



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JEAN CARLOS FIDELES DE SOUSA

SOBRE EQUAÇÕES E FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA, UMA ANÁLISE DE
ERROS

JUAZEIRO DO NORTE

2014

JEAN CARLOS FIDELES DE SOUSA

**SOBRE EQUAÇÕES E FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA, UMA ANÁLISE DE
ERROS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa.

JUAZEIRO DO NORTE

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri

-
- S725s Sousa, Jean Carlos Fideles de
 Sobre equações e funções na educação básica, uma análise de erros / Jean Carlos Fideles de Sousa. – 2014.
 46f. il. color, enc.; 30 cm.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.
 Área de concentração: Ensino de Matemática
 Orientação: Prof^ª. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa
1. Equação. 2. Função. 3. Zero. I. Título.

CDD 510.07

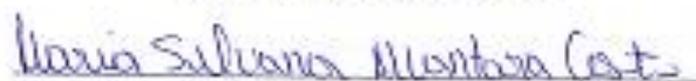
JEAN CARLOS FIDELES DE SOUSA

SOBRE EQUAÇÕES E FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA, UMA ANÁLISE DE
ERROS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

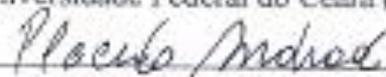
Aprovada em: 25 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA



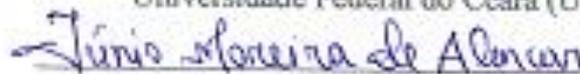
Profª. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa (Orientadora)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Ms. Junio Moreira de Alencar

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais,
minha esposa e a meus filhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus por guiar minha vida e pelas bênçãos a mim concedidas.

A toda minha família, em especial a meus pais, Francisco Cleilton e Antonia Fideles; a minha esposa Raimunda Nascimento e a meus filhos Rebeca e Davi.

Aos meus amigos e colegas de trabalho, que me ajudaram e encorajaram a sempre persistir.

A minha Orientadora Prof^ª. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa por dedicar seu tempo e conhecimento a minha orientação.

Aos professores: Dr. Placido Francisco de Assis Andrade e Ms. Júnio Moreira de Alencar por participarem da Banca Examinadora e pelas contribuições a este trabalho.

Aos meus alunos, pelo apoio e incentivo, em especial aos que participaram das atividades deste trabalho.

Aos meus colegas de turma, com quem tive o prazer de conviver neste árduo período.

A todos os que fazem parte da Escola de Ensino Médio Gabriel Bezerra de Moraes. A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

E a todos que direta ou indiretamente, mesmo não citados aqui, foram de grande contribuição para este trabalho.

*Os erros são complexos: Eles não têm, jamais,
uma única causa. Eles colocam em jogo
numerosos parâmetros.*

Stella Baruk

RESUMO

Neste trabalho, fizemos um breve estudo sobre a função afim, a equação do primeiro grau e uma análise sobre os principais erros cometidos por alunos na resolução destas. Inicialmente apresentamos o corpo dos números reais, em sequência estudamos a função afim, a qual tem este conjunto como domínio, e mostramos que seu gráfico é uma reta. Para calcular o zero da função afim, nos deparamos com uma equação do primeiro grau; assim, na seção seguinte, apresentamos brevemente a equação do primeiro grau. No capítulo dois, apresentamos os resultados obtidos pela pesquisa realizada em uma escola pública, e nele apontamos os principais erros cometidos pelos alunos na compreensão desses dois conceitos: equação e função.

Palavras-chave: Equação. Zero. Função. Gráfico. Erros.

ABSTRACT

In this work we made a brief study of the affine function, the equation of the first degree and an analysis of the major mistakes made by students in addressing these. Initially we present the field of real numbers, we study the following affine function, which has this set as domain, and show that its graph is a straight line. To calculate the zero affine function faced with an equation of the first degree, so in the next section, we briefly present the equation of the first degree. In chapter two we present the results obtained from the survey conducted in a public school, and it pointed out the mistakes made by students in the understanding of these two concepts of equation and function.

Keywords: Equation. Zero. Function. Graph. Errors.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1:	Análise por questões.....	32
Gráfico 2:	Comparativo função e equação.....	33
Gráfico 3:	Erros por categorias.....	35

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
2	O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS.....	12
2.1	Números reais.....	12
2.2	Funções e gráficos.....	14
2.2.1	<i>Função afim.....</i>	16
2.2.2	<i>O gráfico da função afim.....</i>	17
2.2.3	<i>Função linear e proporcionalidade.....</i>	21
2.2.4	<i>Gráfico da função linear.....</i>	21
2.2.5	<i>Gráfico da função constante.....</i>	22
2.2.6	<i>Raiz da função afim.....</i>	22
2.2.7	<i>Equação do primeiro grau.....</i>	25
2.2.8	<i>Um pouco de história.....</i>	28
3	SOBRE A PESQUISA E ANÁLISE DOS ERROS.....	30
3.1	Sobre a amostra.....	30
3.2	Análise dos resultados.....	30
3.2.1	<i>Categorias de erros.....</i>	34
3.2.2	<i>Análise das categorias.....</i>	36
3.2.3	<i>Análise na construção de gráficos.....</i>	41
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	45
	REFERÊNCIAS.....	46

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, fizemos um breve estudo sobre a função afim, a equação do primeiro grau e uma análise sobre os principais erros cometidos por alunos na resolução destas. Para isso apresentamos inicialmente o conjunto dos números com uma estrutura de corpo. Enfatizamos as propriedades como existência de inverso e elemento neutro, pois estas aparecem com frequência na resolução de equações. Em sequência, temos a função afim que tem como domínio o conjunto dos números reais. Mostramos que o gráfico desta função é uma reta. Um aspecto que destacamos são os pontos onde esta função toca os eixos coordenados. Em particular o eixo das abscissas. É neste ponto que fazemos a ligação entre função e equação. Tendo em vista que uma equação é uma maneira de resolver situações nas quais surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade, então determinar o ponto onde a função afim toca o eixo das abscissas é solucionar uma equação de primeiro grau. No capítulo dois, fizemos uma análise sobre os erros cometidos pelos alunos ao trabalhar com equação e função afim. Para a análise, aplicamos uma avaliação para um grupo de alunos que, para a solução das questões, seria necessário o conhecimento das propriedades dos números reais, função afim e equação. Posteriormente apresentamos os principais erros cometidos na solução das questões e uma análise sobre esses erros; dentre eles, destacamos a falta de conhecimentos das propriedades de números reais e a má compreensão dos conceitos.

2 O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

2.1 Números Reais

O conjunto dos números reais será denotado por \mathbb{R} e nele estão definidas duas operações, adição (+) e multiplicação (.). A adição associa a cada par (x, y) de números reais um único número real indicado por $x + y$, a multiplicação, um único real indicado por $x.y$. As operações de adição e multiplicação definidas em \mathbb{R} satisfazem as seguintes propriedades:

Se x, y, z são números reais quaisquer, temos:

Associativa da adição

$$(A1) (x + y) + z = x + (y + z)$$

Comutativa da adição

$$(A2) x + y = y + x$$

Existência de elemento neutro da adição

$$(A3) x + 0 = x$$

Existência de oposto da adição

(A4) Para todo real x existe um único real y tal que $x + y = 0$. Tal y denomina-se oposto de x e indica-se por $-x$. Assim, $x + (-x) = 0$

Associativa da multiplicação

$$(M1) (xy)z = x(yz)$$

Comutativa da multiplicação

$$(M2) xy = yx$$

Existência de elemento neutro da multiplicação

$$(M3) x.1 = x$$

Existência de inverso

(M4) Para todo real $x \neq 0$ existe um único real y tal que $x.y = 1$. Tal y denomina-se

inverso de x e indica-se por $\frac{1}{x}$. Assim $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

Distributiva da multiplicação em relação à adição

$$(D) x(y + z) = xy + xz$$

Observe que a adição associa a cada par de números reais um único número real, assim, se $x = y$ e $z = w$, então $x + z = y + w$; em particular, se $x = y$, então $x + z = y + z$ para todo z , o que significa que, somando a ambos os membros de uma igualdade um mesmo número, a igualdade se mantém. De forma similar tem-se que a multiplicando a ambos os membros de uma igualdade um mesmo número, a igualdade se mantém.

Exemplo 1: (Lei do cancelamento) Quaisquer que sejam os reais x, y, z

$$x + z = y + z \rightarrow x = y.$$

Solução. Suponha que

$$x + z = y + z.$$

Como todo número real z admite oposto $-z$ então somando $-z$ a ambos os membros da igualdade acima temos

$$(x + z) + (-z) = (y + z) + (-z).$$

Pela propriedade associativa (A1) da adição

$$x + [z + (-z)] = y + [z + (-z)].$$

Como $z + (-z) = 0$, segue que

$$x + 0 = y + 0.$$

Ou seja,

$$x = y.$$

Exemplo 2: Quaisquer que sejam os reais x, y e $z \neq 0$

$$x \cdot z = y \cdot z \leftrightarrow x = y.$$

Solução. Se $z \neq 0$ então z admite um inverso multiplicativo, isto é, existe um único número $\frac{1}{z}$ tal que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$. Multiplicando $\frac{1}{z}$ a ambos os membros da igualdade

$$(x \cdot z) \frac{1}{z} = (y \cdot z) \frac{1}{z}.$$

Aplicando a propriedade associativa

$$x \cdot (z \cdot \frac{1}{z}) = y \cdot (z \cdot \frac{1}{z}).$$

Daí,

$$x \cdot 1 = y \cdot 1.$$

Ou seja,

$$x = y.$$

Assim

$$x \cdot z = y \cdot z \leftrightarrow x = y, \text{ se } z \neq 0.$$

2.2 Funções e Gráficos

Antes de apresentarmos a Função Afim, falaremos um pouco sobre funções. Entendemos por uma função f uma terna

$$(A, B, a \rightarrow b),$$

onde A e B são dois conjuntos e $a \rightarrow b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento

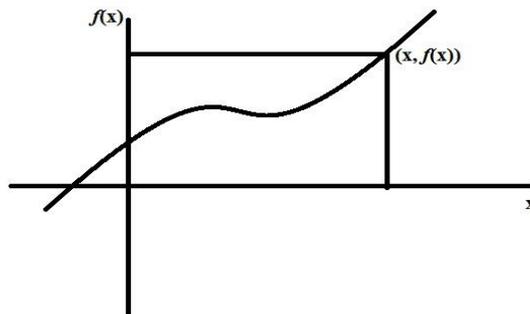
$a \in A$ um único $b \in B$. O conjunto A é o domínio de f e indica-se por Df , assim $A = Df$. O conjunto B é o contradomínio de f . O único $b \in B$ associado ao elemento $a \in A$ é indicado por $f(a)$; diremos que $f(a)$ é o valor que f assume em a ou que $f(a)$ é o valor que f associa ao número real $a \in Df$.

Uma função f de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por $f: A \rightarrow B$.

O gráfico de f é o conjunto

$$Gf = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

Assim, o gráfico de f é um subconjunto de todos pares ordenados (x, y) de números reais tais que $y = f(x)$. Munido-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode ser pensado como um lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f .



Representaremos uma função f de uma variável real a valores reais e com domínio A , simplesmente por

$$y = f(x), x \in A.$$

Neste caso, diremos que x é a variável independente, e y , a variável dependente; e usualmente dizemos que y é função de x .

2.2.1 Função afim

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = ax + b \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Algumas funções afins ainda possuem nomes particulares dependendo de suas características especiais, por exemplo:

Função identidade $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Função translação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Função linear $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Função constante $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$.

Uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$ quando $x = 0$ teremos:

$$f(0) = 0 \cdot x + b \therefore$$

$$f(0) = b.$$

Outra característica da função afim é sua taxa de crescimento (taxa de variação) no intervalo $[x_1, x_2]$, com $x_1 \neq x_2$ a qual é dada por

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Conhecendo a imagem de dois pontos arbitrários x_1 e x_2 , ou seja, conhecendo os valores que a função f assume em dois pontos distintos, temos que:

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad \text{e} \quad f(x_2) = ax_2 + b.$$

Logo

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) \therefore$$

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - ax_1 - b \therefore$$

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1 + b - b \therefore$$

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1 \quad \therefore$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) \quad \therefore$$

Portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Assim o número a chama-se taxa de crescimento (taxa de variação) da função f .

Em uma função afim dizemos que ela é *crecente* quando sua taxa de crescimento (coeficiente a) é positiva, e é *decrecente* quando a for negativo. Quando $a = 0$ chamamos de função constante.

Lembrando que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ com $U \subset \mathbb{R}$ chama-se:

Crecente quando $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Decrecente quando $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Monótona não-decrecente quando $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Monótona não-crecente quando $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Também há funções que não se enquadram em nenhuma dessas quatro categorias.

2.2.2 O gráfico de uma função afim

Vejamos o que acontece com 3 pontos quaisquer de uma função $f: x \rightarrow ax + b$;

Admitindo:

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b)$$

$$P_2 = (x_2, ax_2 + b)$$

$$P_3 = (x_3, ax_3 + b).$$

Vamos supor que as abscissas x_1, x_2 e x_3 foram numeradas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$.

A partir da fórmula da distância entre dois pontos teremos que

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} \therefore$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b - ax_1 - b)]^2} \therefore$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 - ax_1 + b - b)]^2} \therefore$$

$$\begin{aligned}
d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [ax_2 - ax_1]^2} \therefore \\
d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [a(x_2 - x_1)]^2} \therefore \\
d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \therefore \\
d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2(a^2 + 1)} \therefore \\
d(P_1, P_2) &= (x_2 - x_1)\sqrt{(a^2 + 1)}. \tag{1}
\end{aligned}$$

De modo análogo

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{(a^2 + 1)} \tag{2}$$

$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{(a^2 + 1)}. \tag{3}$$

Adicionando as equações (1) e (2) obtemos

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (x_2 - x_1)\sqrt{(a^2 + 1)} + (x_3 - x_2)\sqrt{(a^2 + 1)} \therefore$$

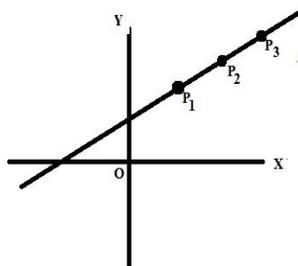
$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2 + x_2 - x_1)\sqrt{(a^2 + 1)} \therefore$$

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{(a^2 + 1)}.$$

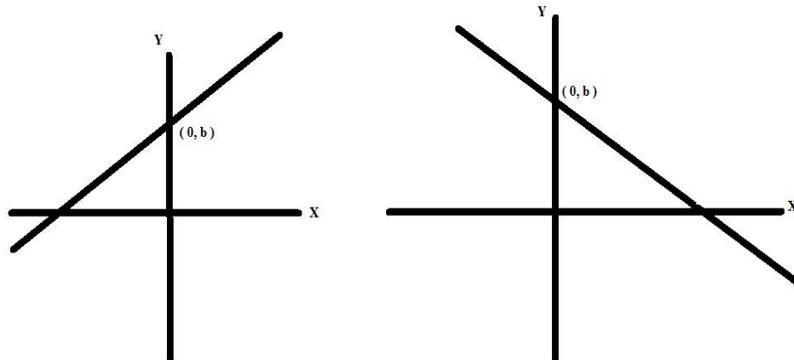
Como a segunda parte é igual a (3), segue que

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3).$$

Como admitimos anteriormente que $x_1 < x_2 < x_3$ então para que os pontos do gráfico de f estejam alinhados é necessário e suficiente que a maior das três distâncias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ ou $d(P_1, P_3)$, seja igual a soma das outras duas, o que ocorreu anteriormente, portanto, quaisquer três pontos da função linear estão alinhados, e seu gráfico é uma reta.



Seja $f(x) = ax + b$, então fazendo $x = 0$, temos $b = f(0)$ Observando o gráfico abaixo



Temos que b é a ordenada do ponto onde o gráfico da função f intersecta o eixo OY , e o a como vimos anteriormente (taxa de variação) chamamos no gráfico de inclinação ou coeficiente angular dessa reta, em relação ao eixo OX , pois ela é a tangente trigonométrica do ângulo do eixo OX com a reta r . Quanto maior o valor absoluto de a mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$ o gráfico é uma reta ascendente e quando $a < 0$, a reta é descendente.

Para determinar o gráfico de f , basta conhecer dois valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a mesma assume quando $x_1 \neq x_2$ para que f fique inteiramente determinada, pois como seu gráfico é uma linha reta, a mesma fica inteiramente determinada quando se conhece dois de seus pontos.

Vejam agora como determinar os coeficientes a e b de uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Considere $f(x) = ax + b$, ou seja, $f(x) = y$, para todo $x \in \mathbb{R}$, logo se conhecemos dois valores $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ com $x_1 \neq x_2$ teremos então um sistema de equações

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

onde as incógnitas são a e b . Multiplicando a segunda equação por -1 e adicionando com a primeira teremos:

$$a(x_1 - x_2) = y_1 - y_2.$$

Multiplicando por (-1)

$$-a(x_1 - x_2) = -(y_1 - y_2) \div$$

$$a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \div$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Substituindo o valor de a em uma das equações iniciais do sistema obtemos

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Que é possível para $x_1 \neq x_2$

Lema: *Toda reta não-vertical é gráfico de uma função afim.*

Prova. Tome dois pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pertencentes a reta r . Como r não é vertical, temos necessariamente que $x_1 \neq x_2$, logo existe uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. O gráfico de f é uma reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 , logo essa reta coincide com r . Se $f(x) = ax + b$, então, $y = ax + b$ é a equação da reta r . Se a reta r é o gráfico a função afim f dado por $f(x) = ax + b$, e o coeficiente $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos distintos quaisquer de r , tem claramente o significado de taxa de crescimento de f ; então a equação da reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , não vertical é

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1),$$

ou

$$y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_2)$$



2.2.3 Função linear e proporcionalidade

O modelo matemático para os problemas de proporcionalidade é a função linear

$$f(x) = ax.$$

Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c, x tem-se $f(cx) = c.f(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

Como na proporcionalidade $f(cx) = c.f(x)$ para todo c e todo x então, escrevendo $a = f(1)$, temos que

$$f(c) = f(c.1) = c.f(1) = c.a,$$

ou seja $f(c) = ac$, para todo $c \in \mathbb{R}$, sendo o mesmo que $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$, portanto f é uma função linear.

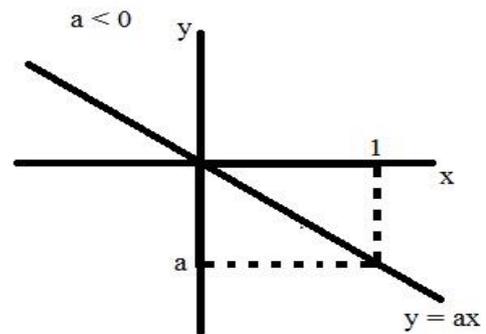
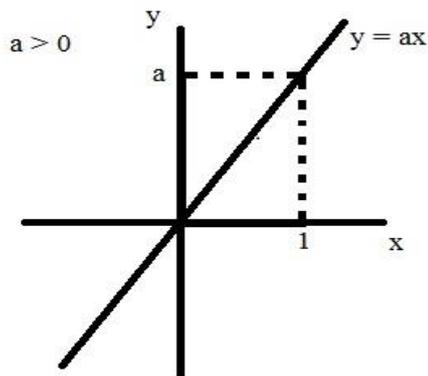
No que diz respeito a proporcionalidade inversa, só tem sentido quando se tratar de grandezas não-nulas, $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ (onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$) tal que $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, com $c, x \in \mathbb{R}^*$ quaisquer. Análogo ao que foi feito anteriormente, sendo $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, para todo $c, x \in \mathbb{R}^*$, então escrevendo $a = f(1)$, temos que

$$f(c) = f(c.1) = \frac{f(1)}{c} = \frac{a}{c},$$

ou seja $f(c) = \frac{a}{c}$, para todo $c \in \mathbb{R}^*$, sendo o mesmo que $f(x) = \frac{a}{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, onde $a = f(1)$ e, portanto f é uma função linear.

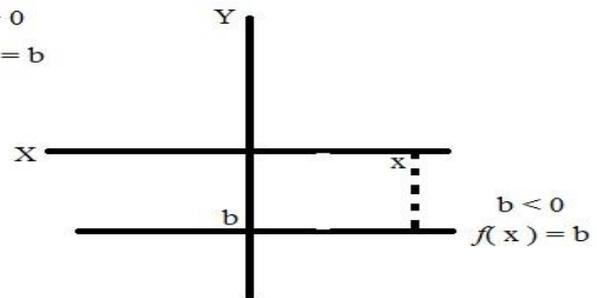
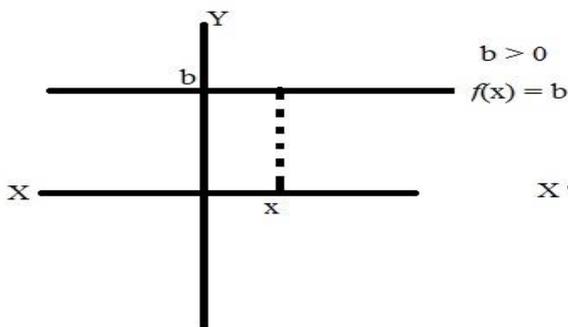
2.2.4 O gráfico da função linear

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$, com a constante, seu gráfico é uma reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, a)$:



2.2.5 O gráfico da função constante

Outro tipo de função muito comum, é a função constante, do tipo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = b$, com b constante, que tem como gráfico uma reta paralela ao eixo OX, que passa pelos pontos do tipo (x, b) ou seja $G_f = \{(x, f(x)) / x \in \mathbb{R}\} = \{(x, b) / x \in \mathbb{R}\}$.



2.2.6 Raiz da função afim

A raiz ou zero da função afim $f(x) = ax + b$ é o valor de x que anula a função, isto é, $f(x) = 0$, portanto como

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \therefore \\ ax + b &= 0. \end{aligned}$$

Algebricamente, basta resolver a equação $ax + b = 0$. Com $a \neq 0$

$$\begin{aligned} ax &= -b \therefore \\ x &= \frac{-b}{a}. \end{aligned}$$

Assim o valor de x que satisfaz essa igualdade é dito raiz ou zero da função e será representado por:

$$x = \frac{-b}{a}.$$

Geometricamente, a raiz ou zero da função é a abscissa do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo OX . Vejamos os seguintes exemplos.

Exercício 1. Dada a função $f(x) = 3x - 6$, determine o zero da função f .

Solução. Algebricamente

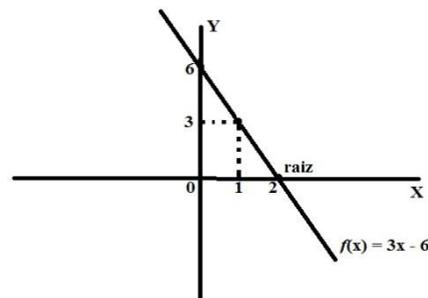
$$3x - 6 = 0 \therefore$$

$$3x = 6 \therefore$$

$$x = \frac{6}{3} \therefore$$

$$x = 2.$$

Graficamente



Exercício 2. Determine o zero da função $f(x) = 3x + 9$.

Solução. Determinar o zero da função é determinar x para que $f(x) = 0$, isto é o mesmo que resolver a equação

$$3x + 9 = 0.$$

Adicionando (-9) a ambos os membros da equação

$$3x + 9 - 9 = 0 - 9 \therefore$$

$$3x = -9.$$

Dividindo por 3 a ambos os membros (ou seja multiplicando por $\frac{1}{3}$)

$$x = -3.$$

Logo $x = -3$ é o zero da função.

Exercício 3. Sendo $f(x) = 3x + 2$, determine x para que a imagem de x seja -4 .

Solução. Neste caso devemos determinar o valor de x para que $f(x) = -4$.

Teremos

$$3x + 2 = -4.$$

Adicionando o inverso aditivo do número 2 em ambos os lados da equação acima, obtemos

$$3x + 2 - 2 = -4 - 2.$$

Logo

$$3x = -6.$$

Dividindo por 3 a ambos os membros (ou seja multiplicando por $\frac{1}{3}$)

$$3x \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = -6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \therefore$$

$$x = -2.$$

Logo, o valor de x que tem como imagem -4 é $x = -2$.

Exercício 4. Sendo $f(x) = 4x + 2$ e $g(x) = 2x + 6$, determine x onde $f(x) = g(x)$.

Solução. Basta resolver a equação $4x + 2 = 2x + 6$, ou seja

$$4x + 2 = 2x + 6 \therefore$$

$$4x + 2 - 2 = 2x + 6 - 2 \therefore$$

$$4x = 2x + 4 \therefore$$

$$4x - 2x = 2x - 2x + 4 \therefore$$

$$2x = 4.$$

Dividindo por 2 a ambos os membros (ou seja multiplicando por $\frac{1}{2}$)

$$2x \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \therefore$$

$$x = 2.$$

Portanto o valor de x que satisfaz o enunciado é $x = 2$.

2.2.7 Equação do primeiro grau

Uma equação do primeiro grau na variável x é uma expressão da forma

$$ax + b = 0.$$

Onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e x é um número real a ser encontrado.

Por exemplo, as seguintes equações são do primeiro grau:

- $3x + 5 = 0$.
- $-5x + 6 = 0$.
- $4x - \pi = 0$.

Em geral, para resolver uma equação, utilizamos as seguintes propriedades da igualdade entre dois números.

Propriedade 1. Se dois números são iguais, ao adicionarmos a mesma quantidade a cada um destes números, eles ainda permanecem iguais. Em outras palavras, escrevendo em termos de letras, se a e b são dois números iguais, então $a + c$ é igual a $b + c$, ou seja,

$$a = b \rightarrow a + c = b + c.$$

Note que podemos tomar c um número negativo, o que significa que estamos subtraindo a mesma quantidade dos dois números.

Propriedade 2. Se dois números são iguais, ao multiplicarmos a mesma quantidade em cada um destes números, eles ainda permanecem iguais. Em outras palavras, escrevendo em termos de letras, se a e b são dois números iguais, então $a.c = b.c$, ou seja,

$$a = b \rightarrow ac = bc.$$

Note que podemos dividir ambos os lados de uma equação por um número diferente de zero.

Quando resolvemos equações do primeiro grau, devemos pensá-las como um modelo de balança de dois pratos. Quando colocamos quantidades iguais de objetos com o mesmo peso em cada prato da balança, os pratos ficam equilibrados. Quando os pratos estão equilibrados podemos adicionar ou remover a mesma quantidade de objetos em ambos os pratos, que ainda assim a balança permanecerá equilibrada. Esse raciocínio resume as propriedades vistas anteriormente.

O uso de letras para representar números desconhecidos só veio ocorrer por volta dos meados do século XVI, o que complicava, mas não impedia o desenvolvimento da matemática. Nas antigas civilizações como egípcias, babilônicas, gregas entre outras, já se conhecia métodos e técnicas que são empregados até hoje, como solução de equações do primeiro e segundo grau e outras mais. Nesse período, o conhecimento matemático era passado de geração em geração através de receitas. Essas receitas tinham uma linguagem através dos elementos da geometria, principalmente devido ao sistema de numerações utilizado pelos gregos, e posteriormente pelos romanos, o que dificultava a realização de operações matemáticas.

Os árabes tornaram popular representar as quantidades desconhecidas por letras, pois desenvolveram um outro sistema de numeração, conhecida como indo-arábico. Já o francês François Viète se destaca em aprimorar esse uso dos símbolos em sua obra “*in artem analyticam isagoge*”.

Exercício 1. Qual o número cujo triplo somado com sua quarta parte é igual a 26?

Solução. Utilizando a letra x para representar o número desconhecido, teremos então, o triplo $3x$, e a quarta parte $\frac{x}{4}$, com essas informações teremos que:

$$3x + \frac{x}{4} = 26.$$

Utilizando a propriedade 02 para multiplicar por 4 a ambos os membros

$$12x + x = 104 \therefore$$

$$13x = 104.$$

Dividindo por 13 a ambos os membros (ou seja multiplicando por $\frac{1}{13}$)

$$x = 8.$$

Ou seja, o número desconhecido é 8.

Exercício 2. Resolva a equação $2x + 5 = 17$.

Solução: Temos

$$2x + 5 = 17.$$

Adicionando (-5) a ambos os membros da equação

$$2x + 5 - 5 = 17 - 5 \therefore$$

$$2x = 12.$$

Dividindo por 2 ambos os membros

$$x = 6.$$

Ou seja, o valor de x que torna a equação verdadeira é 6.

Exercício 3. Resolva a seguinte equação $5x + 7 = 3x - 5$.

Solução. Temos a equação

$$5x + 7 = 3x - 5.$$

Adicionando (-7) a ambos os membros da equação

$$\begin{aligned}5x + 7 - 7 &= 3x - 5 - 7 \quad \therefore \\5x &= 3x - 12.\end{aligned}$$

Adicionando $(-3x)$ a ambos os membros da equação

$$\begin{aligned}5x - 3x &= 3x - 3x - 12 \quad \therefore \\2x &= -12.\end{aligned}$$

Dividindo por 2 a ambos os membros (ou seja multiplicando por $\frac{1}{2}$).

$$x = -6.$$

Ou seja, o valor de x que torna a equação verdadeira é -6 .

2.2.8 Um pouco de história

Terminaremos este capítulo falando um pouco sobre a história da equação do primeiro grau.

Equação é uma maneira de resolver situações nas quais surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade. A palavra “equação” vem do latim “equatione”, equacionar, que quer dizer igualar; pesar, igualar em peso. E a origem primeira da palavra “equação” vem do árabe “adala”, que significa “ser igual a”, de novo a ideia de igualdade. (AFONSO, Amatas P. em A Origem das Equações do 1º Grau.)

Por serem desconhecidos, esses valores são representados por letras. Por isso, na língua portuguesa, existe uma expressão muito usada: “o x da questão”. Ela é utilizada quando temos um problema dentro de uma determinada situação. Matematicamente, dizemos que esse x é o valor que não se conhece.

Antigamente, os matemáticos hindus tinham um passatempo muito comum que era a resolução de quebra-cabeças em competições públicas, em que um competidor propunha

ao outro problemas a serem resolvidos. Nessa época, a matemática não dispunha de nenhum sinal, ou variável, o que a tornava restrita a poucas pessoas capazes de resolver problemas, pois eram usadas muitos artifícios e trabalhosas construções geométricas.

A primeira referência à equação, de que se tem registro, consta do papiro de Rhind, um dos documentos mais antigos sobre matemática, escrito a mais de 4 000 anos.

Os gregos resolviam equações utilizando a geometria, os egípcios utilizavam métodos de solução de equação complexos e cansativos. No entanto, os árabes, a partir da matemática dos gregos, promoveram um acentuado progresso na resolução de equações. Os Árabes chamavam o valor desconhecido em uma situação matemática de coisa, em árabe era pronunciada como "xay".

Dentre os Árabes, destacam-se Al-Khowarizmi, considerado o matemático de maior expressão do século IX, onde em um de seus livros faz uma exposição completa dos numerais hindus, e em outro uma exposição clara e sistemática sobre resolução de equações.

Já no século XVI, o francês François Viète, passa a escrever as equações com símbolos matemáticos e letras, fazendo-a assim ganhar mais importância e facilidade no manuseio. Ele passa a estudar suas propriedades e os objetos de estudos ampliam-se para expressões algébricas.

Atualmente as equações são usadas, entre outras coisas, para determinar o lucro de uma firma, para calcular a taxa de uma aplicação financeira, para fazer a previsão do tempo, etc.

(...) Hoje, chamamos o termo desconhecido de incógnita, que é uma palavra originária do latim "incognitu", que também quer dizer "coisa desconhecida". A incógnita é um símbolo que está ocupando o lugar de um elemento desconhecido em uma equação. (AFONSO, Amatas P. em A Origem das Equações do 1º Grau.)

3 SOBRE A PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo abordará os resultados obtidos a partir do questionário resolvido pelos alunos, o qual foi elaborado visando analisar os erros cometidos pelos alunos nos procedimentos de resolução de funções e equações e construção de gráficos.

3.1 Sobre a amostra

A amostra foi composta por 16 alunos do segundo ano do Ensino Médio, de uma escola pública do interior do Ceará, escolhidos aleatoriamente. A escolha dessa série deu-se por ser composta de alunos que realizam resoluções com equação desde o ensino fundamental, e também já trabalharam com função e gráfico, principalmente no primeiro ano do ensino médio, ano anterior a esta pesquisa, uma vez que os assuntos abordados nos questionários, assim como sua resolução, deveriam ser de pleno domínio dos alunos.

Essa escola pública localiza-se na periferia da cidade, numa zona residencial próximo a um hospital, a uma delegacia e a alguns pontos comerciais. Seu funcionamento ocorre em dois períodos, manhã e tarde, contando ainda com uma extensão de matrícula em um distrito a aproximadamente 18 km de distância da sede. A instituição ainda possui laboratório de ciências, centro de multimeios, sala de vídeo, laboratório de informática, quadra esportiva, estacionamento, praça, pavilhão, entre outras coisas. Desenvolve durante o ano vários projetos, visando a melhoria educacional e a formação cidadã de seus educandos, além de proporcionar aos educadores incentivo e apoio pedagógico em sua didática escolar. O núcleo gestor é composto por 5 membros, um diretor, dois coordenadores pedagógicos, um coordenador financeiro e uma secretária.

A pesquisa foi realizada nessa escola por receber alunos oriundos da zona urbana (sede) e da zona rural, das diversas regiões do município, como também de municípios vizinhos. Esses alunos vêm de escolas públicas e privadas.

3.2 Análise dos resultados

O instrumento avaliativo é composto por duas partes. Na primeira parte, foi aplicado um teste com 8 questões sobre função. Nas quatro questões iniciais, foi pedido para que se determinasse o zero da função (caso existisse). Nas duas questões seguintes, dada a imagem, determinar o valor de x associado a tal imagem e nas duas últimas para determinar o

x que atendesse a uma igualdade de funções. Foi aplicada também uma atividade extra onde envolvia a construção do gráfico de uma função afim. Na segunda parte, foi aplicado um teste com 7 equações do primeiro grau, sendo que seis delas semelhantes às equações montadas para resolver as funções da primeira parte. Tais atividades foram resolvidas individualmente pelos alunos, e após a solução da primeira avaliação, foi entregue a segunda e assim sucessivamente.

As avaliações foram as seguintes:

Teste de verificação 1 – Função

1. Determine, caso exista, o zero da função $f(x) = 5x$.
2. Determine, caso exista, o zero da função $f(x) = 2x + 8$.
3. Determine, caso exista, o zero da função $f(x) = 3$.
4. Determine, caso exista, o zero da função $f(x) = 4x + 2$.
5. Sendo $f(x) = 3x + 2$, determine x para que a imagem seja -4 .
6. Sendo $f(x) = 2x + 4$, determine x para que a imagem seja 10 .
7. Sendo $f(x) = 4x + 2$ e $g(x) = 3x - 5$, determine x onde $f(x) = g(x)$.
8. Sendo $g(x) = 3x - 5$ e $h(x) = 2x + 8$, determine x onde $g(x) = h(x)$.

Tarefa extra – Gráfico

Construa o gráfico da função $f(x) = 3x + 2$, sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Teste de verificação 2 - Equação

9. Resolva a equação $3x + 2 = -4$.

10. Resolva a equação $4x + 2 = 0$.

11. Resolva a equação $2x + 4 = 2$.

12. Resolva a equação $2x + 8 = 0$.

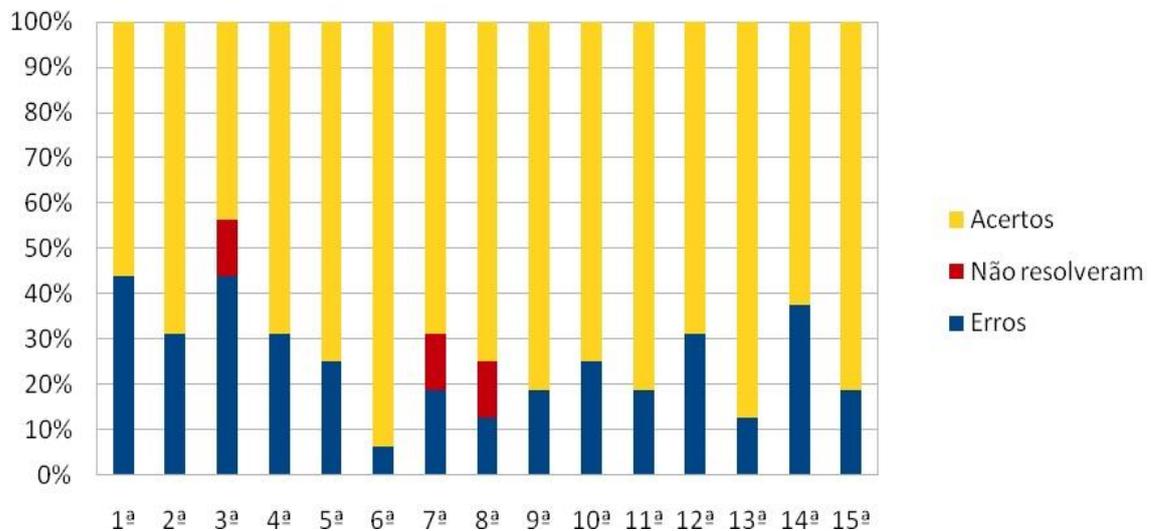
13. Resolva a equação $4x + 2 = 3x - 5$.

14. Resolva a equação $5x = 0$.

15. Resolva a equação $3x - 5 = 2x + 8$.

Após aplicação e correção do instrumento de pesquisa, foram constatados vários tipos de erros. Analisaremos agora, de modo quantitativo, o número de erros cometidos pelos alunos nas resoluções das questões que envolviam equações e funções. Verificaremos inicialmente os erros por questões.

Gráfico 01 - Análise por questões



Fonte: Elaborado pelo autor

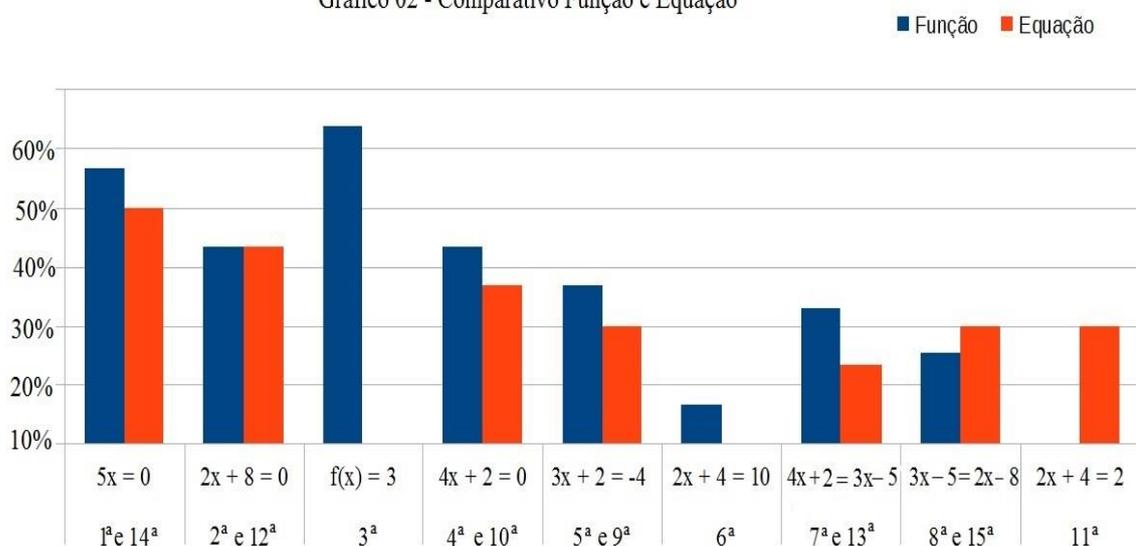
Notamos que as questões com maior índice de erros foram a 1ª e a 3ª, as quais envolviam o conhecimento sobre função afim e a 14ª uma questão envolvendo equação. Devemos observar também que três questões, não foram resolvidas por; na 3ª questão, de

modo especial, o aluno deveria identificar que a função constante não admite zero, enquanto que na 7ª e 8ª os alunos deveriam resolver uma igualdade de funções. Entretanto, em questões semelhantes à 7ª e 8ª (13ª e 14ª respectivamente), estes mesmos alunos resolveram as equações, isso mostra que não foi observada a semelhança entre função e equação.

Sobre as questões que não foram resolvidas, todas pertenciam ao primeiro teste. Verificado também que, no momento da aplicação do teste, alguns alunos demonstravam medo de errar na resolução, outros não compreendiam bem do que se tratava o enunciado das questões, muito menos o que fazer para resolver tal situação.

Como foi aplicado dois questionários com questões semelhantes, então verificaremos no próximo gráfico o comparativo entre a quantidade de erros relativos a estas questões. Deve-se enfatizar que os alunos tinham a liberdade para resolverem as questões de acordo com seu conhecimento, e quase todos (exceto apenas os que não resolveram) transformaram as funções em equações e resolveram aplicando seu conhecimento.

Gráfico 02 - Comparativo Função e Equação



Fonte: Elaborado pelo autor

Um fato interessante neste gráfico é que mesmo se tratando das mesmas equações, em contextos diferentes, ocorre mais erros nas resoluções de questões envolvendo funções do que na resolução de equações. Uma exceção foram as questões 8ª e 15ª. Entretanto, dois alunos não resolveram a questão 8 mas resolveram a questão 15. Isto mostra que, muitas vezes, os alunos não observam as semelhanças entre estes dois assuntos: função e equação. Como por exemplo um aluno resolveu corretamente todas as questões do segundo questionário e errou três questões do primeiro questionário. Um fato comum a quase todos

(exceto um), envolvidos nesta pesquisa, foi a ocorrência de mais erros no primeiro questionário do que no segundo.

De um modo geral, levando em conta o total de erros encontrados, 56,7% ocorreram no primeiro questionário e 43,3% no segundo. Apesar de pequena a diferença, devemos lembrar que, trata-se de alunos no segundo ano do Ensino Médio, os quais já estudaram equação, desde o Ensino Fundamental, e função em anos anteriores. Analisando o livro didático utilizado pela Escola, o conceito de função é bastante utilizado na primeira série do Ensino Médio, isto é, no ano anterior.

3.2.1 Categorias de erros

Após análise dos erros por questões, foram constatados vários tipos de erros. Estes foram classificados em 7 categorias as quais listamos a seguir.

1. Trocar a posição do coeficiente de x pela posição do termo independente na divisão

$$ax = b \rightarrow x = \frac{a}{b}$$

2. Transformar $ax = b$ em $x = b - a$

3. Calcular $f(c)$, quando o correto seria calcular x tal que $f(x) = c$.

4. Não identificar que a função constante $f(x) = b$ para $b \neq 0$ não possui zero

5. Operações em \mathbb{R}

6. Efetuar transposição de termo independente sem alterar o sinal

$$ax + b = c \rightarrow ax = c + b$$

7. Adicionar ao coeficiente de x o termo independente

$$ax + b \rightarrow (a + b)x \text{ ou } ax + b \rightarrow (a + b)$$

O gráfico mostra o percentual de erros para cada uma das categorias citadas.



Fonte: Elaborado pelo autor

As categorias com maior percentual foram a 5ª e a 6ª, que juntas totalizaram 53,84% dos erros cometidos, sendo que a 5ª com 35,38%, diz respeito aos erros envolvendo operações com números reais e a 6ª com 18,46% foram erros cometidos na transposição de termos independentes, cuja operação a ser utilizada, no conjunto dos números reais, é a existência de inverso aditivo. Por exemplo, na resolução dada pelo aluno 9, observa-se que para resolver a equação,

$$3x - 5 = 2x + 8,$$

ele procede da seguinte forma:

$$3x - 5 = 2x + 8 \cdot$$

$$3x - 2x = 8 - 5 \cdot$$

$$x = 3.$$

Na passagem da linha 1 para a linha 2 aplicou corretamente o inverso aditivo para o $2x$ e erradamente para o termo independente -5 .

Por outro lado, as categorias com menos erros foram a 3ª e a 7ª ambas com 7,69%,

sendo que a 3ª trata de erros que provém de uma má compreensão da definição de função, imagem e zero da função; e a 7ª onde os alunos adicionaram coeficiente com termo independente, erros também relacionados a definições, neste caso, de coeficiente e termo independente. Percebemos também dificuldade em operar com letras como números desconhecidos.

3.2.2 Análise das categorias

Vejamos agora uma análise de cada categoria separadamente.

- **1ª categoria** – Troca de posição do coeficiente de x pela posição do termo independente na divisão.

Com 9,3% dos erros percebe-se que alguns alunos não conseguem operar corretamente com o inverso multiplicativo. Por exemplo, na resolução da equação $4x + 2 = 0$, aparecem soluções da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 4x + 2 &= 0 \therefore \\ 4x &= -2 \therefore \\ x &= \frac{4}{-2} \therefore \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Observe que o coeficiente de x , o número 4, deveria ser o denominador da fração, porém na resolução dada, torna-se numerador da fração. Este erro se dá, pois sendo $4 > -2$, entende-se que este número deve ficar no numerador. Assim além do erro nas operações com números reais, temos o problema de operar também com frações. Vale salientar que na passagem da linha 1 para a linha 2, a operação com o inverso aditivo foi aplicada corretamente. Destacamos a seguir outras resoluções similares dadas pelos alunos.

(...)	$5x = 0$	(...)
$6x = 2$	$x = \frac{5}{0}$	$10x = 0$
$x = \frac{6}{2}$	(...)	$x = \frac{10}{0}$
(...)		(...)

- **2ª categoria** - Transformar $ax = b$ em $x = b - a$

Esta categoria contou com 10,77% dos erros ocorridos e novamente mostra que alguns alunos utilizam de maneira confusa a ideia de inverso multiplicativo e inverso aditivo.

Observemos uma solução dada para a equação $5x = 0$. Vejamos:

$$\begin{aligned} 5x &= 0 \div \\ x &= 0 - 5 \div \\ (\dots) \end{aligned}$$

Nota-se que o aluno deve operar com o inverso multiplicativo, porém ao tentar solucionar a equação, trabalha com o inverso aditivo. Este erro se deve, talvez, por uma generalização do método informal utilizado por professores ao aplicar as operações com números reais na solução de equações. Por exemplo, expressões do tipo “muda de lado, muda de sinal”, são muitas vezes utilizadas como estratégias simples de memorização de procedimentos. Entretanto, a generalização errada deste termo usual, aliada a uma má compreensão das definições, fazem com que o aluno proceda de forma incorreta, até mesmo no desconhecimento de que a representação ax é o mesmo que o número real a multiplicado pelo número real x .

- **3ª categoria** – Calcular $f(c)$, quando o correto seria calcular x tal que $f(x) = c$.

Expliquemos um pouco melhor esta categoria de erro. Dado um número real c no conjunto imagem da função f , deseja-se determinar o número x no domínio da função f tal que $f(x) = c$. Como já citado anteriormente, é uma das categorias com menor índice de erros, apenas 7,69% de erros. Esta situação aparece apenas no primeiro questionário pois trata-se da determinação do zero da função, caso onde $c = 0$, ou da determinação do número real x para um dado valor na imagem. Vejamos um quadro com os erros encontrados.

$f(x) = 3x + 2$ $3(-4) + 2$ $-12 + 2$ -10	$f(x) = 2x + 4$ $2 \cdot 10 + 4$ $20 + 4$ 24	$f(x) = 2x + 8$ $f(0) = 2 \cdot 0 + 8$ $f(0) = 0 + 8$ $f(0) = 8$	$f(x) = 5x$ $f(0) = 5 \cdot 0$ $f(0) = 0$
--	---	---	---

No primeiro e segundo quadro acima o enunciado das questões eram respectivamente o seguinte:

Sendo $f(x) = 3x + 2$, determine x para que a imagem seja -4 .

Sendo $f(x) = 2x + 4$, determine x para que a imagem seja 10 .

O erro pode ocorrer devido à má interpretação da questão, ou pela não compreensão do domínio e do conjunto imagem de uma função. Em vez de fazer

$$f(x) = -4 \rightarrow 3x + 2 = -4 \text{ e } f(x) = 10 \rightarrow 2x + 4 = 10.$$

O aluno acredita que os valores -4 e 10 estão no domínio da função e não na imagem. No terceiro e quarto quadro aparecem erros relativos a determinação do zero da função, ou seja, resolver a equação $f(x) = 0$, entretanto foi calculado $f(0)$.

- **4ª categoria** - Não identificar que a função constante $f(x) = b$ para $b \neq 0$ não possui zero.

Nessa categoria, precisava-se entender a definição de função constante, assim como suas propriedades, ou mesmo o tipo de gráfico desta função. Nessa questão pedia-se que determina-se, caso existisse, o zero de uma função constante. Por exemplo, dada a função $f(x) = 3$, bastava expressar a não existência de tal zero pois $3 \neq 0$. Mesmo assim houve um total de 10,77% de erros. Vejamos uma solução dada para a 3ª questão:

Determine, caso exista, o zero da função $f(x) = 3$.

$$f(x) = 3 \therefore$$

$$f(x) = 3 = 0 \therefore$$

$$f(x) = 0 - 3 \therefore$$

$$f(x) = -3.$$

Percebe-se que o aluno não reconhece que a função constante não possui zero, além disso, tem dificuldade de compreender o significado do sinal de igualdade. Vejamos mais alguns erros nesta categoria.

$f(x) = 3$	$f(x) = 3 = 0$	$x + 3 = 0$	$x + 3 = 0$	$f(x) = 3$
$f(x) = 0$	$f(x) = 0 - 3$	$x = -3$	$x = 3 + 0$	$x = 3$
$3 = 0$	$f(x) = -3$		$x = 3$	

Neste primeiro quadro, o aluno não faz referência ao absurdo a que ele chegou ($3 = 0$). No segundo caso, ao fazer $3 = 0$, o que é um absurdo, o aluno continua buscando uma solução, o que ocorre nos demais casos. Verifica-se também que alguns alunos não compreendem ainda a possibilidade de questões sem solução. Nos três últimos quadros podemos observar também que a sentença função $f(x) = 3$ é transformada erroneamente na equação $x + 3 = 0$, ou na equação $x = 3$, que é o ultimo caso.

- **5ª categoria - Operações em \mathbb{R}**

Com o percentual de 35,38%, foi muito expressiva a quantidade de erros relacionados às operações com números reais. Isto mostra que há uma grande dificuldade em trabalhar no conjunto dos números reais. As propriedades relativas à existência de inversos são onde ocorre erros mais significativos, assim, operar com números negativos e/ou zero não deve ser simples para os alunos. Erros do tipo $-4 - 2 = 6$ e $-5 - 2 = 7$, revelam uma má compreensão das operações com números inteiros, além de um desconhecimento sobre a “regra do sinal” nas resoluções numéricas, ocorrendo muitas vezes a generalização de termos informais. Por exemplo, expressões do tipo “menos com menos dá mais” ou “sinais iguais soma, sinais diferentes diminui”, não estão associadas a uma determinada operação. Para alguns alunos, estas regras se aplicam as duas operações: adição e multiplicação, o que vem a causar os erros. Observa-se também que o aluno ignora o posicionamento dos números na reta numérica, onde ao adicionar números positivos o deslocamento seria para direita, e ao adicionar números negativos o deslocamento seria para a esquerda.

Já nos erros abaixo:

$$\frac{0}{5} = 5, 0 - 2 = 0, 0 - 8 = 0 \text{ e } \frac{5}{0} = 0,$$

Notamos a dificuldade em operar com zero. No primeiro caso o aluno não percebe que na multiplicação de qualquer número real por zero, o resultado é sempre zero. No segundo e terceiro caso a operação realizada foi a multiplicação, ou seja, o aluno não reconhece o número como elemento neutro da adição. No quarto exemplo, observamos que não foi compreendido que apenas números reais não nulos admitem inverso multiplicativo e assim fazem a divisão por zero.

Observemos os erros abaixo

$$0 - 8 = 8, \frac{-2}{2} = 1 \text{ e } \frac{-2}{4} = 0,5.$$

Percebe-se a dificuldade em operar com números negativos ou até mesmo uma falta de atenção na resolução, visto que alguns alunos não verificam o procedimento realizado ao final da resolução.

Para os erros como

$$-4 - 2 = -2 \text{ e } -5 - 2 = -3,$$

Notamos que, muitas vezes, o aluno compreende esta operação como se estivesse aplicando a associatividade, ou seja, ele a resolve como sendo $-(4 - 2)$ ou $-(5 - 2)$, onde primeiro resolve por exemplo o “ $4 - 2$ ” conservando o primeiro sinal “negativo” para o resultado; ou mais uma vez, faz-se uma associação indevida de um termo muito comum entre os alunos, implantado pelos professores na busca de uma memorização rápida de técnicas de resolução, onde o aluno fala e ouve que “sinais iguais soma, sinais diferentes diminui”.

- **6ª categoria** - Efetuar transposição de termo independente sem alterar o sinal.

Esta categoria com 18,46% dos erros, corresponde a segunda com maior número de erro. Vejamos este tipo de erro na tabela abaixo:

$4x + 2 = 0$ $4x = 2$ (...)	$2x + 8 = 0$ $2x = 8$ (...)	$x + 3 = 0$ $x = 3$
-----------------------------------	-----------------------------------	------------------------

Esses erros ocorrem pela má compreensão do conceito de zero da função, e de inverso aditivo, além disso, o aluno não verificar se a solução encontrada resolve corretamente a equação.

Um exemplo que nos chama a atenção foi a resolução dada para a equação abaixo

$$3x - 5 = 2x + 8.$$

O aluno procede da seguinte forma:

$$3x - 5 = 2x + 8.∴$$

$$3x - 2x = 8 - 5.∴$$

$$x = 3.$$

Neste caso, os alunos não utilizaram corretamente o inverso aditivo para o termo independente, entretanto utilizaram corretamente com o termo $2x$ que pertencia ao segundo membro, e como citado anteriormente, os alunos não verificaram se o resultado final realmente é solução da equação.

- **7ª categoria** – Adicionar ao coeficiente de x o termo independente

Assim como a 3ª categoria, esta conta com 7,69% dos erros analisados, seus erros revelam uma má compreensão do conceito de variável e termo independente, vejamos alguns exemplos deste erro.

$3x + 2 = -4$ $3x + 2 + 4 = 0$ $9x = 0$ (\dots)	$2x + 4 = 2$ $6x = 2$ (\dots)	$2x + 8 = 0$ $10x = 0$ (\dots)
---	---------------------------------	----------------------------------

Percebemos, neste caso, uma má compreensão do conceito de variáveis e termo independente. Alguns alunos apresentam dificuldade em compreender letras como termo desconhecido (variáveis ou incógnitas). Alguns alunos associam esse tipo de soma ao que ocorre quando há uma adição de termos por fatoração, como por exemplo, ao somar $ax + bx + cx$ onde por fatoração teremos $(a + b + c)x$. Ao fazer uma generalização errada para essa situação em questão o aluno soma termos independentes com coeficientes.

Observemos em especial o primeiro caso em que o aluno procede em zerar o lado direito da equação, raciocínio este bastante usado na resolução de equações do segundo grau para deixá-la na forma geral para a utilização da fórmula de Bhaskara. Já nos erros a seguir o procedimento é diferente.

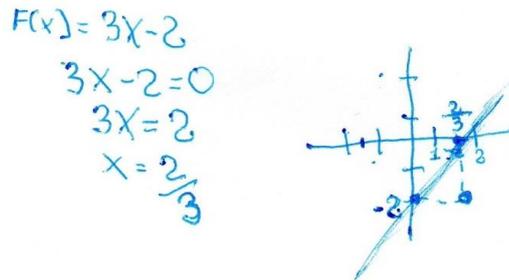
$3x - 5 = 2x + 8$ $3x = 2x + 8 + 5$ $3x = 15$ (\dots)	$4x + 2 = 3x - 5$ $4x = 3x - 5 - 2$ $4x = 2 - 2$ (\dots)
---	--

O aluno, neste caso, pela má distinção entre coeficiente e termo independente, procede com a intenção de deixar o $3x$ sozinho no primeiro membro, que é uma estratégia de resolução muito usada pelos alunos, muitas vezes explicadas por eles como “deixar o x sozinho no primeiro membro e quem não tem x , no segundo”. Ao aplicar o inverso aditivo de -5 em ambos os membros da equação, ele age de maneira correta, como vistos na passagem da primeira para segunda linha; após isso ele não percebe a necessidade em operar com o inverso aditivo para com o $2x$, observando mais uma vez a dificuldade em trabalhar com a incógnita x .

3.2.3 Análise da construção de gráfico

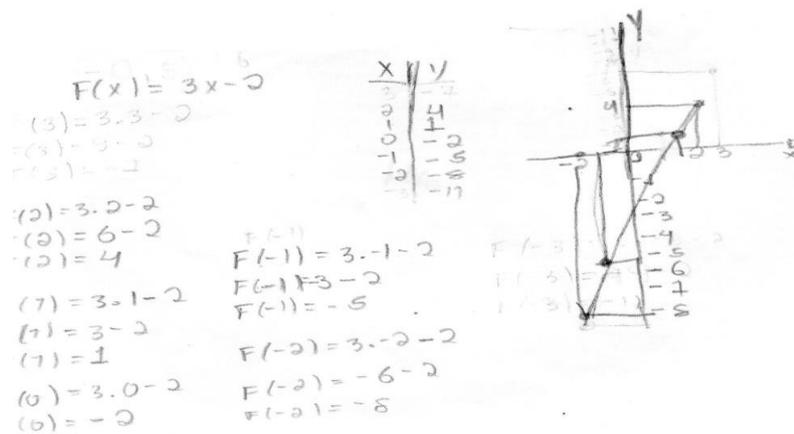
Na tarefa extra, aplicada aos alunos, pedia-se a construção do gráfico da função $f(x) = 3x - 2$, sem a utilização régua ou papel milimetrado. Observamos então o seguinte:

18,75% dos alunos que não construíram o gráfico, 37,5% construiu o gráfico a partir do zero da função. Vejamos uma solução dada abaixo.



Resolução do aluno 6

37,5% construiu a partir de pares ordenados.

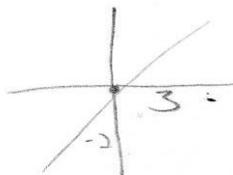


Resolução do aluno 1

6,25% construiu a partir de a e b da função

$$f(x) = 3x - 2$$

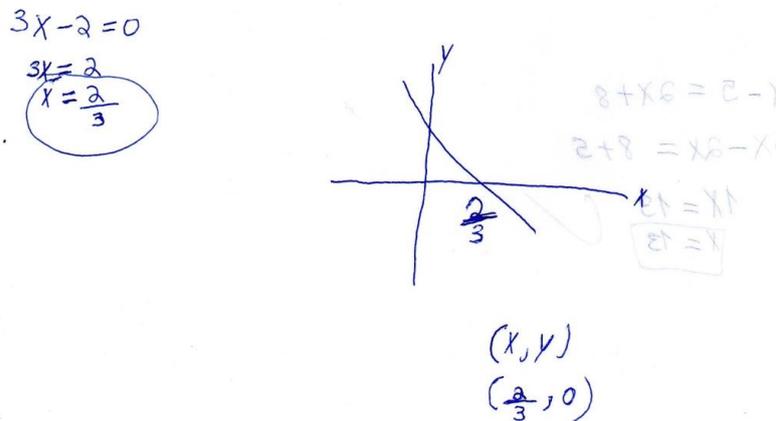
$$f(0) =$$



Resolução do aluno 13

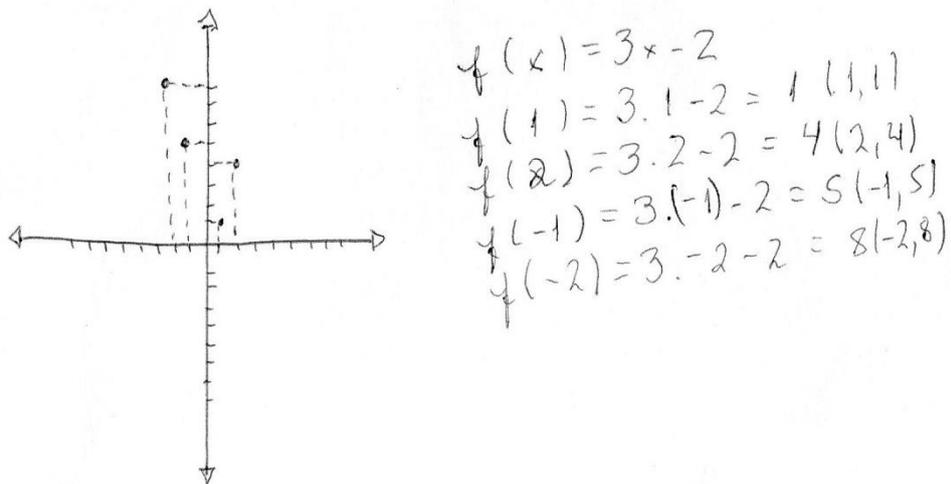
Dentre aqueles que esboçaram o gráfico da função acima temos o seguinte.

30,77% construíram de forma decrescente, sendo todos eles construídos utilizando apenas o zero da função. Isso mostra que o aluno não compreende do conceito de função crescente e função decrescente. O aluno não reconhece que a função afim $f(x) = ax + b$ é crescente quando $a > 0$.



Resolução do aluno 2

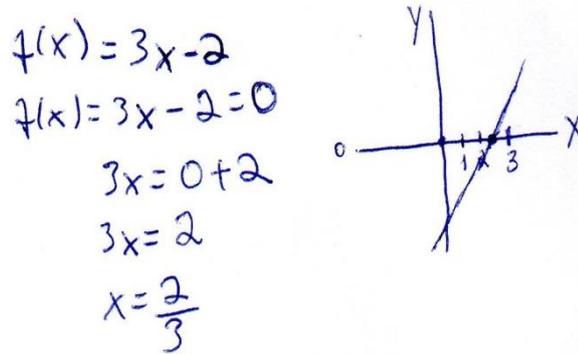
15,38% não traçaram o gráfico por erro nos cálculos para determinação dos pares ordenados.



Resolução do aluno 5

Isto fez com que os pontos não ficassem alinhados.

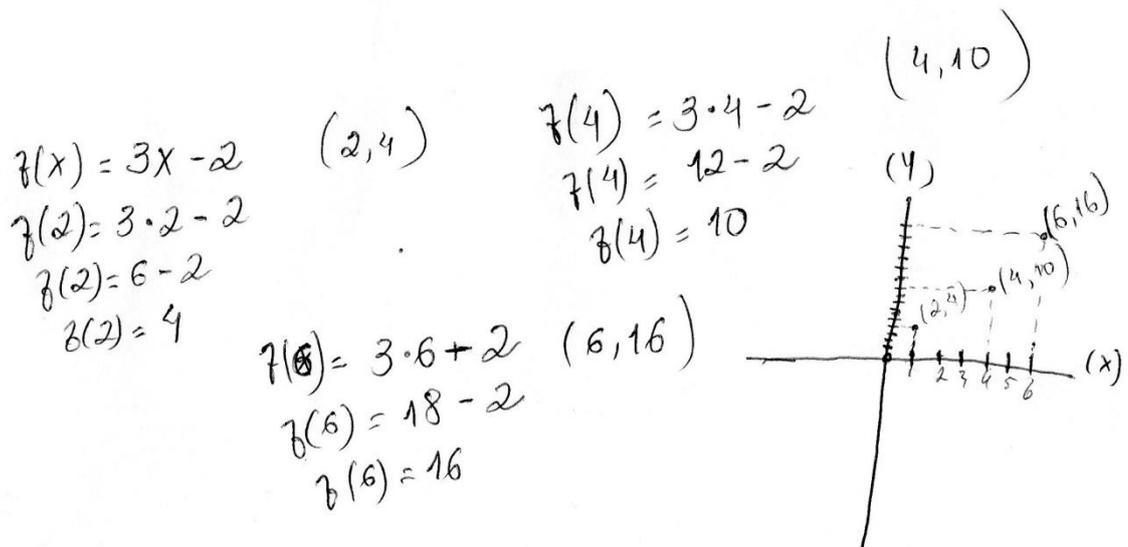
Percebemos ainda que, alguns alunos não localizam corretamente um número racional na reta numérica. Como podemos notar na resolução abaixo, em que o zero da função é o número racional $\frac{2}{3}$. Observamos que o aluno colocou entre os números dois e três.



Resolução do aluno 16

Um fato bastante comum na construção de gráfico ocorre quando o aluno não considera a mesma unidade de comprimento para ambos os eixos coordenados. Vejamos a resolução abaixo.

Resolução do aluno 9



Observe que a distância entre as unidades no eixo das ordenadas é diferente da distância das unidades no eixo das abscissas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, ao buscarmos analisar os erros cometidos pelos alunos ao trabalhar com funções afins e equações e como estes conceitos se relacionavam, percebemos que a má compreensão das definições e propriedades levam muitos alunos a erros de procedimentos, o que vem a acarretar erros em cálculos simples.

Apesar desse trabalho não se dedicar a fazer uma intervenção com os alunos no sentido de sanar suas dificuldades nas resoluções, temos a intenção de refletir a respeito dos erros encontrados e de suas possíveis origens. Não queremos levar o professor a aceitar todo tipo de erro, mas perceber sua grande variedade, pois esse conhecimento é importante para traçar estratégias mais eficientes em sua dinâmica de sala de aula.

BIBLIOGRAFIA

FREITAS, Marcos A. – *Equação do primeiro grau: Métodos de resolução e análise de erros no ensino médio*. Tese de mestrado. PUC – Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2002.

GUIDORIZZI, Hamilton L. – *Um curso de calculo*. Volume 1. 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC–Livros Técnicos e Científicos S.A., 2008.

LIMA, Elon L. et al. *Matemática do ensino médio*. Volume 1 . Rio de Janeiro: SBM. 2012

SPERAFICO, Yasmin L. S. & Golbert, Clarisse S. Análise de erros na resolução de problemas envolvendo equações algébricas do 1º grau. *IX ANPEDSUL. Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul*. UFRGR. 2012

MATEMATIQUÊS. AFONSO, Amitas P. *A origem das equações do 1º grau*. Disponível em <www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=582> acesso em 24\04\2014.

IEZZI, Gelson. et al. *Matemática: ciências e aplicações*. Volume 1, ensino médio. 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010.