantas cédulas de cada tipo Cícero possui, sabendo que ele possui ao todo 105 reais?

Nesse problema, vamos chamar de x a quantidade de cédulas de 10 reais e y a quantidade de cédulas de 5 reais. Assim como Cícero possui 15 cédulas, temos:

$$x + y = 15.$$

Agora, como Cicero possui 105 reais temos:

$$10x + 5y = 105$$

Podemos notar que, temos duas equações, onde em ambas temos a presença de mais de um termo desconhecido, e as duas equações são dependentes, ou seja, as soluções da primeira equação devem ser também soluções da segunda equação.

Esse caso, é um caso particular de um *sistema de equações polinomiais lineares em várias variáveis.*

Definição:

Uma equação polinomial do 1º grau nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma expressão da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0$$

onde os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são diferentes de *zero* e b é um número real.

Dessa forma quando escrevemos uma equação na forma:

$$ax + by = c,$$

estamos supondo que $a^2 + b^2 \neq 0$.

A solução da equação será dada pelos números $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, ou seja, uma vez que substituirmos esses valores na equação, ela será verificada. Teremos então:

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_nr_n + b = 0.$$

Por exemplo, $(3, -1)$ é solução da equação $2x + y = 5$. Pois,

$$2(2) + 1 = 5.$$

Vale ressaltar que a ordem da solução é fundamental, pois se tivermos $(-1, 3)$

$$2(-1) + 2 \neq 5.$$

Definição:

Um sistema de equações polinomiais em n variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_2$ é um conjunto de k equação lineares na variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$, ou seja,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & b_1 & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & + & b_2 & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \cdots & + & a_{kn}x_n & + & b_k & = & 0,
\end{array}$$

onde alguns dos elementos $a_{ij}(1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n)$ podem ser iguais a zero. No entanto, $a_ij \neq 0$ e algumas das equações, e além disso, cada variável x, aparece em alguma equação com coeficiente diferente de zero.

3.3.1 Classificação de um sistema linear quanto as soluções

Ao resolvermos um sistema de equações lineares a solução $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ deve ser solução de todas as equações simultaneamente.

Existem três caso possíveis quando nos deparamos com um sistema de equações lineares:

i. o sistema possui única solução;

ii. o sistema não possui solução;

iii. o sistema possui infinitas soluções.

Para cada situação acima vamos observar os seguintes exemplos:

i. O primeiro caso podemos verificar através da situação inicial:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 10x + 5y = 105 \end{cases}$$

Uma forma de resolver o sistema acima é usar o *método da eliminação*, que consiste em escolher um número k de modo a obter um novo sistema que chamamos de semelhante ao sistema inicial e a partir daí somar as equações membro a membro de modo que um dos novos coeficientes seja zero, ou seja, dado um sistema linear da forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

e multiplicando uma equação(ou ambas) por um número k (ou por dois números k_1, k_2, cada uma das equações), ao somarmos membro a membro as equações:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ (a_2 + ka_1)x + (b_2 + kb_1)y = c_2 + kc_1, \end{cases}$$

ou o coeficiente $a_2 + ka_1$ será igual a zero ou então $b_2 + kb_1$ será. Com isso teremos uma equação polinomial do 1º grau e encontraremos sua solução restando substituir esse valor encontrado na outra equação para encontrar o outro valor desconhecido.

Assim sendo

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 10x + 5y = 105 \end{cases}$$

Vamos multiplicar a primeira equação por $k = -5$, e somando as equações teremos o novo sistema, ou seja,

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ (-5 + 10)x + (-5 + 5)y = -75 + 105. \end{cases}$$

Assim temos a nova equação $5x = 30$, ou seja, $x = 6$. Substituindo o valor encontrado na primeira equação, encontramos $y = 9$. Logo, o sistema linear possui uma única solução: $(6, 9)$.

ii. Agora observe o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x & + & 5y & = & -1 \\ 8x & + & 20y & = & 12, \end{cases}$$

nesse caso, vamos efetuar o mesmo procedimento do caso anterior, multiplicando pro exemplo a primeira equação por -4, e somando as equações membro a membro, teremos o sistema:

$$\begin{cases} 2x & + & 5y & = & -1 \\ (-8+8)x & + & (-20+20)y & = & 4+12. \end{cases}$$

Veja que, ficamos com algo do tipo:

$$0x + 0y = 16$$

algo impossível de acontecer. Logo esse sistema linear não possui solução.

iii. Por último, seja o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x & - & y & = & 41 \\ -6x & + & 2y & = & 8, \end{cases}$$

procedendo como nos casos anteriores, vamos multiplicar a primeira equação por -2, ficamos assim com:

$$\begin{cases} 3x & - & y & = & -4 \\ (6-6)x & + & (-2+2)y & = & -8+8. \end{cases}$$

observe que nesse caso ambos os coeficientes serão iguais a zero, bem como o termo independente, isso acontece porque as equações do sistema inicial são múltiplas uma da outra, em situações assim, diremos que o sistema possui infinitas soluções, que são encontradas partido de uma das equações, por exemplo:$3x - y = -4$, e isolando uma variável em função da outra, $y = 4 + 3x$, assim toda solução da forma $(x, 4+3x)$, será solução do sistema.

3.4 Sistema de numeração

Dentre as maiores invenções da humanidade, o sistema de numeração decimal, sem dúvidas está entre elas. Inúmero avanços na sociedade e no comércio apareceram a partir do uso e difusão.

Utilizar símbolos que remetessem a quantidades foi sem dúvida o primeiro passo para a criação de uma forma de registrar o que estávamos vendo. Porém utilizar símbolos que em determinada ordem pudessem assumir significados diferentes fez muita diferença no método de realizar cálculos com mais rapidez.

Existem lendas que remetem ao uso de pedras para associar a animais, onde pastores no início do dia, para cada ovelha que saia para pastar associava-se uma pedra, no final do dia, a cada ovelha que retornava, jogava-se fora uma pedra, se sobrassem pedras era porque faltavam ovelhas. Métodos assim foram evoluindo por civilizações onde apareceram diversos sistemas de numeração, destacam-se os sistemas de numeração dos egípcios, babilônicos, maias e romanos, este último ainda utilizados seus símbolos para representação de horas e datas por exemplo. Mas o atual sistema de numeração, conhecido como indo-arábico, sistema criado pelos hindus há cerca de 100 anos, e amplamente usado pelos árabes, utiliza-se de dez símbolos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e o 0, este aparecendo bem depois com grande importância. Este sistema mais do que apenas possuir a vantagem de ter poucos símbolos se comparados aos demais, possui a característica de ter a ordem como método de escrita e representação.

O sistema de numeração decimal como ficou conhecido, ganhou força quando comparado aos demais pela facilidade de se realizar cálculos com poucos símbolos, dessa forma representar grandes números e operar com muitas quantidades se tornou uma tarefa menos árdua do que quando se utilizava outro sistema.

3.4.1 O sistema de numeração decimal

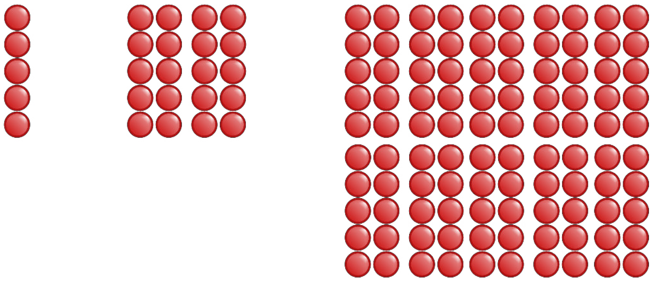
O sistema de numeração que usamos hoje, é chamado de decimal, devido a sua característica, de possuir dez símbolos e o seu agrupamento quando contamos, de 10 em 10.

Observe a figura 3.3:

Vemos que a figura apresenta:

- um agrupamento de 5 pedras, cada elemento isolado, chama-se unidade; (5 unidades)
- um agrupamento de 2 conjuntos de 10 pedras em cada grupo, cada grupo representa uma dezena;(2 dezenas)

Figura 3.3: Sistema de enumeração



Fonte: Elaborada pelo autor.

- um agrupamento com um conjunto de 100 pedras, cada grupo de 100 unidades (ou 10 dezenas) representa uma centena. (1 centena)

Essa quantidade é representada no sistema de numeração decimal por:

(1 centena, 2 dezenas e 5 unidades)

As unidades maiores são representadas seguindo um padrão semelhante, fazemos agrupamentos de 10 em 10, observe:

- 10 unidades constituem uma dezena;
- 10 dezenas constituem uma centena;
- 10 centenas constituem uma unidade de milhar;
- 10 unidades de milhar constituem uma dezena de milhar;
- 10 dezenas de milhar constituem uma centena de milhar;
- 10 centenas de milhar constituem uma unidade de milhão.

E, com um agrupamento seguindo nessa ordem temos um processo infinito, possível através do sistema decimal.

Exemplo

Sendo o número 46 539, temos:

46539	9 unidades
	3 dezenas
	5 centenas
	6 unidades de milhar
	4 dezenas de milhar

$$46539 = 4\,x\,40000 + 6\,x\,1000 + 5\,x\,100 + 3\,x\,10 + 9$$

	Unidades	**1ª Ordem**
Classe das unidades	**Dezenas**	**2ª Ordem**
	Centenas	**3ª Ordem**
	Unidades de Milhar	**4ª Ordem**
Classe do Milhar	**Dezenas de Milhar**	**5ª Ordem**
	Centenas de Milhar	**6ª Ordem**
	Unidades de Milhão	**7ª Ordem**
Classe do Milhão	**Dezenas de Milhão**	**8ª Ordem**
	Centenas de Milhão	**9ª Ordem**

3.4.2 O princípio da posição decimal

Dado um algarismo no sistema decimal, podemos analisá-lo de dois modos, pelo seu valor absoluto e pelo seu valor relativo.

- Valor absoluto é o valor em unidades representado pelo algarismo;
- Valor relativo é o valor em unidades que o algarismo representa dada sua posição, unidades, dezenas, centenas, etc.

Exemplo:

1. Observe em cada número a seguir o algarismo 7 e o valor absoluto e relativo que ele representa.

47

- valor absoluto: 7
- Valor absoluto : 7

7046

- valor absoluto: 7
- valor relativo: 7 000

2. Veja o valor relativo do algarismo 2 em cada número abaixo:

92	2 unidades	=	2
21	2 dezenas	=	20
248	2 centenas	=	200
2316	2 unidades de milhar	=	2000

Vemos que, o valor relativo de um algarismo depende da posição que ele ocupa no número.

Os sistemas de numeração posicionais se baseiam em um resultado conhecido como divisão euclidiana.

Os seguintes resultados encontram-se no livro: *Elementos de Aritmética, de Abramo Hefez.*

Um resultado muito importante a cerca da divisão entre dois números foi dada por Euclides, nos seus *Elementos*, ele dizia que mesmo quando não for possível a divisão entre dois números inteiros, essa divisão pode ser efetuada com resto.

Teorema *(Divisão Euclidiana)*

Sejam a e b, dois números naturais co $0 < a < b$. Existem dois únicos números inteiros naturais q e r tais que:

$$b = a \cdot q + r, \text{ com } r < a.$$

Demonstração:

Consideremos $b > a$, e os seguintes números enquanto não negativos.

$$b, b-1, b-2a, \ldots, b-na, \ldots$$

Se chamarmos de S o conjunto com os elementos acima, pelo Princípio da Boa Ordenação, todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menos elemento, nesse caso, esse menor elemento é da forma $r = b - qa$. Temos que verificar que $r < a$.

Temos duas situações a analisar:

i. Se $a|b$ (lê-se a divide b), nada temos a fazer pois $r = 0$.

ii. Se $a \nmid b$ (lê-se a não divide b), então $r \neq a$. Temos que montar assim que $r < a$.

Vamos supor que $r > a$, assim existem um número natural k, tal que $r = k + a$. Porém, se $r = k + a, r = b - qa$, logo

$$k = b - (q+1)a \in S, \text{Com}\, k < r$$

contrariando o fato de r ser o menor elemento de S.

Assim, temos que $b = a \cdot q + r$, com $r < a$, e a existência de r e r.

Para verificarmos a unicidade, temos que, dados dois elementos distintos de S, a diferença entre o maior e o menor dos elementos desse conjunto, sendo um múltiplo de a, é pelo menos a. Dessa forma, se $r = b - qa$ e $r' = b - q'a$, com $r < r' < a$, teríamos $r' - r \geq a$, resultando em $r' \geq r + a \geq a$, um absurdo. Portanto, $r = r'$.

Logo, $b - qa = b - q'a$, ou seja, $qa = q'a$ e assim, $q = q'$.

Do teorema acima, temos que o números q e r são respectivamente o *quociente* e o *resto* da divisão de b por a.

Como exemplo da aplicação do teorema podemos achar o *quociente* e os *resto* da divisão de 27 por 4.

Efetuando as diferenças temos:

$$\begin{aligned}
27 - 1(4) &= 23 \\
27 - 2(4) &= 19 \\
27 - 3(4) &= 15 \\
27 - 4(4) &= 11 \\
27 - 5(4) &= 7 \\
27 - 6(4) &= 3 < 4
\end{aligned}$$

Teorema:

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais $r_0, r_1, \ldots, r_n$ menores que b, unicamente determinados, tais que $a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \ldots + r_n b^n$.

Demonstraão:

Aplicando sucessivamente a divisão euclidiana:

$$\begin{array}{rcl}
a & = & bq_0 + r_0,\ r_0 < b, \\
q_0 & = & bq_1 + r_1,\ r_1 < b, \\
q_1 & = & bq_2 + r_2,\ r_2 < b, \\
\vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
q_{j-1} & = & bq_j + r_j,\ r_j < b,
\end{array}$$

e assim por diante. Mas $a > q_0 > q_1 > q_2 > \ldots > q_{j-i}$, para algum $j = n$ teremos que $q_{n-1} < b$. E dessa forma, $q_j = 0, \forall j \geq n$, bem como $r_j = 0$, para todo $j \geq n+1$, e a partir das igualdades acima, sendo $1 \leq j \leq n$, temos:

$$\begin{array}{rcl}
a & = & bq_0 + r_0 \\
bq_0 & = & b^2 q_1 + br_1, \\
b^2 q_1 & = & b^2 q_2 + b^2 r_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
b^{n-1} q_{n-2} & = & b^n q_n + b^{n-1} r_{n-1}, \\
b^n q_{n-1} & = & b^{n+1} 0 + b^n r_n.
\end{array}$$

Somando as equações acima teremos:

$$a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \ldots + r_n b^n.$$

A unicidade segue da unicidade dos restos da divisão euclidiana.

Essa representação é chamada de *expansão relativa à base b*. No caso de $b = 10$, temos a expansão decimal.

3.5 Equações diofantinas lineares

Muitos problemas de aritmética recaem em equações da forma:

$$ax + by = c.$$

onde , $a, b, c \in \mathbb{Z}, com \neq 0$.

Equações desse tipo são chamadas de *equações diofantinas lineares*, elas receberam esse nome em homenagem a Diofanto de Alexandria(aprox. 300 DC).

Uma solução desta equação é um par de inteiros (x, y), que satisfaça a igualdade acima.

No processo de encontrar a solução desse tipo de equações nem sempre podemos encontrar um par de números inteiros que verifiquem a igualdade. Porém se uma equação diofantina linear possuir uma solução ela terá infinitas soluções.

Proposição:

Dados, $a, b, c \in \mathbb{Z}, com \neq 0$. A equação

$$ax + by = c,$$

admite soluções se, e somente se, $d \mid c$, onde $d = (a, b)$. Se (x_0, y_0) é uma solução, então o conjunto da todas as soluções da equação

$$ax + by = c,$$

, são os inteiros (x, y) da forma:

$$x = x_0 + t\frac{b}{d} \qquad \text{e} \qquad y = y_0 - t\frac{a}{d}, t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração:

Vamos supor que (x_0, y_0) seja uma solução da equação

$$ax + by = c,$$

assim $ax_0 + by_0 = c$. Como $d = (a, b)$, temos que $dq_1 = a$ e $dq_2 = b$. Substituindo, temos

$$dq_1x_0 + dq_2y_0 = d(q_1x_0 + q_2y_0) = c,$$

onde, concluímos que $d \mid c$.

Agora, suponhamos que $d \mid c$ logo, $c = qd$ com q inteiro. Pelo Teorema de Bézout, existem x_0 e y_0, tais que $ax_0 + by_0 = c$. Multiplicando ambos o s lados dessa igualdade por q temos que

$$ax_0q + by_0q = qc = d,$$

logo o par (x_1, y_1) sendo $x_1 = x_0q$ e $y_1 = y_0q$, é solução da equação diofantina.

$$x = x_0 + t\frac{b}{d} \qquad \text{e} \qquad y = y_0 - t\frac{a}{d}, t \in \mathbb{Z}.$$

Consideremos (x, y) outra solução além de x_0, y_0, sendo assim, podemos escrevendo $ax_0 + by_0 = c = ax + by$, ou seja $ax_0 + by_0 = ax + by$ reescrevendo obteremos $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$ e dividimos esta últimas por d para assim encontrar

$$\frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y).$$

Sabemos que $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, assim $\frac{a}{d} \mid (y_0 - y)$ e $\frac{b}{d} \mid (x - x_0)$. Dessa forma. Existe um inteiro t tal que

$$x = x_0 + t\frac{b}{d} \qquad \text{e} \qquad y = y_0 - t\frac{a}{d}$$

Vemos também que para qualquer inteiro t as expressões acima resolvem a equação diofantina.

Exemplo 1. *Resolvamos a equação $2x + 7y = 29$.*

A equação tem solução pois $mdc(2, 7) = 1$ e $1 \mid 29$. Aplicando o algoritmo de Euclides,

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

.

Assim, $1 = 7 - 2 \cdot 3$, ou seja $1 = 2 \cdot (-3) + 7(1)$. Logo, encontramos $x_0 = -3$ e $y_0 = 1$, garantidos pelo teorema de Bézout, $1 = 2x_0 + 7y_0$. Multiplicando por 29 esta igualdade, encontramos:

$$29 = 2(29x_0) + 7(29y_0).$$

Logo, temos as soluções particulares $\overline{x_0} = 29x_0 = 29 \cdot (-3) = -87$ e $\overline{y_0} = 29y_0 = 29 \cdot 1 = 29$, dessa forma temos as soluções gerais.:

$$x = -87 + 7t \qquad e \qquad y = 29 - 2t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}.$$

3.6 Probabilidades

3.6.1 Experimentos aleatórios

Qual a velocidade atingida por uma bola após ser chutada por um jogador? A que temperatura a água entra em estado sólido?

Respostas para perguntas desse tipo podem ser encontradas,

basta para isso considerar algumas condições. Essas situações são chamadas de experimentos determinísticos, pois em determinadas condições podemos prever o resultado deles. Agora, vejamos as seguintes situações:

- Ao lançar uma moeda, qual a face que ficará voltada para cima?
- Ao retirar uma carta de um baralho completo, qual a cara retirada?
- Ao arremessarmos um dado qual número saiu?

Esses experimentos se realizados inúmeras vezes, podem gerar resultados que não podemos prever com exatidão. Um experimento que possua um resultado único, porém imprevisível, é denominado de *experimento aleatório.*

Temos se analisarmos os casos acima algumas características:

- o experimento pode ser realizado diversas vezes nas mesmas condições;
- conhecemos o conjunto de todos os resultados possíveis;
- não podemos prever o resultado.

A partir de situações assim, surgiu o estudo da teoria das probabilidades. Procuraremos assim as possibilidades de ocorrência de cada evento.

3.6.2 Espaço amostral

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral, que vamos representar pela letra grega Ω(Lê-se "Ômega").

Quando em um espaço amostral cada elemento possui a mesma chance de ocorrer dizemos que ele é *equiprovável.*

O número de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório é representado por n(Ω). Assim temos:

- no lançamento de uma moeda: $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$
- no lançamento de um dado comum de seis faces: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- na retirada de uma bola de uma urna contendo 3 bolas azuis, 4 bolas verdes e 5 brancas: $\Omega = \{\mathrm{A}, \mathrm{V}, \mathrm{B}\}$.

3.6.3 Eventos

Dado um experimento aleatório cujo seu espaço amostral é dado por Ω Chamaremos de Evento (E) subconjunto de Ω. Por exemplo:

1. No lançamento e um dado, observar a face voltada para cima.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

   A: a ocorrência de uma face par: $A = \{2, 4, 6\}$

   B: a ocorrência de uma maior do que 2:$B = \{3, 4, 5, 6\}$

   C: a ocorrência de uma face maior do que 7: $C = \varnothing$

   D: a ocorrência de uma face menor ou igual a 6: $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

2. No lançamento de duas moedas, observar a face voltada para cima, cara (c) ou coroa (k). Alguns eventos:

   E_1 : aparecerem faces iguais: $E_1 = \{(c, c), (k, k)\}$

   E_2 : aparecer pelo menos uma cara: $E_2 = \{(c, c), (c, k), (k, c)\}$

Observação:

Notemos que no evento **C** do exemplo 1 temos $n(C) = \varnothing$, nesse caso temos um *evento impossível*, enquanto no evento **D** temos o próprio espaço amostral, nesse caso temos um *evento certo.*

3.6.4 Probabilidade de um evento ocorrer

Dado um experimento aleatório em um espaço amostral não vazio, equiprovável, a probabilidade de um evento qualquer E é o número $p(E)$, dado por:$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)})$

Observação:

- Se em um evento E, $E = \varnothing$, então $p(E) = 0$ e se $E = \Omega$, então $p(E) = 1$. Assim, a probabilidade de ocorrer um evento E qualquer é um número que varia de zero a 1, ou seja, $0 \leq p(E) \leq 1$.
- Muito usado em probabilidade a representação em forma de porcetagem, assim, temos: $0\% \leq p(E) \leq 100\%$.

Exemplos:

1. Ao lançar um dado, a probabilidade de ocorrer uma face par é encontrada da seguinte forma:

   Temos:
   $$\begin{array}{rcl} \Omega & = & \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad n(\Omega) = 6 \\ E & = & \{2, 4, 6\} \qquad n(E) = 3 \end{array}$$

   Como
   $$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

   Logo,
   $$p(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

2. Considerando todos os números de três algarismos distintos, formados a parir dos algarismos 1, 3, 5, 7 e 8. Qual a probabilidade de escolhermos entre esses números um múltiplo de 5?

   Temos o espaço amostral formado por $A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3, 60, n(\Omega) = 60$, já o evento E, "ser múltiplo de 5", ocorre quando o algarismo das unidades é 5, logo temos: $A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12, n(E) = 12$.
   Logo: $p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 20\%$.

3.7 Sequências

Alguns acontecimentos tem a capacidade de fazer com que o ser humano os veja e se importe com eles e sua ocorrência, por exemplo, a ocorrência de uma copa do mundo que aconteceu pela primeira vez em 1930 e acontece a cada quatro anos, ou mais ainda, o cometa Halley, que a cada 76 anos aproximadamente, passa perto da terra podendo ser visto.

Inúmeros problemas ganharam admiradores e em muitas situações ganham a representação numérica em forma de sequências ou sucessões que podem ser estudadas a fim de podermos "adivinhar" o que acontecerá em seguida ou que já venha a ter acontecido.

3.7.1 Sucessões ou sequências

A aparição dos cometas que passam pela Via Láctea em pontos que são visíveis a olho nu da terra. Um dos mais famosos é o Cometa Halley, que se tornou famoso por existirem relatos de suas passagens desde tempos mais remotos e seu brilho intenso.

Podemos traçar uma ordem cronológica do aparecimento desse cometa, sabendo que sua última passagem foi em 1986, da seguinte forma:

$$(1986, 2062, 2138, 2214, 2290, \ldots)$$

Representar os números dessa forma, em parênteses, nos diz que os números foram dispostos nessa ordem determinada.

Cada elemento de uma sequência ou sucessão é chamado *termo.*Temos assim 1986 como o primeiro termo, 2062 como o segundo termo e assim por diante.

É comum usar letras para representar situações em matemática, no caso das sequências, usamos uma letra minúscula acompanhada de um índice para representar a posição que o termo aparece, assim temos por exemplo: a_1 como o primeiro termo, que na situação acima ficará $a_1 = 1986$¨. Quando queremos representar um termo qualquer da sequência, utilizamos a_n, chamado-o de *n-ésimo* termo ou *termo de ordem n.* Dessa forma a sequência fica determinada com se segue $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$

No caso da sequência possui um último termo ela é dita *finita*, do contrário será *infinita* e será representada com reticências no final.

Exemplos

- sequência finita: $(1, 3, 5, 7, 9)$
- sequência finita: $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$

3.7.2 Definição de sequência

Chama-se *sequência finita* de n termos uma função f com domínio em $\mathbb{N}^* = (1, 2, 3, \ldots, n)$. Os elementos do contradomínio são representados por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$

Exemplos

1. Sequência crescente dos divisores positivos de 32:

$$(1, 2, 4, 8, 16, 32)$$

2. sequência dos múltiplos de 7 menores que 10.

$$(7)$$

3.7.3 Progressão Aritmética

Na vida real, são comuns em certas situações aparecerem problemas onde as grandezas sofrem variações iguais em intervalo de tempos iguais.

Exemplo:

Uma fábrica produziu em junho 2.000 parafusos e para poder suprir a demanda de final de ano a cada mês ela aumenta a produção em 500 parafusos. Quantos parafusos a fábrica produziu em dezembro?

Solução:

Temos os seguintes valores mensais, a partir de junho, são 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500, 5000. Em dezembro foram produzidos 5000 parafusos.

Se tivéssemos analisado que são a partir de junho, 6 meses, e como a cada mês a produção aumenta 500 unidades, bastaria calcular $6 \cdot 500 = 3000$. Assim, em dezembro a fábrica produziu $2000 + 3000 = 5000$ parafusos.

Definição:

Uma sequência numérica que, em cada termo a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado um número fixo, chamado de *razão*, é chamada de *Progressão Aritmética* **(P.A.)**

Teorema:

Dada uma P.A. de razão r, então o n-ésimo a_n termo da P.A. é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Demonstração:

Como em uma P.A. a diferença entre dois termos consecutivos é sempre igual a um mesmo valor, r no caso, temos:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= r, \\ a_3 - a_2 &= r, \\ a_4 - a_3 &= r, \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= r, \end{aligned}$$

Agora se adicionarmos essas $(n-1)$ igualdades, obtemos $a_n - a_1 = (n-1)r$, ou ainda, $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Exemplos:

No problema inicial temos, $a_1 = 2000$, $r = 500$ e $n = 7$.

Logo:

$$\begin{aligned} a_7 &= 2000 + (7-1)500 \\ &= 2000 + 6 \cdot 500 \\ &= 2000 + 3000 \\ &= 5000 \end{aligned}$$

3.7.4 Soma dos termos de uma P.A.

Em situações como a anterior as vezes não é suficiente saber apenas quantas peças a fábrica produzirá no último mês, mas também é importante saber quantas peças ao todo a fábrica produziu, sendo assim temos a sequência:

$$(2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500, 5000)$$

Teorema:

A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Demonstração:

Consideremos as somas a seguir:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

e

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_1.$$

Somando essas duas expressões, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (an - 1 + a_2) + (a_n + a_1),$$

como as somas não se alteram, pois a cada parênteses, a primeira parcela aumenta de r, enquanto a segunda parcela diminui de r. Portanto todos os parênteses são iguais ao primeiro $(a_n + a_1)$, como são n parênteses, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

ou seja:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Dessa forma a soma dos termos da sequência do problema inicial é:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \\ &= \frac{(2000 + 5000)7}{2} \\ &= \frac{7000 \cdot 7}{2} \\ &= 3500 \cdot 7 \\ &= 24500 \end{aligned}$$

4 TRUQUES, ADIVINHAÇÕES E ENIGMAS MATEMÁTICOS

Muitos problemas em matemática nos trazem mais que apenas desafios em encontrar suas soluções, eles podem nos encantar, seja pela forma com que nos é contado, seja por parecer um truque ou adivinhação que pode levar a alguns a tentar resolvê-lo não por métodos matemáticos, mas pele sede de encontrar sua resposta.

Problemas assim, podem aguçar o raciocínio e fazer as pessoas a pensarem neles durante horas ou quem sabe até dias. Poder analisar situações com ferramentas e técnicas matemáticas pode resolver esses mistérios e abrir portas para possíveis problemas mais complexos no futuro. A seguir alguns truques matemáticos, desafios e enigmas seguidos de comentários e com suas soluções.

Os próximos cinco truques e adivinhações são situações que envolvem uma oralidade em sua transmissão sendo encontrados em diversos livros e hoje também na internet em vários sites sobre problemas.

4.1 Truques numéricos

1. . Pense em um número de dois dígitos. Multiplique por 9. Adicione um número de três dígitos. Some com sua idade. Multiplique por 18. Some os dígitos do número resultante. Se for um número de um dígito, ele será o 9, se for de dois dígitos, somando os algarismos desse número, o resultado também será 9.

   Comentário:

   Inúmeros problemas desse tipo existem, quando nos deparamos com situações assim, nem sempre vemos o cálculo necessário para resolvê-lo. O objetivo do professor propor um problema desse tipo é mostrar ao aluno o caráter investigador e motivá-lo a pensar como encontrar a resposta, e como é possível a resposta ser sempre a dita pelo problema.

Esse problema se destina a alunos do ensino fundamental e médio, porém vale salientar que na demonstração do resultado o professor pode usar uma linguagem e abordagem acessível ao nível da sala, pela noção algébrica necessária para sua compreensão, bem como o uso de números decimais de dois e três dígitos. È recomendável que os alunos já saibam usar técnicas de manipulação ou que com um certo auxílio e dicas do professor os alunos possam encontrar a solução.

Problemas desse tipo não requerem materiais especiais e com o cuidado na criação de grupos, dando tarefas específicas acompanhadas de dicas, se necessário usando problemas semelhantes antes para servirem de exemplos.

Uma atenção em especial se deve ao fato do professor visualizar as dificuldades enfrentadas pelos alunos, como com relação a saber escrever números de dois ou três dígitos em uma forma algébrica incluindo a maturidade necessária para compor equações.

Podemos aqui também criar um guia, dando pistas sobre como reconhecer a forma algébrica em cada caso, dividir em etapas e testar vários números vendo semelhanças em cada caso. E depois sugerir aos alunos uma revisão dos passos e criação de situações parecidas para fixar ideias.

Uma Solução:

Dividimos em passos o problema:

i. Pense eu um número x de dois dígitos:

$$x = 10a + b, \text{Com } a = \{1,2,3,\cdots,9\} \text{ e } b = \{0,1,2,3,\cdots,9\}$$

ii. Multiplique por 9:

$$9 \cdot (10a + b)$$

iii. Adicione um número de três dígitos:
$9 \cdot (10a + b) + y$, onde $y = 100m + 10n + p$, sendo: $m = \{1,2,3,\cdots,9\}$, $n = \{0,1,2,\cdots,9\}$ e $p = \{0,1,2,\cdots,9\}$

iv. Some sua idade, z, onde $z = 10r + s$, com $r = \{1,2,3,\cdots,9\}$ e $s = \{0,1,2,\cdots,9\}$

Observação:

A idade nesse caso pode ser tomada como um número de dois dígitos, mas que possa ser estendido para um caso maior.

$$9 \cdot (10a + b) + y + z,$$

v. Multiplique por 18:

$$18 \cdot [9 \cdot (10a + b) + y + z]$$

vi. Some os dígitos do mesmo resultante.

Seja **k** esse número, assim:

$$k = 10^0 k_1 + 10^1 k_2 + 10^3 k_3 + \cdots + 10^n k_n.$$

E finalmente, teremos que:

$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n = 9 = D_1$ ou $D_2 = d_1 + 10d_2$, com $d_1 + d_2 = 9$.

Agora, verificando os passos, temos:

Seja $x = 10a + b$, com $a = \{1, 2, 3, \cdots 9\}$ e $b = \{0, 1, 2, \cdot 9\}$.

Multiplicando por 9, $9 \cdot (10a + b) = 90a + 9b$.

Somando com y, onde $y = 100m + 10n + p$,

sendo: $m = \{1, 2, 3, \cdots 9\}$, $n = \{0, 1, 2, \cdots 9\}$ e $p = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$. Temos,

$$90a + 9b + 100m + 10n + p + 10r + s.$$

Multiplicando por 18:

$$18 \cdot (90a + 9b + 100m + 10n + p + 10r + s)$$

$$1620a + 162b + 1800m + 180n + 18p + 180r + 18s$$

Reescrevendo,

$1000a + 600a + 20a + 100b + 60b + 2b + 1000m + 800m + 100n + 80n + 10p + 8p + 100r + 80r + 10s + 8s$

Reagrupando,

$k = 1000(a + m) + 100(6a + b + 8m + n + r) + 10(2a + 6b + 8n + p + 8r + s) + (2b + 8p + 8s)$

Sendo,

$k_1 = a + m$, $k_2 = 6a + b + 8m + n + r$, $k_3 = 2a + 6b + 8n + p + 8r + s$, e $k_4 = 2b + 8p + 8s$

Dessa forma:

$k_1+k_2+k_3+k_4=(a+m)+(6a+b+8m+n+r)+(2a+6b+8n+p+8r+s)+(2b+8p+8s)$

$k_1+k_2+k_3+k_4=9a+9m+9b+9n+9r+9p+9s$

$k_1+k_2+k_3+k_4=9(a+m+b+n+r+p+s)$, que é um número múltiplo de 9, ou seja, a soma de seus algarismos é múltiplo de 9.

2. Seja N um número formado por 3 algarismos consecutivos. Sejam M o número formado a partir de N invertendo a ordem dos algarismos. Subtraia o menor do maior, o resultado será sempre 198.

Comentário:

Nesse problema, o objetivo consiste em fazer o aluno pensar na impossibilidade de sempre chegar ao mesmo resultado, o número 198. Como através de passos pré-determinados, o resultado permanecerá inalterado? Após a análise do problema, concluir como se representar três números consecutivos no sistema decimal, bem como trabalhar a manipulação algébrica necessária em cada passo.

Podemos aplicar problemas desse nível nas séries finais do ensino fundamental e em todo o ensino médio, os alunos que dominarem as técnicas algébricas de montar e resolver equações podem não precisar de muito auxílio, cabe ao professor verificar o domínio da turma de tais conteúdos, uma vez que não e fazem necessários nenhum material específico para a resolução do problema, deve-se no entanto, definir sempre uma linha de raciocínio com a turma, como se necessário ter mostrado exemplos com situações que possam ajudar na descoberta do fator algébrico nesse problema.

Caso apareçam mais dificuldades, quanto a representação algébrica, alguns exemplos numéricos podem ser usados para se identificar um certo padrão. Ao final, uma verificação dos passos pode ser usada para garantir a veracidade do resultado.

Uma solução:

Primeiramente, vamos escrever os dois números N e M, com a condição de cada número ser formado por algarismos consecutivos.

Seja então $N = 10^0a + 10^1b + 10^2c$, onde $b = a+1$ e $c = a+2$. Temos assim: $M = 10^0c + 10^1b + 10^2a$.

Fazendo a diferença entre **N** e **M**:

$$N - M = (10^0a + 10^1b + 10^2c) - (10^0c + 10^1b + 10^2a),$$

Substituindo os valores de **b** e **c**,

$$\begin{aligned} N-M &= [a+(10a+10)+(100a+200)] - [(a+2)+(10a+10)+100a] \\ N-M &= (111a+210)-(111a+112) \\ N-M &= 198 \end{aligned}$$

Logo, tem-se o resultado.

3. Escolha um número entre 1 e 9. Multiplique-o por 15873 e depois por 7. O resultado obtido será um número de 6 dígitos todos iguais ao número escolhido.

Comentário:

Comentário: Esse problema possui uma característica de poder manipular os resultados com maior facilidade, por sua simplicidade, é ideal que seja utilizado como ponto de partida para trabalhar a noção de interpretação de fatos numéricos.

Sendo aplicável às séries iniciais do ensino fundamental, praticamente só se necessita do domínio da multiplicação, esse problema funciona como uma curiosidade, podendo ser usado para a busca de casos semelhantes a esse problema.

Uma Solução:

Seja x o número escolhido x; $1 \leq x \leq 9$, assim, se multiplicarmos por 15873, temos $15873x$, agora por $7, 7 \cdot 15873x$, resultando em $111111x$.

Logo, o resultado será um número composto por seis dígitos iguais a 1, que multiplicado por um número de um dígito, dará sempre um número com os seis dígitos iguais.

4. Escolha um número **abc** de três algarismos no sistema decimal, de modo que os algarismos das centenas a e o das unidades c difiram de, pelo menos, duas

unidades. Considere os números **abc** e **cba** e subtraia o menor do maior, obtendo o número **xyz**. A soma de **xyz** com **zyx** vale 1089.

Comentário:

Aqui, temos uma situação onde o objetivo é a verificação de um fato de valor algébrico, mas se antes de expor o problema, o professor fizer os alunos seguirem os passos e depois de todos encontrarem o mesmo valor, teremos a oportunidade de motivar a turma a buscar a explicação para esse fato.

Alunos do ensino médio certamente terão mais facilidade de encontrar uma explicação matemática para esse truque, mas dependendo das orientações, os alunos do ensino fundamental, também podem se sentir desafiados a encontrar outras explicações.

Necessitamos de uma maturidade maior devido aos passos exigirem maior atenção dos cálculos na forma algébrica, seguindo passos determinados pelo professor ou pela própria turma, os alunos podem chegar a encontrar uma fórmula para esse caso.

Uma Solução:

Seja x o número **abc**, podemos escrevê-lo da seguinte forma $x = abc = 100a + 10b + b$;

Tendo dois casos a considerar:

i. $a = c + 2$

ii. $c = a + 2$

Vamos considera o caso $i.$ o caso ii é análogo.

Agora escrevamos o número $y = cba$,

$$y = cba = 100c + 10b + a$$

Calculando a diferença entre x e y e a chamando de z:

$$\begin{aligned}
z &= x - y = [100(c+2) + 10b + c] - [100c + 10b + c + z] \\
z &= 100c + 200 + 10b + c - 100c - c - 2 \\
z &= 198
\end{aligned}$$

Observamos que, o resultado final independe dos algarismos iniciais, uma vez que possuíamos uma restrição para escrevê-los.

Finalizando, temos: $198 + 891 = 1089$.

5. Solicita a alguém que pense no número do mês de seu nascimento (Janeiro 1, Fevereiro 2, Março 3, ...). Em seguida peça-lhe que:

   1) Multiplique o número por 2.

   2) Some 5 ao resultado;

   3) Multiplique por 50;

   4) Some sua idade ao resultado;

   Após a pessoa lhe informar o resultado, você deve subtrair 250. Os dois últimos números do resultado final darão a idade da pessoa, enquanto o primeiro número (ou primeiros números) será o mês de nascimento. Com essa informação, fica fácil determinar o ano. Por exemplo, para uma pessoa que tem 20 anos e nasceu em janeiro, teríamos as seguintes operações:

   1) Multiplica-se 1 (Janeiro) por $2 \Rightarrow 1 \cdot 2 = 2$

   2) Soma-se por $5 \Rightarrow 2 + 5 = 7$

   3) Multiplica-se por $50 \Rightarrow 7 \cdot 50 = 350$

   4) Soma-se a idade $\Rightarrow 20 + 350 = 370$

   5) Subtrai-se $250 \Rightarrow 370 - 250 = 120$

   De 120, o primeiro número revela o mês (janeiro), e os dois últimos (20) são a idade da pessoa. Basta então deduzir o ano, de acordo com a data em que se faz a demonstração.

Comentário:

Esse truque, que mexe com o pesamento das pessoas, pois consegue-se informações pessoais serve para mostrar a eficiência do pensamento algébrico. Composto de etapas que são simples, mas com o resultado bem curioso, encontrar não só o mês que a pessoa nasceu mas também a idade.

Um problema desse tipo, ajudar a perceber a força da matemática para encontrar valores desconhecidos. Podendo ser aplicado tanto no ensino médio, quanto no fundamental, com uma ressalva, os alunos do fundamental podem não conseguir elucidar matematicamente esse fato.

Temos aqui a necessidade de saber trabalhar bem com valores desconhecidos e, utilizar o conceito de número na forma algébrica. Em situações assim, que necessitam apenas de treino e atenção, o professor pode ajudar na esquematização do problema.

Sempre que necessário, revisar as formas com que devem ser escritos os números em problemas desse tipo evitam maiores dificuldades, organizando equipes ou duplas para facilitar a interpretação dos passos, bem como uma verificação das etapas após a conclusão das mesmas.

Uma solução:

Seja x o número escolhido para representar o mês de nascimento da esposa, escrevendo x na forma algébrica, temos:

$x = 10a + b$, com $\{0,1\}$ e $b = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, onde a e b não podem ser ambos nulos.

Multiplica-se x por 2 em seguida, adiciona-se 5:

$$2(10a + b) + 5$$

Multiplica-se por 50:

$$50[2(10a + b) + 5]$$

Nesse próximo passo, pede-se a pessoa para adicionar a própria idade ao valor obtido.

Seja a idade y, escrevemos $y = 10m + n$, $m = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ e $n = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, onde m e n não podem ser ambos nulos.

Temos assim:

$$50[2(10a + b) + 5]y$$

Retira-se do resultado obtido o valor de 250, ou seja,

$$\{50[2(10a + b) + 5] + y\} - 250,$$

Substituindo-se y e efetuando os cálculos:

$\{50[20a + 2b + 5] + 10m + n\} - 250$

$\{[1000a + 100b + 250]10m + n - 250\}$

$1000a + 100b + 250 + 10m + n - 250$

$1000a + 100b + 10m + n$

$100(10a + b) + (10m + n)$

Onde vemos que o número, que fica multiplicado na casa das centenas é exatamente x, e o valor da casa das dezenas e unidades é o número que representa a idade y.

Os próximos problemas bem como algumas de suas soluções encontram-se no livro *O Enigma de Sherazade, de Raymond Smullyan.*

6. A segunda História de Abdul, o joalheiro

   "Muito interessante também!" Disse o rei, depois de Sherazade explicar a resposta correta.

   "Conta mais uma!'

   "Bem", respondeu Sherazade, "certa noite entrou um ladrão na loja de Abdul..."

   "Devia ser preso e esquartejado!" Interrompeu o rei.

   "Certo, Majestade", respondeu Sherazade, "mas, para prosseguir com minha história, o ladrão encontrou uma gaveta cheia de diamantes. Sua primeira ideia foi levá-los todos, mas foi incomodado por sua consciência e decidiu contentar-se apenas com metade."

   "Hummm!" Disse o rei.

   "E assim, pegou metade dos diamantes e foi saindo da loja."

   "Oh!" Fez o rei.

   "Mas então pensou: 'vou levar mais um', e levou."

   "Oooh!" Disse o rei.

   "E então foi embora da loja, depois de roubar metade dos diamantes e mais um."

   "E depois?" Quis saber o rei.

   "Estranhamente, poucos minutos depois, um segundo ladrão entrou na loja e pegou metade dos diamantes restantes e mais um. Depois um terceiro ladrão entrou na loja e pegou metade dos diamantes que restavam e mais um. Depois entrou um quarto ladrão, pegando metade do resto e mais um. Depois um quinto, que não pegou nada porque todos os diamantes já tinham sido levados."

   "E qual é o problema?" Perguntou o rei.

   "O problema", respondeu ela, 'é saber quantos diamantes havia inicialmente na gaveta.'

“E como é que vou saber?”

“Não é difícil de calcular”, respondeu ela.

Quantos diamantes havia na gaveta?

Comentário:

Temos aqui uma situação que envolve um enigma. Aqui, os personagens conversam a cerca de uma joalheria, que foi roubada de uma maneira bastante peculiar. Nessa situação específica, o leitor, verá um padrão, sendo interessante haver uma leitura cuidadosa do texto.

Embora o caráter matemático aparece já preliminarmente, os métodos de tentativa e erro são e devem ser empregados a fim de criar uma empatia maior pelo problema. Levar a explicar o problema por um raciocínio lógico deve ser a principal preocupação do professor frente a seus alunos e, a partir daí, ir para a escrita algébrica.

Problemas assim, até podem ser usados no ensino fundamental, porém espera-se que no ensino médio seja mais fácil para os alunos procurarem uma resposta algébrica. Problemas desse tipo necessitam apenas de imaginação, paciência e determinação dos alunos e professores. Uma vez que os mesmos possuam certo domínio algébrico e meios para interpretação do mesmo.

Devem aparecer problemas para os alunos que tenham dificuldades em problemas mais longos e ainda acompanhados de frações, devido aos passos que necessitam constantemente desse tipo de cálculo.

É interessante, ao final do problema comparar os passos e verificar como cada ato do problema aconteceu, lembrando que sempre devemos ter números inteiros, e aparecem muitas frações no problema, e é possível que em algumas das passagens haja erros.

Uma solução:

Seja x o número total de diamantes na gaveta da joalheria, lembrando que $x \in \mathbb{N}$. como o primeiro ladrão leva consigo metade do número de diamantes acrescido de um, temos:

1º Ladrão: $\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$, logo:

Agora o segundo ladrão leva consigo a mesma quantidade, metade do que havia mais um, então o passo seguinte é calcular quantos diamantes foram levados, o que havia no início x, menos o que o primeiro ladrão levou $\left(\frac{x}{2}+1\right)$, logo restam:

$$x-\left(\frac{x}{2}+1\right)=x-\frac{x}{2}-1=\left(\frac{x}{2}-1\right).$$

Restam assim $\left(\frac{x}{2}-1\right)$ diamantes.

Entrando o segundo ladrão, que efetua o mesmo procedimento do primeiro ladrão, ou seja, levando metade do que havia mais uma unidade, temos:

2º Ladrão: $\frac{\left(\frac{x}{2}-1\right)}{2}+1=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}+1=\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)$

Assim, restam agora: $\left(\frac{x}{2}+1\right)-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{2}\right)$

Entrando o terceiro ladrão que leva metade do que resta mais um diamante,

3º Ladrão : $\frac{\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{2}\right)}{2}+1=\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{4}\right)$

Restam: $\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{4}\right)$

O quarto ladrão então:

4º ladrão: $\frac{\left(\frac{x}{8}-\frac{7}{4}\right)}{2}+1=\left(\frac{x}{16}+\frac{1}{8}\right)$

Restando zero diamantes, ou seja, o quinto ladrão não levou nada.

Podemos então somando as quantias levadas e escrever a equação:

$$\left(\frac{x}{2}+1\right)+\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{x}{16}+\frac{1}{8}\right)+0=x$$

$\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{1}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{8}=x$, reduzindo todos ao mesmo denominador,

temos:

$\left(\frac{8x}{16}+\frac{16}{16}\right)+\left(\frac{4x}{16}+\frac{8}{16}\right)+\left(\frac{2x}{16}+\frac{4}{16}\right)+\left(\frac{x}{16}+\frac{2}{16}\right)=\frac{16x}{16}$, logo temos:

$15x+30=16x$, ou seja,

$x=30$

7. Abdul e os dez ladrões

"Noutra ocasião", disse Sherazade, "dez ladrões entraram na loja de Abdul. Uns estavam armados e outros desarmados. Os ladrões armados eram mais graduados. De qualquer maneira, roubaram um saco com cinquenta e seis pérolas. Na hora de dividir o roubo, cada ladrão mais graduado ficou com seis pérolas, e cada ladrão comum com cinco. Quantos dos ladrões estavam armados?"

Comentários:

Nesse problema, novamente a história se faz importante para a utilização de conceitos matemáticos, aqui temos um problema que envolve uma variável a mais, devido a necessidade de encontrar a quantidade de ladrões dos dois tipos, mesmo o problema pedindo apenas a quantidade de ladrões armados.

Como sistemas de equações são comumente ensinados a partir do sétimo ano do ensino fundamental, esse problema pode ser apresentado em qualquer ano após esse período, mesmo no ensino médio esse problema pode ser introduzido devido a sua história e necessidades algébricas de resolução, podendo ser abordado quando se trabalha sistemas lineares no ensino médio.

Aqui, precisamos dos conhecimentos básicos de resolução de sistemas de equações, mas nada impede do professor solicitar outros meios de resoluções, a resolução mental deve sempre ser incentivada. Esse problema pode ser resolvido individualmente uma vez que os alunos já reconheçam métodos de resolução de sistemas.

A menos que os alunos não dominem as formas de resolução de sistemas, podem aparecer dificuldades, ou mesmo na interpretação por parte de alguns. A final, a verificação deve ser encorajada para fixar as ideias.

Uma Solução:

O primeiro passo aqui é identificar as quantidades desconhecidas, no caso os dois tipos de ladrões os armados e os desarmados, depois escrever duas equações.

Seja x os ladrões armados e y os ladrões desarmados. Como entraram dez ladrões temos:

$$x + y = 10$$

Agora, as outras informações a cerca do roubo são: foram levadas 56 pérolas, cada ladrão armado levou consigo 6 pérolas enquanto os demais 5 cada. Temos assim a outra equação:

$$6x + 5y = 56$$

Usando as duas equações:

$$\begin{cases} x+y & = & 10 \\ 6x+5y & = & 56 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos, $x = 6$ e $y = 4$.

Logo foram 6 ladrões armados.

8. "Agora uma história mais feliz", disse Sherazade. "Certo dia, um homem trouxe cinquenta e nove pedras preciosas para vender a Abdul. Algumas delas eram esmeraldas, e as outras rubis. As pedras vinham guardadas em sacos separados, nove esmeraldas em cada saco de esmeraldas e quatro rubis em cada saco de rubis. Quantas das pedras eram rubis?"

Comentários:

Esse problema pode ser mais curioso se aplicado próximo ao anterior. Aqui o objetivo é atentar para a "ausência" da segunda equação. Podendo confundir muitos alunos.

Podendo ser aplicável a partir do sétimo ano do ensino fundamental, ele consiste em trabalhar a percepção para encontrar uma solução através de tentativa, uma vez que não se espera que alunos do ensino médio e fundamental usem o método de equações diofantinas.

É importante que os alunos já reconheçam e saibam resolver sistemas de equações lineares, pois aqui mesmo instigados a resolver mentalmente o problema, o professor pode orientar um caminho matemático para sua solução, ou mesmo pedir aos alunos um modo de raciocinar.

Nesse caso, se algum recurso material puder ser usado a fim de refazer a situação, ele pode ser bem utilizado, embora as dificuldades serão maiores que os problemas que envolvem duas equações. Mas com o método de verificação os alunos podem chegar a uma conclusão.

Uma Solução:

Primeiramente, sejam x o número total de esmeraldas e y o número total de rubis. Como foram trazidas a Abdul 59 pedras temos a equação:

$$9x + 4y = 59$$

A equação acima é uma equação da forma:

$$aX + bY = c,$$

com $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Essas equações são chamadas de Equações Diofantinas Lineares.

Observe que a equação tem solução, pois $(9,4) \mid 59$. E $d = (9,4) = 1$

Vamos, agora determinar uma solução particular pelo algoritmo euclidiano.

$9 = 4 \cdot 2 + 1$

$1 = 9 - 4 \cdot 2$ multiplicando por 59, temos:

$59 = 9 \cdot (59) + 4 \cdot (-118)$.

Temos, assim as soluções particulares, $x_0 = 59$ e $y_0 = -118$.

A solução são da forma:

$x = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, assim ficamos com as seguintes equações: $x = 59 + 4t$ e $y = -118 - 9t$ onde $t \in \mathbb{Z}$.

Como nosso problema só tem sentido para valores positivos vamos procurar $t \in \mathbb{Z}$, tal que t as soluções sejam positivas.

Fazendo $x > 0$ e $y > 0$ temos:

$59 + 4t > 0$ e $-118 - 9t > 0$ encontramos $t = -14$.

Substituindo nas soluções, temos finalmente:

$$x = 3 \qquad \text{e} \qquad y = 8$$

Portanto, são 3 sacos com 9 esmeraldas e 8 sacos com 4 rubis cada, totalizando 27 esmeraldas e 32 rubis.

9. As três arcas

Sherazade começou: “Auspicioso Monarca! Abdul, o joalheiro, tem em casa três arcas, cada uma com duas gavetas. Numa das arcas, as duas gavetas contém, cada uma, um rubi. Na segunda arca, cada uma das duas gavetas uma esmeralda e, na terceira, uma das gavetas contém um rubi e a outra, uma esmeralda. Vamos supor que Vossa Majestade escolha uma das arcas ao acaso, abrindo uma das gavetas e encontrando um rubi. Qual é a probabilidade de que a outra gaveta da mesma arca também contenha um rubi?”

“Deixe-me ver”, respondeu o rei, e refletiu por algum tempo. “Ah, sim, as chances são de cinquenta por cento.”

“Porquê” Perguntou Sherazade.

“Porque, tendo aberto uma gaveta e encontrado um rubi, a arca com as duas esmeraldas está eliminada, e nesse caso só posso ter escolhido a arca com as duas pedras diferentes ou então a arca com os dois rubis, e portanto as chances são de uma em duas.”

O rei estava certo?

Comentários:

Situações onde se tentam adivinhar certos resultados são muito comuns nos populares jogos de azar. Mas para não tentar em vão adivinhar algo, deve-se antes entender qual a chance de se acertar, ou de acontecer o desejado.

Precisamos entender alguns conceitos básicos para não cair em truques onde seja quase impossível prever o resultado, devemos saber se as chances de um certo evento são as mesmas para sua ocorrência. Nesse problema, destinado aos alunos do ensino médio, que possuem em sua grade curricular esse conteúdo.

Os alunos devem já entender o conceito de probabilidade, bem como, espaço amostral e eventos. Analisar em uma situação, quando o espaço amostral muda e assim poder enterder se o evento tem mais ou menos chances de ocorrer.

Muitos problemas sobre probabilidade, tem sua maior dificuldade no contexto da interpretação, levando a cometer muitos erros. Ao término do problema tentar repetir se possível a situação algumas vezes e anotando seus resultados possibilita uma maior aceitação de situaçõe mais simples, tornando a resposta algo crível, para que em problemas mais complexos onde não se possa refazer o experimento não sejam ignorados nem entendidos.

Uma Solução:

Para a primeira, gaveta temos um espaço amostral com seis possibilidades, e com três rubis, logo a probabilidade é 1 em 2.

Porém, como a primeira pedra retirada foi um rubi, a urna com esmeralda não fará parte mais do espaço amostral, sendo a arca RR (rubi, rubi) e a arca 2 RE (rubi esmeralda). Como uma gaveta está aberta, restam três gavetas que é o espaço amostral, como restam dois rubis, temos como resposta, 2 em 3.

Assim:$p(R) = \frac{2}{3}$

10. Um aluno Esperto

“E agora”, disse Sherazade, “eu gostaria de propor um problema sobre um importante fato matemático. É sobre um garoto que, certo dia, comportou-se muito mal na aula. Para castigá-lo, seus professores mandaram que ele somasse todos os números de um a mil.”

“Deve ter levado muito tempo!” Comentou o rei.

“Só que o garoto era muito esperto, e deu a resposta em poucos segundos”, disse Sherazade.

“Hummm!” Duvidou o rei.

Como é que o menino pode ter respondido tão depressa?

Comentário:

Esse problema, muito conhecido através da história de um grande matemático Carl Friedrich Gauss, é uma tentativa do poder de manipulação matemática, de encontrar um meio de efetuar um trabalho gigantesco rápido, por meio de uma técnica.

Deve-se propor um problema como esse com bastante atenção, pois aos alunos que não tem ainda a noção de sequências nem de progressões podem achar que não há maneira de resolver tal situação a não ser efetuando os cálculos. Enquanto que se os alunos já viram sequências, em especial as progressões aritméticas e suas somas, esse problema pode ser simplesmente uma aplicação de fórmulas. Portanto mesmo aplicado no ensino médio quanto no fundamental o professor deve verificar antes qual o interesse da turma com um problema desse tipo.

O problema se apresenta mais atraente devido estar inserido em um contexto, então cabe ao professor verificar as condições necessárias para a resolução do problema, aqui temos a necessidade dos alunos escreverem as sequências de forma a observar o início, o fim e o meio para saber o comportamento da sequência como um todo, pode-se aplicar antes algum exercício que force os alunos a associarem números para efetuarem somas, a fim de possibilitar o despertar do método que se deseja aplicar.

Mesmo sabendo que aplicando uma técnica o problema se resolve facilmente, o professor tem que estar preparado para as dificuldades, pois nesse caso, ter a ideia de abordar o problema é bastante sutil, o professor pode ajudar mas sem interferir ou dizer especificamente como encontrar o valor procurado.

Por fim, usar o algorítimo em casos menores que possam ser verificados a mão para mostrar o poder que ele possui, principalmente frente a grande operações. Conseguir generalizar esse resultado é uma forma de mostra que a partir do raciocínio e observação podemos concluir fatos importantes.

Uma solução:

Observemos que a sequência de números que se apresenta é da seguinte forma:

$$1+2+3+4+\ldots+998+999+1000$$

Assim, vemos que a soma é dos termos de uma sequência como dada abaixo:

$$(1,2,3,\ldots 998,999,1000)$$

Portanto, temos o primeiro termo $a_1 = 1$, como segundo termo temos $a_2 = 2$ seguindo esse raciocínio temos o milésimo termo $a_{1000} = 1000$.

Logo, a sequência é uma progressão aritmética (P.A.) de razão 1, que possui mil termos.

Usando a fórmula da soma dos termos de uma P.A. temos:

$$S = \frac{n(n-1)}{2}$$

Substituindo os valores, vamos ficar com:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1000(1000-1)}{2} \\ &= \frac{1000}{999} \\ &= \frac{999000}{2} \\ &= 499500 \end{aligned}$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A forma com que são tratados os problemas em matemática ainda está longe de agradar a professores e alunos, pois muitos são as dificuldades encontradas em sala de aula. Cabe a toda a sociedade se unir e fortalecer o prazer pelos estudos não só em matemática.

Nessa pesquisa, procuramos refletir sobre o ensino da matemática e sua relação com a educação, para conseguir alcançar os objetivos com a matemática em particular precisamos pensar na educação como um todo em nossas escolas no Brasil. A partir daí, traçar metas individuais de ensino, fazer da busca de conhecimento um apoio para os professores que assim poderão trabalhar com mais seriedade e segurança.

Também atentamos para a forma com que os problemas em matemática são geralmente vistos pelos alunos e alguns professores, como algo ruim que devemos evitar, mas devemos a partir deles traçar meios de resolvê-los por completo ou por partes, com base em modelos aprender a tratar de cada situação de forma específica, enfim, procurar métodos que se apliquem às nossas necessidades em vez de fugir e ignorá-los.

Com relação a parte matemática, fizemos um resumo de fatos importantes que o professor deve conhecer para tratar as diversas situações aqui apresentadas com maior segurança. Uma vez que o professor conhece como cada conteúdo se comporta nas mais diversas situações permite que ele possa sempre acrescentar algo ao aluno que não contenha no livro, que o professor faça do conteúdo que já domina como uma ferramenta ao seu favor, fazendo o aluno ser levado por ele a buscar e querer aquele conhecimento.

Na parte dos problemas, esperamos que os mesmos tenham servido para ilustrar formas mais atrativas de como motivar os alunos, pois se compararmos um professor a um vendedor, ambos devem conseguir atenção dos seus clientes, embora sabemos que o professor não é culpado pela falta de motivação e interesse dos alunos, mas se como um vendedor ele conseguir uma boa propaganda do seu conteúdo, tanto o aluno como o professor saem ganhando, pois sabemos como é melhor ensinar a quem tem sede de aprender, sendo assim porque não procurar estratégias para conseguir mostrar a importância do que se ensina?

Dessa forma, esperamos que tanto professores como alunos se sintam instigados a buscar novas formas de ver a matemática, que a beleza dessa matéria possa ser passada de forma tradicional, porém, que se passada de forma mais atrativa, possa contribuir com novas pesquisas e melhorar a forma com que se ensina e aprende as suas descobertas.

REFERÊNCIAS

Disponivel http://www.somatematica.com.br/frases.php Acesso 14:37 DIA 03/06/2014.

LIMA, Elon Lages **Matemática e ensino**, 3. ed. Coleção do professor de matemática,SBM. Rio de janeiro.

Boletim 06, maio de 2005:**Matemática não é problema**. Salto para o futuro, TV Escola.

POLYA G,**A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático**: tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. - 2 reimp. - Rio de janeiro: Interciência 1995

IEZZI, G.;DOLCE, O.; MACHADO, **A Matemática e Realidade**, 6ª série.-5. ed. -São Paulo: Atual, 2005. pag.168

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins, FERNADEZ, Adán Jose Corcho.**Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**.2ª ed. - Rio de janeiro: SBM. 2010.(Coleção Olimpíadas de Matemática;1)

LIMA E. L.; CARVALHO P.C.P.;WAGNER E.;MORGADO A.C.**A Matemática do Ensino Médio**. Vol.3 - 6. ed. Rio de Janeiro: SBM. 2006 (Coleção do professor de matemática)

GIOVANNI, José Ruy; **Aprendendo Matemática: novo**. -São Paulo: FTD, 2002. -(Coleção aprendendo matemática. Novo)

HEFEZ, Abramo **Elementos de Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro:SBM, 2001. (Coleção do professor de matemática; 2)

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO José Roberto **Matemática completa**. - 2.ed. Renov. - São Paulo: FTD, 2005. - (Coleção matemática completa) volumes 1 e 2

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: ciência e linguagem**: volume único. - São Paulo: Scipione, 2007.

Truques, adivinhações e enigmas.site: http://www.somatematica.com.br/desafios .php#;problemas (1,2,3 e 5) data: 05/04/2014, acesso 15hrs

HEFEZ, Abramo. **Elementos de aritmética**. 2. ed. Rio Janeiro: SBM,2001problema 4.1.4, pag 49.(problema 4)

SMULLYAN, Raymond. **O enigma de Sherazade; e outros incríveis problemas das Mil e uma noites à lógica moderna**;tradução, Sérgio Flaksman; revisão técnica, luiz Carlos Pereira. - Rio de Janeiro: Jorge zahar Ed., 1998) problemas 5,7,8, 43 e 73 paginas 15,16,17,31 e 42 respectivamente.

ANEXO 1

Como resolver um problema

Primeiro

É preciso compreender o problema.

Compreensão do problema

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?
Trace uma figura. Adote uma notação adequada.
Separe as diversas parte da condicionante. É possível anotá-las?

Segundo

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um *plano* para a resolução.

Estabelecimento de um plano

Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?
Conhece algum problema correlato? Conhece algum problema que lhe poderia ser útil?
Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.
Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

É possível reformular o problema? É possível reformula-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.
Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema?
Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos de si?

Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

Terceiro

Execute o seu plano.

Execução do plano

Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo.* É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

Quarto

Examine a solução obtida.

Retrospecto

É possível *verificar o resultado?* É possível verificar o argumento? É possível chegar a resultado por um caminho diferente? É possível perceber isso num relance? É possível utilizar o resultado, ou método, em algum outro problema?