



Universidade Federal do Tocantins  
Mestrado Profissional em Matemática  
PROFMAT

THIAGO RUIZ GARCIA

**Construção geométrica de triângulos equiláteros com base na  
sequência de Fibonacci: Uma proposta de atividade para turmas de  
Primeira Série**

Palmas - TO  
2014

THIAGO RUIZ GARCIA

**Construção geométrica de triângulos equiláteros com base na  
sequência de Fibonacci:** Uma proposta de atividade para turmas de  
Primeira Série

Dissertação apresentada ao programa de  
Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional, coordenado pela Sociedade  
Brasileira de Matemática e ofertado pela  
Universidade Federal do Tocantins, sob a ori-  
entação do Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza  
de la Cruz, como requisito parcial para a ob-  
tenção do título de mestre em matemática

Palmas - TO  
2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins**  
**Campus Universitário de Palmas**

---

G216c Garcia, Thiago Ruiz  
Construção geométrica de triângulos equiláteros com base na  
sequência de Fibonacci / Thiago Ruiz Garcia. - Palmas, 2014.  
53f.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Tocantins,  
Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional - PROFMAT, 2014.

Linha de pesquisa: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza de la Cruz.

1. Construção Geométrica. 2. Triângulo equilátero. 3. Sequência de  
Fibonacci. 4. Número de Ouro I. De la Cruz, Andrés Lázaro Barraza. II.  
Universidade Federal do Tocantins. III. Título.

**CDD 516.3**

---

**Bibliotecária: Emanuele Santos**

**CRB/2: 1309**

**OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.**

THIAGO RUIZ GARCIA

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DE TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS COM  
BASE NA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: UMA PROPOSTA DE ATVIDADE  
PARA TURMAS DE PRIMEIRA SÉRIE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT  
da Universidade Federal do Tocantins como  
requisito parcial para obtenção do título de  
Mestre – Área de Concentração: Matemática  
Orientador: Dr. Andrés Lázaro Barraza De  
La Cruz.

Aprovada em 23/05/2014

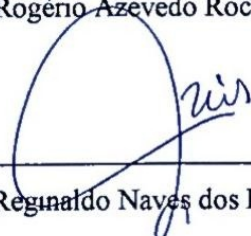
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz (Orientador-UFT)



Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)



Prof. Dr. Reginaldo Naves dos Reis (IFTO)

*Dedico à aqueles que sempre acreditaram em mim.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, à minha família, em especial, minha mãe Kátia, meu pai Ricardo, minha irmã Nathália e minha namorada Jamille, pelos incentivos perante as oportunidades da vida.

Agradeço também aos meus professores do Profmat e o próprio Profmat, que oportunizaram meu crescimento intelectual e moral. Um agradecimento especial ao meu orientador Dr. Andrés Lázaro Barraza de la Cruz, aos meus colegas do Profmat, pois sem eles o curso não seria o mesmo, e finalmente a CAPES, pelo incentivo financeiro cedido durante o curso.

*“Agradeço todas as dificuldades que enfrentei; não fosse por elas, eu não teria saído do lugar. As facilidades nos impedem de caminhar. Mesmo as críticas nos auxiliam muito”*  
*(Chico Xavier)*

## RESUMO

A sequência de Fibonacci desperta curiosidades, pois ela possui propriedades singulares e aplicações em diversas áreas do conhecimento. O Desenho Geométrico não é uma disciplina obrigatória nas escolas de Educação Básica após a publicação da LDB 5692/71, logo as construções geométricas utilizando régua e compasso é um tema praticamente extinto do currículo do aluno do Ensino Médio da Rede Pública. Neste trabalho é resgatado às construções geométricas através da construção de uma estrutura de triângulos equiláteros adjacentes, o estudo dos padrões encontrados no somatório das áreas e no perímetro dessa estrutura, considerando relações com a sequência de Fibonacci, o estudo da razão entre os lados de dois triângulos equiláteros consecutivos e sua conexão com o Número de Ouro, a abordagem teórica da sequência de Fibonacci e algumas de suas propriedades, assim como algumas aplicações algébricas.

**Palavras-chaves:** Construção Geométrica. Triângulo equilátero. Sequência de Fibonacci. Número de Ouro.



## ABSTRACT

The Fibonacci sequence generates curiosity, due to the fact that it possesses singular properties and applications in diverse areas of knowledge. After the publication of the LDB 5692/71, Geometric design is not an obligatory subject in schools of basic education in fact; the use of the compass and ruler is practically extinct from the curriculum of middle school students. This project rescues geometric construction by means of the construction of a structure of adjacent equilateral triangles, the study of the patterns found in the sum of the areas and the perimeter of this structure, considering Fibonacci sequence relations, the study of reason between the sides of two consecutive equilateral triangles and their connection with the golden number, the theoretical approach of the Fibonacci sequence and some of its properties, as well as some applications of algebra.

**Keywords:** Geometric Construction. Equilateral triangle. Fibonacci. Golden Number.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Reta $r$ . . . . .	19
Figura 2 – Semi-reta $AB$ . . . . .	19
Figura 3 – Segmento $AB$ . . . . .	19
Figura 4 – Ponto médio . . . . .	20
Figura 5 – Mediatriz . . . . .	20
Figura 6 – Triângulo . . . . .	20
Figura 7 – Circunferência . . . . .	21
Figura 8 – Arco . . . . .	21
Figura 9 – Triângulo equilátero $ABC$ . . . . .	22
Figura 10 – Divisão de um segmento na razão extrema e média. . . . .	23
Figura 11 – Espiral de Arquimedes . . . . .	24
Figura 12 – Transporte do segmento $AB$ para a reta $r$ . . . . .	25
Figura 13 – Adição dos segmentos $AB$ e $CD$ . . . . .	26
Figura 14 – Ponto médio do segmento $AB$ . . . . .	26
Figura 15 – Segmento $AB$ em $r$ . . . . .	27
Figura 16 – Ponto médio do segmento $AB$ . . . . .	27
Figura 17 – Ponto $C$ em $r$ . . . . .	28
Figura 18 – Mediatriz . . . . .	28
Figura 19 – Segmento $AD$ . . . . .	28
Figura 20 – Ponto $E$ . . . . .	29
Figura 21 – Ponto $F$ sobre a reta $r$ . . . . .	29
Figura 22 – Construção de um triângulo equilátero . . . . .	30
Figura 23 – Construção do triângulo equilátero $ABC$ . . . . .	33
Figura 24 – Construção do triângulo equilátero $BCD$ . . . . .	33
Figura 25 – Construção do triângulo equilátero $DEF$ . . . . .	34
Figura 26 – Construção do triângulo equilátero $FGH$ . . . . .	34
Figura 27 – Construção do triângulo equilátero $HIJ$ . . . . .	35
Figura 28 – Construção do triângulo equilátero $JKL$ . . . . .	36
Figura 29 – Estrutura com $n$ triângulos equiláteros adjacentes . . . . .	37
Figura 30 – Triângulos equiláteros adjacentes gêmeos . . . . .	38
Figura 31 – Espiral externa . . . . .	46
Figura 32 – Espiral interna . . . . .	47
Figura 33 – Espiral externa aos triângulos gêmeos . . . . .	48

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES</b>	<b>14</b>
2.1	SEQUÊNCIAS	14
2.1.1	Progressão Aritmética	15
2.1.2	Sequência de Fibonacci	17
2.2	ALGUNS ELEMENTOS DA GEOMETRIA PLANA	19
2.2.1	Ponto	19
2.2.2	Reta	19
2.2.3	Semi-reta	19
2.2.4	Segmento de Reta	19
2.2.5	Ponto Médio	19
2.2.6	Mediatriz	20
2.2.7	Triângulo	20
2.2.8	Triângulo Equilátero	21
2.2.9	Circunferência	21
2.2.10	Arco de Circunferência	21
2.3	ÁREA E PERÍMETRO DE TRIÂNGULO EQUILÁTERO	22
2.4	NÚMERO DE OURO	22
2.5	ESPIRAL	23
<b>3</b>	<b>ALGUMAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS</b>	<b>25</b>
3.1	TRANSPORTE GRÁFICO DE SEGMENTOS	25
3.2	SOMA GRÁFICA DE SEGMENTOS	25
3.3	CONSTRUÇÃO DO PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO	26
3.4	CONSTRUÇÃO DA RETA MEDIATRIZ	27
3.5	CONSTRUÇÃO DA RAZÃO ÁUREA	27
3.6	CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO	30
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES EM SALA DE AULA</b>	<b>32</b>
4.1	ATIVIDADE 1: CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS ADJACENTES	32
4.2	ATIVIDADE 2: SOMATÓRIO DAS ÁREAS DOS TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS ADJACENTES	38
4.3	ATIVIDADE 3: PERÍMETRO DE FIGURA FORMADA POR TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS ADJACENTES	41

4.4	ATIVIDADE 4: ESPIRAIS DOS TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS AD- JACENTES E A RAZÃO ENTRE OS LADOS . . . . .	46
4.4.1	Espiral Externa dos Triângulos Equiláteros Adjacentes . . . . .	46
4.4.2	Espiral Interna dos Triângulos Equiláteros Adjacentes . . . . .	47
4.4.3	Razão dos lados . . . . .	48
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>50</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>51</b>
	<b>APÊNDICE A – OS 60 PRIMEIROS NÚMEROS DE FIBO- NACCI . . . . .</b>	<b>53</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Existem vários softwares que constroem diversas figuras e formas geométricas, como o triângulo. Esses softwares tem alguns resultados baseados em estudos antigos, feitos por diversos matemáticos, em destaque Euclides de Alexandria o qual escreveu o livro *Os Elementos*, contendo várias proposições e definições geométricas, inclusive construções geométricas. Os Elementos de Euclides servem até hoje como base para muitos estudos dentro da geometria plana que segundo Eves (2011, p. 167): “Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico”.

O desenho geométrico seguiu como matéria obrigatória no currículo escolar durante o período de 1931 a 1971 ininterruptamente.

Os currículos escolares do ensino fundamental no Brasil sofreram grandes mudanças em 1971 com a promulgação da Lei n. 5692 – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Havia um núcleo de disciplinas obrigatórias e outros núcleos de disciplinas optativas, as quais poderiam integrar a parte diversificada do currículo. As escolas tinham a liberdade de construir a sua grade curricular apenas dentro da parte diversificada. As instituições escolares deveriam seguir as determinações da legislação escolar, que impunham a integração da Educação Artística, em todas as séries dos cursos de 1º e 2º graus do ensino básico. O Desenho tornara-se uma disciplina optativa da parte diversificada do currículo. Deste modo, após a promulgação da referida lei, muitas escolas aboliram o ensino das construções geométricas, ensinadas na disciplina Desenho Geométrico (ZUIN, 2002 p. 1).

No século XIII, Leonardo Fibonacci que segundo Eves (2011, p. 292): “[...] o matemático mais talentoso da Idade Média”, publicou em 1202 sua famosa obra intitulada *Liber Abaci*. Nesta obra pode-se encontrar a sequência que leva o seu nome, a sequência de Fibonacci, decorrida da resolução do problema da reprodução de coelhos, problema encontrado em sua obra. Nas palavras de Domingues (1991, p. 74): “[...] claro que a sequência de Fibonacci não teria despertado tanta atenção se não fosse dotada de propriedades tão interessantes e não se mostrasse tão rica em aplicações”.

O objetivo deste trabalho é resgatar as construções geométricas de figuras, mais especificamente, triângulos equiláteros adjacentes utilizando régua e compasso de tal forma a encontrar alguns padrões tanto nos somatórios das áreas e no perímetro da estrutura firmada. Esses padrões são procurados considerando relações com a sequência de Fibonacci, é também procurada a razão como divisão de um segmento na média e extrema razão, chamado *Número de Ouro*. Essas construções são desenvolvidas em quatro atividades que são propostas a serem realizadas em sala de aula com alunos basicamente da Primeira Série do Ensino Médio.

A construção das figuras geométricas é feita por meio de resultados dados por Wagner(2007) no seu livro “Construções Geométricas”, e Queiroga e Vitor (2007) no seu livro “Desenho Geométrico”. Os padrões foram procurados utilizando gráficos de triângulos equiláteros adjacentes colocando-os no sentido anti-horário segundo os números de Fibonacci. Esses padrões foram constituídos em forma de espirais construídos a partir dos vértices externos dos triângulos adjacentes cujas medidas dos lados seguem a sequência de Fibonacci.

Os padrões considerando medidas de áreas e perímetros foram constituídos utilizando as fórmulas de somatório de um número finito de termos relacionados com algumas das propriedades dos números de Fibonacci. O número de Ouro foi caracterizado utilizando uma sequência dada de razões entre dois números consecutivos de Fibonacci.

Este trabalho é dividido em mais três capítulos, os quais são descritos a seguir.

No segundo capítulo abordam-se algumas definições e propriedades que são essenciais para o desenvolvimento das atividades propostas.

No terceiro capítulo são expostas construções geométricas do transporte e adição de segmentos, do ponto médio e mediatriz, do segmento áureo e de um triângulo equilátero, todas utilizando régua e compasso. Todas essas construções são necessárias para a construção da estrutura de triângulos equiláteros adjacentes.

No capítulo quatro são propostas quatro atividades para serem desenvolvidas em sala de aula com turmas da 1ª Série do Ensino Médio. A primeira é a construção de triângulos equiláteros adjacentes seguindo a sequência de Fibonacci por meio da utilização de régua e compasso. A segunda atividade é o estudo do padrão do somatório das áreas dos triângulos equiláteros adjacentes, seguida da obtenção de uma fórmula que represente esse padrão encontrado. A terceira atividade é a obtenção de uma fórmula baseada nos padrões do somatório dos perímetros dos triângulos. Por último na atividade quatro é feita a construção de duas espirais e o estudo da razão dos lados de dois triângulos equiláteros consecutivos da estrutura, conectando-a com o Número de Ouro.

Finalmente são colocadas as considerações finais, destacando a importância das construções com régua e compasso na solução de busca de padrões por meio da visualização de figuras geométricas como ferramenta no desenvolvimento da coordenação motora e interpretação visual.

## 2 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

### 2.1 SEQUÊNCIAS

Em muitos casos da vida diária ocorrem situações com ideias de sequência, por exemplo:

- Os dias da semana (segunda, terça, quarta,...)
- Os meses do ano (janeiro, fevereiro, março,...)
- A divisão das quadras no Plano Diretor de Palmas/TO (100, 200, 300, ...)

Todos esses exemplos remetem a ideia que há uma lógica, significado em seus valores que obedecem a certa ordem.

Conforme Dante,

Uma sequência finita de  $n$  termos é uma função cujo domínio é o conjunto numérico  $1, 2, 3, \dots, n$ . Os números do contradomínio são indicados por  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Uma sequência infinita é uma função  $f$  cuja o domínio é  $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots, n$ , e o contradomínio indicado por  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ . Assim,  $f(1) = a_1$ ,  $f(2) = a_2$ , ...,  $f(n) = a_n$ , ... (DANTE, 2010 p. 295)

**Exemplo 1.** *Observe algumas sequências*

- *A sequência de números pares positivos é infinita:  $(2, 4, 6, 8, \dots)$ , onde  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_3 = 6$ ,  $a_4 = 8$ , etc.*
- *A sequência dos números cubos perfeitos é infinita:  $(1, 8, 27, 64, \dots)$ , onde  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 8$ ,  $a_3 = 27$ ,  $a_4 = 64$ , etc.*
- *$(-4, -1, 4, 11)$  é uma sequência finita de 4 termos*

Algumas sequências são determinadas por regras ou leis matemáticas chamadas *leis de formação*, que nos facilitam expor todos os seus termos.

**Exemplo 2.** *Vamos determinar a sequência definida por*

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3a_{n-1} + 5, \text{ para } n \in \mathbb{N}, n > 1 \end{cases}$$

*Demonstração.* Dada a definição da sequência, tem-se para os valores de  $n$ :

- Para  $n = 2 \Rightarrow a_2 = 3a_1 + 5 = 3 \cdot 2 + 5 = 11$
- Para  $n = 3 \Rightarrow a_3 = 3a_2 + 5 = 3 \cdot 11 + 5 = 38$
- Para  $n = 4 \Rightarrow a_4 = 3a_3 + 5 = 3 \cdot 38 + 5 = 119$

Portanto, a sequência é  $(3, 11, 38, 119, \dots)$ .

□

Algumas sequências possuem um padrão específico e são classificadas de forma única, como é o caso das sequências do tipo aritméticas.

### 2.1.1 Progressão Aritmética

Segundo Dante,

*Progressão aritmética (PA)* é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada razão da progressão e é representada pela letra  $r$ . (DANTE, 2010, p. 297)

De modo geral, uma sequência  $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$  é uma progressão aritmética quando:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 4r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \tag{2.1}$$

onde a equação (2.1) é chamada *fórmula do termo geral de uma PA*.

Note que  $a_2 = a_1 + r \Rightarrow r = a_2 - a_1$ ,  $a_3 = a_2 + r \Rightarrow r = a_3 - a_2$ ,  $a_4 = a_3 + r \Rightarrow r = a_4 - a_3$ , de forma geral,  $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots = r$ .

Uma sequência  $(a_n)$  é dita ser uma progressão aritmética de segunda ordem se a sequência  $(a_{n+1} - a_n)$  onde a diferença  $(a_{n+1} - a_n)$  entre um termo e o seu antecessor formam uma PA.

Dante caracteriza uma progressão aritmética de segunda ordem da seguinte forma



É possível provar que toda sequência na qual o termo de orden  $n$  é um polinômio em  $n$  do segundo grau é uma progressão aritmética de segunda ordem. Reciprocamente, se  $a_n$  é uma progressão aritmética de segundo ordem, então  $a_n$  é um polinômio do segundo grau em  $n$  (DANTE, 2010, p. 311).

**Exemplo 3.** Dada a PA de segunda ordem  $(7, 8, 10, 13, 17, 22, \dots)$ , vamos determinar o polinômio de segundo grau que expressa o seu termo geral.

*Demonstração.* Observe que:

$$a_1 = 7$$

$$a_2 = 8 = 7 + 1$$

$$a_3 = 10 = 7 + 1 + 2$$

$$a_4 = 13 = 7 + 1 + 2 + 3$$

$$a_5 = 17 = 7 + 1 + 2 + 3 + 4$$

⋮

$$a_{10} = 52 = 7 + \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9}_{\text{soma dos 9 termos da PA (1, 2, 3, 4, \dots)}}$$

⋮

$$a_n = 7 + \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n - 1 + n}_{\text{soma dos } n \text{ elementos da PA (1, 2, 3, \dots)}} - n$$

Logo, observa-se que a PA  $(1, 2, 3, \dots)$  possui razão  $r = 1$  e o primeiro elemento  $b_1 = 1$ , então a soma desses elementos é dada por:

$$S_{b_n} = \frac{(1+n)n}{2}$$

Portanto  $a_n$  é expresso da seguinte forma:

$$a_n = 7 - n + \frac{(1+n)n}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 7$$

□

**Exemplo 4.** Dado polinômio do segundo grau  $b_n = n^2 + 2n + 1$ , mostre que este polinômio define uma progressão aritmética de segunda ordem.

*Demonstração.* Observe que

$$b_1 = 1^2 + 2 + 1 = 4 = 1 + 3$$

$$b_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9 = 1 + 3 + 5$$

$$b_3 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$$

$$b_4 = 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

$$b_5 = 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$$

⋮

$$b_n = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1 + 2n + 1$$

Note que a  $(1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1)$  é uma progressão aritmética onde  $b_5 - b_4 = 36 - 25 = 11$ ,  $b_4 - b_3 = 25 - 16 = 9$ ,  $b_3 - b_2 = 16 - 9 = 7$  e  $b_2 - b_1 = 9 - 4 = 5$ .

□

### 2.1.2 Sequência de Fibonacci

Dada a sequência numérica  $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n, \dots$ , onde todo termo é igual a soma dos dois termos anteriores, para  $n > 2$ , é válida

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (2.2)$$

Existem várias sequências numéricas que satisfazem essas condições como por exemplo, as seguintes sequências:

- $-2, 3, 1, 4, 5, 9, 14, 23, \dots$
- $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots$
- $2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, \dots$

Dentre várias sequências desse tipo, uma se destaca. Tomando  $f_1 = 1$  e  $f_2 = 1$ , como seus valores iniciais. Pela condição (2.2), a sucessão  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$ , onde cada termo é chamado de *números de Fibonacci*. No Apêndice A encontra-se uma lista dos 60 primeiros números de Fibonacci. As condições para uma sequência ser dita de Fibonacci são

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \end{cases} \quad (2.3)$$

para todo  $n > 2$

Existe uma fórmula para calcular um número de Fibonacci de forma direta em função do seu índice  $n$ , chamada *fórmula de Binet*, dada por:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (2.4)$$

para todo  $n > 0$ .

É explorado neste trabalho duas propriedades dos números de Fibonacci, as demais propriedades não são relevantes em relação a proposta deste trabalho. Para o leitor que queira aprofundar o estudo das demais propriedades dos números de Fibonacci recomenda-se a leitura de [12].

**Propriedade 1** (Soma dos  $n$  primeiros números de Fibonacci). *Para todo  $n \geq 1$  :*

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1 \quad (2.5)$$

*Demonstração.* A demonstração será feita usando indução sobre  $n$ :

Para  $n = 1$ ,  $f_1 = f_3 - 1$  é verdade.

Supondo para todo  $r \geq 1$  é válido  $f_1 + f_2 + \dots + f_r = f_{r+2} - 1$

Agora testando para  $n = r + 1$ , tem-se que,  $f_1 + \dots + f_r + f_{r+1} = f_{r+2} - 1 + f_{r+1} = f_{r+3} - 1$

Portanto a propriedade (2.5) é válida para todo  $n$  natural. □

**Propriedade 2** (Soma dos quadrados dos  $n$  primeiros números de Fibonacci). *Para todo  $n \geq 1$ :*

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1} \quad (2.6)$$

*Demonstração.* Note primeiramente, que:

$$f_k f_{k+1} - f_{k-1} f_k = f_k (f_{k+1} - f_{k-1}) = f_k^2$$

Utilizando a relação acima para  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , obtem-se:

$$f_1^2 = f_1 f_2,$$

$$f_2^2 = f_2 f_3 - f_1 f_2,$$

$$f_3^2 = f_3 f_4 - f_2 f_3,$$

...

$$f_n^2 = f_n f_{n+1} - f_{n-1} f_n$$

Somando as equações termo a termo, tem-se como resultado

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$$

□

As informações dessa secção foram coletadas em [12], onde o leitor mais interessado pode aprofundar o conhecimento das aplicações da sequência de Fibonacci junto com a demonstração de (2.4). Recomenda-se a leitura de [9] para o leitor que queira aprofundar o conhecimento sobre aplicações dos números de Fibonacci em várias áreas do conhecimentos e algumas curiosidades.

## 2.2 ALGUNS ELEMENTOS DA GEOMETRIA PLANA

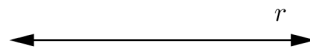
### 2.2.1 Ponto

Ponto é um objeto de dimensão zero que determina uma posição. Não possuem área e nem comprimento. É utilizado letras maiúsculas para determiná-los.

### 2.2.2 Reta

Reta é um objeto geométrico de uma dimensão formada por infinitos pontos alinhados e ilimitada nos dois sentidos. Usa-se letra minúscula para representá-la.

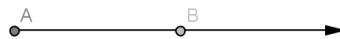
Figura 1 – Reta  $r$



### 2.2.3 Semi-reta

Semi-reta é parte de uma reta que contém todos os pontos no lado de um ponto fixo, denominado origem. Usa-se o símbolo  $\overrightarrow{AB}$  para indicar uma semi-reta de origem no ponto A e sentido para B.

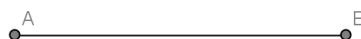
Figura 2 – Semi-reta  $AB$



### 2.2.4 Segmento de Reta

Segundo Barbosa (2012, p.4): “O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado segmento AB. Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento.”

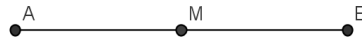
Figura 3 – Segmento  $AB$



### 2.2.5 Ponto Médio

O ponto médio do segmento  $AB$  é o ponto  $M$ , tal que  $AM = MB$ .

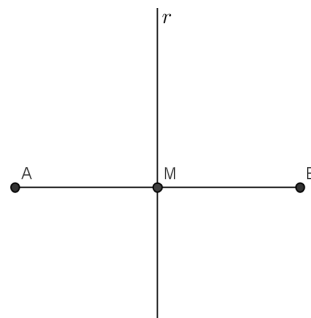
Figura 4 – Ponto médio



### 2.2.6 Mediatriz

Dado um segmento  $AB$ , é chamada de mediatriz a reta  $r$  que passa pelo ponto médio de  $AB$  e é perpendicular a mesma.

Figura 5 – Mediatriz

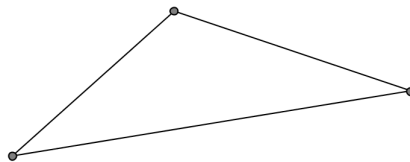


### 2.2.7 Triângulo

Segundo Barbosa:

[...] formado por três pontos que não pertencem a uma mesma reta e pelos três segmentos determinados por estes três pontos. Os três pontos são chamados *vértices* do triângulo e os segmentos, *lados* do triângulo (Barbosa, 2012, p.4).

Figura 6 – Triângulo



Em todo triângulo, tem-se que a soma das medidas dos ângulos internos é igual a  $180^\circ$ . Se  $ABC$  é um triângulo qualquer com ângulos  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$  e  $\angle ACB = \theta$ , então

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ.$$

### 2.2.8 Triângulo Equilátero

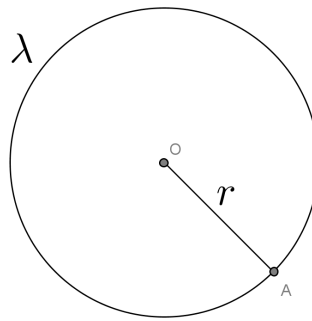
Um triângulo é dito equilátero quando os seus três lados possuem medidas iguais.

Neste trabalho é dito que dois triângulos equiláteros são adjacentes se um dos lados de um está contido no outro.

### 2.2.9 Circunferência

Circunferência é o lugar geométrico do plano que contém todos os pontos equidistantes a um único ponto, chamado centro da circunferência. Seja  $O$  o centro da circunferência  $\lambda$  e  $A$  um ponto pertencente a esta circunferência, então o segmento  $OA = r$  é chamado de raio da circunferência. A Figura 7 é representada pela circunferência  $\lambda$  de centro  $O$  e raio  $r = OA$  [1].

Figura 7 – Circunferência

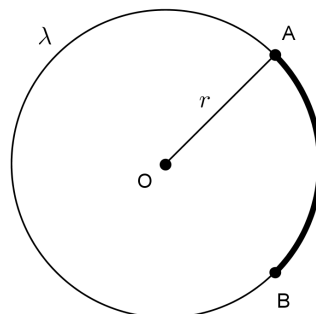


### 2.2.10 Arco de Circunferência

Dada a circunferência  $\lambda$  de centro  $O$  e raio  $r$ . Em  $\lambda$ , são marcados dois pontos  $A$  e  $B$  que partem a circunferência em duas partes designadas de arco da circunferência, a notação usada é  $\widehat{AB}$ .

Seja  $\angle AOB = \alpha$  a medida do ângulo central, então  $med(\widehat{AB}) = \alpha$ .

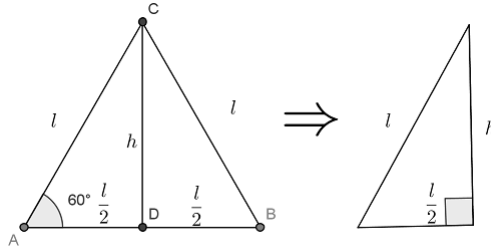
Figura 8 – Arco



### 2.3 ÁREA E PERÍMETRO DE TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Dado um triângulo ABC, o perímetro  $2P$  é dado por  $2P = l_1 + l_2 + l_3$ , onde  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$  representam os lados do triângulo. Supondo que o triângulo ABC seja equilátero, tem-se, pelo fato do triângulo ter os três lados com mesma medida, que  $l_1 = l_2 = l_3 = k$ , logo,  $2P = 3k$ .

Figura 9 – Triângulo equilátero ABC



Do triângulo equilátero ABC de lado  $l$ , é traçada a altura  $h = CD$ , conforme a figura 9, tem-se um triângulo de lados  $l$ ,  $h$ , e  $\frac{l}{2}$ . Pelo Teorema de Pitágoras:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

A área de um triângulo qualquer é expressa por  $A = \frac{bh \operatorname{sen}\theta}{2}$ , onde  $b$  é a medida da base do triângulo,  $h$  é a altura do mesmo e  $\theta$  é o ângulo formado por um lado e a base. Sendo o triângulo equilátero, ou seja, todas os lados possuem a mesma medida, tem-se AB como base e  $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$  a altura, calculada acima, logo a área do triângulo ABC é:

$$A = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

### 2.4 NÚMERO DE OURO

O *Número de Ouro* ou *Razão Áurea* ou *média e extrema razão*, este último nomeado por Euclides, é representado pela letra grega  $\Phi$ , lê-se *fi*, batizado pelo americano Mark Barr em 1899 em homenagem ao escultor grego Fídias (Phídias), onde o mesmo usou o  $\Phi$  na construção de sua famosa obra arquitetônica, o Partenon [11].

Por volta de 300 a.C. o *fi* teve sua primeira definição, feita por Euclides, em sua mais famosa coleção de treze volumes chamado de *Os Elementos*. De maneira indireta

Euclides expõe no seu Livro II a razão áurea, mas é em seu Livro IV que aparece pela segunda vez com uma definição mais clara da razão extrema e média (BOYER, 2012, p. 92-93). Geometricamente Euclides define desta forma:

Figura 10 – Divisão de um segmento na razão extrema e média.



**Definição 1** (Média e extrema razão). *Uma linha reta é seccionada na razão extrema e média quando a linha toda está para a maior parte assim como a maior parte está para a menor parte.*

Com base na definição acima, tem-se, na Figura 10:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}.$$

Tomando  $AC = x$  e  $BC = 1$ , tem-se, pela definição:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x} &= \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 = x+1 \Rightarrow \\ x^2 - x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtém-se

$$x' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi = 1,6180339887\dots$$

e

$$x'' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \phi = -0,6180339887\dots$$

A raiz positiva da equação,  $\Phi$  (fi maiúsculo), representa a extrema e média razão, usualmente denominada de Número de Ouro.

Todas as informações foram coletadas com bases em [5] e [2]. Para o leitor que queira aprofundar seu conhecimento nesse assunto, recomenda-se a leitura de [14], [10], [9], [7], [6], [2] e [5].

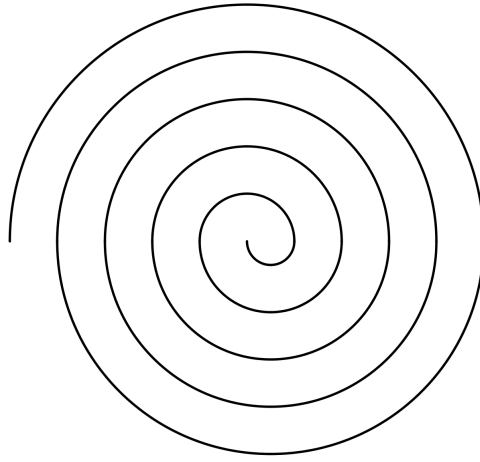
## 2.5 ESPIRAL

Segundo Janos (2009, p. 277): “Uma curva que se desenrola de um ponto central e vai progressivamente se afastando deste ponto é chamada espiral.”



Um exemplo clássico é a *espiral de Arquimedes*<sup>1</sup>, onde sua forma se parece com um tapete enrolado.

Figura 11 – Espiral de Arquimedes



---

<sup>1</sup> Grande matemático da Antiguidade. Nasceu por volta de 287 a.C. na cidade grega de Siracusa e morreu durante o saque de Siracusa em 212 a.C.[5].

### 3 ALGUMAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

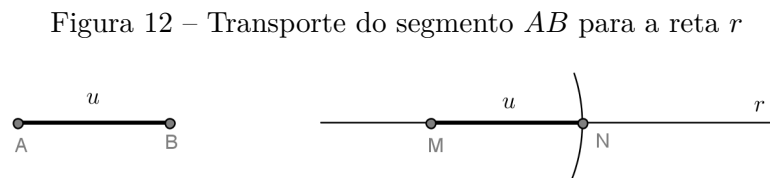
Será compartilhada aqui algumas construções geométricas usando apenas régua e compasso para a resolução das atividades propostas. Para o leitor que queira aprofundar os conhecimentos de algumas construções básicas e avançadas recomenda-se a leitura de [1], [8] e [13].

Os materiais necessários para a realização das construções geométricas são: Lápis: objeto usado para demarcar pontos e destacar segmentos. Recomenda-se o uso de lápis com grafite HB, mantendo-o sempre bem apontado; Lapiseira: utilizada para fazer os desenhos em geral, pelo fato de sua espessura fina. Dê preferência as lapiseiras com grafite 0.3 mm ou 0.5 mm; Borracha: usar borrachas macias para não deixar marcas no papel caso precise desenhar em cima do desenho apagado; Régua: dê preferência as régua de material transparente e graduada em centímetros e milímetros; Compasso: material usado para traçar arco de circunferência, transporte de medidas e segmentos e construção de ângulos (QUEIROGA e VITOR, 2007, p. 11-12). A parte de metal do compasso em forma de agulha será chamada de ponta seca.

#### 3.1 TRANSPORTE GRÁFICO DE SEGMENTOS

Segundo Queiroga e Vitor (2007, p. 12): “O transporte gráfico de segmento consiste em construir um segmento congruente ao segmento dado.”

Para transportar um segmento  $AB$  de  $u$  unidades de comprimento para a reta  $r$ . Com a ponta seca do compasso em  $A$ , faça uma abertura de tamanho  $AB = u$  unidades, mantendo a mesma abertura, coloque a ponta seca do compasso sobre o ponto  $M \in r$  e faça um arco, de modo que o arco intersecte a reta  $r$ . Marque o ponto  $N$  da interseção do arco com a reta  $r$ . Assim  $AB = MN$  e  $MN \in r$ . Portanto o segmento  $AB$  foi transportado para a reta  $r$ , onde  $MN = u$  unidades.

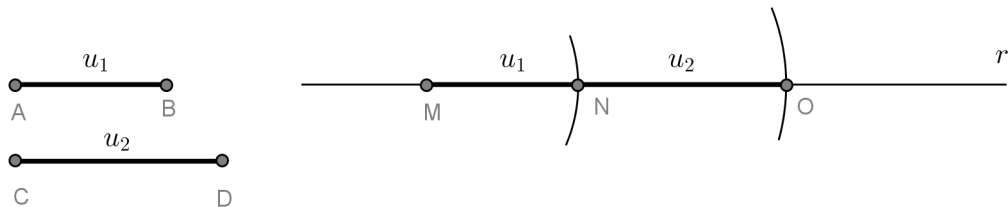


#### 3.2 SOMA GRÁFICA DE SEGMENTOS

Segundo Queiroga e Vitor(2007, p. 12): “A soma gráfica de segmentos é obtida pelo transporte sucessivo dos segmentos dados.”

Dados os segmentos  $AB = u_1$  unidades de comprimento e  $CD = u_2$  unidades de comprimento e a reta  $r$ . Com a ponta seca do compasso em  $A$ , faça uma abertura de comprimento  $AB = u_1$  unidades, mantendo a mesma abertura, coloque a ponta seca do compasso sobre o ponto  $M \in r$  e faça um arco de forma que intersepte a reta  $r$  no ponto  $N$ . Assim  $AB = MN = u_1$  unidades. Com a ponta seca do compasso em  $C$ , faça uma abertura de comprimento  $CD = u_2$  unidades, mantendo a mesma abertura, coloque a ponta seca do compasso sobre o ponto  $N \in r$  e faça um arco de forma que intersepte a reta  $r$  no ponto  $O$ . Assim  $CD = NO = u_2$  unidades. Logo o segmento  $MO = AB + CD = MN + NO = u_1 + u_2$  unidades. Portanto o segmento  $MO$  é a adição dos segmentos  $AB$  e  $CD$  sobre a reta  $r$ .

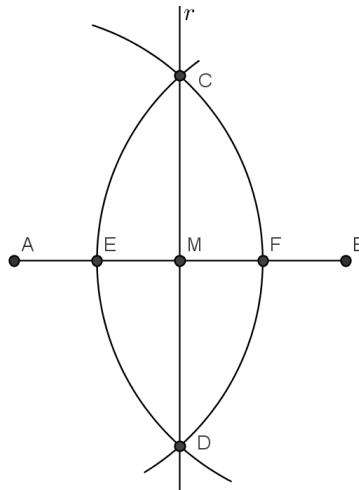
Figura 13 – Adição dos segmentos  $AB$  e  $CD$



### 3.3 CONSTRUÇÃO DO PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Dado um segmento  $AB = u$  unidades, Figura 14, com a ponta seca do compasso em  $A$  trace um arco de raio  $r$  tal que  $\frac{u}{2} < r < u$ . Com a mesma abertura  $r$  do compasso, com a ponta seca em  $B$  trace um arco e marque os pontos de interseção dos arcos. Trace uma reta  $r$  passando pelos pontos de interseção dos arcos e marque o ponto  $M$  da interseção da reta  $r$  com o segmento  $AB$ . Portanto  $M$  é o ponto médio do segmento  $AB$ .

Figura 14 – Ponto médio do segmento  $AB$



### 3.4 CONSTRUÇÃO DA RETA MEDIATRIZ

A construção da mediatriz segue o mesmo processo da construção do ponto médio. Observe que na Figura 14, a reta chamada de  $r$  é a mediatriz do segmento AB passando por M.

Observe que  $AC = CB$ , pois  $AF = EB$  é o raio do arco  $\widehat{CF} = \widehat{EC}$ , assim o triângulo ABC é isósceles e CM é sua altura. Por pitágoras temos que  $AC^2 = AM^2 + CM^2$  e  $CB^2 = BM^2 + CM^2$ , fazendo  $CM^2 = BC^2 - BM^2$ , tem-se

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 \Rightarrow AC^2 = AM^2 + BC^2 - BM^2$$

do fato que  $AC = CB \Rightarrow AC^2 = CB^2$ , tem-se

$$AM^2 = BM^2 \Rightarrow AM = BM$$

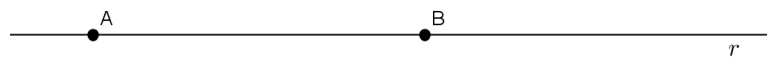
Portanto M é o ponto médio de AB e a reta  $r$  é a mediatriz de AB que passa por M.

### 3.5 CONSTRUÇÃO DA RAZÃO ÁUREA

Há vários métodos para a construção da razão áurea. Será explorada a seguinte construção com o recurso da régua e do compasso com base em [13] e [11]:

- (a) Trace com a régua um reta  $r$  e marque dois pontos A e B em  $r$ ;

Figura 15 – Segmento AB em  $r$

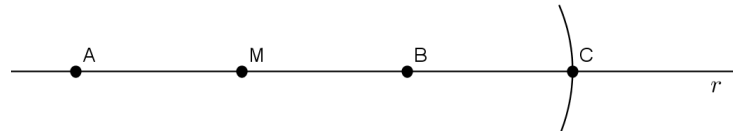


- (b) Primeiramente, deve-se determinar o ponto médio de AB. Seguindo os passos do item 3.3 determina-se o ponto M;

Figura 16 – Ponto médio do segmento AB

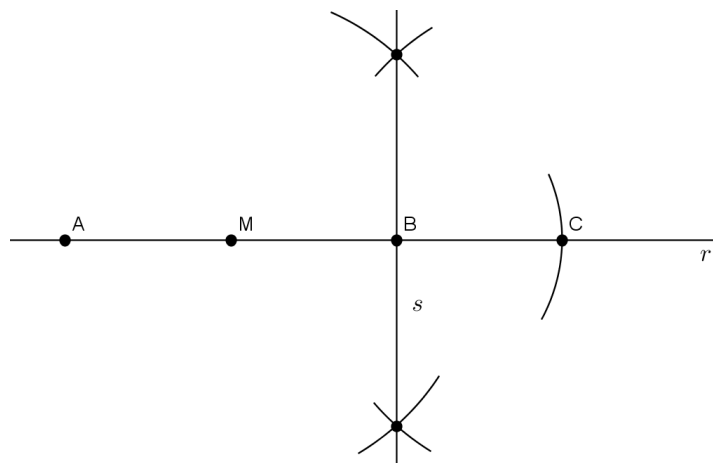


- (c) Com a ponta seca do compasso em B e abertura BM, trace um arco à direita de  $r$  e marque o ponto C da intersecção do arco com a reta  $r$ . Logo B é o ponto médio de MC.

Figura 17 – Ponto C em  $r$ 

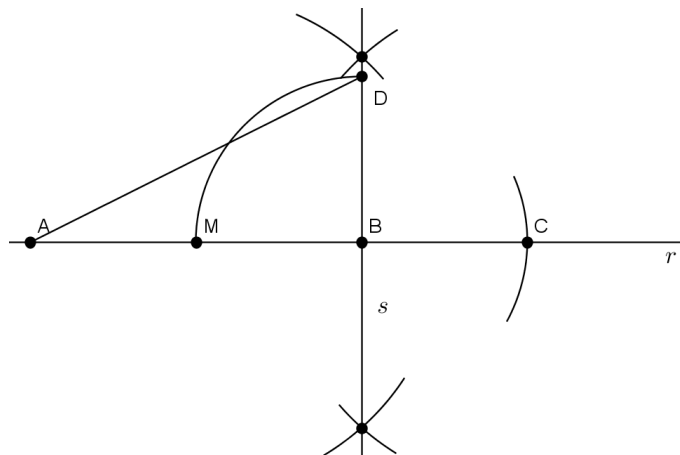
- (d) Trace a mediatriz  $s$  que passa por B seguindo os passos do item 3.4;

Figura 18 – Mediatriz



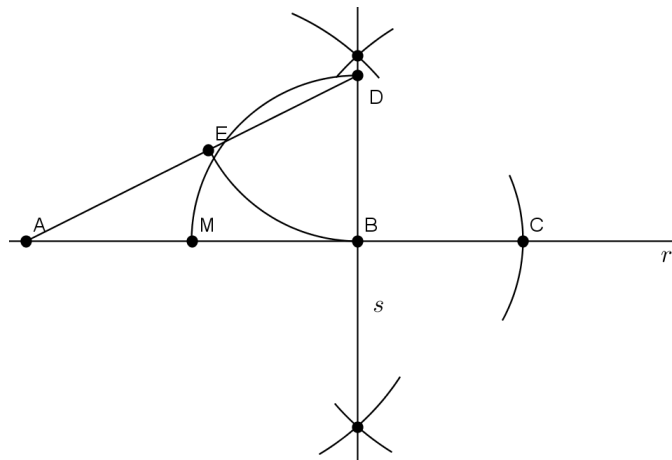
- (e) Com o ponta seca do compasso em B, abra-o até o ponto M e marque o ponto D na reta  $s$ . Trace o segmento AD;

Figura 19 – Segmento AD

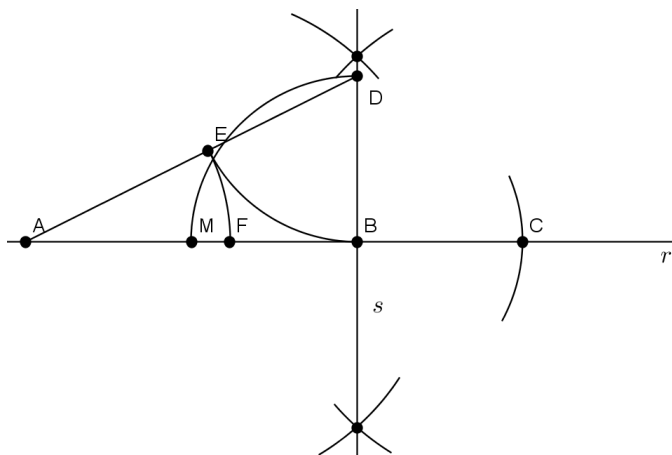


- (f) Com a ponta seca do compasso sobre o ponto D, abra-o até o ponto B e marque o ponto E sobre o segmento AD;

Figura 20 – Ponto E



- (g) Por último, com a ponta seca do compasso em A, abra-o até o ponto E e marque sobre o segmento AB um ponto F.

Figura 21 – Ponto F sobre a reta  $r$ 

Observe que se tomar  $AB = a$ , então  $AM = MB = \frac{a}{2}$ . Tem-se no item (g) que  $MB = BD = \frac{a}{2}$  e do fato do triângulo ABD ser retângulo em B, pelo teorema de Pitágoras:

$$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2$$

$$(AD)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$AD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Do fato de  $DE = BD = \frac{a}{2}$ , como  $AD = AE + ED$ , então  $AE = AD - ED = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ . Note no item (g),  $AE = AF = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ . Observe também que  $FB = AB - AF = a - \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$ . Portanto, obtem-se as seguintes proporções:

$$\frac{AB}{AF} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

e também que

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}}{\frac{a(3-\sqrt{5})}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

De uma forma resumida:

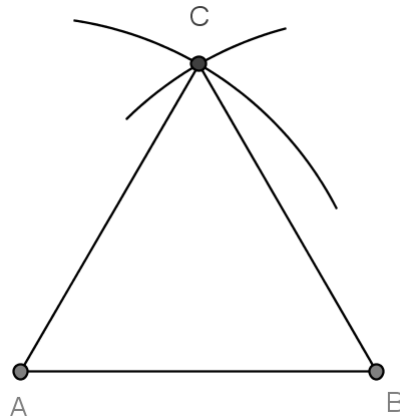
$$\frac{AB}{AF} = \frac{AF}{FB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi.$$

Portanto o segmento AB está dividido em *razão extrema e média* em F de acordo com a Definição 1 da secção 2.4.

### 3.6 CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Dado um segmento AB de comprimento qualquer, com a ponta seca do compasso em A, faça uma abertura AB e trace um arco. Com a ponta seca do compasso em B, faça uma abertura BA e trace um segundo arco. Marque o ponto C da intersecção entre os dois arcos. ABC é um triângulo equilátero.

Figura 22 – Construção de um triângulo equilátero



Observe que todos os lado do triângulo partiram de uma mesma abertura  $AB$  do compasso, logo  $AB = BC = CA$ , portanto o triângulo  $ABC$  é equilátero.



## 4 APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

Será explorada um pouco da interessante união entre triângulos equiláteros adjacentes e a sequência de Fibonacci em forma de propostas de atividades envolvendo construções geométricas para turmas da Primeira Série do Ensino Médio da Rede Pública Estadual.

O objetivo das atividades propostas é resgatar as construções geométricas através da construção de uma estrutura de triângulos equiláteros adjacentes utilizando régua e compasso. Dado que essas construções possuam relações com a sequência de Fibonacci de tal forma que será determinado alguns padrões existentes na estrutura de triângulos como o padrão do somatório das áreas e do somatório dos perímetros, bem como a relação da razão entre os lados de dois triângulos adjacentes com o Número de Ouro.

Desenvolver a capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, de reconhecer propriedades geométricas básicas e de caracterizar as diferentes formas geométricas na natureza, assim como, ser capaz de perceber a importância dos números, suas propriedades, suas inter-relações, seus significados e o modo como, historicamente foi construído, bem como sua eficácia na resolução de situações-problema no seu cotidiano são as competências deste trabalho.

Representar as diferentes formas planas presentes na natureza, classificar as formas geométricas e seus elementos, identificar e representar figuras planas e seus elementos, resolver situações problemas aplicando os conceitos de perímetro e área, interpretar a linguagem numérica, perceber regularidades, estabelecer relações e produzir generalizações, reconhecer e utilizar a linguagem numérica relacionando a linguagem algébrica, escrever e utilizar o termo geral de uma sequência numérica e aplicá-lo na resolução de problemas, utilizar as sequências numéricas para representar, interpretar e tomar decisões na vida pessoal e profissional são as habilidades do mesmo.

### 4.1 ATIVIDADE 1: CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS ADJACENTES

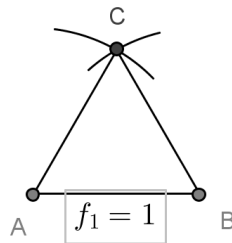
Dada a sequência de Fibonacci  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots, f_n, \dots$ , conforme definição feita na Seção 2.1.2, e triângulos equiláteros de lados  $l_1 = 1, l_2 = 1, l_3 = 2, l_4 = 3, l_5 = 5, l_6 = 8$ , ou seja,  $l_n = f_n$ , onde  $f_n$  é um número de Fibonacci e  $n$  representa sua posição na sequência. Será feita a construção de 6 triângulos equiláteros adjacentes com as medidas dos lados seguindo a sequência de Fibonacci, ou seja, o primeiro triângulo equilátero terá medida do lado igual a  $f_1 = 1$  unidade, o segundo triângulo equilátero terá medida do lado igual a  $f_2 = 1$  unidade, o terceiro igual a  $f_3 = 2$  unidades,

o quarto igual a  $f_4 = 3$  unidades, o quinto igual a  $f_5 = 5$  unidades e o sexto igual a  $f_6 = 8$  unidades.

A construção será feita no sentido anti-horário e os triângulos equiláteros são adjacentes de forma que satisfazem a definição em 2.2.8. Segue aqui os passos para a construção:

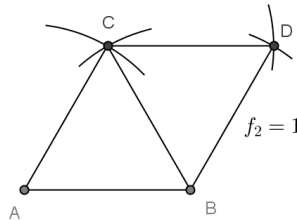
- (a) Dado o segmento AB medindo  $f_1 = 1$  unidade, com a ponta seca do compasso em A e abertura  $f_1$  trace um arco. Com a ponta seca do compasso em B e com mesma abertura, trace outro arco. Do encontro dos dois arcos marque o ponto C e trace os segmentos AC e BC ambos de lado medindo  $f_1 = 1$  unidade.

Figura 23 – Construção do triângulo equilátero ABC



- (b) Com a ponta seca do compasso em C e abertura  $AB = f_1 = f_2 = 1$  unidade trace um arco. Repita o mesmo processo sobre o ponto B, demarque o ponto D da intersecção dos dois arcos e trace os segmentos BD e CD, ambos de lado medindo  $f_2 = 1$  unidade.

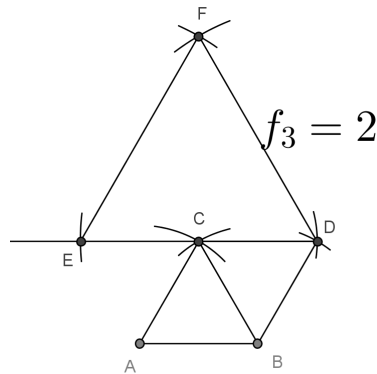
Figura 24 – Construção do triângulo equilátero BCD



- (c) Com a régua sobre o lado CD trace a semi-reta  $\overrightarrow{DC}$ . Pelo fato da medida do lado do próximo triângulo ser de  $f_3=2$  unidades, deve-se transportar o segmento  $AB = f_1 = 1$  unidade para a semi-reta  $\overrightarrow{DC}$ , assim, com a ponta seca do compasso em C e abertura  $AB = f_1$ , determine o ponto E em  $\overrightarrow{DC}$ . Com a ponta seca do compasso em E e abertura ED, trace um arco. Repita o processo sobre o ponto D, demarque

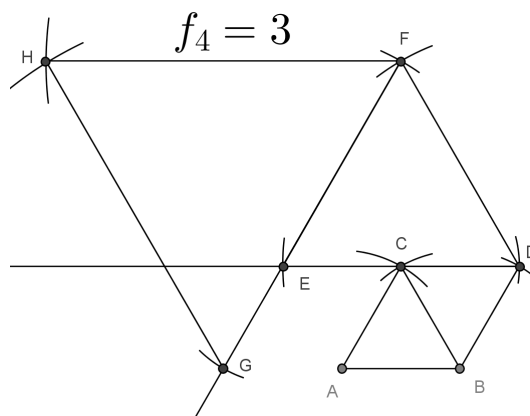
o ponto F da intersecção dos arcos e trace os segmentos EF e FD, ambos de lado medindo  $f_3 = 2$  unidades.

Figura 25 – Construção do triângulo equilátero DEF



- (d) Com a régua sobre o lado FE trace a semi-reta  $\overrightarrow{FE}$ . Pelo fato da medida do lado do próximo triângulo ser de  $f_4 = 3$  unidades, deve-se transportar o segmento  $AB = f_1 = 1$  unidade para a semi-reta  $\overrightarrow{FE}$ , assim, com a ponta seca do compasso em E e abertura  $AB = f_1$ , determine o ponto G em  $\overrightarrow{FE}$ . Com a ponta seca do compasso em G e abertura GF, trace um arco. Repita o processo sobre o ponto F, demarque o ponto H da intersecção dos arcos e trace os segmentos HG e HF, ambos de lado medindo  $f_4 = 3$  unidades.

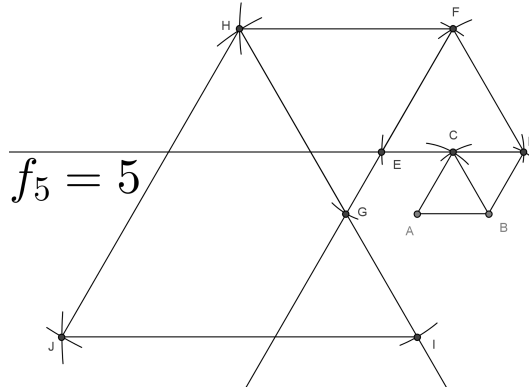
Figura 26 – Construção do triângulo equilátero FGH



- (e) Com a régua sobre o lado HG trace a semi-reta  $\overrightarrow{HG}$ . Pelo fato da medida do lado do próximo triângulo ser de  $f_5 = 5$  unidades, deve-se transportar o segmento  $ED = f_3 = 2$  unidade para a semi-reta  $\overrightarrow{HG}$ , assim, com a ponta seca do compasso em G e abertura  $ED = f_3$ , determine o ponto I em  $\overrightarrow{HG}$ . Com a ponta seca do compasso

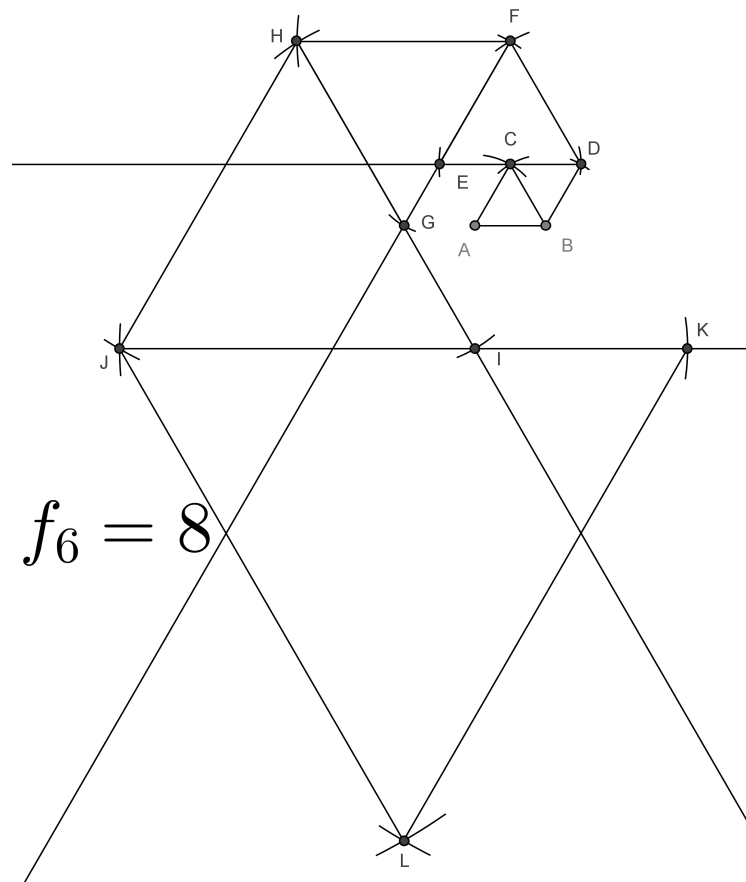
em I e abertura IH, trace um arco. Repita o processo sobre o ponto H, demarque o ponto J da intersecção dos arcos e trace os segmentos JI e JH, ambos de lado medindo  $f_5 = 5$  unidades.

Figura 27 – Construção do triângulo equilátero HIJ



- (f) Com a régua sobre o lado JI trace a semi-reta  $\vec{JI}$ . Pelo fato da medida do lado do próximo triângulo ser de  $f_6 = 8$  unidades, deve-se transportar o segmento  $FH = f_4 = 3$  unidade para a semi-reta  $\vec{JI}$ , assim, com a ponta seca do compasso em I e abertura  $HF = f_4$ , determine o ponto K em  $\vec{JI}$ . Com a ponta seca do compasso em K e abertura JK, trace um arco. Repita o processo sobre o ponto J, demarque o ponto L da intersecção dos arcos e trace os segmentos JL e LK, ambos de lado medindo  $f_6 = 8$  unidades.

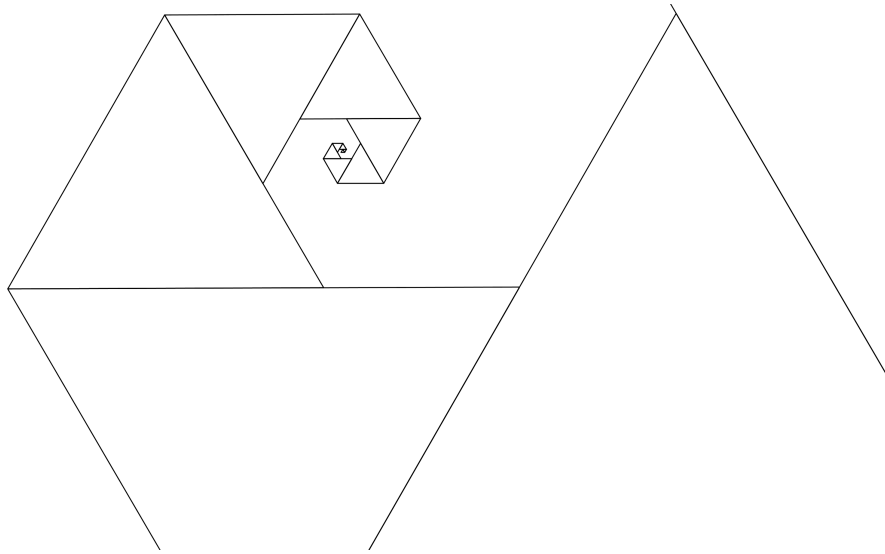
Figura 28 – Construção do triângulo equilátero JKL



Observe que esta construção possui apenas 6 triângulos equiláteros adjacentes de forma que  $AB = f_1$  unidades,  $BD = f_2$  unidades,  $DF = f_3$  unidades,  $FH = f_4$  unidades,  $HJ = f_5$  unidades e  $JL = f_6$  unidades. Para a construção de  $n$  triângulos equiláteros, basta seguir o mesmo processo de forma que as medidas dos lados dos triângulos sigam a sequência de Fibonacci e sejam adjacentes de acordo com 2.2.8.

Esse processo se dá infinitamente, basta seguir os passos de forma sucessiva.

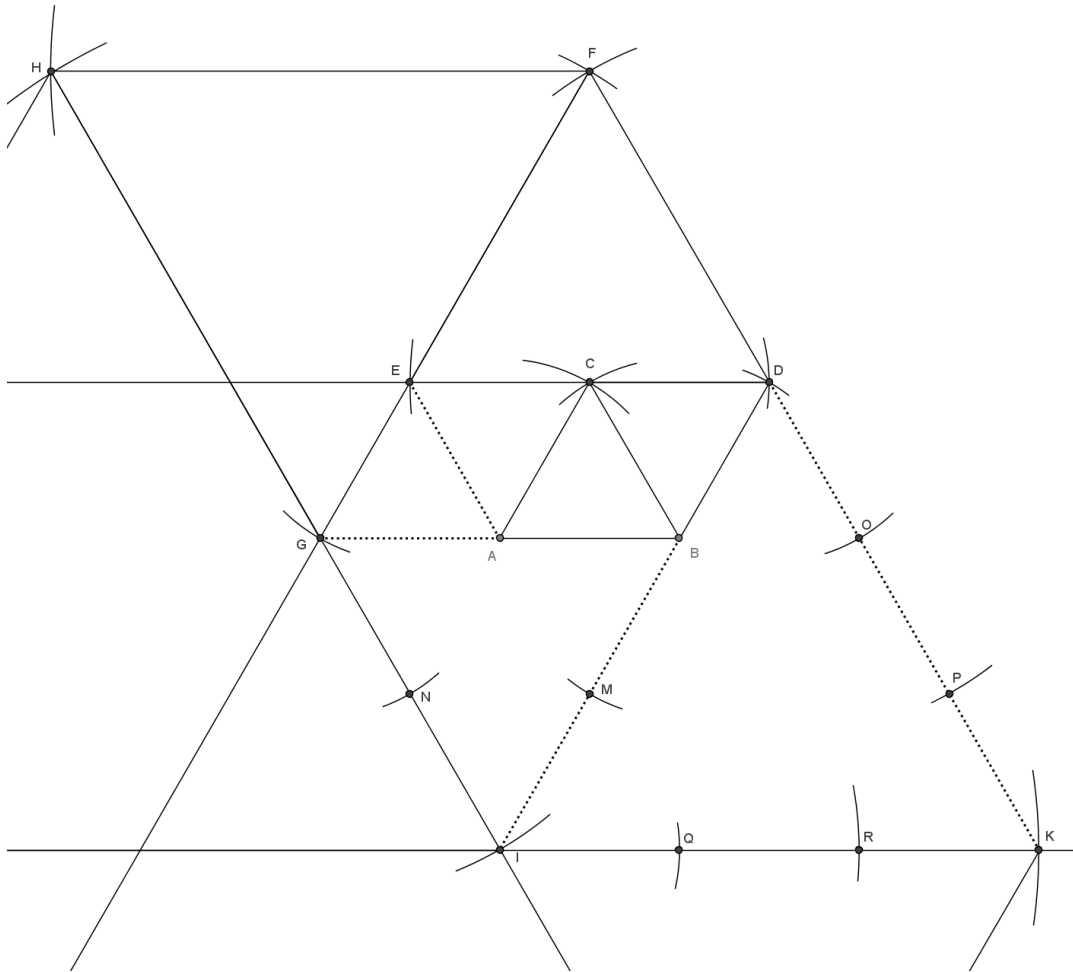
É cedida a seguinte figura de uma estrutura com  $n$  triângulos equiláteros adjacentes de medidas dos lados seguindo a sequência de Fibonacci com o primeiro triângulo de lado medindo  $f_1$  até  $f_n$ , com  $n$  tendendo ao infinito.

Figura 29 – Estrutura com  $n$  triângulos equiláteros adjacentes

Na Figura 30, são pontilhados os segmentos  $AE$ ,  $AG$ ,  $BI$  e  $DK$ . Pode-se observar que os triângulos  $ACE$ ,  $AEG$ ,  $BGI$  e  $DIK$ , são exatamente iguais aos triângulos  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $DEF$  e  $FGH$ , respectivamente, ou seja, também são triângulos equiláteros adjacentes. Esses tais triângulos, chamados de *triângulos gêmeos*, seguem juntamente com a sequência de triângulos equiláteros adjacentes.

Para provar que os triângulos gêmeos são idênticos aos triângulos equiláteros adjacentes, basta fazer o transporte de segmentos. Note na Figura 30, tomando como base o segmento  $AB = f_1 = 1$  unidade, tem-se  $AB = AE = AG = EG$  e do fato de  $AB = EC$ , tem-se que os triângulos  $ACE$  e  $AEG$  são equiláteros de lados iguais a  $f_1 = 1$  unidade, ou seja, são iguais aos triângulos  $ABC$  e  $BCD$ . Observe também que fazendo o transporte do segmento  $AB$  para os segmentos  $GI$  e  $DI$ , tem-se que  $AB = AG = GN = NI = BM = MI$ , assim o segmento  $GI = BI = BG = f_3 = 2$  unidades, ou seja, o triângulo  $BGI$  é igual ao triângulo  $DEF$ . Esse processo do transporte de segmentos vale para todos os triângulos equiláteros adjacentes gêmeos. Esse modo de demonstração é de fácil compreensão e ideal para mostrar aos alunos.

Figura 30 – Triângulos equiláteros adjacentes gêmeos



Note que há um fato curioso nesta estrutura de triângulos, existem paralelogramos, como por exemplo, os paralelogramos BDEG, DFGI e FHIK da Figura 30, que são formados da união dos triângulos equiláteros adjacentes e seus respectivos triângulos equiláteros adjacentes gêmeos.

#### 4.2 ATIVIDADE 2: SOMATÓRIO DAS ÁREAS DOS TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS ADJACENTES

Seja  $A_{f_n}$  a área de um triângulo equilátero e  $S_n$  o somatório de  $n$  triângulos equiláteros adjacentes. Temos que  $A_{f_n} = \frac{f_n^2 \sqrt{3}}{4}$ , onde  $f_n$  é um número de Fibonacci e  $n$  é a sua posição na sequência, uma vez que as medidas dos lados dos triângulos equiláteros adjacentes seguem a sequência de Fibonacci, e  $S_n = \sum_{i=1}^n A_{f_i}$ .

Baseando-se na estrutura da Figura 29, é elaborada a seguinte tabela resumo em relação a área dos triângulos equiláteros:

Medida do lado	1	1	2	3	5	8	...	$f_n$
Área	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\sqrt{3}$	$\frac{9\sqrt{3}}{4}$	$\frac{25\sqrt{3}}{4}$	$64\sqrt{3}$	...	$\frac{f_n^2\sqrt{3}}{4}$

Observe agora o somatório  $S_n$  gradativo das áreas dos triângulos:

- Para  $n = 1$

$$S_1 = \sum_{i=1}^1 A_{f_i} = A_{f_1} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{f_1^2\sqrt{3}}{4}$$

- Para  $n = 2$

$$S_2 = \sum_{i=1}^2 A_{f_i} = A_{f_1} + A_{f_2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{f_1^2\sqrt{3}}{4} + \frac{f_2^2\sqrt{3}}{4}$$

- Para  $n = 3$

$$S_3 = \sum_{i=1}^3 A_{f_i} = A_{f_1} + A_{f_2} + A_{f_3} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{f_1^2\sqrt{3}}{4} + \frac{f_2^2\sqrt{3}}{4} + \frac{f_3^2\sqrt{3}}{4}$$

- ...

De forma geral, tem-se

$$S_n = \sum_{i=1}^n A_{f_i} = A_{f_1} + A_{f_2} + A_{f_3} + \dots + A_{f_n} = \frac{f_1^2\sqrt{3}}{4} + \frac{f_2^2\sqrt{3}}{4} + \frac{f_3^2\sqrt{3}}{4} + \dots + \frac{f_n^2\sqrt{3}}{4}$$

logo,

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + \dots + f_n^2)$$

com base no resultado da Propriedade 2 dos números de Fibonacci na secção 2.1.2, onde  $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ , tem-se

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}(f_n f_{n+1}) \quad (4.1)$$

A fórmula (4.1), indica o somatório da área de  $n$  triângulos equiláteros adjacentes com as medidas dos lados seguindo a sequência de Fibonacci.

Outra forma de se obter o somatório da área de  $n$  triângulos equiláteros adjacentes com as medidas dos lados seguindo a sequência de Fibonacci é usando a fórmula da área de um paralelogramo, neste caso não requer o conhecimento da Propriedade 2 dos números de Fibonacci visto na secção 2.1.2.

Supondo que o paralelogramo FHIK, Figura 30, seja um paralelogramo formado da sequência de  $n$  triângulos equiláteros adjacentes e seus respectivos triângulos equiláteros adjacentes gêmeos, ou seja, existem  $n$  triângulos equiláteros e  $n$  equiláteros gêmeos



cada vez menores seguindo a sequência de Fibonacci, de tal forma que compõem o paralelogramo FHIK. Supondo também, a partir da Figura 30, que o triângulo DEF possui medida do lado igual a  $f_{n-1}$  e o triângulo FGH possui medida do lado igual a  $f_n$ , assim a base do paralelogramo mede  $f_n + f_{n-1}$  e sua altura  $\frac{f_n\sqrt{3}}{2}$ , pois a altura do paralelogramo coincide com a altura do triângulo FGH de lado  $f_n$ . A área de um paralelogramo é dada por  $A(\text{Paralelogramo}) = (\text{base}) \cdot (\text{altura})$  logo,

$$A(FHIK) = (\text{base}) \cdot (\text{altura}) = (f_n + f_{n-1}) \cdot \left(\frac{f_n\sqrt{3}}{2}\right)$$

ou seja,

$$A(FHIK) = \frac{\sqrt{3}}{2}(f_n^2 + f_n f_{n-1})$$

Repare que no cálculo da área do paralelogramo são incluídas as áreas dos triângulos equiláteros adjacentes e as áreas dos triângulos equiláteros adjacentes gêmeos, ou seja, o dobro, então basta dividir o resultado por dois, pois o objetivo é calcular o somatório das áreas de  $n$  triângulos equiláteros adjacentes. Chamando de  $S_n$  o somatório das áreas dos  $n$  triângulos equiláteros adjacentes que compõe o paralelogramo FHIK, tem-se:

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}(f_n^2 + f_n f_{n-1}) \quad (4.2)$$

Observe que as equações de (4.1) e (4.2) retratam um mesmo valor, ou seja, são iguais para um mesmo valor de  $n$ . Assim

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4}(f_n f_{n+1}) &= \frac{\sqrt{3}}{4}(f_n^2 + f_n f_{n-1}) \\ f_n f_{n+1} &= f_n^2 + f_n f_{n-1} \end{aligned}$$

dividindo ambos os membros por  $f_n$ , tem-se

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

que resulta na definição de uma sequência do tipo Fibonacci, vista na secção 2.1.2, ou seja, a equação (4.2) é verdadeira para todo  $n$  natural e maior que 1.

**Exemplo 5.** *Determine o somatório das áreas de 20 triângulos equiláteros adjacentes com as medidas dos lados seguindo a sequência de Fibonacci, onde o primeiro triângulo equilátero tem lado igual a  $f_1$ .*

*Demonstração.* Pelo enunciado da questão, pede-se para determinar o somatório das áreas dos triângulos de lado  $f_1$  até  $f_{20}$ . Usando a fórmula  $S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}(f_n f_{n+1})$ , tem-se que  $n = 20$ , então

$$S_{20} = \frac{\sqrt{3}}{4}(f_{20} f_{21})$$

sabendo que  $f_{20} = 6765$  e  $f_{21} = 10946$  (vide Apêndice A), então

$$S_{20} = \frac{\sqrt{3}}{4}(6765 \cdot 10946) \approx 32064456,34.$$

□

**Exemplo 6.** *Determine o somatório das áreas de 14 triângulos equiláteros adjacentes com as medidas dos lados seguindo a sequência de Fibonacci, onde o primeiro triângulo equilátero tem lado igual a  $f_6$ .*

*Demonstração.* Pelo enunciado há triângulos equiláteros de lados iguais a  $f_6$  até  $f_{6+13} = f_{19}$ , pois se são 14 triângulos e o primeiro possui lado  $f_6$  então o último possui lado  $f_{19}$ . Primeiramente calcule o somatório das áreas dos triângulos equiláteros de lado  $f_1$  até  $f_{19}$  e subtraia do resultado o somatório das áreas dos triângulos equiláteros de lado  $f_1$  até  $f_5$ .

Usando a fórmula  $S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}(f_n f_{n+1})$  para  $n = 19$

$$S_{19} = \frac{\sqrt{3}}{4}(f_{19} f_{20})$$

tem-se que  $f_{19} = 4181$  e  $f_{20} = 6765$  (vide Apêndice A), então

$$S_{19} = \frac{\sqrt{3}}{4}(4181 \cdot 6765) = 28284465 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Usando a fórmula  $S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}(f_n f_{n+1})$  para  $n = 5$

$$S_5 = \frac{\sqrt{3}}{4}(f_5 f_6)$$

tem-se que  $f_5 = 5$  e  $f_6 = 8$ , então

$$S_5 = \frac{\sqrt{3}}{4}(5 \cdot 8) = 40 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Portanto o somatório  $S$  pedido é dado por

$$S = S_{19} - S_5 = 28284465 \frac{\sqrt{3}}{4} - 40 \frac{\sqrt{3}}{4} = 28284425 \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 12247515,29$$

□

### 4.3 ATIVIDADE 3: PERÍMETRO DE FIGURA FORMADA POR TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS ADJACENTES

Seja  $P_{f_n}$  o perímetro de um triângulo equilátero de lado  $n$  e  $SP_n$  o perímetro da figura formada por  $n$  triângulos equiláteros adjacentes, onde  $f_n$  é um número de Fibonacci

que segue a sequência definida na Seção 2.1.2. O perímetro de um triângulo equilátero é  $P_{f_n} = 3f_n$ . Dados os triângulos equiláteros adjacentes da Figura 28, será determinado o perímetro da estrutura baseando-se nos perímetros de cada triângulo que a compõe.

É partilhado aqui uma tabela que mostra os perímetros dos triângulos que compõe a estrutura da Figura 28:

Triângulo	ABC	BCD	DEF	FGH	HIJ	JKL
Medida do lado	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
Perímetro	$3f_1$	$3f_2$	$3f_3$	$3f_4$	$3f_5$	$3f_6$

O perímetro de ABDFHJLKIGEC, Figura 28, será calculado a partir da análise gradativa dos perímetros dos triângulos que a compõe.

Observe o perímetro de ABDC, que é a composição dos triângulos ABC e BCD. O perímetro de ABC é igual a  $3f_1$  e o perímetro de BCD é igual a  $3f_2$ , logo o perímetro de ABDC é igual a  $3f_1 + 3f_2 - 2f_1$ , pois a figura possui  $f_1$  com um lado em comum para ambos triângulos. O perímetro de ABDFEC, composição dos triângulos ABC, BCD e DEF é dado por  $3f_1 + 3f_2 - 2f_1 + 3f_3 - 2f_2$ , pois é dado pelo perímetro de ABDC mais o perímetro de DEF menos  $2f_2$ , onde  $2f_2$  é o lado em comum para os triângulos BDC e DEF.

Colocando esse pensamento de uma forma recursiva:

- Para o triângulo ABC, temos que o seu perímetro é

$$SP_1 = 3f_1$$

- O perímetro da figura ABDC é dado por

$$SP_2 = 3f_1 + 3f_2 - 2f_1$$

- O perímetro da figura ABDFEC é dado por

$$SP_3 = 3f_1 + 3f_2 + 3f_3 - 2f_1 - 2f_2$$

- O perímetro da figura ABDFHGEC é dado por

$$SP_4 = 3f_1 + 3f_2 + 3f_3 + 3f_4 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3$$

- O perímetro da figura ABDFHJIGEC é dado por

$$SP_5 = 3f_1 + 3f_2 + 3f_3 + 3f_4 + 3f_5 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 - 2f_4$$

- O perímetro da figura ABDFHJLKIGEC é dado por

$$SP_6 = 3f_1 + 3f_2 + 3f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 3f_6 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 - 2f_4 - 2f_5$$

Portanto o perímetro da figura ABDFHJLKIGEC é dado por

$$SP_6 = 3f_1 + 3f_2 + 3f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 3f_6 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 - 2f_4 - 2f_5$$

ou seja,

$$SP_6 = 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5) + 3f_6$$

Para uma estrutura que contenha  $n$  triângulos equiláteros adjacentes, Figura 29, seguindo o raciocínio acima, de forma geral, tem-se

$$SP_n = 3f_1 + 3f_2 + 3f_3 + 3f_4 + \dots + 3f_n - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 - 2f_4 - \dots - 2f_{n-1}$$

$$SP_n = 3f_1 + 3f_2 + 3f_3 + 3f_4 + \dots + 3f_n - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 - 2f_4 - \dots - 2f_{n-1} - 2f_n + 2f_n$$

$$SP_n = 3(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_n) - 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_n) + 2f_n$$

$$SP_n = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_n + 2f_n$$

com base na Propriedade 1 dos números de Fibonacci, na secção 2.1.2, é verdade que  $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$ , portanto

$$SP_n = 2f_n + f_{n+2} - 1 \quad (4.3)$$

A equação (4.3) cede o perímetro de uma figura formada por  $n$  triângulos equiláteros adjacentes com as medidas dos lados seguindo a sequência de Fibonacci sendo o lado do primeiro triângulo equilátero da sequência igual a  $f_1$ .

**Exemplo 7.** *Determine o perímetro da Figura 28.*

*Demonstração.* A figura possui 6 triângulos equiláteros adjacentes com as medidas dos lados seguindo a sequência de Fibonacci com o primeiro triângulo de lado  $f_1 = 1$  unidade e o sexto triângulo de lado  $f_6 = 8$  unidades. Pela fórmula (4.3), tem-se que  $n = 6$ , então

$$SP_6 = 2f_6 + f_8 - 1$$

sabendo que  $f_6 = 8$  e  $f_8 = 21$ , então

$$SP_6 = 2 \cdot 8 + 21 - 1 = 16 + 20 = 36$$

Portanto o perímetro da Figura 28 é de 36 unidades

□

**Exemplo 8.** *Determine o perímetro de uma estrutura plana que contenha 11 triângulos equiláteros adjacentes com as medidas dos lados seguindo a sequência de Fibonacci, sabendo que o primeiro triângulo equilátero possui lado medindo  $f_5$  unidades.*

*Demonstração.* Se a estrutura possui 11 triângulos equiláteros com o primeiro medindo  $f_5$  unidades, então o último triângulo da estrutura possui lado medindo  $f_{15}$  unidades. Utiliza-se a fórmula  $SP_n = 2f_n + f_{n+2} - 1$  para determinar o perímetro da estrutura dos triângulos de lados  $f_1$  até  $f_{15}$  e depois para determinar o perímetro da estrutura de triângulos de lados  $f_1$  até  $f_4$ . Assim para  $n = 15$

$$SP_{15} = 2f_{15} + f_{17} - 1$$

sabendo que  $f_{15} = 610$  e  $f_{17} = 1597$  (vide Apêndice A), então

$$SP_{15} = 2 \cdot 610 + 1597 - 1 = 2816$$

Para  $n = 4$

$$SP_4 = 2f_4 + f_6 - 1$$

sabendo que  $f_4 = 3$  e  $f_6 = 8$ , então

$$SP_4 = 2 \cdot 3 + 8 - 1 = 13$$

Chamando de  $SP_{15|4}$  o perímetro da figura pedida. Note que ao tirar  $SP_4$  não podemos retirar o lado  $f_4$ , ou seja,  $SP_4 - f_4$ , pois ele faz parte da estrutura de  $SP_{15|4}$ . Observe também que está sendo adicionado o lado  $f_4$  à estrutura, pois não tinha sido contabilizado ao cálculo de  $SP_{15}$ , ou seja

$$SP_{15|4} = SP_{15} - (SP_4 - f_4) + f_4$$

$$SP_{15|4} = SP_{15} - SP_4 + 2f_4$$

$$SP_{15|4} = 2816 - 13 + 2 \cdot 3$$

$$SP_{15|4} = 2803 + 6$$

$$SP_{15|4} = 2809$$

Portanto o perímetro da figura, chamada de  $SP_{15|4}$ , é de 2809 unidades.  $\square$

Analisando de forma geral os casos semelhantes ao exemplo 7. Seja uma estrutura que contenha  $n$  triângulos equiláteros adjacentes de lados medindo de  $f_1$  até  $f_n$  unidades e deseja-se retirar  $m$  triângulos equiláteros adjacentes de lados medindo de  $f_1$  até  $f_m$ , com  $n > m$ , para que se possa determinar o perímetro da estrutura que restou, ou seja, o perímetro da estrutura contendo  $(n - m)$  triângulos com lados medindo de  $f_{n-m}$  até o

triângulo de lado  $f_n$  unidades. Chamando de  $SP_{n|m}$  o perímetro da figura que contenha  $(n - m)$  triângulos equiláteros adjacentes de lado  $f_{n-m}$  até  $f_n$  unidades. Dada a equação (4.3) para  $n = n$

$$SP_n = 2f_n + f_{n+2} - 1$$

e para  $n = m$

$$SP_m = 2f_m + f_{m+2} - 1$$

Note que ao retirar  $SP_m$  não retira-se o lado  $f_m$ , ou seja,  $SP_m - f_m$ , pois faz parte da estrutura de  $SP_{n|m}$ . Observe também que adiciona-se o lado  $f_m$  à estrutura, pois não tinha sido contabilizado ao calcular  $SP_n$ , ou seja

$$SP_{n|m} = SP_n - (SP_m - f_m) + f_m$$

$$SP_{n|m} = SP_n - SP_m + f_m + f_m$$

$$SP_{n|m} = SP_n - SP_m + 2f_m$$

como  $SP_n = 2f_n + f_{n+2} - 1$  e  $SP_m = 2f_m + f_{m+2} - 1$ , então

$$SP_{n|m} = 2f_n + f_{n+2} - 1 - (2f_m + f_{m+2} - 1) + 2f_m$$

$$SP_{n|m} = 2f_n + f_{n+2} - 1 - 2f_m - f_{m+2} + 1 + 2f_m$$

$$SP_{n|m} = 2f_n + f_{n+2} - f_{m+2} \tag{4.4}$$

para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n < 1$  e  $n > m$ .

**Exemplo 9.** *Determine o perímetro de uma estrutura plana que contenha 18 triângulos equiláteros adjacentes com as medidas dos lados seguindo a sequência de Fibonacci, sabendo que o primeiro triângulo equilátero dessa estrutura possui lado medindo  $f_8$  unidades.*

*Demonstração.* Do enunciado tem-se 18 triângulos equiláteros com o primeiro medindo  $f_8$  unidades, então o último triângulo da estrutura possui lado medindo  $f_{25}$  unidades. Para determinar o perímetro dessa figura, utiliza-se a fórmula (4.4),  $SP_{n|m} = 2f_n + f_{n+2} - f_{m+2}$ , encontrada acima, com  $n = 25$  e  $m = 8$ . Então

$$SP_{25|8} = 2f_{25} + f_{27} - f_{10}$$

sabendo que  $f_{25} = 75025$ ,  $f_{27} = 196418$  e  $f_{10} = 55$  (vide Apêndice A), então

$$SP_{25|8} = 2 \cdot 75025 + 196418 - 55$$

$$SP_{25|8} = 150050 + 196363$$

$$SP_{25|8} = 346413$$

Portanto o Perímetro da figura que contém triângulos equiláteros adjacentes com lados medindo de  $f_8$  até  $f_{25}$ , chamada de  $SP_{25|8}$ , é de 346413 unidades.  $\square$

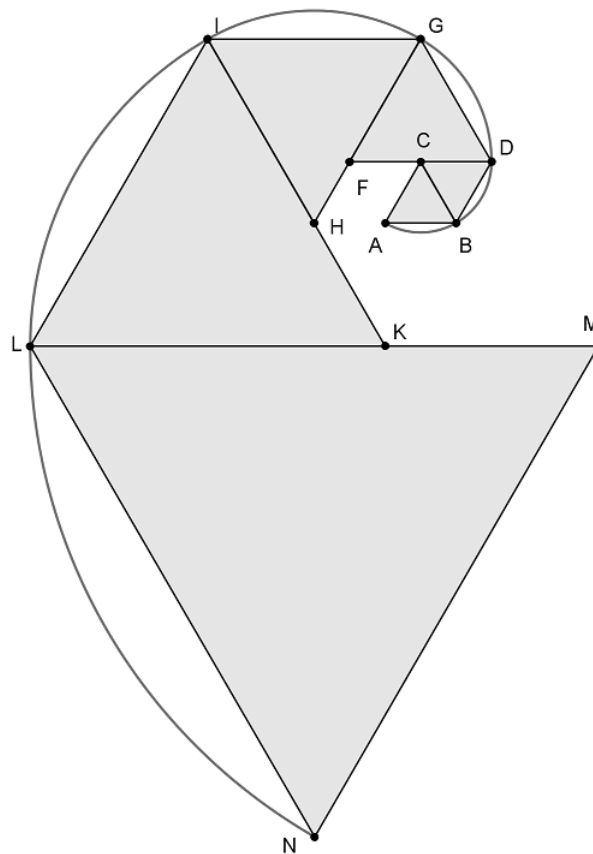
#### 4.4 ATIVIDADE 4: ESPIRAIS DOS TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS ADJACENTES E A RAZÃO ENTRE OS LADOS

A partir da estrutura de triângulos equiláteros adjacentes estudada nas atividades anteriores, é evidenciada algumas espirais. Aqui será abordada somente as construções de duas espirais chamadas de *espiral externa* e *espiral interna*.

##### 4.4.1 Espiral Externa dos Triângulos Equiláteros Adjacentes

Para construção da espiral externa, basta traçar arcos de forma que a ponta seca do compasso esteja sobre o vértice oposto ao lado e com abertura igual a medida do mesmo.

Figura 31 – Espiral externa



A espiral da Figura 31 é obtida a partir de uma estrutura de triângulos equiláteros adjacentes igual a Figura 28 e é feita da seguinte forma:

- Com a ponta seca do compasso em  $C$  e abertura  $CA = f_1$ , trace o arco  $\widehat{AB}$ ;
- Com a ponta seca do compasso em  $C$  e abertura  $CB = f_2$ , trace o arco  $\widehat{BD}$ ;
- Com a ponta seca do compasso em  $F$  e abertura  $FD = f_3$ , trace o arco  $\widehat{DG}$ ;

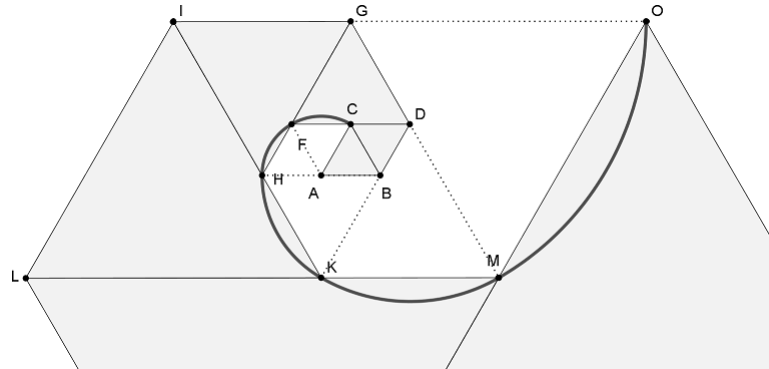




- Com a ponta seca do compasso em D e abertura  $DK = f_4$ , trace o arco  $\widehat{KM}$ .

Observe, Figura 33, que a epiral designada de epiral interna é na verdade uma epiral externa dos triângulos equiláteros adjacentes gêmeos.

Figura 33 – Espiral externa aos triângulos gêmeos



#### 4.4.3 Razão dos lados

Nessa subseção será feita a análise da razão entre os lados de dois triângulos equiláteros consecutivos na sequência de triângulos equiláteros adjacentes. Veja na tabela abaixo as razões entre os lados dos triângulos consecutivos da figura 28.

Razão	$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1}$	$\frac{f_3}{f_2} = \frac{2}{1}$	$\frac{f_4}{f_3} = \frac{3}{2}$	$\frac{f_5}{f_4} = \frac{5}{3}$	$\frac{f_6}{f_5} = \frac{8}{5}$
Decimal	1	2	1,5	1, $\bar{6}$	1,6

Não há possibilidade de nenhuma conclusão perante aos resultados decimais das razões dos lados dos triângulos consecutivos. Supondo que uma estrutura que contenha  $n$  triângulos equiláteros adjacentes e que  $n$  tenda ao infinito, tomando dois triângulos equiláteros consecutivos de lados  $f_n$  e  $f_{n+1}$ , dessa sequência, de forma que a sua posição seja tão grande como queira na sequência dos  $n$  triângulos equiláteros adjacentes, dada a fórmula de Binet em (2.4), tem-se que a razão  $\frac{f_{n+1}}{f_n}$  é dada por:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n} = \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right]} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}$$

como  $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$  e que o valor de  $n$  tende ao infinito, então os valores de  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n$  e  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}$  tendem a zero, ou seja

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto quando o  $n$  tende ao infinito

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \approx 1,61803398875.$$

Conclui-se que a razão entre os lados de dois triângulos equiláteros adjacentes consecutivos é constante e tendem a  $\Phi$ , quando  $n$  tende ao infinito.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Espera-se que este trabalho mostre a importância das construções geométricas utilizando régua e compasso e entender como algumas figuras geométricas, encontradas nos livros didáticos usados em sala de aula, podem ser construídas sem dificuldades e auxílio de softwares.

As construções geométricas com régua e compasso devem ser mais frequentes no currículo escolar, em especial no Ensino Médio, pois elas concedem o desenvolvimento da coordenação motora e interpretação visual. A atividade de construção da estrutura de triângulos equiláteros adjacentes concede uma interpretação geométrica da sequência de Fibonacci e suas propriedades, mostrando que o Desenho Geométrico é uma ferramenta que auxilia o aluno, em alguns casos, ampliar a interpretação.

Por meio do aprofundamento do estudo da sequência de Fibonacci e algumas das propriedades envolvendo os números de Fibonacci, é mostrado os padrões encontrados no somatório das áreas e no somatório dos perímetros na construção da estrutura de triângulos equiláteros adjacentes, assim como a relação entre a razão dos lados de dois triângulos equiláteros consecutivos com o Número de Ouro.

E por fim, espera-se que este tema seja trabalhado em sala de aula, por professores de matemática da Rede Pública, como uma ferramenta de auxílio nas resoluções de problemas envolvendo procura de padrões que necessitem de uma visualização geométrica. Espera-se também, que este trabalho sirva-se de alternativa para uma aplicação mais aprofundada no estudo da sequência de Fibonacci ou em atividades que envolvam construções geométricas. É deixado aos leitores mais interessados uma possibilidade de estender o estudo das espirais evidenciadas nos triângulos equiláteros adjacentes (ver seção 4.4.1 e 4.4.2), procurando a existência de uma função que contemple as condições e restrições dadas no capítulo 4.

## Referências

- [1] BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11.ed. SBM Coleção do Professor de Matemática, 2012.
- [2] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. - São Paulo: Blucher, 2012.
- [3] DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. - 1 ed. - São Paulo: Ática, 2010.
- [4] DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. - São Paulo: Atual, 1991.
- [5] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**: Tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [6] HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção: um ensaio sobre a beleza na Matemática**. Tradução: Luís Carlos Ascêncio Nunes. - Brasília: Editora da UnB, 1985.
- [7] JANOS, M. **Matemática e Natureza**. 1º ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- [8] QUEIROGA, A. L. F.; VITOR, C. B. **Desenho geométrico**. - Manaus/AM: UEA, 2007.
- [9] RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Dissertação de Mestrado. - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/248>. Acessado em: 19/12/2013.
- [10] RIBORDY, L. **Arquitetura e geometria sagradas pelo mundo: à luz do número de ouro**. Tradução: Jefferson Rosado. - São Paulo: Madras, 2012.
- [11] SODRÉ, U.; TOFFOLI, S. F. L. **Sequências de Fibonacci: Aplicações**. - Londrina/ PR, 2005. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm>. Acesso em: 20/12/2013.
- [12] VOROBIOV, N. N. **NÚMEROS DE FIBONACCI**. Tradução: Carlos Vega. - Moscou: Editorial MIR, 1974.
- [13] WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Coleção do Professor de Matemática. - 6. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2007.

- [14] ZAHN, M. **Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro** - 1. ed. - Rio de Janeiro: Editora Ciência moderna, 2011.
- [15] ZUIN, E. S. L. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino Fundamental e o Ensino das construções geométricas entre outras considerações**. Reuniões ANPED nº 25, Grupo de Trabalho 19. Educação Matemática, 2002.

## APÊNDICE A – OS 60 PRIMEIROS NÚMEROS DE FIBONACCI

Segue aqui a lista dos 60 primeiros números de Fibonacci que seguem a lei de formação  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , com  $f_1 = f_2 = 1$  para todo  $n > 2$ , vista na secção 2.1.2.

$f_1 = 1$	$f_{21} = 10946$	$f_{41} = 165580141$
$f_2 = 1$	$f_{22} = 17711$	$f_{42} = 267914296$
$f_3 = 2$	$f_{23} = 28657$	$f_{43} = 433494437$
$f_4 = 3$	$f_{24} = 46368$	$f_{44} = 701408733$
$f_5 = 5$	$f_{25} = 75025$	$f_{45} = 1134903170$
$f_6 = 8$	$f_{26} = 121393$	$f_{46} = 1836311903$
$f_7 = 13$	$f_{27} = 196418$	$f_{47} = 2971215073$
$f_8 = 21$	$f_{28} = 317811$	$f_{48} = 4807526976$
$f_9 = 34$	$f_{29} = 514229$	$f_{49} = 7778742049$
$f_{10} = 55$	$f_{30} = 832040$	$f_{50} = 12586269025$
$f_{11} = 89$	$f_{31} = 1346269$	$f_{51} = 20365011074$
$f_{12} = 144$	$f_{32} = 2178309$	$f_{52} = 32951280099$
$f_{13} = 233$	$f_{33} = 3524578$	$f_{53} = 53316291173$
$f_{14} = 377$	$f_{34} = 5702887$	$f_{54} = 86267571272$
$f_{15} = 610$	$f_{35} = 9227465$	$f_{55} = 139583862445$
$f_{16} = 987$	$f_{36} = 14930352$	$f_{56} = 225851433717$
$f_{17} = 1597$	$f_{37} = 24157817$	$f_{57} = 365435296162$
$f_{18} = 2584$	$f_{38} = 39088169$	$f_{58} = 591286729879$
$f_{19} = 4181$	$f_{39} = 63245986$	$f_{59} = 956722026041$
$f_{20} = 6765$	$f_{40} = 102334155$	$f_{60} = 1548008755920$