



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

RAFAEL BRAZ DE MACÊDO

A MATEMÁTICA NA ROBÓTICA

JUAZEIRO DO NORTE
2014

RAFAEL BRAZ DE MACÊDO

A MATEMÁTICA NA ROBÓTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga.

JUAZEIRO DO NORTE
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

M123m Macêdo, Rafael Braz de
A matemática na robótica / Rafael Braz de Macêdo. – 2014.
64 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga..

1. Matemática. 2. Robótica. 3. Coordenadas. I. Título.

RAFAEL BRAZ DE MACÊDO

A MATEMÁTICA NA ROBÓTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 24 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Francisco Valdemiro Braga

Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Plácido Francisco de Assis Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Maria Silvana Alcantara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus.

Aos meus pais, Deusdete Braz e Antonia Alves de Macêdo, por estarem sempre ao meu lado me incentivando e apoiando de todas as maneiras possíveis.

Ao Prof^o Francisco Valdemiro Braga, meu orientador, que teve significado inestimável para a minha formação acadêmica desde a graduação.

Aos professores do PROFMAT, pelas aulas tão ricas de conhecimento.

Aos professores Alan Vinicius e Rodrigo do IFCE-Campus Cedro, pelas contribuições.

Aos colegas de mestrado e amigos Antonio Edson, Wesley Cunha e Cleilton Melo, com os quais viajei tantas vezes para assistir às aulas.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo mostrar algumas aplicações da matemática na realidade. Tem, também o objetivo de responder, pelo menos em parte as seguintes perguntas: Professor para que serve isso? Onde vou usar isso? Porque devo estudar isso? Neste trabalho mostra-se algumas dessas aplicações da matemática para que o estudante saiba que a matemática está presente onde menos se imagina. Tais perguntas, que muitas vezes ficam sem resposta, causam falta de estímulo e entusiasmo nos estudantes, pois estes não conseguem ver utilidade nos conteúdos ministrados. A matemática aplicada é uma valiosa ferramenta para quem quer ver a matemática em funcionamento. Inicialmente mostra-se uma aplicação à localização de um robô móvel através coordenadas no plano e medidas de arcos, depois mostrar-se-á uma linda aplicação das tão estudadas transformações (Álgebra Linear) e das matrizes, agora aplicadas no espaço, para a movimentação e localização da extremidade final de um robô manipulador. Estas aplicações da matemática são apenas algumas, pois há uma infinidade de outras mais.

Palavras-chave: Coordenadas; Transformações; Robôs.

ABSTRACT

This work has as objective shows some applications of the mathematics in the reality. He has, also the objective of answering, for the less partly the following questions: Teacher so that it serves that? Where will I use that? Because I should study that? In this work it is shown some of those applications of the mathematics so that the student knows that the mathematics is present where less if imagine. Such questions, that a lot of times are without answer, they cause incentive lack in the students, because these don't get to see usefulness in the supplied contents. The applied mathematics is one valuable tool for who wants to see the mathematics in operation. Initially an application is shown to a movable robot's location through coordinates in the plan and measures of arches, later it will be shown a beautiful application of the so studied transformations (Algebra Lineal) and of the head offices, now applied in the space, for the movement and location of a robot manipulator's final extremity. These applications of the mathematics are just some, because there is an infinity of other more.

Keywords: Coordinates; Transformations; Robots.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	A HISTÓRIA DA ROBÓTICA.....	10
2.1	Introdução	10
2.2	Robôs-Um breve histórico	10
3	CLASSIFICAÇÃO DOS ROBÔS	14
3.1	Introdução	14
3.2	Classificação dos robôs.....	14
3.3	Robôs móveis.....	14
3.3.1	<i>Tipos de sistemas de locomoção de um robô móvel</i>	16
3.4	Os Robôs médicos	17
3.5	Os Robôs industriais	18
4	A MATEMÁTICA NA LOCALIZAÇÃO DE UM ROBÔ MÓVEL COM RODAS	20
4.1	Introdução	20
4.2	Tipos de estrutura e de tração.....	20
4.3	Localização de um robô móvel com rodas	23
4.3.1	<i>Modelo 1</i>	24
4.3.2	<i>Modelo 2</i>	28
5	TÉCNICAS PARA O ESTUDO DOS ROBÔS INDUSTRIAIS....	32
5.1	Introdução	32
5.2	Sistemas de eixos e referenciais	32
5.2.1	<i>Sistemas de eixos</i>	32
5.2.2	<i>Referenciais</i>	33
5.2.3	<i>Transformações elementares</i>	35
5.2.4	<i>Matriz de uma transformação no plano</i>	36
5.2.5	<i>Coordenadas homogêneas</i>	39
5.2.6	<i>Matriz de uma transformação no espaço</i>	41

6	O ESTUDO DOS ROBÔS INDUSTRIAIS.....	47
6.1	Introdução	47
6.2	A cinemática direta de um robô manipulador.....	47
6.3	Elementos de um manipulador industrial.....	47
6.4	Matriz associada a um elo l_i	55
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	63
	REFERÊNCIAS.....	64

1 INTRODUÇÃO

Uma das perguntas mais ouvidas pelos professores é: Professor para que serve isso? Essa pergunta tem muita relevância, já que o objetivo do estudo é aprender.

Este trabalho é fruto desse questionamento dos discentes. Procurou-se neste trabalho mostrar de uma forma clara e objetiva algumas das aplicações da matemática na robótica. No 1º capítulo vai-se referir a história da humanidade na busca por ferramentas que lhe auxiliassem nas suas atividades do cotidiano.

A necessidade levou o homem a desenvolver a robótica, que basicamente utiliza-se de mecanismos para realizar atividades desagradáveis ou perigosas ao ser humano. Nesse desenvolvimento a matemática foi crucial.

Nos capítulos seguintes, mostra-se a matemática sendo utilizada na localização e orientação de robôs móveis usando-se sistemas de coordenadas no plano. Depois as aplicações são um pouco mais interessantes. Vai-se mostrar a utilidade das matrizes, que por muitas vezes não se sabe sua relevância, e também das transformações da álgebra linear. Essas transformações são todas realizadas no espaço tridimensional.

A matemática aplicada pode ser usada como uma fantástica ferramenta para o ensino, já que dá-se significado àquelas equações, que na maioria das vezes, se resolve apenas de forma mecânica.

2 A HISTÓRIA DA ROBÓTICA

2.1 Introdução

Desde os primórdios a humanidade se utiliza de instrumentos para facilitar a vida diária. Isso motivou o homem a criar máquinas que o substituísse em certas atividades. Ao longo do tempo muitas invenções geraram ferramentas para que gradativamente essa substituição ocorresse.

Aristóteles(séc. IV a.C.) já fez referência a esses instrumentos: “se os instrumentos pudessem realizar suas próprias tarefas, obedecendo ou antecipando o desejo de pessoas...”.

Desde a criação da máquina à vapor por James Watt em 1769, houve ascensão das máquinas na produção em larga escala de produtos.

Henry Ford difundiu um modelo chamado de “Automação Rígida”que consiste no emprego de máquinas para fabricação em série de produtos visando alta produtividade e qualidade.

2.2 Robôs-Um breve histórico

O termo “Robot”, que em português possui um termo alternativo (Robô), é oriundo do termo eslavo “Robota”que significa trabalhos forçados ou escravos.

Há algumas definições para o termo “ROBÔ”.

Uma definição dada a “ROBÔ”, por P. McKerrow em 1986 foi: “Um robô é uma máquina que pode ser programada para fazer uma variedade de tarefas, do mesmo modo que um computador é um circuito eletrônico que pode ser programado para fazer uma variedade de tarefas.”

Todo sistema automático é um robô?

A resposta é não. Para um dispositivo ser considerado um robô ele deve ter capacidade de programação e ter alguma aplicabilidade em um problema prático. O robô deve interagir com o ambiente através de seus componentes mecânicos.

A seguir alguns marcos na história da robótica:

- Em 1750 Jacques de Vaucanson, Artesão Suíço, desenvolve bonecos mecânicos de tamanho humano que tocam música;
- Em 1801 J. Jacquard inventou um tear programável;
- Em 1805 Henri Maillardet constrói um boneco mecânico capaz de desenhar figuras;

- Em 1946 G. C. Devol (USA) desenvolve um controlador capaz de gravar sinais elétricos magneticamente e reproduzi-los de modo a ser possível operar uma máquina ferramenta (patenteado em 1952);
- Em 1951 um tele-operador é desenvolvido por Raymond Goertz este dispositivo era um manipulador de controlo remoto que foi patenteado em 1958);
- Em 1959 foi introduzido o primeiro robô comercial pela Planet Corporation;
- Em 1960 o primeiro robô UNIMATE (DENOMINAÇÃO PARA ROBÔ INDUSTRIAL) instalado na FORD no ano seguinte;
- Em 1961 foi instalado o primeiro robô industrial (da Unimation) na General Motors, numa aplicação de fundição. É chamado de “dispositivo de transferência universal”, e não de robô;
- Em 1966 uma companhia Norueguesa, a Trallfa, constrói e instala um robô para pintura à pistola;
- Em 1968 o robô móvel é desenvolvido pelo Stanford Research Institute;
- Em 1971 o braço de Stanford com atuação elétrica;
- Em 1973 foi comercializado do 1º robô industrial controlado por computador e acionado eletricamente pela firma Cincinnati Milacron Corp. que recebeu o nome de T3;
- Em 1973 a primeira linguagem de programação de robôs;
- Em 1975 houve as primeiras aplicações de robôs em operações de montagem pela firma “Olivetti Sigma”;
- Em 1976 o RCC-Remote Center of Compliance é desenvolvido para ser utilizado na linha de montagem (inserções), nos laboratórios Charles Stark Drapper, Cambridge, USA;
- Em 1978 o robô PUMA (Programable Universal Machine for Assembly), foi introduzido pela Unimation;
- Em 1979 o robô SCARA (Selective compliance assembly arm), desenvolvido pela Universidade de Yamanashi com introdução comercial em 1981; (Vide figura 2.2)
- Em 1981 foi desenvolvido um robô com ação direta pela CMU;
- Em 1982 a IBM comercializa o robô RS-1 para operações de montagem;



Figura 2.1: Robô com estrutura PUMA da Unimation

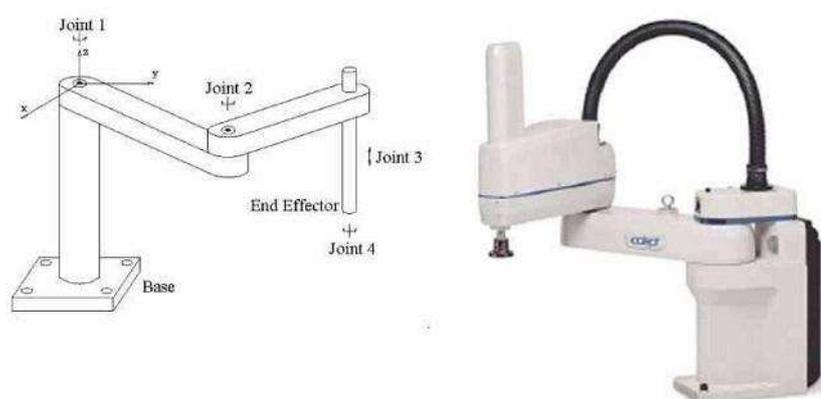


Figura 2.2: Estrutura de robô tipo SCARA

- Em 1983 o desenvolvimento de um projeto para uma linha flexível de montagem automatizada com o uso de robôs;
- Em 1984 a empresa Inteldex Corporation (USA) apresenta um robô para operações de montagem que utiliza os processadores da INTEL 8086 e 8087;
- Em 1997 a HONDA anuncia o primeiro robô humanóide que sobe escadas.

A importância e representatividade dos robôs na indústria estão expressos nos gráficos abaixo:

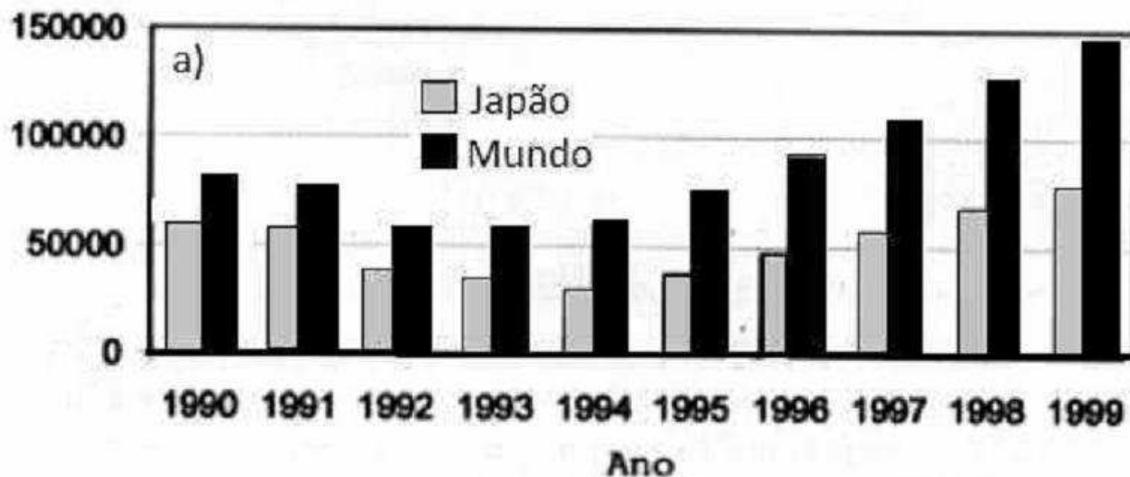


Figura 2.3: Número de robôs vendidos por ano na década de 90

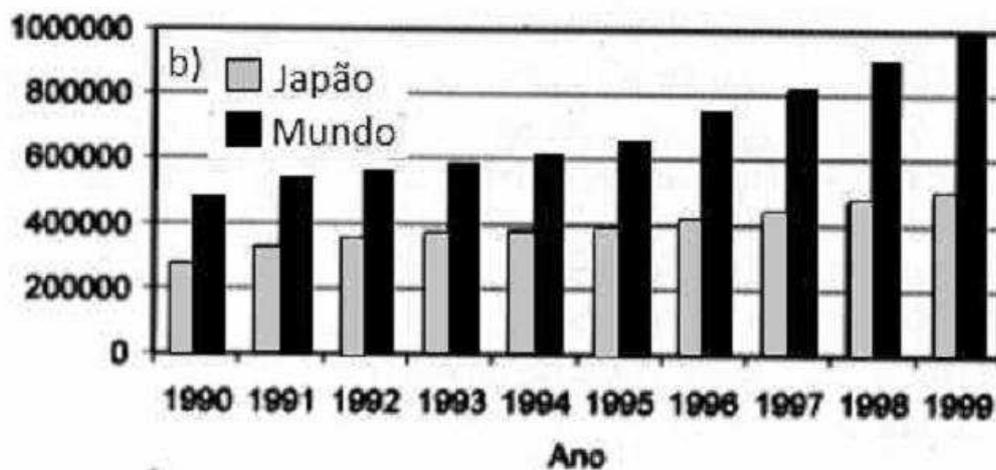


Figura 2.4: Número de robôs industriais em serviço na década de 90

3 CLASSIFICAÇÃO DOS ROBÔS

3.1 Introdução

Os robôs tem tido grande significado no século XXI. Os avanços tem sido surpreendentes. Eles estão presentes no cotidiano de toda a população. Suas aplicações são inúmeras. Desde aplicações industriais como na soldagem, pintura e movimentação de peças pesadas, por exemplo, como também na medicina no auxílio de cirurgias e nos laboratórios farmacêuticos.

O emprego dos robôs está também em situações onde há riscos para os seres humanos, tais como na desativação de minas terrestres, em zonas de desastres, como por exemplo em acidentes nucleares, explorações subterrâneas e manipulação de materiais explosivos.

Os robôs também são muito empregados na produção agrícola ou em situações de movimentação repetitiva visando alta produtividade e qualidade.

3.2 Classificação dos robôs

Os robôs são classificados, basicamente, quanto a sua utilidade. Eles estão divididos da seguinte forma:

- Robôs móveis;
- Robôs médicos;
- Robôs industriais.

3.3 Robôs móveis

Os robôs móveis são dispositivos dotados de certo nível de autonomia para locomover-se. São utilizados, muitas vezes, para transportar carga. Sua utilização está associada a tarefas arriscadas ao homem.

A autonomia de locomoção do robô móvel deve ser possível com nenhuma ou mínima intervenção do operador responsável. Ele deve ser capaz de planejar e atuar para atingir determinados objetivos.

Uma outra categoria de robô móvel são os veículos auto-guiados que só trilharam trajetórias pré-definidas, tais como linhas pintadas no chão, bandas magnéticas e bandas refletoras.

Aqui estão alguns exemplos de robôs móveis com suas respectivas funções:

Na figura, abaixo, está o robô Clean Bot da Eventronic cuja função é limpar tubulações:

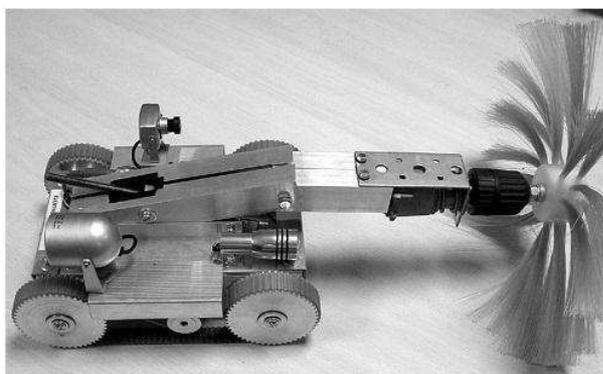


Figura 3.5: Clean Bot da Eventronic

Esta é uma aspiradora autônoma da iRobot, chamada de Scooba:



Figura 3.6: Scooba da iRobot

Na figura 2.3, está o robô militar Warrior X700 da iRobot e na figura 2.4 está o robô de vigilância urbana OFRO da empresa RobotWatch:

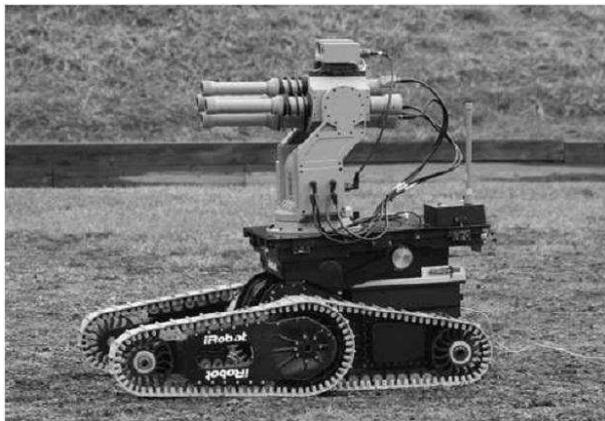


Figura 3.7: Robô Militar da iRobot



Figura 3.8: Robô de vigilância da RoboWatch

3.3.1 Tipos de sistemas de locomoção de um robô móvel

Dependendo do ambiente para o qual o robô móvel foi projetado, sua locomoção pode ser através de patas, rodas ou esteiras se o veículo for terrestre. Há outras formas caso o robô seja aéreo ou aquático.

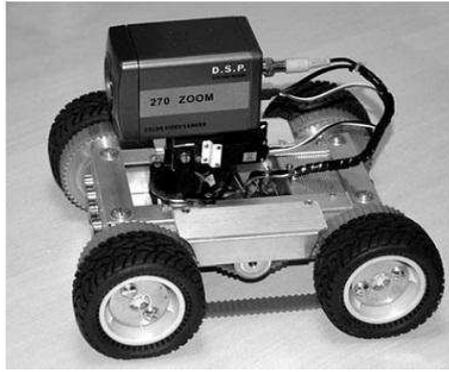


Figura 3.9: Robô com locomoção por rodas

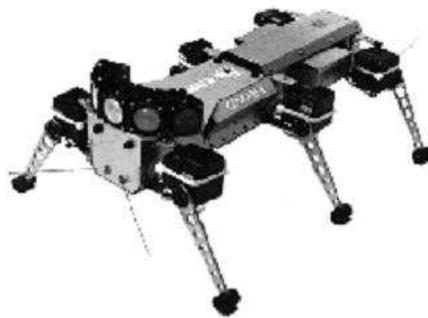


Figura 3.10: Robô com locomoção por patas



Figura 3.11: Robô com locomoção por esteiras

3.4 Os Robôs médicos

Os robôs médicos são utilizados na realização de cirurgias. A maior vantagem do seu uso é a grande precisão de seus movimentos, mas o médico ainda não é dispensável, pois ele é quem controla o equipamento.

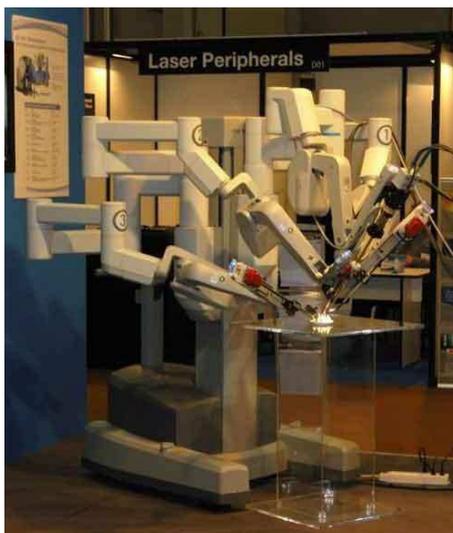


Figura 3.12: Robô Médico

3.5 Os robôs industriais

O robô industrial está definido como sendo um sistema mecânico articulado que tem como propósito efetuar atividades pré-determinadas.

O robô industrial é constituído por elos, conectados por juntas prismáticas ou rotacionais. Cada par junta-elos constitui um DOF ou grau de liberdade (DOF-DEGRESS OF FREEDOM).

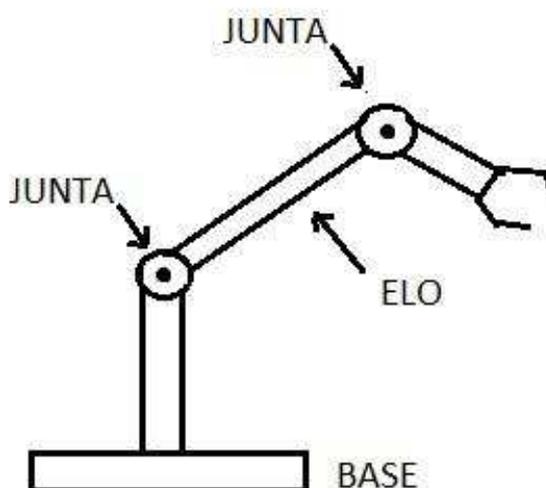


Figura 3.13: Elos e juntas

Os robôs industriais ou manipuladores industriais tem grande importância para a indústria, pois são versáteis, realizam tarefas desagradáveis aos humanos além do benefício econômico, já que um só equipamento pode substituir vários operários. Isso acarreta um grande volume de produção com baixo custo de operação.

Algumas das aplicações dos robôs industriais são transporte de materiais pesados, pintura, soldagem e controle de qualidade.

Há um segmento muito importante para a robótica industrial que é a AUTOMAÇÃO.

A automação permite a utilização de sistemas mecânicos, elétricos, eletrônicos e/ou computadorizados sem a necessidade da intervenção humana.

4 A MATEMÁTICA NA LOCALIZAÇÃO DE UM ROBÔ MÓVEL COM RODAS

4.1 Introdução

Para que o robô móvel consiga executar sua função, ou seja, atinja o seu objetivo é crucial que ele saiba sua orientação e localização. Neste capítulo analisar-se-á uma das formas como um robô, que utiliza um sistema de locomoção com rodas, se orienta e a matemática envolvida nesse sistema de navegação.

4.2 Tipos de estrutura e de tração

Quando um robô móvel é projetado para um determinado fim, é óbvio que seu sistema de locomoção tem que ser adequado para o tipo de ambiente no qual irá realizar suas tarefas. O ambiente pode ser interno ou externo. Com base na necessidade serão utilizados pernas, esteiras, rodas, asas, hélices ou outros.

Apresentar-se-á a seguir algumas características do sistema de locomoção de um robô móvel que utiliza rodas.

Nesse caso, dois fatores caracterizam a mobilidade de um robô com rodas:

- Tipo de rodas;
- Disposição das rodas numa estrutura mecânica.

Admitir-se-á que o plano das rodas são verticais e que suas rodas giram em torno de seus eixos horizontais.

A orientação dessas rodas em relação as estruturas mecânicas podem ser fixas ou variáveis.

Há, basicamente, duas classes de rodas:

- Convencionais;
- Suecas.

Para ambas as classes de rodas, pressupõe-se que seu contato com o solo se reduz a um único ponto.

Diferentemente da roda sueca, a roda convencional realiza seu movimento apenas por rotação sem deslizamento.

A roda sueca oferece a possibilidade de movimento de deslizamento lateral.

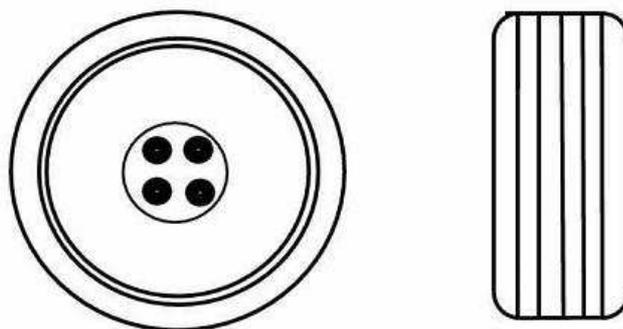


Figura 4.14: Roda convencional

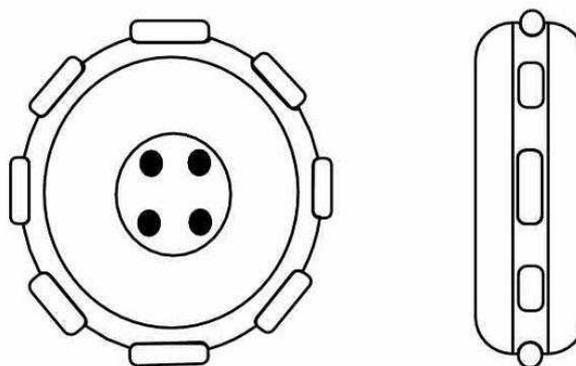


Figura 4.15: Roda sueca

As rodas convencionais podem ser subclassificadas em três tipos quanto a sua fixação ao robô:

- Rodas fixas;
- Rodas orientáveis centralizadas;
- Rodas orientáveis não-centralizadas (roda louca).

As rodas fixas, geralmente, tem seu eixo fixado na estrutura do robô. Sua finalidade na maioria das vezes é tracionar o robô.

Já as rodas orientáveis centralizadas tem seu eixo de rotação ortogonal ao seu eixo de sustentação que pode ser usada para direção e tração.

As rodas orientáveis não-centralizadas são orientáveis em relação à estrutura e tem como principal finalidade dar estabilidade ao robô.

A forma na qual as rodas estão dispostas permite a construção de uma grande variedade de robôs cuja diferença entre eles é o grau de manobrabilidade.

Por exemplo:

- Robô uniclo;
- Robô triciclo;

- Robô quadriciclo.

O robô unicycle possui duas rodas fixas convencionais com rotação independente (tração diferencial) para a tração e uma roda orientável não-centralizada para lhe dar estabilidade.



Figura 4.16: Robô Unicycle

Já o robô triciclo possui estrutura de locomoção constituída de duas rodas fixas e uma roda orientável centralizada na qual está atribuída a função de orientação e tração.

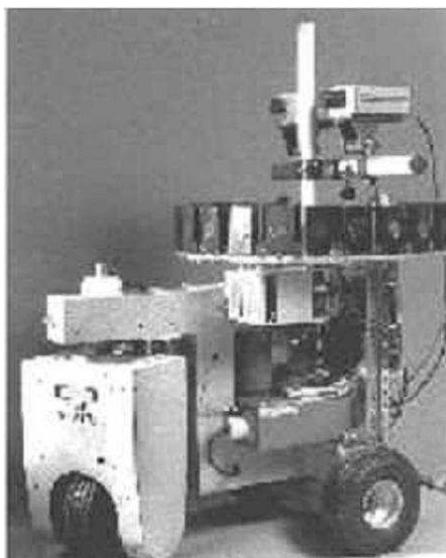


Figura 4.17: Robô Triciclo

O robô quadriciclo possui duas rodas fixas e duas rodas orientáveis centralizadas dotadas de tração diferencial. A vantagem dessa estrutura é grande estabilidade o que impede derrapagem e possíveis erros de odometria. A odometria é o processo pelo qual o robô determina sua posição e/ou orientação através do número de giros das rodas.

Há um outro tipo de robô que é o omnidirecional. Este tipo de robô possui máximo em manobrabilidade, ou seja, ele pode se locomover em qualquer direção sem a necessidade de se reorientar.



Figura 4.18: Robô Quadriciclo



Figura 4.19: Robô Omnidireccional

Em relação à tração e direção há três sistemas básicos: Tração e direção em eixos independentes, tração e direção no mesmo eixo e tração e direção em todos os eixos.

4.3 Localização de um robô móvel com rodas

Para que um robô efetue suas tarefas é necessário que ele saiba sua pose, ou seja, qual sua posição e orientação em relação a um sistema de coordenadas de referência.

O sistema de navegação de um robô se resume às respostas das três perguntas seguintes:

- Onde estou?
- Para onde vou?
- Como devo chegar lá?

Analisar-se-á, inicialmente, o modo como um robô móvel com tração diferencial se orienta e se localiza.

Vai-se tratar de dois modelos:

1º Modelo: Orientação por odometria e localização por trilateralização;

2º Modelo: Orientação e localização por odometria.

4.3.1 Modelo 1

Para esse modelo, o método de orientação é baseado na odometria e o de localização será o método de trilateralização.

O método de odometria se baseia no giro das rodas.

Nesse caso, supõe-se que o robô se locomove no plano bidimensional. Assim determinar a pose do robô equivale a determinar as componentes (x, y, φ) onde (x, y) representa sua posição no plano de referência e φ é o ângulo do seu vetor direção em relação ao eixo OX .

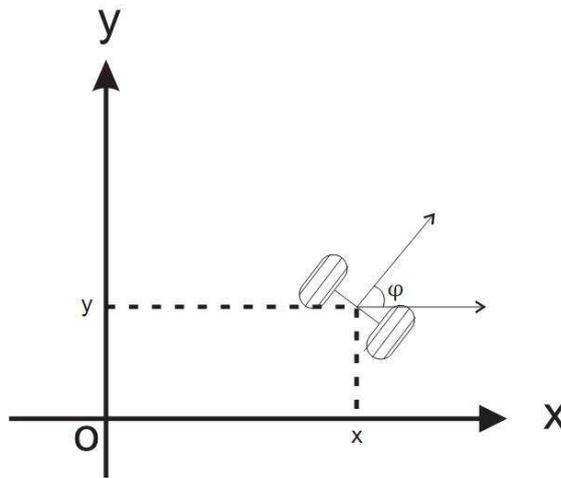


Figura 4.20: Sistema de coordenadas de referência

Admitir-se-á que o ponto para localização do robô está no ponto médio do seu eixo.

Para se saber a orientação do robô em função do giro de suas rodas considera-se que quando ele faz uma curva suas rodas descrevem dois arcos de circunferências concêntricas. Denotar-se-á o centro em questão por C . (Vide figura 4.21)

Na figura, ΔS_1 e ΔS_2 são os comprimentos dos arcos descritos por cada uma das rodas, ou seja, o espaço percorrido por cada uma delas. Os valores r_1 e r_2 são os valores dos raios dos arcos concêntricos, a é a distância entre as rodas, M é o ponto de referência (Ponto médio do eixo) e $\Delta\varphi$ é a variação no ângulo de orientação.

Dessa forma, o deslocamento da roda esquerda é dado por:

$$\Delta S_1 = r_1 \cdot \Delta\varphi \quad \text{Eq.1}$$

E o da roda direita é:

$$\Delta S_2 = r_2 \cdot \Delta\varphi \quad \text{Eq.2}$$

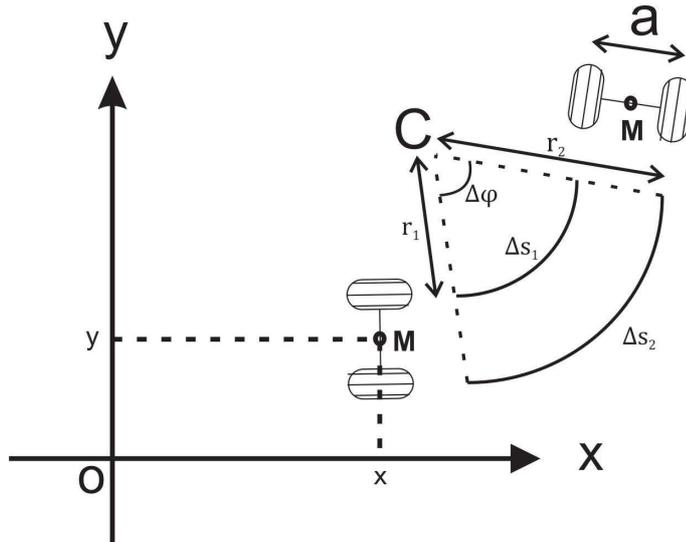


Figura 4.21: Variação no ângulo de orientação

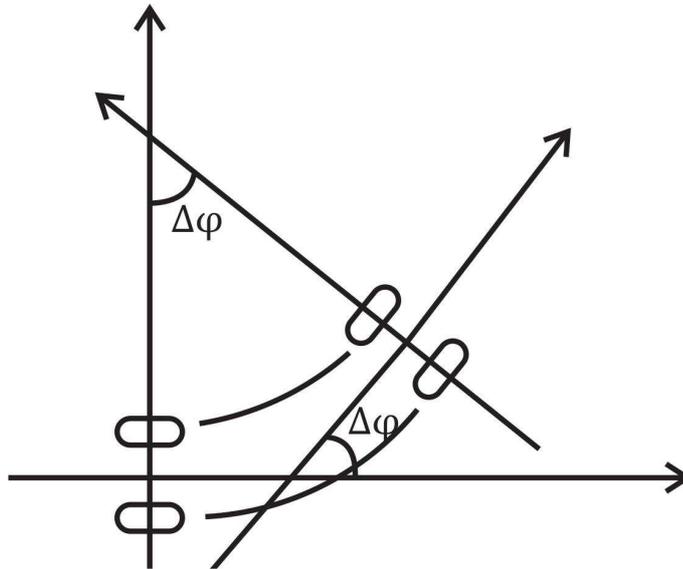


Figura 4.22: Variação no ângulo de orientação

Desse modo, a distância total percorrida pelo referencial M é dada pela média aritmética entre ΔS_1 e ΔS_2 .

$$\Delta S = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2}{2}.$$

Por outro lado, subtraindo-se membro a membro as Eq.2 e Eq.1, tem-se:

$$\Delta S_2 - \Delta S_1 = r_2 \cdot \Delta \varphi - r_1 \cdot \Delta \varphi$$

$$\Delta S_2 - \Delta S_1 = (r_2 - r_1) \cdot \Delta \varphi$$

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta S_2 - \Delta S_1}{r_2 - r_1}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta S_2 - \Delta S_1}{a} \quad \text{Eq.3}$$

Percebe-se através da Eq.3 que se obtém a variação do ângulo de orientação em função do giro das rodas do dispositivo.

O giro das rodas é analisado por um dispositivo chamado “ENCODER”. Esse dispositivo é montado sobre os eixos das rodas.

O “ENCODER” é um codificador óptico que possui alta sensibilidade o que lhe permite a contagem do número de voltas (e sua fração) realizadas pelas rodas de forma precisa.



Figura 4.23: Encoder

Para a localização, como já foi mencionado, será utilizado o método de trilateralização.

Trilateralização são sistemas ativos que se baseiam na medida de atraso de propagação de um sinal eletromagnético emitido por 3 transceptores localizados em pontos com coordenadas conhecidas. O sistema funciona a partir dos 100m até os 100km e possui uma margem de erro de no máximo 2m.

O sistema funciona da seguinte forma: O transceptor móvel localizado no robô emite um sinal que é captado pelos 3 transceptores fixos e estes por sua vez o devolvem adicionando seu próprio código de identificação. O tempo entre o instante em que o robô emite o sinal e o recebe de volta determina a distância em que ele está de cada uma das estações fixas (Transceptor fixo).

Para a localização do robô são necessários três transceptores fixos. A pergunta que fica é: Por quê necessita-se de três estações fixas?

Inicialmente tem-se que entender como o sinal se propaga. O sinal dos transceptores se propaga com a forma de uma circunferência. Dessa forma, se houvesse apenas uma estação fixa o móvel poderia estar em qualquer lugar sobre uma circunferência cuja medida do raio é a distância d indicada pelo dispositivo. Vide figura (a).

Se houvessem duas estações fixas ainda não seria possível a localização do robô móvel, pois ele poderia estar sobre quaisquer dos dois pontos, P_1 ou P_2 , da intersecção dos

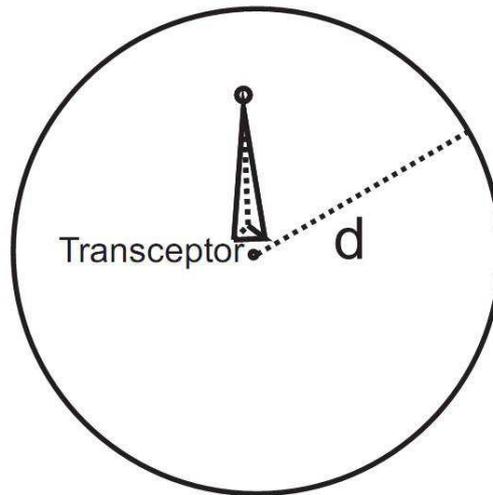


Figura 4.24: Figura (a)

dois sinais. Vide figura (b).

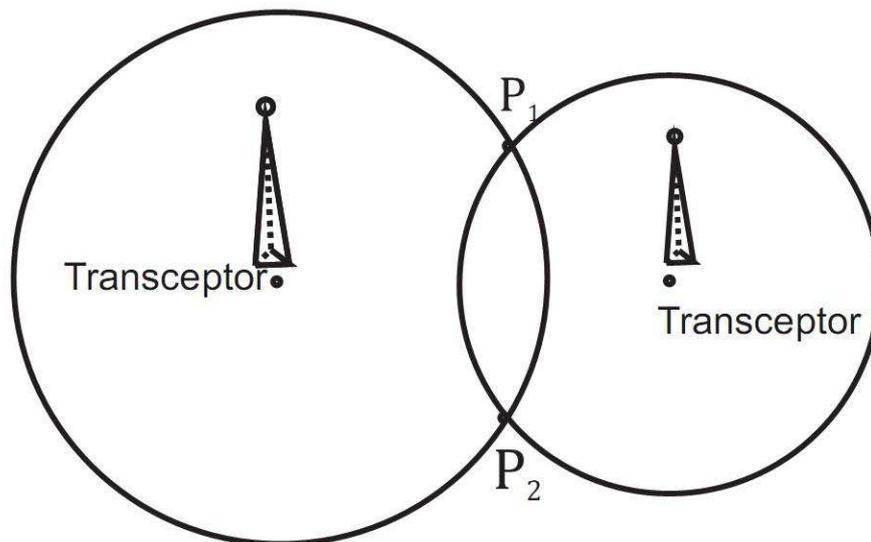


Figura 4.25: Figura (b)

No caso de serem três transceptores teria-se três sinais que se propagam em forma de circunferência e que se intersectam num único ponto P_3 e assim obtem-se a localização do robô. Vide figura (c).

Esta é a justificativa para a necessidade de três estações fixas com coordenadas conhecidas para estabelecer a exata localização do robô móvel.

Uma vantagem para o uso do sistema de trilateralização para a localização de robôs móveis é o baixo custo.

Há também um sistema de trilateralização por ultrassom que fornece um nível de exatidão aceitável. Devido ao alcance relativamente curto, esse tipo de sistema é muito utilizado em ambientes pequenos onde não haja muitos obstáculos que atrapalhem

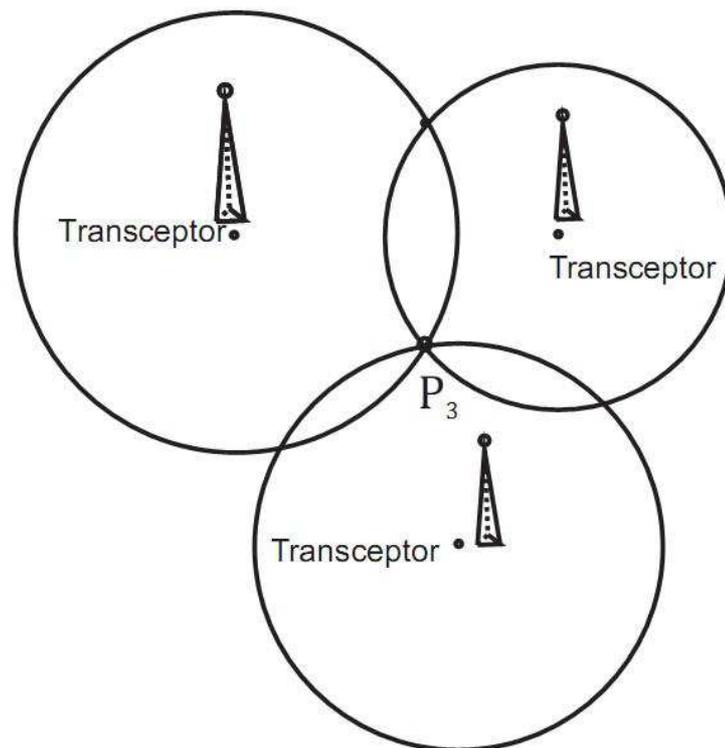


Figura 4.26: Figura (c)

a propagação do sinal.

4.3.2 Modelo 2

Para o modelo 2, o método de orientação e de localização é totalmente baseado na odometria.

Esse modelo também é dotado de tração diferencial, ou seja, as rodas direita e esquerda tem movimento de rotação independente. A rotação das rodas também é monitorado por encoders.

Deve-se, inicialmente entender que se as velocidades das rodas, direita e esquerda, tem valores e sentidos iguais, então o robô translada para frente com velocidade positiva e para trás com velocidade negativa. Se as velocidades tem valores iguais e sentidos opostos, então o robô gira em torno do ponto M que é o ponto de intersecção do seu eixo de simetria com o eixo das rodas.

Assim, se a roda direita deslocar-se Δs a roda esquerda deslocar-se-á, também Δs mas no sentido oposto. Logo, como o comprimento do eixo é a , a variação do ângulo de orientação é:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{\frac{a}{2}}$$

$$\Delta\theta = \frac{2\Delta s}{a}$$

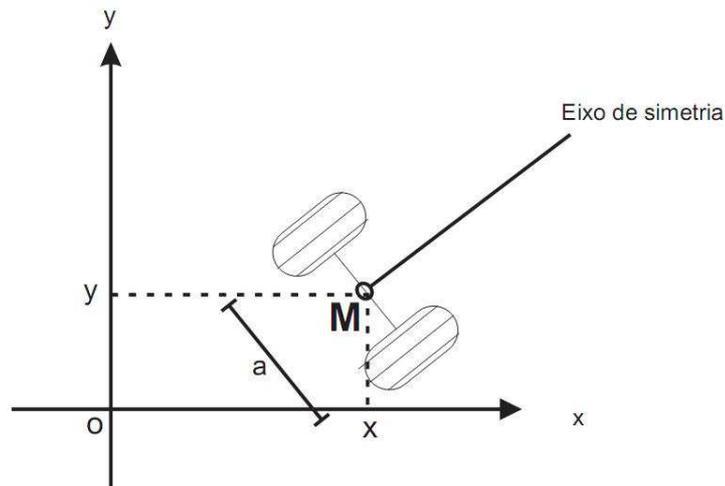


Figura 4.27: Orientação

A variação no ângulo de orientação será positiva se a roda direita se deslocar no sentido anti-horário e negativa se o deslocamento for no sentido horário.

Dessa forma, para saber a orientação do robô basta saber a medida do ângulo θ , no sentido trigonométrico, que o eixo de simetria forma com o eixo X do plano de referência.

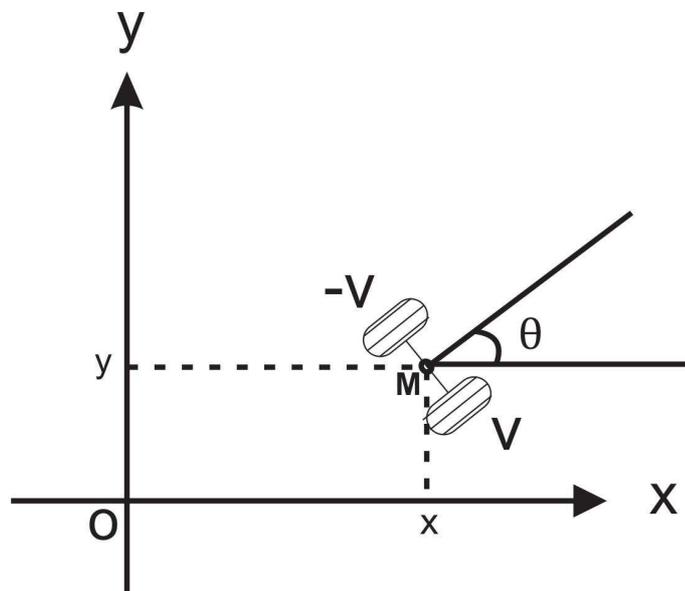


Figura 4.28: Orientação

Logo, para estimar a localização do robô num determinado momento deve-se conhecer a posição onde o móvel se encontrava, o ângulo de orientação antes do deslocamento e o quanto ele se deslocou na direção do seu eixo de simetria.

Sejam $M_0(x_0, y_0)$ a posição inicial do robô e θ_0 o ângulo que o eixo de simetria forma com o eixo OX do plano de referência com o robô na posição inicial.

Supondo que o robô desloque-se S_0 unidades na direção do seu eixo de simetria, então sua posição $M_1(x_1, y_1)$ é dada por:

$$x_1 = x_0 + S_0 \cdot \cos\theta_0$$

e

$$y_1 = y_0 + S_0 \cdot \sen\theta_0$$

Se na posição M_1 o robô se reorientar e a variação no seu ângulo de orientação for $\Delta\theta$, então o novo ângulo de orientação será $\theta_0 + \Delta\theta_0$.

Se o robô novamente se deslocar na direção de seu eixo de simetria S_1 unidades, sua nova posição será dada por $M_2 = (x_2, y_2)$, tal que:

$$x_2 = x_1 + S_1 \cdot \cos(\theta_0 + \Delta\theta_0)$$

e

$$y_2 = y_1 + S_1 \cdot \sen(\theta_0 + \Delta\theta_0), \text{ ou seja,}$$

$$x_2 = x_1 + S_1 \cdot \cos\theta_1$$

e

$$y_2 = y_1 + S_1 \cdot \sen\theta_1, \text{ onde } \theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta_0.$$

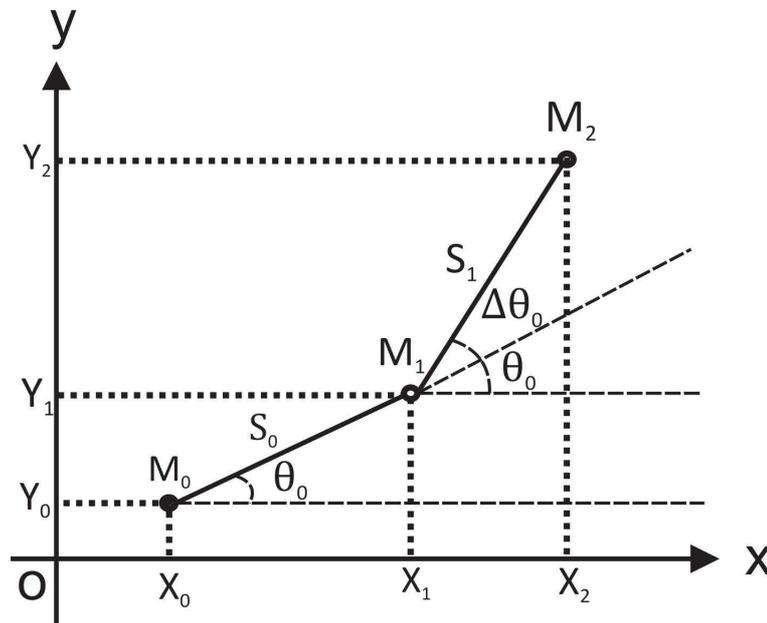


Figura 4.29: Coordenadas da posição

Dessa forma, a posição é dada por $M_3 = (x_3, y_3)$, onde:

$$x_3 = x_2 + S_2 \cdot \cos(\theta_1 + \Delta\theta_1)$$

e

$$y_3 = y_2 + S_2 \cdot \text{sen}(\theta_1 + \Delta\theta_1), \text{ ou seja,}$$

$$x_3 = x_2 + S_2 \cdot \text{cos}\theta_2$$

e

$$y_3 = y_2 + S_2 \cdot \text{sen}\theta_2, \text{ onde } \theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta_1.$$

Prosseguindo, de forma análoga, após o n-ésimo movimento, a posição $M_n = (x_n, y_n)$ possui as coordenadas expressas por:

$$x_n = x_{n-1} + S_{n-1} \cdot \text{cos}(\theta_{n-1})$$

e

$y_n = y_{n-1} + S_{n-1} \cdot \text{sen}(\theta_{n-1})$, onde $\theta_{n-1} = \theta_{n-2} + \Delta\theta_{n-2}$ e S_{n-1} é o deslocamento no n-ésimo movimento.

Diferentemente do modelo 1, esse modelo tem sua trajetória sobre uma linha poligonal.

5 TÉCNICAS PARA O ESTUDO DOS ROBÔS INDUSTRIAIS

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentar-se-á todas as técnicas necessárias para o estudo e compreensão do movimento de um robô industrial.

Apresentar-se-á as transformações básicas no plano e no espaço e também a idéia de matriz de coordenadas homogêneas, extremamente necessária para o estudo da cinemática de um robô industrial, além da idéia de referencial solidário.

5.2 Sistemas de eixos e referenciais

5.2.1 *Sistemas de eixos*

Os sistemas de eixos que vai-se utilizar é denotado por sistemas ortogonais e diretos, que significa que os ângulos são medidos no sentido anti-horário.

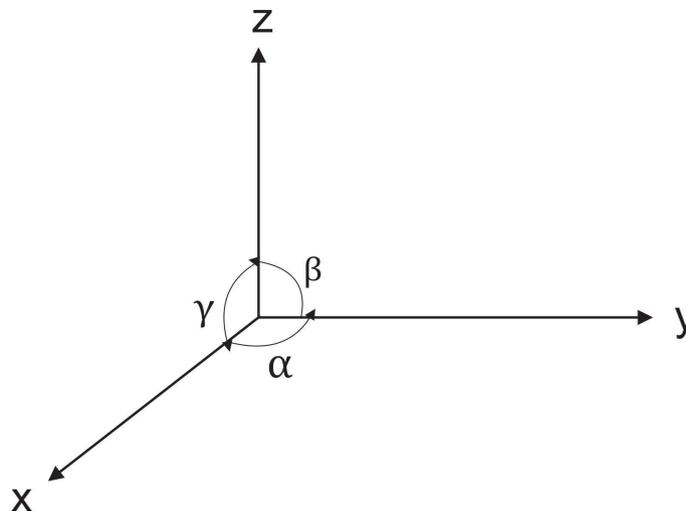


Figura 5.30: Sistema ortogonal direto

O ponto do espaço será representado por uma tripla ordenada e o ponto do plano por par ordenado ou se necessário representar-se-á os pontos por vetores coluna.

$$\text{Ex: } P_0 = (x_0, y_0, z_0) \text{ ou } P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Define-se também a operação de adição de um vetor \vec{v} a um ponto P_0 o que nos dá um outro ponto $P_1 = P_0 + \vec{v}$, já que um vetor \vec{v} pode ser expresso como um segmento orientado $\overrightarrow{P_0P_1}$.

Daí pode-se extrair as coordenadas do vetor \vec{v} em função das coordenadas de P_0 e P_1 :

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$$

$$\vec{v} = P_1 - P_0$$

5.2.2 Referenciais

Os pontos do espaço podem ser vistos de várias formas considerando sistemas referenciais diferentes. Trata-se do mesmo ponto o que muda é a descrição dele em relação ao referencial.

Considerando-se dois referenciais R e N , respectivamente um mesmo ponto P no referencial R pode ser representado em outro referencial N por:

$${}^R Q = \begin{bmatrix} {}^R q_x \\ {}^R q_y \\ {}^R q_z \end{bmatrix} \text{ e } {}^N Q = \begin{bmatrix} {}^N q_x \\ {}^N q_y \\ {}^N q_z \end{bmatrix}.$$

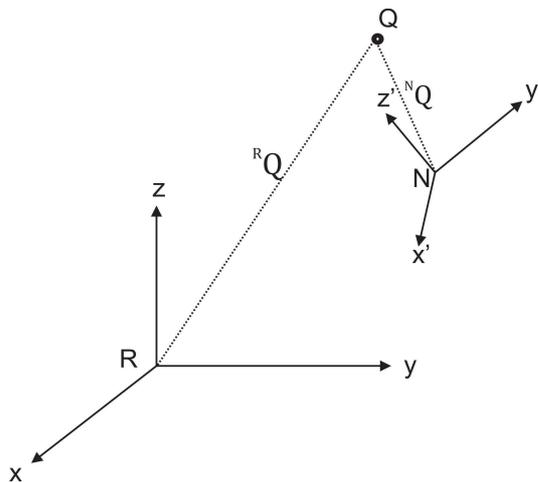


Figura 5.31: Ponto Q nos referenciais R e N

A relação entre os referenciais R e N tem a ver com a posição e orientação entre eles, ou seja, a forma que se obtém um a partir do outro.

A movimentação de pontos no espaço é, basicamente, a mudança de suas coordenadas, isto é, a mudança da posição Q_1 para a posição Q_2 , no mesmo referencial. Tal passagem é designada por translação e pode ser obtida através de soma de vetores.

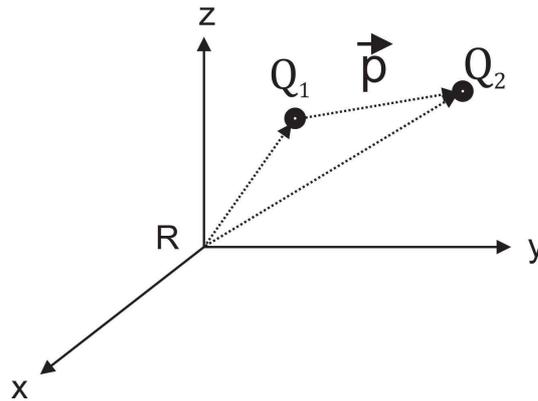


Figura 5.32: Translação de um ponto

Assim, pode-se escrever $\vec{p} = Q_2 - Q_1$ ou $Q_2 = Q_1 + \vec{p}$. Essa é a translação do ponto Q_1 pelo vetor \vec{p} . As coordenadas de Q_2 podem ser expressas por:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} q_{2x} \\ q_{2y} \\ q_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1x} \\ q_{1y} \\ q_{1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Para transladar um segmento de reta, basicamente, basta transladar seus dois extremos. Para transladar figuras mais complicadas deve-se transladar seus pontos de maior relevância.

No caso de um cubo deve-se transladar seus 8 vértices.

Percebe-se que esse processo não é interessante para figuras muito complexas, principalmente se a transformação utilizada não for a translação.

Uma maneira de resolver esse problema é utilizar um referencial N solidário com o objeto a ser movimentado em relação ao referencial R. Antes da transformação os referenciais coincidem e depois o referencial R permanece e o referencial N não.

Considerando-se, ainda os referenciais R e N, vai-se mostrar a relação entre eles depois da transformação.

Na ilustração tem-se:

- ${}^N Q$ é um dos vértices no novo referencial e possui as mesmas coordenadas de R antes da translação;
- ${}^R Q$ é o ponto Q após a translação;
- \vec{p} é um vetor no referencial original.

As coordenadas do ponto transladado se mantêm em relação ao novo referencial, pois o novo referencial é solidário ao objeto. Mas em relação ao referencial R esse ponto agora é ${}^R Q$.

A relação entre as coordenadas é ${}^R Q = {}^N Q + \vec{p}$.

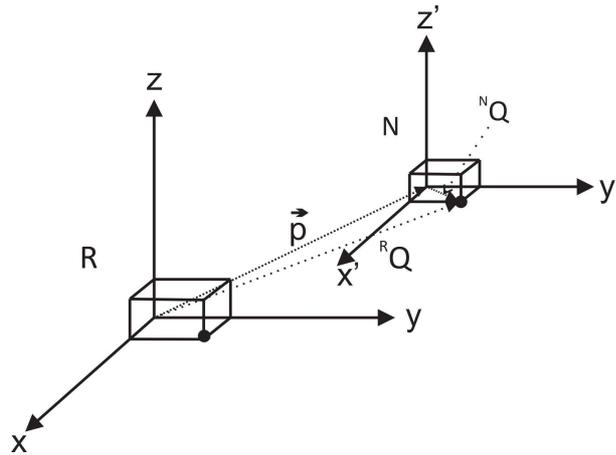


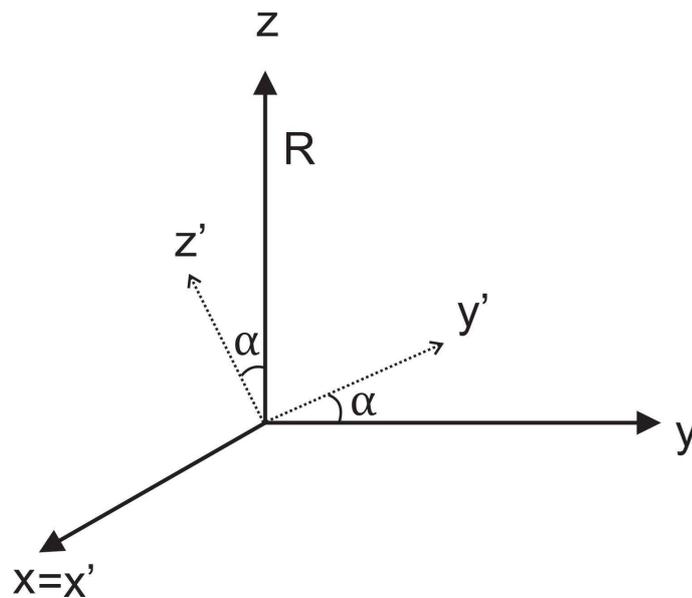
Figura 5.33: Relação entre referências

5.2.3 Transformações elementares

Para se compreender melhor apresentar-se-á as principais transformações elementares.

Analisar-se-á, além das translações, também as rotações em torno de um dos eixos coordenados. Isso porque qualquer rotação ou translação no espaço tridimensional pode ser decomposta em rotações ou translações simples como estas.

A rotação de um ângulo α em torno do eixo OX será indicada por $Rot(x, \alpha)$, em torno do eixo OZ será $Rot(z, \alpha)$ e em torno de OY será $Rot(y, \alpha)$. Já as translações de medida a ao longo de um dos eixos será indicada por $Trans(x, a)$ se for ao longo de x , $Trans(y, a)$ se for ao longo de y e $Trans(z, a)$ se for ao longo de z .

Figura 5.34: Rotação em torno de x ($Rot(x, \alpha)$)

Nota-se que no espaço tridimensional há 6 transformações elementares possíveis.

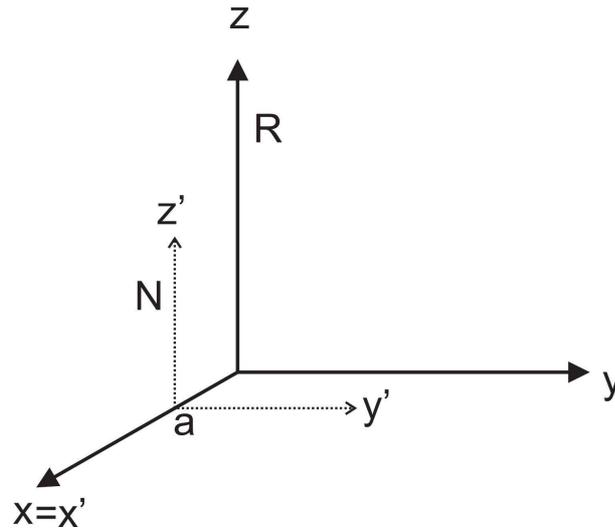


Figura 5.35: Translação ao longo do eixo x ($Trans(x, a)$)

5.2.4 Matriz de uma transformação no plano

Para facilitar o estudo será introduzido a notação matricial para uma transformação.

A transformação no plano:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + p_x \\ y_1 = y_0 + p_y \end{cases}, \text{ é equivalente a } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

Admitir-se-á uma transformação geométrica, onde cada coordenada depende de todas as outras coordenadas originais e não apenas do parâmetro independente. A expressão obtida seria:

$$\begin{cases} x_1 = ax_0 + by_0 + p_x \\ y_1 = cx_0 + dy_0 + p_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

A matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ será designada por T .

Percebe-se facilmente que a matriz que fornece a translação é a matriz T identidade.

Na reflexão em relação ao eixo x , a matriz T da transformação é:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pois } \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

No caso da reflexão em relação à origem tem-se:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

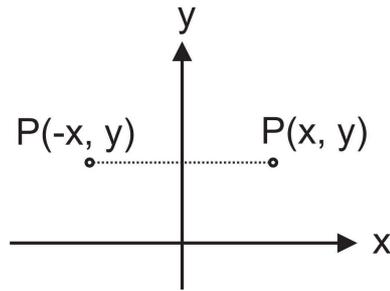


Figura 5.36: Reflexão em torno do eixo y

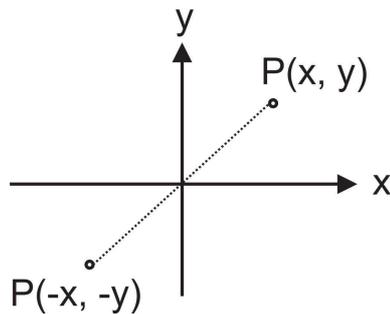


Figura 5.37: Reflexão em relação à origem

$$\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Uma transformação importante e interessante é a transformação cuja matriz T , é:

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Essa transformação é denominada “Fator Escala”. Tal transformação é uma dilatação ou contração na direção do eixo horizontal.

Para se verificar que essa transformação não é uma translação basta tomar um contra-exemplo. Considere um segmento de reta de extremos $P_1(2, 1)$ e $P_2(3, 4)$ e $T =$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P'_1 = T(P_1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P'_2 = T(P_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Percebe-se que não há vetor \vec{p} que leve cada ponto do segmento P_1P_2 no respectivo ponto de $P'_1P'_2$ (Vide figura 5.38). Portanto a transformação não é uma translação.

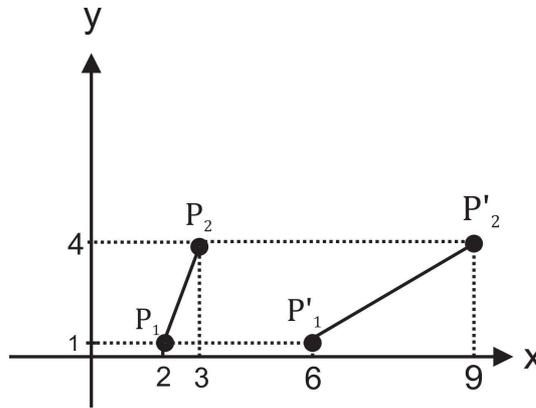


Figura 5.38: Fator Escala

Uma outra forma de se perceber isso é observar que o segmento P_1P_2 é menor o segmento $P'_1P'_2$.

Agora, dar-se-á início ao estudo das rotações. Vai-se mostrar que a matriz de uma rotação de um ângulo θ qualquer, no plano, é:

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Para mostrar que T é realmente dessa forma, vai-se considerar um ponto P no plano, cujas coordenadas cartesianas são (x, y) e suas coordenadas polares são (l, α) .

$$P = (l\cos\alpha, l\sin\alpha)$$

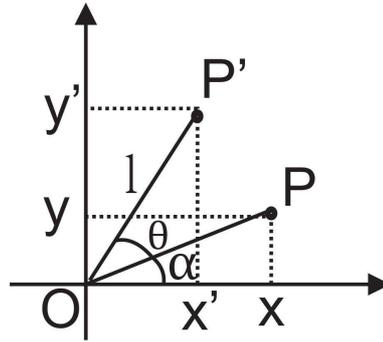
Aplicando-se uma rotação de medida α em torno da origem no ponto P , obteremos o ponto de coordenadas $P' = (x', y')$, tais que:

$$\begin{cases} x' = l\cos(\alpha + \theta) = l(\cos\alpha \cdot \cos\theta - \sin\alpha \cdot \sin\theta) \\ y' = l\sin(\alpha + \theta) = l(\sin\alpha \cdot \cos\theta + \cos\alpha \cdot \sin\theta) \end{cases}$$

E como $\begin{cases} x = l\cos\alpha \\ y = l\sin\alpha \end{cases}$, temos:

$$\begin{cases} x' = l\cos(\alpha + \theta) = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \\ y' = l\sin(\alpha + \theta) = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Utilizando-se a notação de matrizes, obteremos:

Figura 5.39: Rotação de um ângulo α

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

5.2.5 Coordenadas homogêneas

As coordenadas homogêneas nada mais é do que a introdução de uma componente adicional na matriz da transformação. A vantagem dessa nova componente é que se pode representar uma rotação e uma translação numa única matriz.

Ex: Considerar-se-á a transformação $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$.

Pode-se reescrever a transformação acima da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & p_x \\ c & d & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de transformação homogênea é constituída por seções (Vide exemplo abaixo):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & p_x \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Na matriz acima a porção $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é chamada componente de rotação e a porção $\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$ é denominada componente de translação.

Percebe-se que a inserção do número 1 na matriz não afeta a transformação já que temos a igualdade $1=1$. E por outro lado já que uma transformação transforma um ponto em outro é plausível esperar que uma sucessão de transformações seja obtida pelo produto das matrizes das transformações.

Dessa forma, sendo $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, transformações sucessivas de um ponto P a matriz da transformação final será $T = T_n(\dots(T_4(T_3(T_2(T_1))))\dots) = T_n \cdot T_{n-1} \cdot \dots \cdot T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1$, pois, T_1 leva o ponto P no ponto T_1P , a transformação T_2 leva o ponto $T_1(P)$ no ponto $T_2(T_1P)$, a transformação T_3 leva o ponto $T_2(T_1P)$ no ponto $T_3(T_2(T_1P))$ e assim sucessivamente.

Vai-se fazer uma observação sobre a composição de transformações.

Sejam T_1 e T_2 duas transformações o que significa $T_2 \cdot T_1$ e $T_1 \cdot T_2$?

Considerar-se-á duas transformações no plano $T_1 = (Rot\alpha)$ (Rotação de α°) e $T_2 = Trans(x, a)$ (Translação de medida a no eixo x) para se verificar o que acontece.

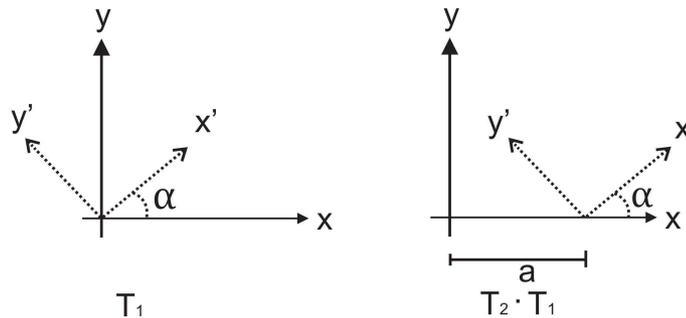


Figura 5.40: Transformação $T_2 \cdot T_1$

Essa transformação, $T_2 \cdot T_1$, rotaciona em α° o referencial solidário e depois o translada em a unidades sobre o eixo x .

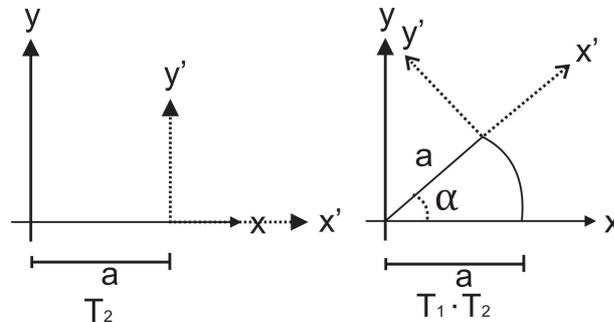


Figura 5.41: Transformação $T_1 \cdot T_2$

Já a transformação $T_1 \cdot T_2$, translada o referencial solidário em a unidades e depois o rotaciona em α° .

Considerar-se-á, agora, uma terceira possibilidade na qual a segunda transformação é aplicada ao referencial recém criado:

Percebe-se que essa terceira possibilidade coincide com a pós-multiplicação da matriz T_2 . Assim, conclui-se que a pré-multiplicação de uma transformação por outra significa aplicar essa segunda transformação no referencial global e a pós-multiplicação de uma transformação por outra significa aplicar essa segunda no novo referencial, isto é, utiliza-se de referenciais intermediários para a transformação.

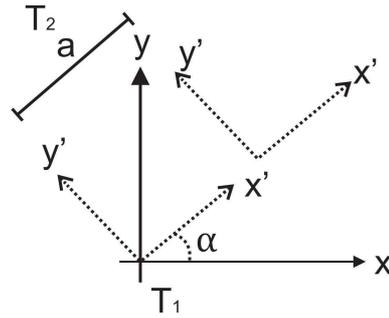


Figura 5.42: Transformação aplicada ao referencial recém criado

5.2.6 Matriz de uma transformação no espaço

A matriz de uma rotação de um ponto em relação a origem é do tipo
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

já que mais uma coordenada deve ser inserida.

O vetor que representará a translação será denotado por $\vec{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}.$

Portanto, a matriz de transformação homogênea tem a seguinte estrutura:

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & p_x \\ d & e & f & p_y \\ g & h & i & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vai-se analisar os três tipos de rotação, anteriormente mencionados, em torno do eixo x ($Rot(x, \theta)$), em torno do eixo y ($Rot(y, \theta)$) e em torno do eixo z ($Rot(z, \theta)$).

Na rotação em torno do eixo x o valor da abscissa permanece fixo e os valores de y e z mudam.

Dessa forma, a rotação em torno do eixo x se reduz a análise de uma rotação no plano ZOY .

Assim, transformação, em forma matricial, que traduz a rotação de um ângulo θ de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ em torno do eixo x , é:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz de coordenadas homogêneas dessa transformação é a seguinte:

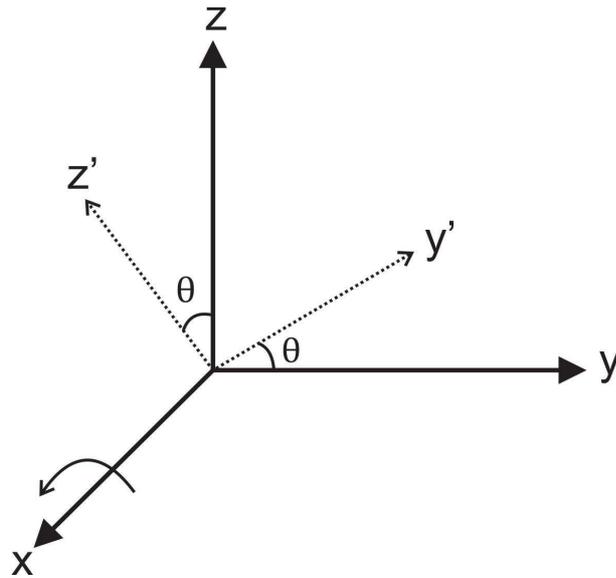


Figura 5.43: Rotação em torno do eixo x

$$Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As rotações em torno do eixo y e do eixo z , podem ser traduzidas, respectivamente, como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

E suas respectivas matrizes de transformação de coordenadas homogêneas, são:

$$Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz de transformação de coordenadas homogêneas que traduz as sucessivas rotações em torno dos eixos x , y e z com uma translação é do tipo:

$$T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sobre a matriz da transformação, há três observações importantes:

- Leva um ponto para outro local dentro do mesmo referencial;
- Relaciona as coordenadas em relação a dois referenciais distintos;
- Transforma um referencial R num referencial N.

A matriz de transformação, representa ainda, as componentes de posição e de orientação do novo referencial, pois em relação ao referencial solidário ao objeto a sua posição não muda. Nessa matriz o vetor (r_{11}, r_{21}, r_{31}) dá a orientação do eixo OX' do novo referencial, o vetor (r_{12}, r_{22}, r_{32}) dá a orientação do novo eixo OY' e (r_{13}, r_{23}, r_{33}) dá a orientação do novo eixo OZ' .

Para mostrar isso basta mostrar o que essa matriz faz com a base canônica do referencial original que são os vetores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Inicialmente deve-se verificar a posição da origem do novo referencial:

Seja $O'(o_1, o_2, o_3)$ a origem do novo referencial. O ponto O' é obtido através da transformação do ponto $O(0, 0, 0)$, origem do referencial original.

$$\begin{bmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \cdot 0 + r_{12} \cdot 0 + r_{13} \cdot 0 + p_x \cdot 1 \\ r_{21} \cdot 0 + r_{22} \cdot 0 + r_{23} \cdot 0 + p_y \cdot 1 \\ r_{31} \cdot 0 + r_{32} \cdot 0 + r_{33} \cdot 0 + p_z \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $O'(p_x, p_y, p_z)$.

Aplicar-se-se, agora, a transformação no ponto $(1, 0, 0)$:

Seja $X' = (x_1, y_1, z_1)$ o ponto resultante da aplicação da transformação no ponto $(1, 0, 0)$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \cdot 1 + r_{12} \cdot 0 + r_{13} \cdot 0 + p_x \cdot 1 \\ r_{21} \cdot 1 + r_{22} \cdot 0 + r_{23} \cdot 0 + p_y \cdot 1 \\ r_{31} \cdot 1 + r_{32} \cdot 0 + r_{33} \cdot 0 + p_z \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \cdot 1 + p_x \cdot 1 \\ r_{21} \cdot 1 + p_y \cdot 1 \\ r_{31} \cdot 1 + p_z \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} + p_x \\ r_{21} + p_y \\ r_{31} + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $X' = (r_{11} + p_x, r_{21} + p_y, r_{31} + p_z)$.

Aplicar-se-á, agora, a transformação ao ponto $(0, 1, 0)$:

Seja $Y' = (x_2, y_2, z_2)$ o ponto obtido pela aplicação da transformação ao ponto $(0, 1, 0)$.

Dessa forma, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \cdot 0 + r_{12} \cdot 1 + r_{13} \cdot 0 + p_x \cdot 1 \\ r_{21} \cdot 0 + r_{22} \cdot 1 + r_{23} \cdot 0 + p_y \cdot 1 \\ r_{31} \cdot 0 + r_{32} \cdot 1 + r_{33} \cdot 0 + p_z \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{12} \cdot 1 + p_x \cdot 1 \\ r_{22} \cdot 1 + p_y \cdot 1 \\ r_{32} \cdot 1 + p_z \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{12} + p_x \\ r_{22} + p_y \\ r_{32} + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $Y' = (r_{12} + p_x, r_{22} + p_y, r_{32} + p_z)$.

Denotando-se por $Z' = (x_3, y_3, z_3)$ o ponto obtido aplicando-se a transformação ao ponto $(0, 0, 1)$ e procedendo-se de forma análoga a anterior, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \cdot 0 + r_{12} \cdot 0 + r_{13} \cdot 1 + p_x \cdot 1 \\ r_{21} \cdot 0 + r_{22} \cdot 0 + r_{23} \cdot 1 + p_y \cdot 1 \\ r_{31} \cdot 0 + r_{32} \cdot 0 + r_{33} \cdot 1 + p_z \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{13} \cdot 1 + p_x \cdot 1 \\ r_{23} \cdot 1 + p_y \cdot 1 \\ r_{33} \cdot 1 + p_z \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{13} + p_x \\ r_{23} + p_y \\ r_{33} + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $Z' = (r_{13} + p_x, r_{23} + p_y, r_{33} + p_z)$.

Dessa forma, os vetores $O'X'$, $O'Y'$ e $O'Z'$ são os vetores que descrevem a ori-

entação dos eixos coordenados do novo referencial, pois, são obtidos pela transformação aplicada na base canônica do referencial original.

Calculando-se as coordenadas dos vetores $O'X'$, $O'Y'$ e $O'Z'$, obtem-se:

$$O'X' = X' - O'$$

$$O'X' = (r_{11} + p_x, r_{21} + p_y, r_{31} + p_z) - (p_x, p_y, p_z)$$

$$O'X' = (r_{11}, r_{21}, r_{31}),$$

$$O'Y' = Y' - O'$$

$$O'Y' = (r_{12} + p_x, r_{22} + p_y, r_{32} + p_z) - (p_x, p_y, p_z)$$

$$O'Y' = (r_{12}, r_{22}, r_{32})$$

e

$$O'Z' = Z' - O'$$

$$O'Z' = (r_{13} + p_x, r_{23} + p_y, r_{33} + p_z) - (p_x, p_y, p_z)$$

$$O'Z' = (r_{13}, r_{23}, r_{33})$$

Portanto, as 3 colunas da parte da matriz que se reserva as rotações na matriz de coordenadas homogêneas traduzem, respectivamente, os vetores que dão a orientação dos eixos do novo referencial $O'X'$, $O'Y'$ e $O'Z'$ em relação ao referencial original.

O processo de se obter um ponto através de uma transformação aplicada num ponto inicial, intuitivamente, dá a idéia de que o processo é reversível, ou seja, tem-se um ponto no novo referencial e se obtém as coordenadas do ponto antes da transformação.

$$P_1 = T \cdot P_0 \Rightarrow T^{-1} \cdot P_1 = P_0$$

Percebe-se, então, que a inversa da matriz da transformação é também uma matriz de uma transformação, e esta por sua vez possui a propriedade de levar de volta o ponto transformado.

Portanto, a transformação T^{-1} desfaz o efeito produzido pela transformação T em um determinado ponto P .

6 O ESTUDO DOS ROBÔS INDUSTRIAIS

6.1 Introdução

Os robôs manipuladores ou industriais são de suma importância para a indústria, pois são capazes de efetuar tarefas repetitivas, com precisão, em ambientes onde o ser humano sofreria danos à sua saúde.

Vai-se apresentar os tipos de estrutura desses manipuladores e a análise de seus elementos.

No estudo da cinemática dos robôs manipuladores há duas áreas:

- Cinemática direta;
- Cinemática inversa.

Inicialmente vai-se introduzir os princípios básicos dos robôs manipuladores e seus elementos constituintes. Logo depois, estudar-se-á apenas a cinemática direta desses equipamentos.

6.2 A cinemática direta de um robô manipulador

A cinemática direta de um robô manipulador trata da obtenção de equações matemáticas dos movimentos entre os vários componentes do equipamento.

Essas equações, na cinemática direta, servem para se obter as coordenadas (x, y, z) do órgão terminal a partir dos ângulos das suas juntas.

6.3 Elementos de um manipulador industrial

Um manipulador robótico é composto por membros ou elos conectados por juntas. A esse conjunto dá-se o nome de cadeia cinemática aberta se cada junta liga apenas dois elos. Esse é o caso do manipulador industrial.

Geralmente, o número de juntas determina o número de graus de liberdade do manipulador, pois a maioria das juntas possuem um grau de liberdade. Caso a junta defina mais um grau de liberdade o número de graus do manipulador é dado pela soma dos graus de todas as juntas.

A maioria dos manipuladores possuem 6 graus de liberdade ou 6 DOF (degrees of freedom), três para posicionar o órgão terminal (Ferramenta de trabalho) e outros 3 para orientá-lo.

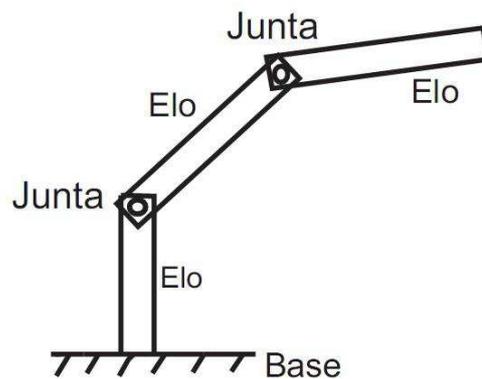


Figura 6.44: Elementos de um manipulador robótico

Há outros tipos de manipuladores com maior ou menor número de graus de liberdade. Isto depende da função para a qual o manipulador foi criado.

Para se compreender melhor a cinemática direta vai-se apresentar o estudo de um manipulador planar de 2 DOF.

Para isso deve-se determinar equações que expressem as coordenadas (x, y) da extremidade final do manipulador em função das medidas dos ângulos, θ_1 e θ_2 , das juntas

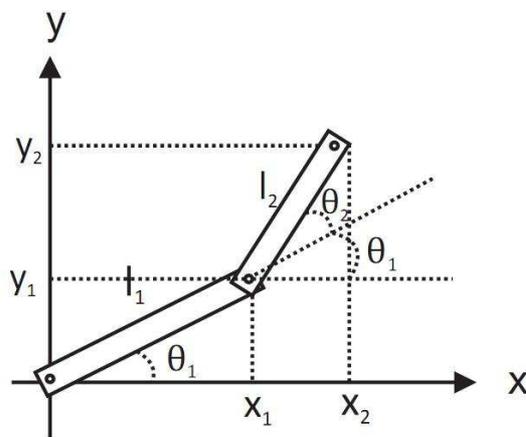


Figura 6.45: Esquema de manipulador planar 2 DOF

Considerando-se os elos 1 e 2, que medem respectivamente l_1 e l_2 , formando os ângulos de medidas θ_1 e θ_2 como mostra a figura 5.2.

Dessa forma, as coordenadas de (x_1, y_1) podem ser expressas em função do ângulo θ_1 e da medida l_1 :

$$x_1 = l_1 \cos \theta_1$$

$$y_1 = l_1 \sin \theta_1$$

Já as coordenadas (x_2, y_2) da última extremidade do manipulador podem ser

expressas do seguinte modo:

$$x_2 = x_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = y_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Daí, substituindo-se o valor de x_1 e y_1 na expressão de x_2 e y_2 , obtém-se:

$$x_2 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Percebe-se que quanto maior o número de graus de liberdade (DOF's), maior é a complexidade da dinâmica e da cinemática do manipulador.

O volume varrido pela ferramenta de trabalho de um manipulador robótico é denominado volume de trabalho. O volume de trabalho depende diretamente da geometria do manipulador e das restrições das juntas.

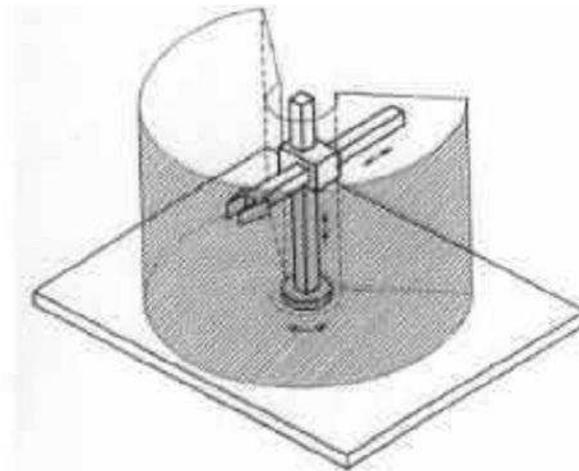


Figura 6.46: Volume de trabalho

Há vários tipos de juntas de um manipulador. As principais são as seguintes:

- Prismática;
- Torcional;
- Rotacional;
- Revolvente.

A junta prismática é aquela em que seu movimento se dá em linha reta através do deslizamento de duas hastes.

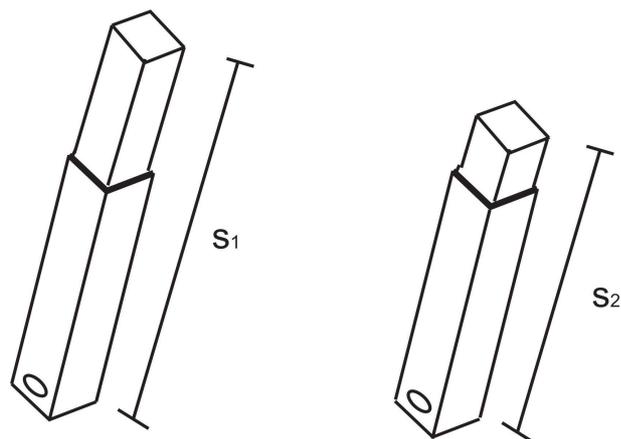


Figura 6.47: Junta prismática

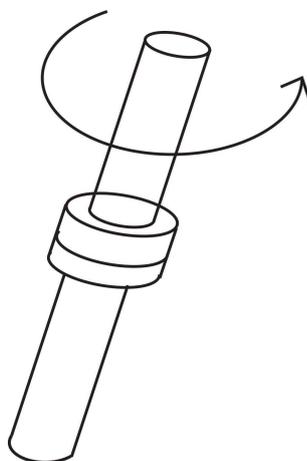


Figura 6.48: Junta torcional

A junta torcional possui os eixos de entrada e de saída com a mesma direção do eixo de rotação da junta.

A junta rotacional possui os eixos de entrada e de saída perpendiculares ao eixo de rotação da junta.

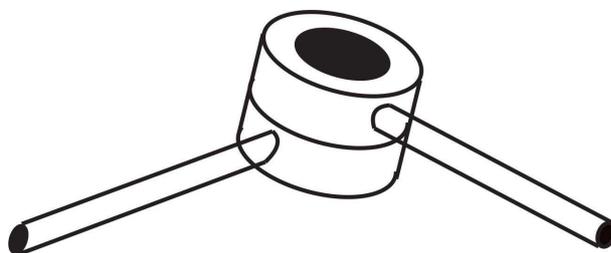


Figura 6.49: Junta rotacional

Na junta revolvente o elo de entrada possui a mesma direção do eixo de rotação da junta e o elo de saída é perpendicular a este.

Em relação aos eixos há algumas características a serem consideradas. Os eixos apresentam-se com várias geometrias, o que interfere diretamente na cinemática do ma-

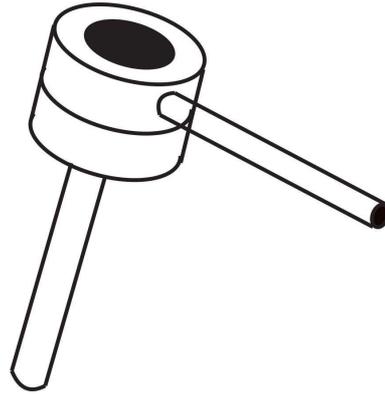


Figura 6.50: Junta revolvente

nipulador.

Na sequência vai-se apresentar algumas dessas geometrias para melhor compreensão dos parâmetros que afetam a a cinemática de um manipulador.

Definir-se-á dois sistemas de coordenadas de tal modo que o eixo z coincide com o eixo da junta. O n -ésimo elo e a sua junta anterior, que é a junta também de número n , determinam o sistema de coordenadas n , que é solidário com o elo. Já o sistema de coordenadas de número $n-1$ é aquele sobre o qual se opera a junta de número n e também o elo de número n .

Considerar-se-á, então, que o sistema de coordenadas 0 (zero), é o primeiro elo, isto é, está fixo na base do manipulador.

Denotar-se-á por:

- l_n o comprimento do elo de número n ;
- d_n o deslizamento sobre o eixo z de uma junta $n+1$ em relação a junta n ;
- θ_n o ângulo da n -ésima junta;
- α_n o ângulo de torção em torno do eixo x de uma junta $n+1$ em relação a junta n .

Baseado nessas definições, vai-se, agora, apresentar alguns exemplos de elos com variações desses parâmetros.

No elo tipo 1 (Vide figura 6.51) com juntas rotacionais, tem-se que:

- $d_n = 0$;
- $l_n \neq 0$;
- θ_n e θ_{n+1} variáveis;
- $\alpha_n = 0$

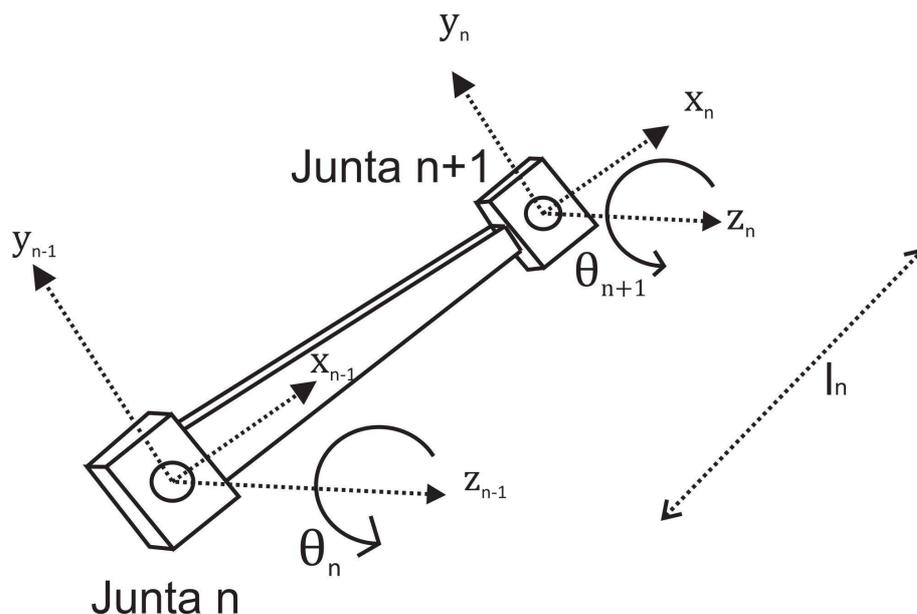


Figura 6.51: Elo tipo 1

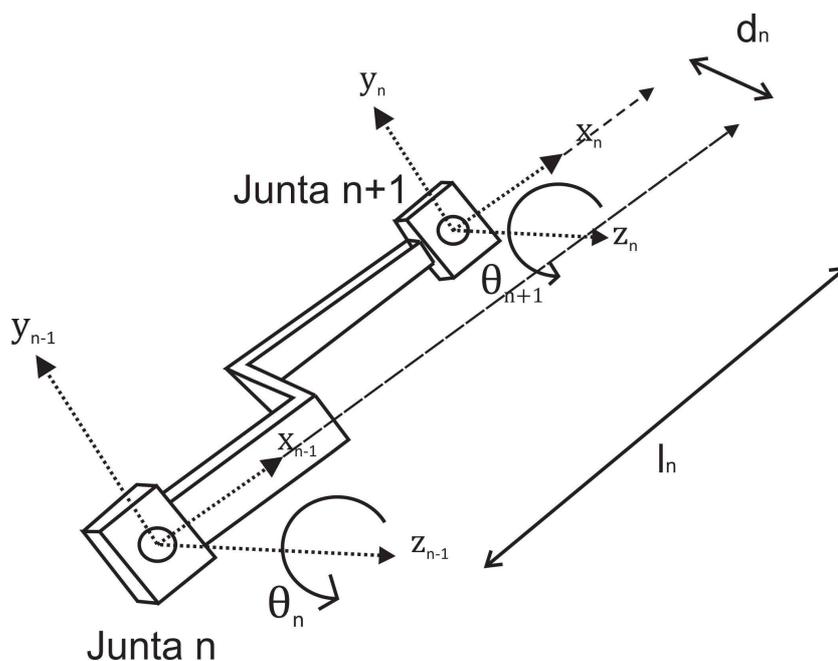


Figura 6.52: Elo tipo 2

Vai-se apresentar, agora, o elo tipo 2 (Vide figura 6.52) também com juntas rotacionais.

No elo tipo dois, percebe-se que há um deslizamento sobre o eixo z .

Deste modo, tem-se os seguintes dados:

- $d_n \neq 0$;
- $l_n \neq 0$;
- θ_n e θ_{n+1} variáveis;

- $\alpha_n = 0$

No elo tipo 3 há um detalhe que dá-se o nome de torção (Vide figura 6.53). No elo tipo 3, os eixos das juntas rotacionais são ortogonais, ou seja, o ângulo de torção é -90° .

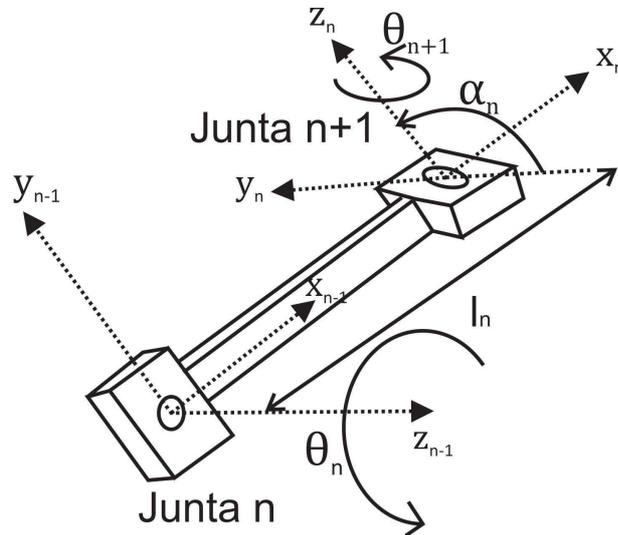


Figura 6.53: Elo tipo 3

Assim, os dados deste tipo de elo, são:

- $d_n = 0$;
- $l_n \neq 0$;
- θ_n e θ_{n+1} variáveis;
- $\alpha_n = -90^\circ$

Um outro tipo de elo é o que possui de um lado uma junta torcional e do outro uma junta rotacional (Vide figura 6.54).

Os dados do elo tipo quatro são os seguintes:

- $d_n \neq 0$;
- $l_n = 0$;
- θ_n variável;
- $\alpha_n = 90^\circ$

Há, também, um elo que possui de um lado uma junta prismática e do outro uma junta rotacional (Vide figura 6.55).

As informações desse tipo de elo, são:

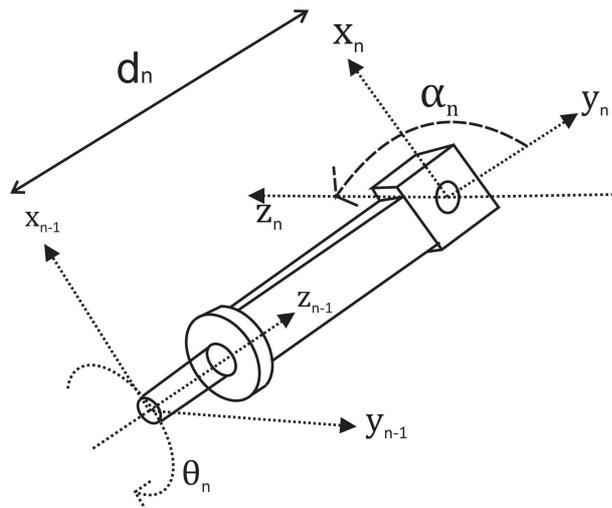


Figura 6.54: Elo tipo 4

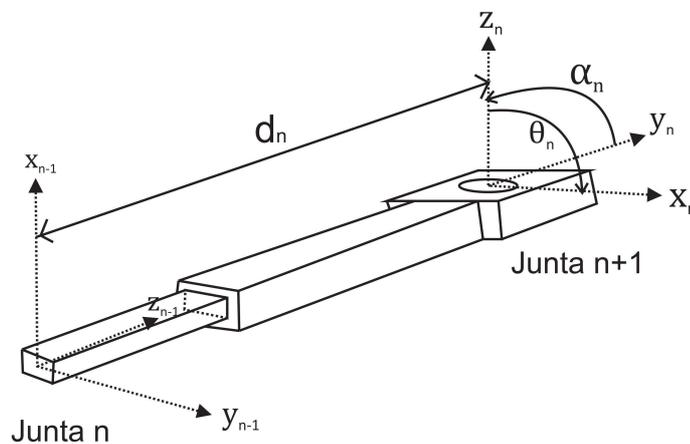


Figura 6.55: Elo tipo 5

- $d_n \neq 0$ (variável);
- $l_n = 0$;
- $\theta_n = 90^\circ$;
- $\alpha_n = 90^\circ$

Há, também, outros tipos de elos, cuja geometria pode ser gerada a partir das combinações das informações anteriores. Por isso, essas citadas anteriormente, são consideradas algumas das principais.

Dos parâmetros analisados, é óbvio que nem todos são constantes, pois caso contrário, o manipulador ficaria imóvel.

Se a junta for rotacional a variável é o ângulo θ_i , se a junta for prismática a variável é o deslocamento d_i da junta, isto é, a distância entre os elos.

6.4 Matriz associada a um elo l_i

Vai-se, agora, associar a cada elo do manipulador uma matriz de uma transformação. Essa transformação deve associar cada elo l_i e a junta i com o referencial gerado $i + 1$.

Essa transformação num elo l_i pode ser decomposta em quatro transformações elementares.

Para as duas primeiras deve-se lembrar que o eixo z de cada referencial deve coincidir com o eixo da junta z_{i-1} e que há uma translação longitudinal sobre o eixo x_{i-1} com valor igual ao comprimento do elo, pois o eixo x possui alinhamento com o mesmo.

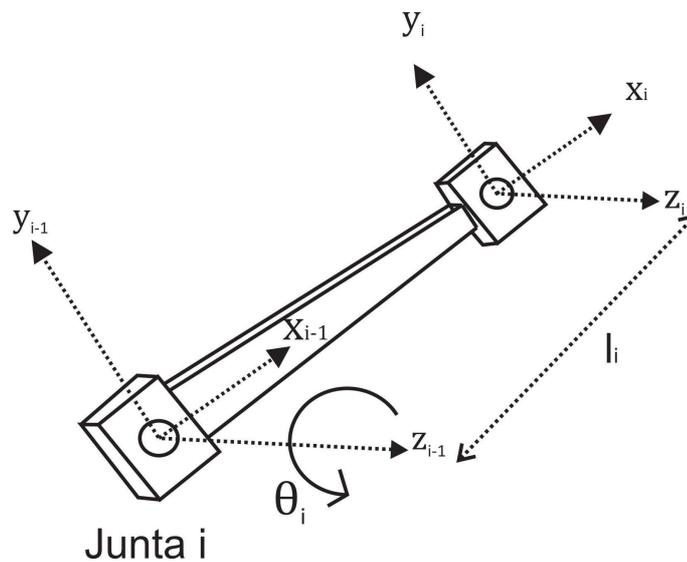


Figura 6.56: Transformações em cada elo

Desse modo, as duas primeiras transformações elementares são a rotação de um ângulo θ_i em torno do eixo z_{i-1} da junta i e a segunda é justamente a translação longitudinal de comprimento l_i , ao longo do eixo x_{i-1} .

A terceira transformação elementar é o deslocamento ou deslizamento sobre o eixo z_i no valor d_i , que é o afastamento entre as juntas e a quarta é a torção de um ângulo α_i que é dado pela rotação em torno do eixo longitudinal x_i do elo l_i .

Daí, pode-se enumerar as transformações em cada elo da seguinte forma:

1. Rotação de um ângulo θ_i em torno de z_{i-1} ;
2. Translação de comprimento l_i ao longo de x_i ;
3. Translação transversal de comprimento d_i ao longo de z_i ;
4. Rotação de um ângulo α_i em torno do eixo x_i .

Denotar-se-a por ${}^{i-1}A_i$ a matriz associada a cada elo e que relaciona os referenciais $i - 1$ e i representados nele.

Portanto, a matriz ${}^{i-1}A_i$, é:

$${}^{i-1}A_i = Rot(z, \theta_i) Trans(l_i, 0, 0) Trans(0, 0, d_i) Rot(x, \alpha_i)$$

A partir de agora, para nível de praticidade denotar-se-á cos por C e sen por S .

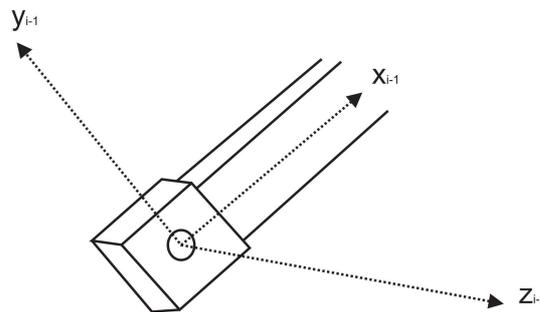
$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & l_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & l_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lembrando-se que um manipulador industrial é constituído de “ $n + 1$ ” membros contados a partir da base, que é considerada o membro 0 (Zero), interligadas por “ n ” juntas de modo que a junta de número i interliga o membro (Elo) de número i ao de número $i - 1$. Deve-se atribuir sistemas de coordenadas a cada membro da cadeia cinemática do robô.

Convencionalmente, o eixo x_{i-1} se estende sobre o elo i , o eixo z_{i-1} deve se localizar paralelo ao eixo da junta e o eixo y_{i-1} é localizado pela regra da mão direita.



Junta i

Figura 6.57: Atribuição de sistemas de coordenadas

Para se atribuir os sistemas de coordenadas aos elos, deve-se colocar o manipulador na posição 0 (Zero), que é uma posição conhecida, o que se traduz em algo muito conveniente.

Depois deve-se determinar as matrizes ${}^{i-1}A_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, associadas aos membros.

Agora, para se determinar a posição e orientação da ferramenta de trabalho do manipulador pode-se seguir dois procedimentos, percorre-se os membros do manipulador considerando-se todas as transformações sucessivas nos sistemas de coordenadas que se atribuiu em cada membro, o que pode ser obtido pelo produto de todas as matrizes ${}^{i-1}A_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ou seja, ${}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdots {}^{n-2}A_{n-1} \cdot {}^{n-1}A_n$ ou simplesmente vai-se do sistema da base até o sistema associado à ferramenta de trabalho, localizada na extremidade livre do último membro, através da matriz de coordenadas homogêneas 0T_n .

Desse modo, tem-se a igualdade:

$${}^0T_n = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdots {}^{n-2}A_{n-1} \cdot {}^{n-1}A_n$$

Essa igualdade fornece as seguintes informações:

- A componente de rotação da matriz 0T_n traduz os vetores de orientação da ferramenta de trabalho do manipulador em função dos ângulos definidos pelas juntas;
- A componente de translação de 0T_n traduz a localização no espaço da ferramenta de trabalho.

Portanto, a matriz 0T_n é a matriz que apresenta a cinemática direta de um manipulador industrial, ou seja, a posição e a orientação da ferramenta de trabalho do robô.

Recordando-se o caso do manipulador planar 2 DOF, da seção 5.3, pode-se obter as equações de sua cinemática utilizando-se as matrizes ${}^{i-1}A_i$.

Inicialmente, deve-se atribuir os sistemas de coordenadas e depois construir as matrizes ${}^{i-1}A_i$, $i \in \{1, 2\}$.

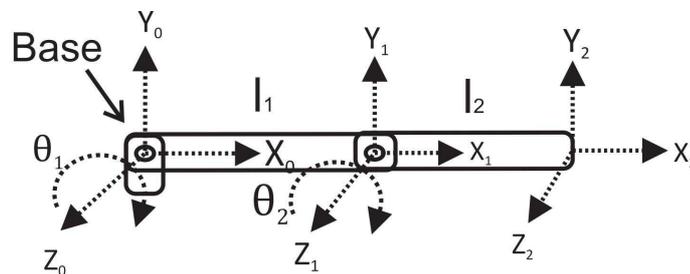


Figura 6.58: Atribuição de sistemas de coordenadas 2 DOF

Para o elo de número 1, tem-se $\theta = \theta_1$, $\alpha = 0$, $l = l_1$ e $d_1 = 0$.

Para o elo de número 2, as relações são $\theta = \theta_2$, $\alpha = 0$, $l = l_2$ e $d_2 = 0$.

Com isso, obtêm-se as matrizes:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C_0 & S\theta_1 S_0 & l_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C_0 & -C\theta_1 S_0 & l_1 S\theta_1 \\ 0 & S_0 & C_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & l_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & l_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C_0 & S\theta_2 S_0 & l_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C_0 & -C\theta_2 S_0 & l_2 S\theta_2 \\ 0 & S_0 & C_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & l_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & l_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí, a matriz 0T_2 da transformação procurada é obtida pelo produto de 0A_1 por 1A_2 .

$${}^0T_2 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2$$

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & l_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & l_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & l_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & l_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_1 C\theta_2 - S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_2 - S\theta_1 C\theta_2 & 0 & l_2 C\theta_1 C\theta_2 - l_2 S\theta_1 S\theta_2 + l_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 C\theta_2 + C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 S\theta_2 + C\theta_1 C\theta_2 & 0 & l_2 C\theta_2 S\theta_1 + l_2 S\theta_2 C\theta_1 + l_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} C(\theta_1 + \theta_2) & -S(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_2 C(\theta_1 + \theta_2) + l_1 C\theta_1 \\ S(\theta_1 + \theta_2) & C(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_2 S(\theta_1 + \theta_2) + l_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Percebe-se que a componente de translação da matriz de coordenadas homogêneas fornece o mesmo resultado obtido na seção 5.3.

Na situação a seguir analisar-se-á um robô não-planar de 2 DOF, ou seja, um manipulador com dois graus de liberdade.

Nesse caso, há uma possibilidade de rotação do elo 2 em relação à base.

Atribuir-se-á os sistemas de coordenadas aos elos como se fez no caso anterior (Vide figura 6.60):

Agora, deve-se analisar as informações para cada elo.

Para o elo 1, tem-se $\theta = \theta_1$, $\alpha = 90^\circ$, $l = 0$ e $d = l_1$.

Já, para o elo 2, vem que $\theta = \theta_2$, $\alpha = 0^\circ$, $l = l_2$ e $d = 0$.

Deve-se, agora, determinar as matrizes para cada um dos elos, 0A_1 e 1A_2 .

Como a matriz que relaciona os referenciais em cada elo é a matriz

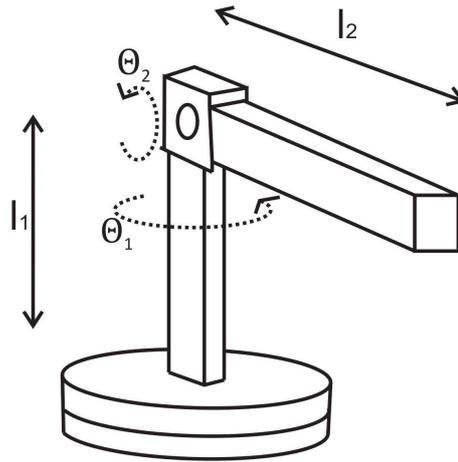


Figura 6.59: Esquema de manipulador não-planar 2-DOF

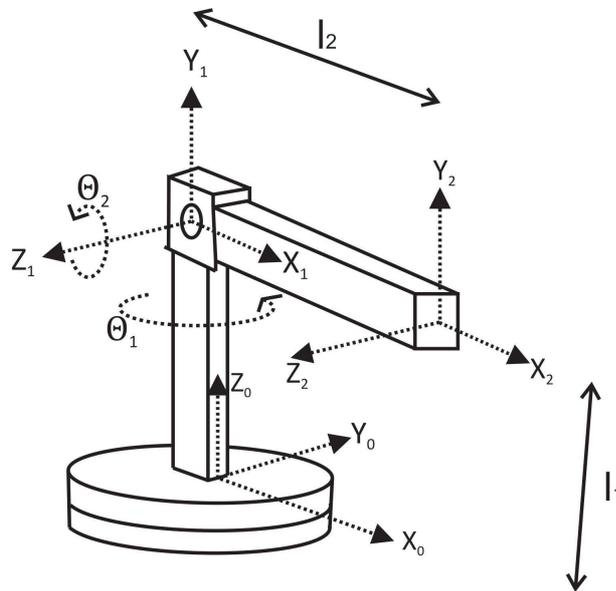


Figura 6.60: Atribuição de sistemas de coordenadas

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & l_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & l_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ tem-se que:}$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C(90) & S\theta_1 S(90) & l_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C(90) & -C\theta_1 S(90) & l_1 S\theta_1 \\ 0 & S(90) & C(90) & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C(0) & S\theta_2 S(0) & l_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C(0) & -C\theta_2 S(0) & l_2 S\theta_2 \\ 0 & S(0) & C(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & l_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & l_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz que fornece a cinemática direta do manipulador não-planar 2-DOF, é ${}^0T_2 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2$:

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & l_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & l_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & l_2 C\theta_2 C\theta_1 \\ S\theta_1 C\theta_2 & -S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_1 & l_2 C\theta_2 S\theta_1 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & l_2 S\theta_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No próximo exemplo analisar-se-á um manipulador muito utilizado denominado ROBÔ SCARA (Vide figura 6.61). Esse manipulador possui 4 graus de liberdade, onde 3 juntas são rotacionais e uma é prismática. Geralmente a junta rotacional do punho se localiza depois da junta prismática.



Figura 6.61: Manipulador SCARA

O esquema do robô SCARA está na figura 6.62. Agora, deve-se atribuir os sistemas de coordenadas às juntas e elos (figura 6.63).

Perceba, pelo esquema da figura 6.63, que os elos l_1 e l_2 podem ser tratados como um só elo. Isso faz com que os cálculos sejam simplificados.

Dessa forma, colocando-se o manipulador na posição 0 (zero), ou seja, numa posição conhecida e conveniente, tem-se que:

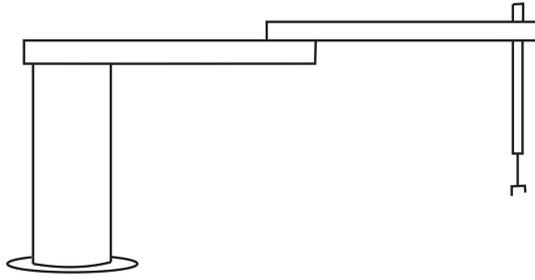


Figura 6.62: Esquema de manipulador SCARA

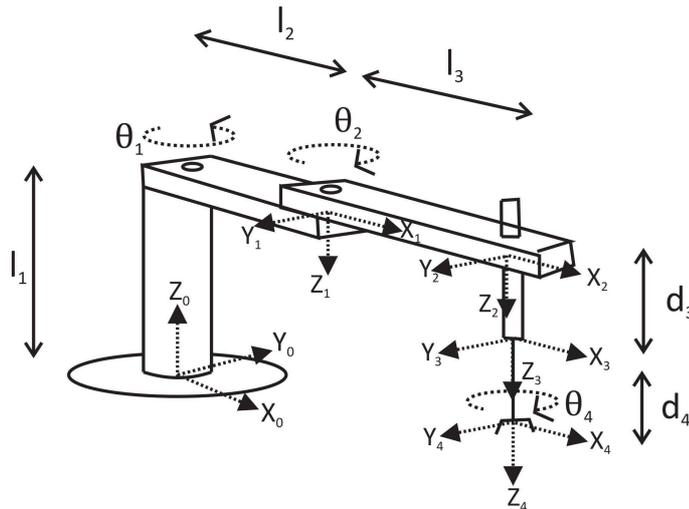


Figura 6.63: Atribuição de sistemas de coordenadas

- Para o elo $L_1 = (l_1 + l_2)$, $\theta = \theta_1$, $\alpha = 180^\circ$, $l = l_2$ e $d = l_1$;
- Para o elo $L_2 = l_3$, $\theta = \theta_2$, $\alpha = 0^\circ$, $l = l_3$ e $d = 0$;
- Para o elo $L_3 = l_4$, $\theta = 0$, $\alpha = 0^\circ$, $l = 0$ e $d = d_3$;
- Para o elo L_4 , tem-se $\theta = \theta_4$, $\alpha = 0^\circ$, $l = 0$ e $d = d_4$.

Agora, deve-se contruir as matrizes ${}^{i-1}A_i$, associadas aos elos.

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C(180) & S\theta_1 S(180) & l_2 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C(180) & -C\theta_1 S(180) & l_2 S\theta_1 \\ 0 & S(180) & C(180) & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & l_2 C\theta_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & l_2 S\theta_1 \\ 0 & 0 & -1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C(0) & S\theta_2 S(0) & l_3 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C(0) & -C\theta_2 S(0) & l_3 S\theta_2 \\ 0 & S(0) & C(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & l_3 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & l_3 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} C(0) & -S(0)C(0) & S(0)S(0) & 0 \cdot C(0) \\ S(0) & C(0)C(0) & -C(0)S(0) & 0 \cdot S(0) \\ 0 & S(0) & C(0) & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4C(0) & S\theta_4S(0) & 0 \cdot C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4C(0) & -C\theta_4S(0) & 0 \cdot S\theta_4 \\ 0 & S(0) & C(0) & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & 0 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí, a matriz que traduz a cinemática direta do robô SCARA, é ${}^0T_4 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4$:

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & l_2C\theta_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & l_2S\theta_1 \\ 0 & 0 & -1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & l_3C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & l_3S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & 0 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} C(\theta_1 - \theta_2 - \theta_4) & S(\theta_1 - \theta_2 - \theta_4) & 0 & l_2C\theta_1 + l_3C(\theta_1 - \theta_2) \\ S(\theta_1 - \theta_2 - \theta_4) & -C(\theta_1 - \theta_2 - \theta_4) & 0 & l_2S\theta_1 + l_3S(\theta_1 - \theta_2) \\ 0 & 0 & -1 & l_1 - d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No caso em que o manipulador está na posição em que os ângulos $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = \theta_4 = 0$ e as medidas $d_3 = d_4 = 0$ a matriz 0T_4 fica da seguinte forma:

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} C(90) & S(90) & 0 & l_2C(90) + l_3C(90) \\ S(90) & -C(90) & 0 & l_2S(90) + l_3S(90) \\ 0 & 0 & -1 & l_1 - 0 - 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & l_2 + l_3 \\ 0 & 0 & -1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da matriz obtida, pode-se extrair que a orientação a orientação da ferramenta de trabalho do manipulador é dada pelos vetores coluna da porção da matriz destinada à rotação, ou seja, OX_4 tem a orientação do vetor $(0, 1, 0)$, OY_4 tem a orientação do vetor $(1, 0, 0)$ e OZ_4 tem a orientação do vetor $(0, 0, -1)$ e a posição da ferramenta do manipulador está localizada no espaço pela extremidade do vetor $(0, l_2 + l_3, l_1)$.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de matemática está muito dinâmico. Todos os dias surgem novos mecanismos tais como simuladores, geradores de gráficos, etc. No entanto, percebe-se que a cada dia o discente fica mais curioso em relação às aplicações do que estuda.

Os cursos técnicos tem tido grande expansão e a necessidade de novas ferramentas e técnicas para o ensino se fazem necessárias.

Nessa busca por um ensino que satisfaça às necessidades dos alunos dos ensinos técnicos e tecnológicos, a matemática aplicada aparece como um grande e relevante mecanismo de ensino.

Na matemática aplicada o aluno tem a oportunidade de saber onde aquilo que é seu objeto de estudo pode ser empregado.

REFERÊNCIAS

- [1] MITTAL, R. K. **Robotics and Control**, 5.ed, Índia: Tata McGraw, 2003, 486p.
- [2] SECCHI, Humberto Alejandro. **Uma introdução aos robôs móveis**. [S.l.]: W. P. Content, 2012. Disponível em: <http://www.obr.org.br/wp-content/uploads/2013/04/Uma_Introducao_aos_Robos_Moveis.pdf> Acesso em: 21 fev. 2014.
- [3] SICILIANO, Bruno. **ROBOTICS: Modelling, planning and control**. 1.ed. London: Springer, 2009, 632p.
- [4] SELIG, J. M. **Introductory Robotics**. 1. ed. Prentice Hall International, 1992, 152p.
- [5] SANTOS, V. M. F. **Robótica Industrial**. Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro, 2003. Disponível em: <<http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/silas/materiais/RoboticaIndustrial.pdf>> Acesso em: 10 fev. 2014.
- [6] CRAIG, Jonh J. **INTRODUCTION TO ROBOTICS: Mechanics and Control**. 3.ed. USA: Prentice Hall, 2005, 400p.