

APLICAÇÃO DA GEOMETRIA, ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA  
ANALÍTICA NO ESTUDO DE POLIEDROS: REPRESENTAÇÃO 3D E  
TRANSFORMAÇÕES

**LUIZ HENRIQUE ZEFERINO**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE  
DARCY RIBEIRO – UENF  
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ  
MAIO DE 2014

**LUIZ HENRIQUE ZEFERINO**

**APLICAÇÃO DA GEOMETRIA, ÁLGEBRA LINEAR E  
GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESTUDO DE  
POLIEDROS: REPRESENTAÇÃO 3D E  
TRANSFORMAÇÕES**

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientadora: Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF  
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

MAIO DE 2014

## FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT / UENF**

**28/2014**

Zeferino, Luiz Henrique

Aplicação da geometria, álgebra linear e geometria analítica no estudo de poliedros: representação 3D e transformações / Luiz Henrique Zeferino. – Campos dos Goytacazes, 2014.

xiii, 72 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2014.

Orientador: Liliana Angelina León Mescua.

Área de concentração: Geometria e topologia.

Bibliografia: f. 69-70.

1. POLIEDROS 2. TRUNCADURA 3. ÁLGEBRA LINEAR 4. POLIEDROS - TRANSFORMAÇÕES I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 516.15

**LUIZ HENRIQUE ZEFERINO**

**APLICAÇÃO DA GEOMETRIA, ÁLGEBRA LINEAR E  
GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESTUDO DE  
POLIEDROS: REPRESENTAÇÃO 3D E  
TRANSFORMAÇÕES**

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Aprovada em 05 de Maio de 2014.

---

**Prof. Ricardo E. Fuentes Apolaya**  
D.Sc. - UFF

---

**Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre**  
D.Sc. - UENF

---

**Prof. Geraldo de Oliveira Filho**  
D.Sc. - UENF

---

**Liliana Angelina León Mescua**  
D.Sc. - UENF  
(ORIENTADORA)

*À minha sogra Elisa e ao meu sogro Floriano.*

# Agradecimentos

A Deus por permitir que eu tivesse a oportunidade de desenvolver este trabalho.

A meus familiares, especialmente meu filho e minha esposa, pelo apoio e pela compreensão.

A todos os professores, colegas de mestrado e alunos que ajudaram na minha caminhada.

# Resumo

Este trabalho apresenta aspectos teóricos e práticos da transformação de um poliedro dado originando um poliedro derivado, bem como suas aplicações na teoria e no mundo real. Inúmeras figuras produzidas através de simulação de truncamento são apresentadas para melhor esclarecimento do texto desenvolvido. Exemplos de assuntos discutidos são: matrizes, vetores, seções aleatórias de um poliedro por inúmeros planos, aplicações de poliedros no mundo real e a construção física de poliedros convexos e poliedros estrelados. Aspectos do método de ensino e aprendizagem desenvolvido e empregado em sala de aula e sua importância também são apresentados.

**Palavras-chaves:** Poliedros, Truncadura, Álgebra Linear, Transformações.

# Abstract

This dissertation presents the general aspects of the transformation of a given polyhedron yielding a derivative polyhedron, as well as examples of their applications in the theory and the real world. Numerous figures produced by simulation truncation are presented to better clarify the text developed. Examples of topics discussed are: matrices, vectors, random sections of a polyhedron by numerous plans, polyhedra real world applications and physical construction of convex polyhedra and starry polyhedra. Aspects of the method of teaching and learning developed and used in the classroom and its importance room are also presented.

**Key-words:** Polyhedra, Truncation, Linear Algebra, Transformations.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Poliedros de Platão e suas associações com os cinco elementos aos quais se associam. . . . .	15
Figura 2 – Poliedros de Kepler-Poinsot, construção de Zeferino (2013). . . . .	15
Figura 3 – (a) Elaborando o chassi (poliedro) do carro UENF-PROFMAT-LCMAT no modelador gratuito Misfit Model 3D; (b) O carro UENF-PROFMAT-LCMAT já com textura e em ação. . . . .	16
Figura 4 – Poliedros montados por Zeferino (de 1999 a 2014) com trabalhos artísticos de M. C. Escher. . . . .	17
Figura 5 – Poliedros de Kepler-Poinsot, construção de Zeferino (2012 e 2014). . . . .	18
Figura 6 – Classificação das Superfícies (RANGEL, 1983). . . . .	23
Figura 7 – Esboço em perspectiva dos nove poliedros regulares existentes (RANGEL, 1983). . . . .	26
Figura 8 – Poliedros regulares (RANGEL, 1983). . . . .	27
Figura 9 – Curso de atualização de professores de Matemática (ZEFERINO, 2001). . . . .	27
Figura 10 – Poliedros estrelados construídos com papel cartão e auxílio computacional Zeferino (período de 1999 a 2014). . . . .	28
Figura 11 – Poliedros semirregulares (RANGEL, 1983). . . . .	29
Figura 12 – Poliedros convexos regulares e semirregulares construídos com papel cartão e auxílio computacional, Zeferino (1999 a 2014). . . . .	30
Figura 13 – Esboço em perspectiva dos treze tipos de poliedros semirregulares individuais equiangulares existentes (RANGEL, 1983). . . . .	31
Figura 14 – Classificação geral dos poliedros (RANGEL, 1983). . . . .	33
Figura 15 – Três instantes de transformação contínua esfera-cubo com massa de modelar (aproximação). . . . .	34

Figura 16 – (a) Cubo truncado à distância $d$ no vértice A; (b) Cubo truncado à distância $d$ por plano paralelo à aresta AE. . . . .	35
Figura 17 – Cubo de aresta $a$ truncado à distância $d$ nos vértices. Exemplos de valores tais que $0 \leq d \leq 0,5a$ . . . . .	36
Figura 18 – O software desenvolvido apresentando o icosaedro truncado - um poliedro bem conhecido no único país pentacampeão mundial de futebol... . . . .	36
Figura 19 – (a) Um poliedro genérico truncado no vértice A. (b) Esquematização do problema através do uso de vetores. . . . .	37
Figura 20 – Truncaduras com: (a) tetraedro; (b) octaedro; (c) icosaedro e dodecaedro. . . . .	39
Figura 21 – (a) Poliedro truncado por três arestas; (b) e (c) Esquematização do problema com emprego de vetores. . . . .	40
Figura 22 – (a) Cubo truncado pelas arestas; (b) cubo ou octaedro truncado pelas arestas e vértices; (c) dodecaedro truncado pelas arestas; (d) dodecaedro ou icosaedro truncado pelas arestas e vértices. . . . .	41
Figura 23 – Código do programa computacional do raciocínio concretizado nas equações 2.1 e 2.3 (Zeferino, 2011) . . . . .	42
Figura 24 – Algumas seções de um cubo (DOLCE; POMPEO, 1985). . . . .	43
Figura 25 – (a) um corpo em queda livre (translação); (b) após impacto o corpo apresenta elasticidade; (c) após impacto o corpo se comporta como uma capa; (d) após impacto o corpo se comporta de maneira quebradiça (descontinuidade). Adaptado de Grange (2004) . . . . .	44
Figura 26 – Exemplo de importância dos poliedros na Química (BRASIL, 2006). . . . .	47
Figura 27 – Como construir o modelo da molécula $C_{60}$ (BRASIL, 2006). . . . .	48
Figura 28 – Exemplo de nanotubo (BRASIL, 2006). . . . .	49
Figura 29 – Uma organização dos temas e suas unidades correspondentes a visão, em uma situação de 4 aulas semanais, trabalhando concomitantemente os temas estruturadores, proposta por (BRASIL, 1998)). . . . .	50
Figura 30 – A página da SEEDUC-RJ “Conexão Professor” de acesso aos Currículos Mínimos de Matemática (SEEDUC-RJ, 2014). . . . .	51
Figura 31 – O Currículo Mínimo de Matemática da segunda série do Ensino Médio (SEEDUC-RJ, 2014). . . . .	52
Figura 32 – A página da SEEDUC-RJ “Conexão Professor” de acesso aos Conteúdos Pedagógicos dos Currículos Mínimos de Matemática (SEEDUC-RJ, 2014). . . . .	53

Figura 33 – A Conceituação auxiliada por recursos computacionais e lousa interativa. . .	57
Figura 34 – A construção de poliedros em sala de aula por alunos do Ensino Médio. . .	58
Figura 35 – O resultado obtido com alunos do Ensino Médio. . . . .	59
Figura 36 – Folha de exercícios de (MACHADO, 1990). . . . .	60
Figura 37 – Exemplo de planificação produzida em editor de texto e impressa. . . . .	61
Figura 38 – Exemplo de desafio proposto aos alunos. . . . .	62
Figura 39 – Simulando o aumento de número de lados da base de um prisma reto. . . .	63
Figura 40 – Simulador de seções de um cubo com os respectivos parâmetros. . . . .	64
Figura 41 – Simulador de seções de cubos imersos num fluido. Adaptado de Grange (2004) . . . . .	65
Figura 42 – As componentes para o ensino e aprendizagem de Poliedros. . . . .	66

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores dos vértices para o exemplo de truncadura proposto. . . . . 38

# Sumário

Introdução . . . . .	14
<b>1</b> <b>CONCEITOS FUNDAMENTAIS</b> . . . . .	<b>19</b>
1.1 <b>Conceitos Importantes</b> . . . . .	19
1.1.1 <b>Superfícies</b> . . . . .	19
1.1.2 <b>Superfície Fechada e Superfície Aberta</b> . . . . .	20
1.1.3 <b>Interior e Exterior de uma Superfície</b> . . . . .	21
1.1.4 <b>Corpo</b> . . . . .	21
1.1.5 <b>Lado de uma Superfície</b> . . . . .	21
1.1.6 <b>Forma de uma Superfície</b> . . . . .	21
1.1.7 <b>Seção Plana em uma Superfície (Truncadura)</b> . . . . .	22
1.2 <b>Classificação das Superfícies</b> . . . . .	22
1.3 <b>Poliedros</b> . . . . .	23
<b>2</b> <b>MATRIZES, VETORES E TRANSFORMAÇÕES DE POLI-</b> <b>EDROS</b> . . . . .	<b>34</b>
2.1 <b>Apresentação</b> . . . . .	34
2.2 <b>Uma aplicação de vetores e matrizes no <math>\mathbb{R}^3</math></b> . . . . .	37
<b>3</b> <b>PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO</b> <b>MÉDIO BRASILEIROS (PCNEM) E O CURRÍCULO MÍ-</b> <b>NIMO</b> . . . . .	<b>46</b>
3.1 <b>Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio Brasileiros.</b> . . . .	46
3.2 <b>Currículo Mínimo de Matemática quanto ao tópico Poliedros.</b> . . . .	51
<b>4</b> <b>EM SALA DE AULA</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1 <b>A Teoria e a Experimentação</b> . . . . .	57
4.2 <b>No Laboratório de Informática</b> . . . . .	61

Conclusão . . . . .	67
Referências . . . . .	69
<b>ANEXOS</b>	<b>71</b>
ANEXO A – CD-ROM . . . . .	72

# Introdução

A geometria sólida, ou seja, a geometria dos objetos tridimensionais - tornou-se necessária logo que os seres humanos começaram a criar qualquer coisa mais complexa do que uma simples barraca (quando a tentativa e erro e não a matemática podia ser suficiente). Um exemplo da geometria sólida (ROONEY, 2012) e que foi um dos três problemas enfrentados pelos matemáticos clássicos gregos, encontrar o dobro de um cubo.

Problemas de geometria sólida estão relacionados com a medida de dimensões ou volume de uma forma tridimensional. O volume medido não precisa ser o de um sólido; é bem provável que os primeiros usos da geometria sólida se relacionavam com as medidas de capacidade bem como cálculo de dimensões de edifícios. Alguns dos problemas nos textos babilônios e egípcios se relacionavam ao cálculo do volume de celeiros e pirâmides (ROONEY, 2012).

Antes de começar a trabalhar em uma pirâmide, os construtores egípcios ou maias tinham que calcular seu volume para saber a quantidade exata de pedras que por simplicidade de construção eram aproximadamente cúbicas ou paralelepipedais.

Ao longo da história do homem civilizado podemos observar a importância e a admiração do ser humano, especialmente os matemáticos, pelos poliedros (FLOOD; WILSON, 2013; ROONEY, 2012)

Platão identificou os únicos cinco sólidos de faces planas poligonais, ou poliedros, com todas as faces iguais, cuja representação aparece na figura 1. Ele acreditava que os poliedros estavam associados à perfeição do universo (FLOOD; WILSON, 2013).

Embora se atribua a Platão a primeira descrição dos chamados poliedros platônicos, eles estão todos representados em esferas de pedra entalhadas com 4.000 anos de idade encontradas na Escócia (FLOOD; WILSON, 2013; ROONEY, 2012).

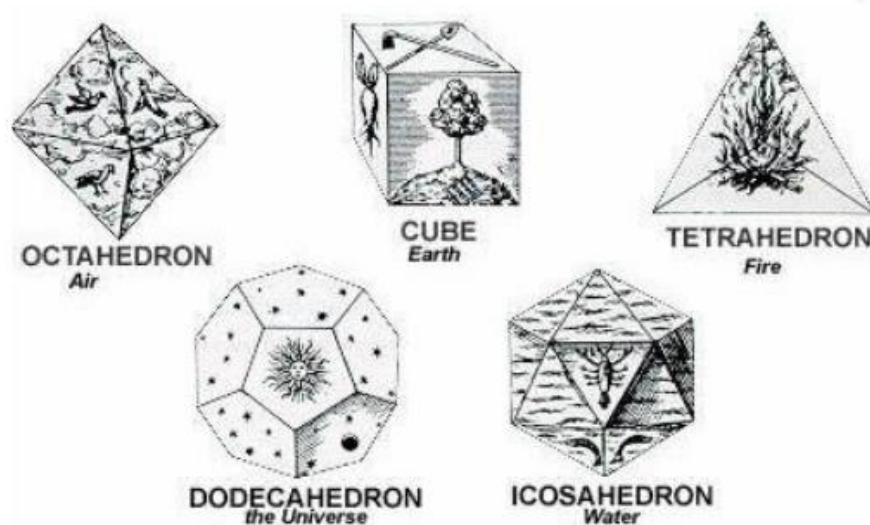


Figura 1 – Poliedros de Platão e suas associações com os cinco elementos aos quais se associam.

O grande matemático neoplatônico alemão Johannes Kepler (1571-1630) tem seu nome associado aos poliedros estrelados, os poliedros de Kepler-Poinsot (FLOOD; WILSON, 2013), cujos exemplos aparecem na figura 2.

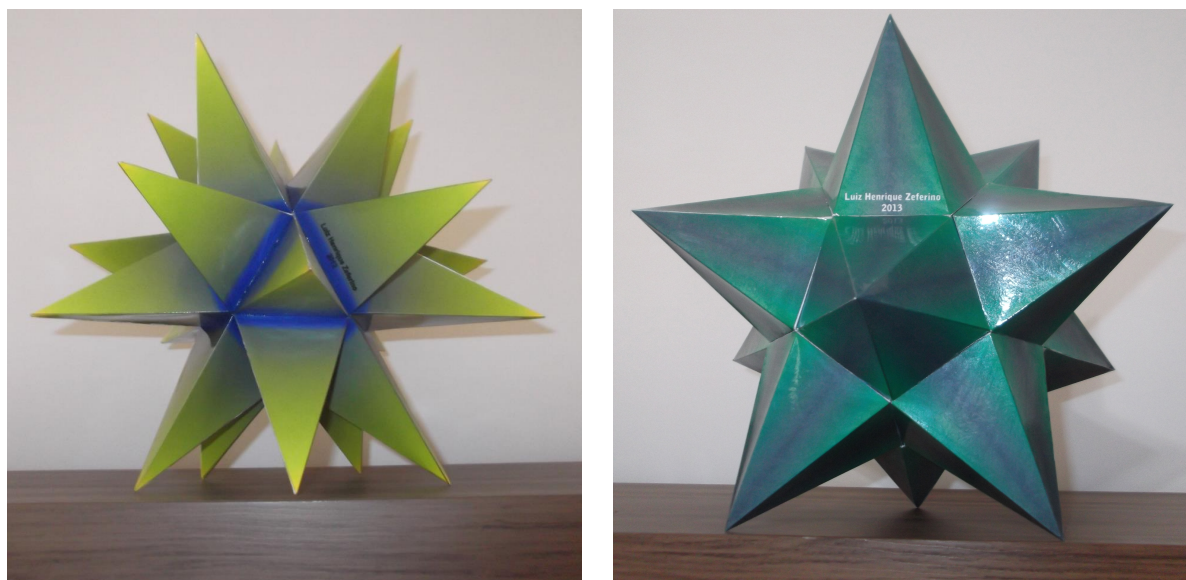
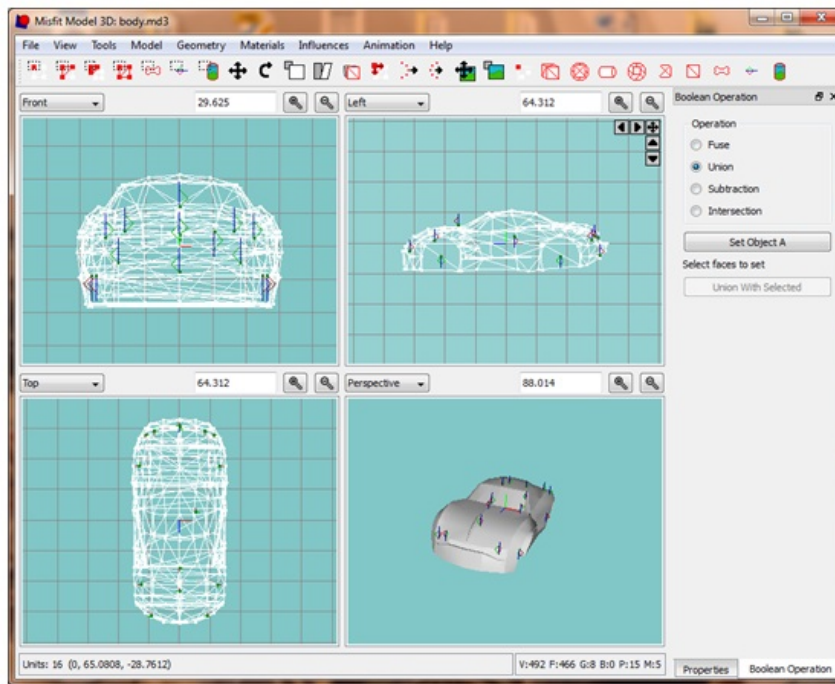


Figura 2 – Poliedros de Kepler-Poinsot, construção de Zeferino (2013).

No contexto da Educação, quando um estudante depara com um conteúdo novo ele pergunta: “Para que serve isso?” ou “Onde vou usar isso”. Existem inúmeras utilidades práticas dos poliedros. Podemos citar as simulações em computadores de veículos. Na computação



gráfica, os objetos tridimensionais são poliedros, até mesmo a roda do carro é um poliedro com um número muito grande de faces. A figura 3 apresenta isso de maneira bem clara.



(a)



(b)

Figura 3 – (a) Elaborando o chassi (poliedro) do carro UENF-PROFMAT-LCMAT no modelador gratuito Misfit Model 3D; (b) O carro UENF-PROFMAT-LCMAT já com textura e em ação.

Outro exemplo muito admirado, não só pelos matemáticos, é o de poliedros que são decorados com obras de Maurits Cornelis Escher, artista gráfico holandês (1898–1972). A figura 4 ilustra alguns desses exemplos.



Figura 4 – Poliedros montados por Zeferino (de 1999 a 2014) com trabalhos artísticos de M. C. Escher.

Os poliedros aparecem, também, nas engenharias, arquitetura, biologia, química. O enfoque aqui assumido é na Matemática.

Neste trabalho é mostrada uma aplicação de vetores e matrizes no espaço  $\mathbb{R}^3$ . Também, mostram-se resultados da utilização dessa aplicação através da implementação de softwares que foram desenvolvidos, pelo autor deste trabalho e outros softwares, para serem utilizados como ferramenta auxiliar no ensino de Matemática. Mostra-se o ensino de poliedros, mais precisamente com o ensino da transformação (por seções convenientes através de planos) de um poliedro primitivo em um poliedro derivado. O estudo realizado, envolverá, também, a solução de sistemas lineares e a determinação dos pontos que definem o envoltório convexo da seção plana de corte de um poliedro (conjunto dos pontos solução destes sistemas lineares

para a determinação de polígonos convexos de seções de poliedros por planos).

A presente dissertação está dividida em cinco capítulos, além da presente introdução, organizados da seguinte forma:

O primeiro capítulo trata dos conceitos fundamentais de Geometria necessários para o desenvolvimento desse trabalho.

O capítulo dois trata de Matrizes, Vetores e Transformações de Poliedros, sendo apresentados softwares empregados no desenvolvimento da proposta.

O capítulo três trata dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio Brasileiros (PCNEM) e o Currículo Mínimo proposto pela Secretaria de Estado de Educação no Rio de Janeiro referente ao ensino de poliedros.

O capítulo quatro trata de considerações sobre o ensino de Matemática e da metodologia empregada nesse trabalho para o ensino de Poliedros, tanto no ensino da teoria, quanto em construções geométricas concretas, como a construção desses poliedros em trabalho de equipe e recursos computacionais podem facilitar enormemente a construção desses poliedros e manipulação de poliedros virtualmente.

E, ao final, são apresentadas as conclusões obtidas com o trabalho, seguidas pelas referências bibliográficas. Também há um CD-Rom com anexos e alguns dos produtos do trabalho.

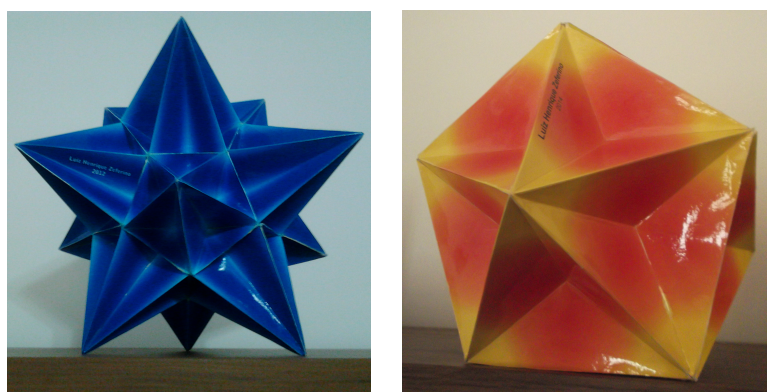


Figura 5 – Poliedros de Kepler-Poinsot, construção de Zeferino (2012 e 2014).

# Capítulo 1

## Conceitos Fundamentais

### 1.1 Conceitos Importantes

A seguir, apresentam-se alguns conceitos necessários para o desenvolvimento desse trabalho. Um conjunto mais amplo desses conceitos pode ser visto em ([RANGEL, 1983](#)).

#### 1.1.1 Superfícies

**Definição 1.1 (*Superfície de Monge*)** “*Superfície é o limite da extensão a três dimensões.*”

Essa definição permite algumas considerações que, em conclusão, também são aceitas como definição de superfície. Ter-se-ia, então:

- A. Superfície é a película sem espessura que separa duas regiões do espaço tridimensional.
- B. Superfície é o lugar geométrico dos pontos comuns a duas regiões tridimensionais.
- C. Superfície é o lugar geométrico das posições sucessivas de uma linha que se move no espaço tridimensional.
- D. Superfície é toda extensão a duas dimensões.
- E. Superfície é todo lugar bidimensional.

Embora inúmeras vezes os termos área e superfície sejam empregados indiferentemente como sinônimos, a rigor, o termo área deve ser usado para indicar grandeza e o termo superfície, para indicar forma.

A lei de geração, também chamada lei de obtenção de uma superfície, é a imposição ou conjunto de imposições pré-definidas para se obter uma superfície perfeitamente determinada e inconfundível. Pode ser concebida, também, como a expressão matemática que traduz um lugar geométrico.

De modo geral, uma superfície admite mais de uma forma de geração. É apresentado abaixo um exemplo:

Leis de geração da esfera:

- a) a esfera é a superfície de equação:  $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$ ;
- b) a esfera é o lugar geométrico de todas as posições de um círculo, que gira em torno de um dos seus diâmetros, estando este fixo;
- c) a esfera é o lugar geométrico dos pontos do espaço tridimensional, equidistantes de um ponto fixo nesse espaço.

### 1.1.2 Superfície Fechada e Superfície Aberta

**Definição 1.2** *Superfície fechada é a que envolve total e unicamente um espaço tridimensional.*

Exemplos: esfera, cubo, toro etc.

**Definição 1.3** *Superfície aberta é a que não envolve total e unicamente um espaço tridimensional finito.*

Têm-se os seguintes casos:

- a) A superfície é ilimitada e apenas divide o espaço tridimensional em duas regiões. Exemplos: plano, parabolóide hiperbólico etc.
- b) A superfície é ilimitada, mas sua geração faz com que, em uma de suas partes, ela apenas divida o espaço tridimensional em suas regiões, mas há outra parte que limita um espaço tridimensional finito. Ex.: toda superfície de revolução onde a geratriz, além de ter pontos no infinito, tem também pontos comuns com o eixo. Exemplo: Cone de duas folhas de revolução.

- c) A superfície é limitada. Nesse caso, ela se apresenta, apenas, como um lugar bidimensional dentro de um espaço tridimensional. Exemplos: calota esférica; superfícies poliédricas abertas e finitas etc.

### 1.1.3 Interior e Exterior de uma Superfície

O volume finito que uma superfície fechada limita chama-se interior da superfície e o restante do espaço tridimensional chama-se exterior da superfície. Desta forma, só as superfícies fechadas admitem interior e exterior.

Claramente se trata de uma convenção da linguagem. Se uma superfície não tem espessura, não pode ter interior; entretanto, as expressões interior e exterior são usadas, apenas, por definição e como linguagem prática, para caracterizar espaços tridimensionais limitados pela superfície.

### 1.1.4 Corpo

No presente contexto, chama-se corpo qualquer espaço tridimensional finito. Desta forma, todo corpo é envolvido por uma superfície que o limita. Um corpo pode se apresentar sob um aspecto puramente geométrico ou admitir características físicas.

### 1.1.5 Lado de uma Superfície

Pela própria definição de superfície, vê-se que não tem sentido geométrico falar-se de lado de uma superfície; trata-se, apenas, de uma terminologia prática e um hábito de linguagem para caracterizar as posições dos pontos do espaço em relação a uma superfície.

### 1.1.6 Forma de uma Superfície

É a aparência externa da mesma; é o aspecto sob o qual a superfície se apresenta, aos olhos de um observador. Muitas vezes, o termo forma é usado como sinônimo de lei de geração. Ex.: a caixa tem a forma de um cubo; isto significa que a caixa tem a mesma geração que um cubo.

### 1.1.7 Seção Plana em uma Superfície (Truncadura)

É a figura obtida pela interseção de um plano com a superfície. Toda seção plana é uma figura plana comum ao plano e à superfície considerada. Todo plano que determina uma seção em uma superfície chama-se plano secante. As seções planas também são chamadas truncaduras.

## 1.2 Classificação das Superfícies

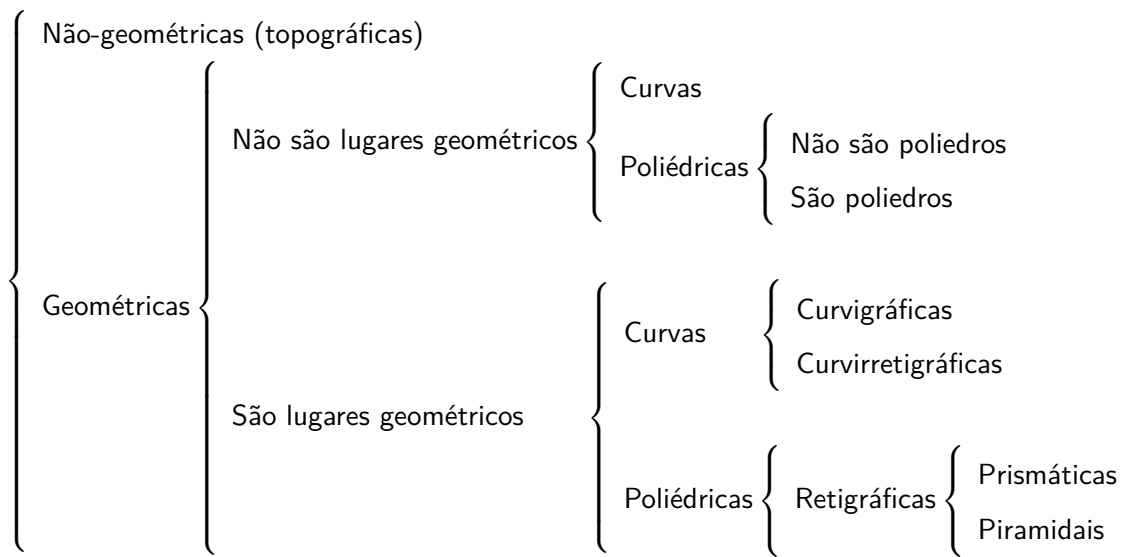
Basicamente, as superfícies são classificadas em não geométricas e geométricas.

Superfícies não geométricas são as que admitem lei de geração. Só podem ser concebidas quando mostradas ou representadas. Um caso clássico da superfície não geométrica é a superfície da Terra. Este grupo não admite subdivisão. Como a única superfície não geométrica que tem importância prática é a superfície topográfica, por hábito de linguagem, consideram-se os termos superfície não geométrica e superfície topográfica como sinônimos, embora, na realidade não o sejam.

Superfícies geométricas são as que admitem lei de geração. Não precisam ser mostradas nem representadas para serem concebidas.

A classificação geral das superfícies é apresentada na figura 6.

**Classificação das Superfícies**



Curvigráficas - geração pela curva: não admite geração pela reta.

Curvirretigráfica - geração pela curva ou pela reta.

Retigráfica - geração pela reta: não admite geração pela curva.

Figura 6 – Classificação das Superfícies (RANGEL, 1983).

Superfície curva é a figura geométrica que não pode ser concebida como formada planos (ou porções de planos).

Superfície poliédrica é a figura geométrica que pode ser concebida como formada por 3 (três) ou mais planos (ou porções de planos), tais que não haja mais de dois planos se interceptando segundo a mesma reta.

Quando uma superfície poliédrica é fechada, chama-se poliedro; portanto, poliedro é qualquer superfície poliédrica fechada.

Nas próximas seções serão apresentados conceitos e definições referentes a poliedros, especificamente.

### 1.3 Poliedros

**Definição 1.4** Poliedro é toda superfície poliédrica fechada. É, portanto a superfície que pode ser concebida como um conjunto de polígonos tais que cada lado de uma face pertence sempre,



e no máximo, a duas faces.

**Definição 1.5** *Face.* Nos poliedros convexos, a face de um poliedro é definida como o polígono que o limita; nos poliedros estrelados, entretanto, a face é definida como o polígono que em menor número o limita, pois se pode também considerar um poliedro estrelado limitado pelas facetar, que são os polígonos que compõem as faces, e são em número muito maior que as faces.

**Definição 1.6** *Faces Adjacentes (Também chamadas faces contíguas) de um poliedro.* São as que admitem uma aresta comum.

**Definição 1.7** *Aresta de um Poliedro.* É o lado comum a dois polígonos das faces.

**Definição 1.8** *Vértice de um Poliedro.* É o ponto comum às arestas do poliedro; os vértices das faces são, pois, os próprios vértices do poliedro.

**Definição 1.9** *Ângulo Diédrico.* É o ângulo formado por duas faces adjacentes do poliedro.

As arestas de um poliedro são, portanto, as arestas dos seus ângulos diédricos; logo. O número de ângulos diédricos de um poliedro é igual ao seu número de arestas

**Definição 1.10** *Ângulo Plano.* É o ângulo interno de cada face do poliedro.

Vê-se então que só em um poliedro regular é que todos os ângulos planos são iguais.

**Definição 1.11** *Ângulo Sólido (Também chamado ângulo poliédrico).* É o ângulo sólido cujo vértice é vértice do poliedro.

O número de ângulos sólidos de um poliedro é, portanto, igual ao número de seus vértices.

**Definição 1.12** *Diagonal de um Poliedro.* É o segmento de reta que tem extremos em dois vértices do poliedro, não situados na mesma face.

**Definição 1.13** *Plano Diagonal de um Poliedro.* É o plano definido por duas diagonais pertencentes ao mesmo vértice.

Pode também ser definido como o plano que contém três vértices não pertencentes à mesma face.

**Definição 1.14** *Gênero (Também chamado ordem de um poliedro). É o número de suas faces.*

**Definição 1.15** *Espécie de um Poliedro. Projetando-se a superfície de um poliedro desde um ponto do seu interior, de modo que as projetantes atravessem a superfície o mesmo número de vezes em todos os sentidos, esse número chama-se espécie do poliedro*

**Definição 1.16** *Poliedro Inscrito em Outro Poliedro. Diz-se que um poliedro está inscrito em outro, quando está totalmente no interior desse outro e tem todos os seus vértices no outro.*

Quando ambos os poliedros têm todos os seus vértices comuns dois a dois, diz-se que a inscrição é de primeira categoria.

**Definição 1.17** *Poliedro Circunscrito a Outro Poliedro. Diz-se que um poliedro está circunscrito a outro, quando está totalmente no exterior desse outro, tendo esse outro todos os seus vértices nele.*

Quando ambos os poliedros têm todos os seus vértices comuns dois a dois, diz-se que a circunscrição é de primeira categoria.

**Definição 1.18** *Poliedro Convexo e Poliedro Não-Convexo. Para se concluir se um poliedro é convexo, considera-se o seguinte: sabe-se que um plano divide o espaço tridimensional em duas regiões. Admita-se o poliedro em uma dessas regiões e verifique-se se o mesmo se mantém todo nessa região, qualquer que seja a face que pertença ao plano. Se isso acontecer, diz-se que o poliedro é convexo.*

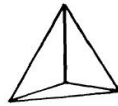
Conclui-se, então, que um poliedro é convexo quando não é cortado por qualquer dos planos de suas faces.

Quando um poliedro não é convexo, diz-se que ele é não convexo ou cruzado.

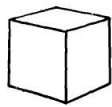
Alguns poliedros não convexos, devido às suas propriedades, são chamados poliedros estrelados.

**Definição 1.19** *Poliedro regular é o que tem todos os ângulos sólidos iguais entre si, bem como as faces. É fácil concluir que, em qualquer poliedro regular, as faces são polígonos regulares; as arestas são todas iguais; as diagonais são iguais; os ângulos diédricos são iguais.*

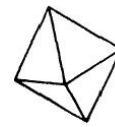
A figura 7: apresenta esses poliedros em perspectiva:



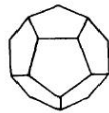
(a) Tetraedro



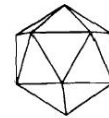
(b) Hexaedro ou cubo



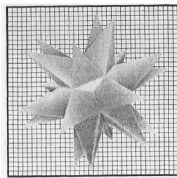
(c) Octaedro



(d) Dodecaedro

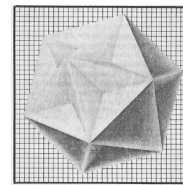


(e) Icosaedro

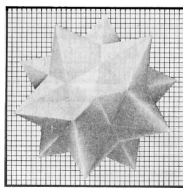


(f) Dodecaedro de 20 vértices

com núcleo

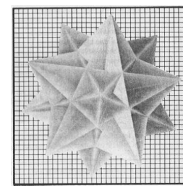


(g) Dodecaedro de 12 vértices sem núcleo



(h) Dodecaedro de 12 vértices

com núcleo



(i) Icosaedro Estrelado

Figura 7 – Esboço em perspectiva dos nove poliedros regulares existentes (RANGEL, 1983).

A classificação dos poliedros regulares é apresentada na figura 8:

### Classificação dos Poliedros Regulares

---

5 - Convexos	{	1 - Tetraedro
		1 - Hexaedro
		1 - Octaedro
		1 - Dodecaedro
		1 - Icosaedro
4 - Estrelados	{	3 - Dodecaedros
		1 - Icosaedro

---

Figura 8 – Poliedros regulares (RANGEL, 1983).

Zeferino (1999 a 2014) tem construído esses poliedros com papel cartão e auxílio computacional(planificações e texturas desenhadas em editor de texto, estas impressas empregando impressora colorida e sendo montadas posteriormente). As figuras 9 e 10 apresenta fotos dessas construções realizadas pelo autor.



Figura 9 – Curso de atualização de professores de Matemática (ZEFERINO, 2001).



Figura 10 – Poliedros estrelados construídos com papel cartão e auxílio computacional Zeferino (período de 1999 a 2014).

**Definição 1.20** *Poliedro semirregular é todo poliedro que se apresenta de uma das duas seguintes formas:*

- 1. Os ângulos sólidos são todos iguais entre si, mas as faces não são iguais, embora sejam polígonos regulares. Esses poliedros são chamados poliedros semirregulares equiangulares ou poliedros semirregulares arquimedianos.*
- 2. As faces são todas iguais entre si, mas os ângulos sólidos não são iguais. Esses poliedros são chamados poliedros semirregulares equifaciais ou poliedros semirregulares não-arquimedianos.*

A classificação dos poliedros semirregulares é mostrada na figura 11:

**Classificação dos Poliedros Semirregulares**

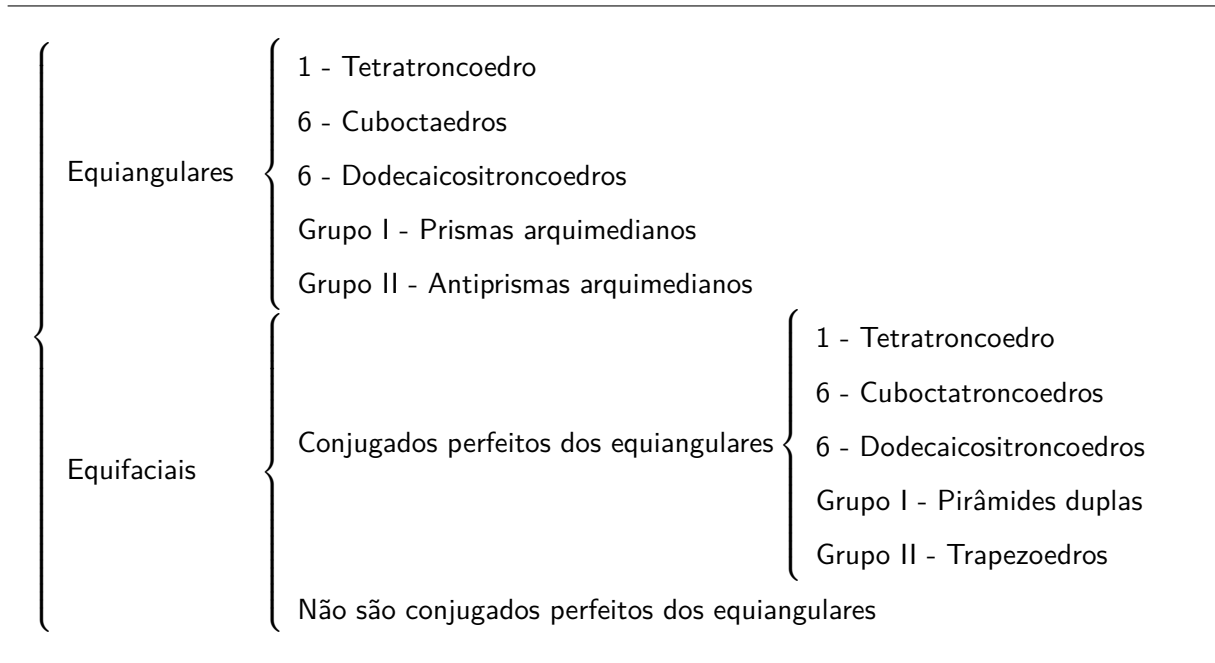


Figura 11 – Poliedros semirregulares (RANGEL, 1983).

Os treze tipos de poliedros semirregulares individuais equiangulares, juntamente com os poliedros regulares convexos, aparecem em construções de Zeferino (1999 a 2014) em papel cartão e auxílio computacional. A figura 12 apresenta fotos dessas construções realizadas pelo autor.



(a)



(b)



(c)

Figura 12 – Poliedros convexos regulares e semirregulares construídos com papel cartão e auxílio computacional, Zeferino (1999 a 2014).

A figura 13 destaca os poliedros semirregulares equiangulares esboçados em perspectiva:

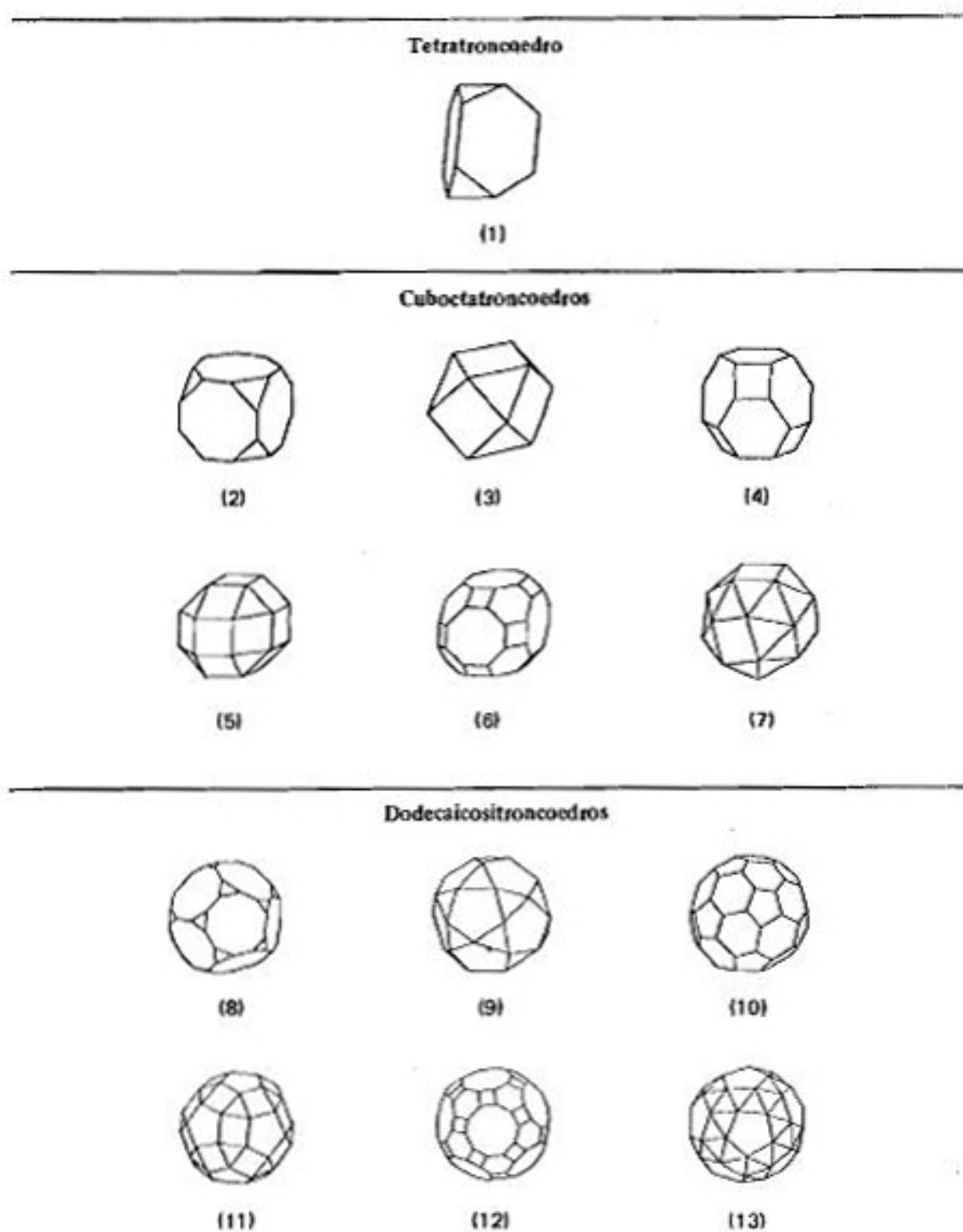


Figura 13 – Esboço em perspectiva dos treze tipos de poliedros semirregulares individuais equiangulares existentes (RANGEL, 1983).



**Definição 1.21** *Esfera Inscrita em um Poliedro.* Diz-se que uma esfera está inscrita em um poliedro, quando ela tangencia todas as faces do poliedro.

Nesse caso, diz-se que o poliedro circunscrito à esfera. Todo poliedro regular convexo admite esfera inscrita.

**Definição 1.22** *Esfera Circunscrita a um Poliedro.* Diz-se que uma esfera está circunscrita a um poliedro, quando ela contém todos os vértices do poliedro.

Nesse caso, diz-se que o poliedro está inscrito na esfera. Todo poliedro regular admite esfera circunscrita.

**Teorema 1.1 (Relação de Euler)** Sendo  $V$  o número de vértices,  $F$  o número de faces e  $A$  o número de arestas de um poliedro, o mesmo é euleriano se, e somente se, esses elementos obedecem à relação  $V + F = A + 2$ .

Essa é a relação mais relevante e mais famosa sobre poliedros. É a relação que determina se um poliedro é euleriano.

**Teorema 1.2 (Relação Atribuída a Descartes)** A soma dos ângulos planos das faces de um poliedro regular convexo é igual ao produto de  $360^\circ$  pela diferença entre o número de vértices menos duas unidades:  $\sum\beta = 360^\circ (V - 2)$ .

**Teorema 1.3 (Relação Atribuída a Descartes)** A soma dos ângulos planos das faces de um poliedro regular convexo é igual ao produto de  $360^\circ$  pela diferença entre o número de vértices menos duas unidades:  $\sum\beta = 360^\circ (A - F)$ .

Observe-se que a partir dessas duas relações de Descartes podemos obter a famosa relação de Euler. Uma demonstração completa desses três últimos teoremas se encontra em (LIMA et al., 2006).

A figura 14 (RANGEL, 1983) apresenta a classificação geral dos poliedros.

Classificação Geral dos Poliedros

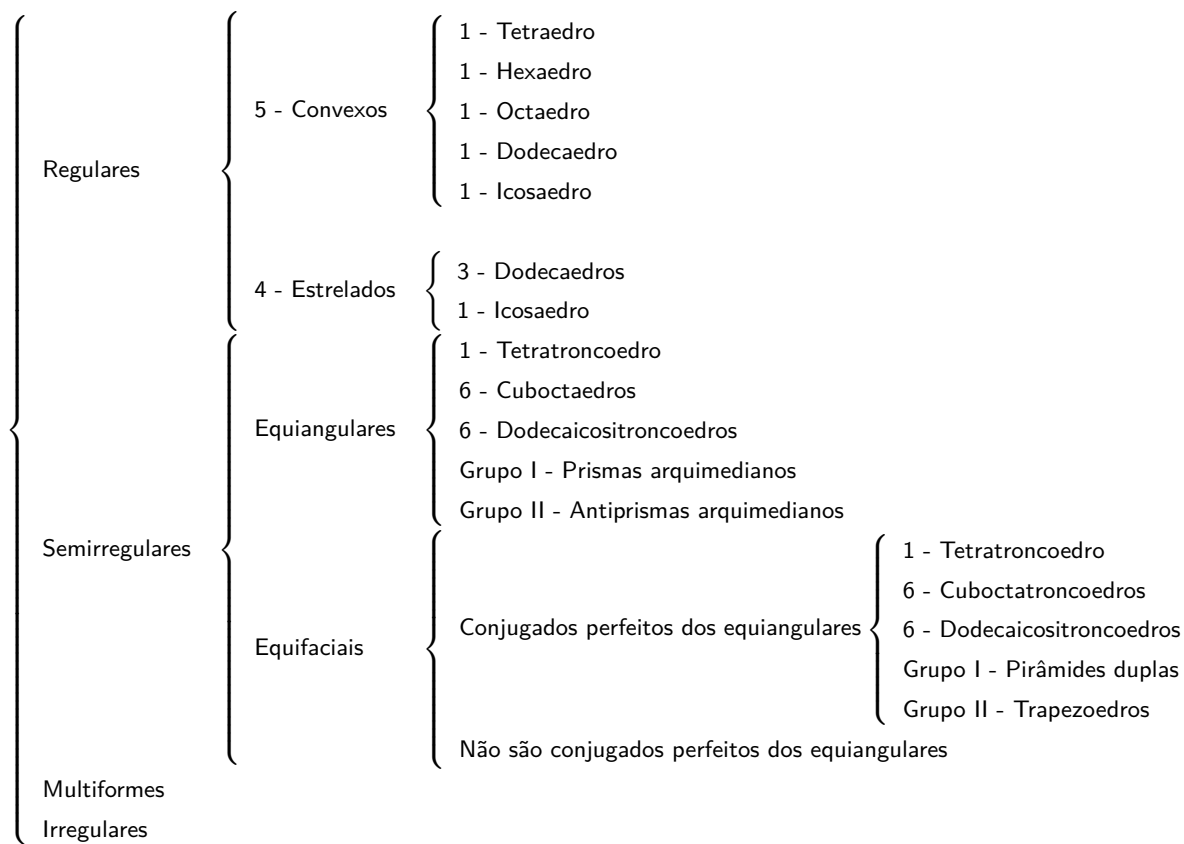


Figura 14 – Classificação geral dos poliedros (RANGEL, 1983).

O próximo capítulo trata de transformações de poliedros.

## Capítulo 2

# Matrizes, Vetores e Transformações de Poliedros

### 2.1 Apresentação

Todos os poliedros apresentados até agora podem ser obtidos por deformação de uma esfera e de duas maneiras:

- (A) Admita-se que a esfera seja um balão ou um sólido (constituído de uma massa plástica, por exemplo). Tal corpo pode ser deformado de forma contínua até tomar o formato do poliedro desejado, seja o mesmo convexo ou não.

Esta ideia pode ser transmitida ao aluno com massa de modelar: primeiro se molda uma esfera (uma aproximação), em seguida se deforma esta e obtém-se um poliedro convexo (uma aproximação). A figura 15 ilustra essa transformação.

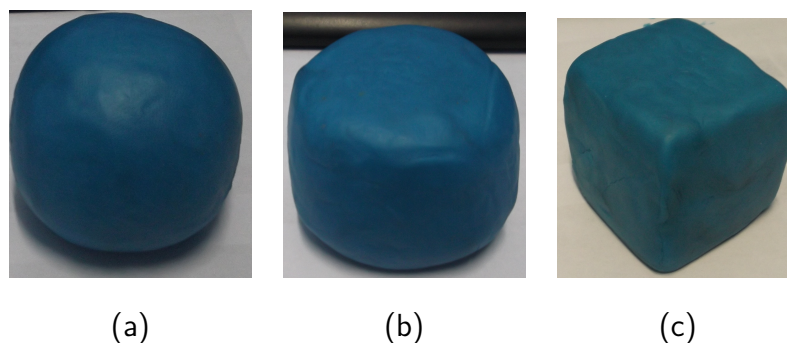


Figura 15 – Três instantes de transformação contínua esfera-cubo com massa de modelar (aproximação).

(B) Admita-se que a esfera seja um sólido (constituído de uma massa plástica ou madeira, por exemplo). Tal corpo pode ser seccionado por planos (truncado) e de forma conveniente até tomar o formato do poliedro desejado, seja o mesmo convexo ou não.

Note-se que no caso A o volume do poliedro final é o mesmo da esfera que o gerou. Entretanto, no caso B, o volume do poliedro final é sempre menor que a esfera que o gerou.

No caso B, pode-se pensar em obter um poliedro derivado a partir de um poliedro original. Isto será mostrado a seguir empregando conceitos de Álgebra Linear e Geometria Analítica. Que foram, posteriormente, implementados em um programa de computador para apresentar a validade do raciocínio.

Referindo-se a poliedros:

**Definição 2.1** Chama-se *truncadura num vértice* uma seção plana em todas as arestas que pertencem a esse vértice (figura 16a).

**Definição 2.2** Chama-se *truncadura numa aresta* uma seção plana paralela a essa aresta (figura 16b).

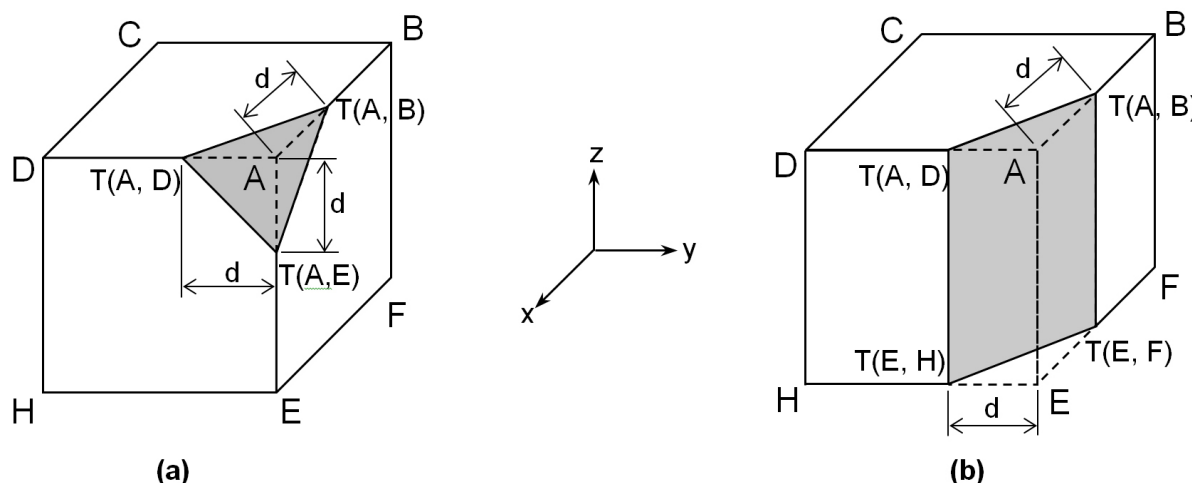


Figura 16 – (a) Cubo truncado à distância  $d$  no vértice  $A$ ; (b) Cubo truncado à distância  $d$  por plano paralelo à aresta  $AE$ .

Será determinada uma expressão que permita encontrar as coordenadas dos vértices do novo poliedro, após a seção do poliedro original, no caso da figura 16a. Tal expressão

foi utilizada na implementação de um software que permite transformar um poliedro em suas formas derivadas por truncadura (mostra-se a forma para obter-se a truncadura pelos vértices).

Dado um cubo de aresta  $a$  e distância  $d$  para seção nos vértices, tem-se um resumo de uma sequência de resultados obtidos na figura 17 com o software desenvolvido, este mostrado na figura 18.

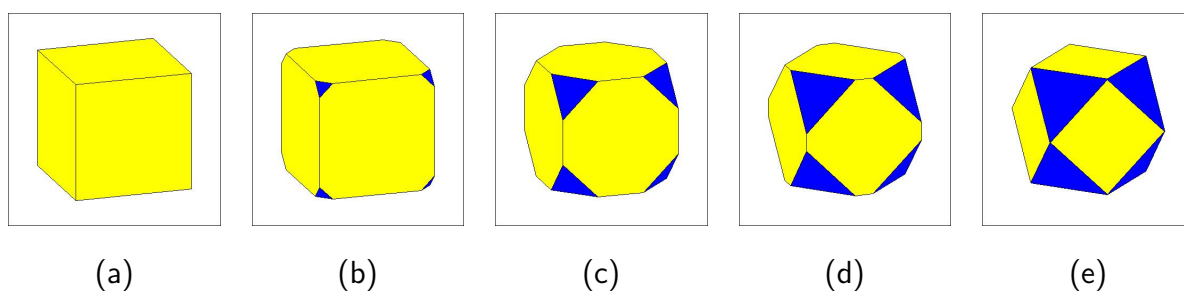


Figura 17 – Cubo de aresta  $a$  truncado à distância  $d$  nos vértices. Exemplos de valores tais que  $0 \leq d \leq 0,5a$ .

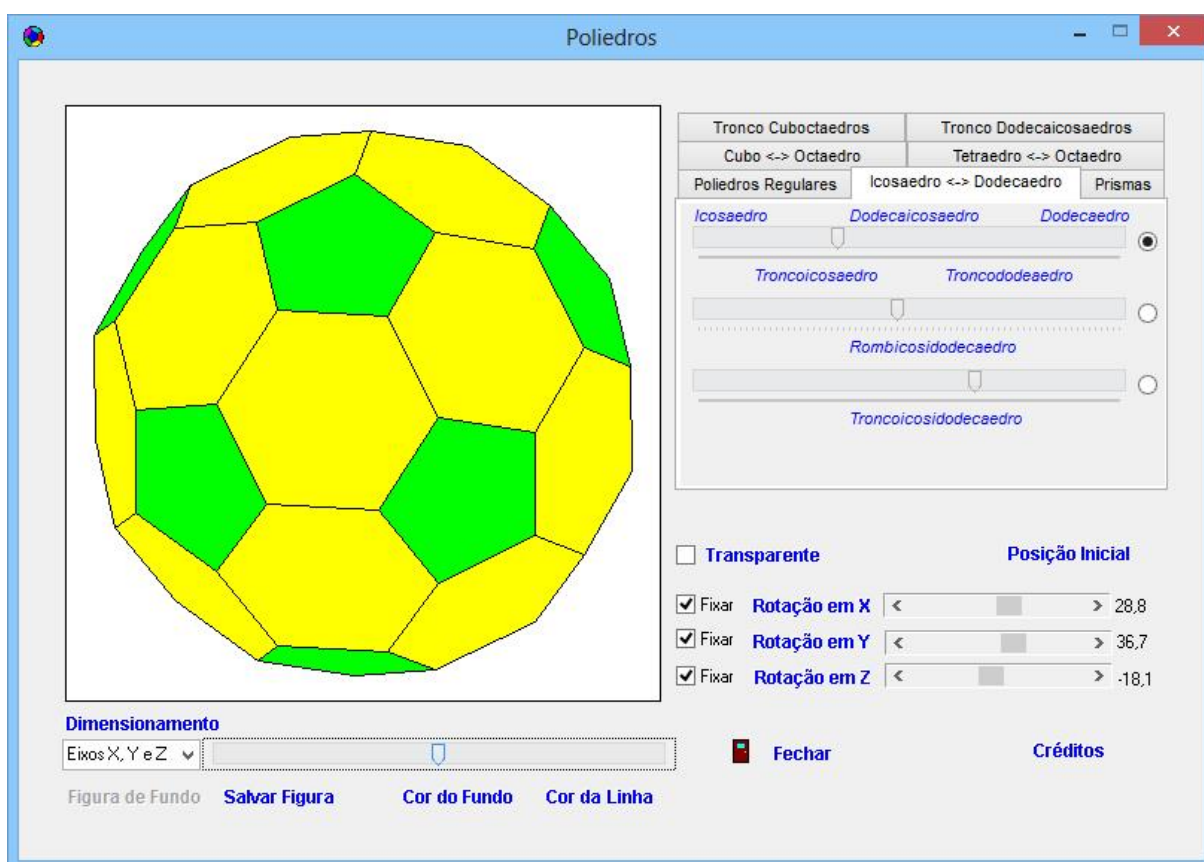


Figura 18 – O software desenvolvido apresentando o icosaedro truncado - um poliedro bem conhecido no único país pentacampeão mundial de futebol...

É possível ainda ter seções não uniformes dos casos acima, seções aleatórias e, ainda, combinar os dois casos da figura 16 em um caso misto.

## 2.2 Uma aplicação de vetores e matrizes no $\mathbb{R}^3$

Conforme na Revista do Professor de Matemática (Zeferino, 2011), o procedimento para encontrar os novos pontos (vértices do novo poliedro), após a truncadura, pode ser entendido como seccionar segmentos de retas no  $\mathbb{R}^3$  (as arestas do poliedro original). Desta forma, usar-se-á o conceito de vetores no espaço.

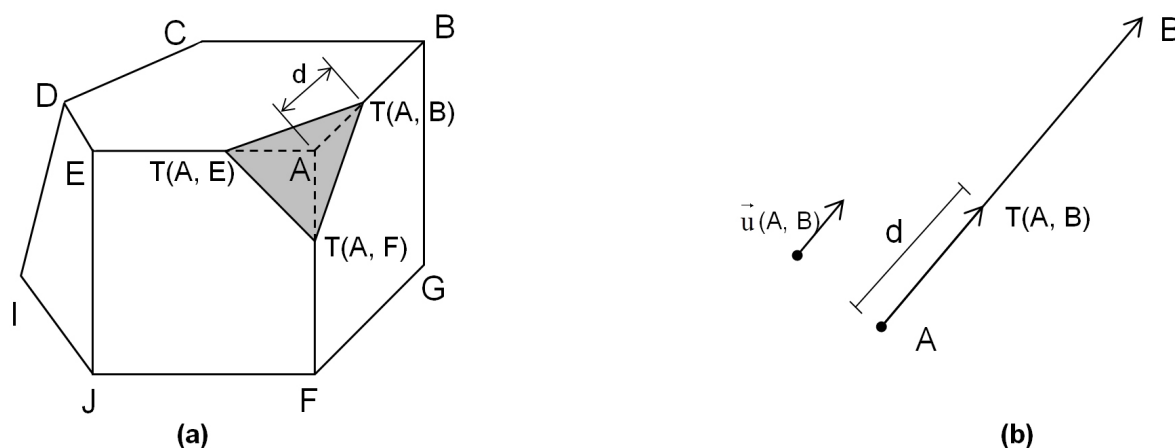


Figura 19 – (a) Um poliedro genérico truncado no vértice A. (b) Esquematização do problema através do uso de vetores.

Tomemos de um poliedro convexo genérico (figura 19a) o vetor  $\vec{AB}$ , onde  $A$  e  $B$  são os extremos de uma aresta de comprimento  $a$ ; o vetor unitário na direção de  $\vec{AB}$ ,  $\vec{u}_{(A,B)}$ , conforme indicado na figura 19b. Sendo  $d$  a distância entre o vértice  $A$  e o ponto  $T(A, B)$  onde a aresta  $AB$  será seccionada, partindo-se de  $A$  na direção de  $B$ , com  $0 \leq d \leq \frac{a}{2}$ , tem-se que:

$$\vec{AT}_{(A,B)} = d \cdot \vec{u}_{(A,B)}$$

Como  $\vec{u}_{(A,B)} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$  e  $\|\vec{AB}\| = a$ , segue que

$$T(A, B) - A = d \cdot \frac{B - A}{a},$$

ou seja:

$$T(A, B) = A + \frac{d}{a} \cdot (B - A), 0 \leq d \leq \frac{a}{2} \tag{2.1}$$

Um exemplo de aplicação da equação 2.1:

Considerando-se um cubo de aresta 12 cm, centrado na origem, face superior paralela ao plano  $xy$  (conforme a figura 1a) e  $d = 4$  cm, os vértices  $T(A, B)$  e  $T(B, A)$  do novo poliedro serão:

$$T(A, B) = (6, 6, 6) + 4/12[(-6, 6, 6) - (6, 6, 6)] \therefore T(A, B) = (2, 6, 6)$$

$$T(B, A) = (-6, 6, 6) + 4/12[(6, 6, 6) - (-6, 6, 6)] \therefore T(A, B) = (-2, 6, 6)$$

Analogamente, podem ser determinados os outros vértices  $T(I, J)$  e construir a tabela 1 (matriz de pontos 3D):

Tabela 1 – Valores dos vértices para o exemplo de truncadura proposto.

		V É R T I C E S							
		A	B	C	D	E	F	G	H
V É R T I C E S	A	(6,6,6)	(-2,6,6)		(6,-2,6)	(6,6,-2)			
	B	(2,6,6)	(-6,6,6)	(-6,-2,6)			(-6,6,-2)		
	C		(-6,2,6)	(-6,-6,6)	(2,-6,6)			(-6,-6,-2)	
	D	(6,2,6)		(-2,-6,6)	(6,-6,6)				(6,-6,-2)
	E	(6,6,2)				(6,6,-6)	(-2,6,-6)		(6,-2,-6)
	F		(-6,6,2)			(2,6,-6)	(-6,6,-6)	(-6,-2,-6)	
	G			(-6,-6,2)			(-6,2,-6)	(-6,-6,-6)	(2,-6,-6)
	H				(6,-6,2)	(6,2,-6)		(-2,-6,-6)	(6,-6,-6)

Na tabela 1 estão os vértices do sólido que aparece na figura 17d. No software desenvolvido esses pontos são convenientemente unidos, através de um algoritmo, para a visualização do poliedro desejado.

Quando o valor de  $d$  tende para  $a/2$ , ou seja, no exemplo dado  $d \rightarrow 6$ , tem-se que cada  $T(I, J)$  tende a  $M(I, J)$  e cada  $T(J, I)$  tende a  $M(I, J)$ , sendo  $M(I, J)$  o ponto médio da aresta  $IJ$ . Assim, chega-se ao poliedro da figura 2-3e como caso limite da transformação indicada na figura 17. Por outro lado, quando  $d$  tende a zero, qualquer  $T(I, J)$  tende ao vértice  $I$  e o sólido tende ao cubo da figura 17a.

Obviamente o uso de computador facilita os cálculos e o desenho do poliedro (no icosaedro, por exemplo, o trabalho manual seria muito maior), fornece um forte argumento visual para a transformação que ocorre e, também, permite “ver” uma noção intuitiva de

limite. Entretanto, nada poderia ser feito sem o conhecimento de toda a Teoria Matemática envolvida.

O uso de computador aumenta o interesse dos alunos (e também de professores) nesse conteúdo e muitos outros da Matemática – verifica-se tal fato, na prática, em aulas com estudantes e com professores em cursos de atualização na Região Norte Fluminense (ZEFERINO, 2011).

De maneira análoga à feita com o cubo, podem ser realizadas transformações com outros poliedros. A figura 20 mostra exemplos com o tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, cujas coordenadas dos vértices utilizadas foram as fornecidas por (SALDANHA, 1998).

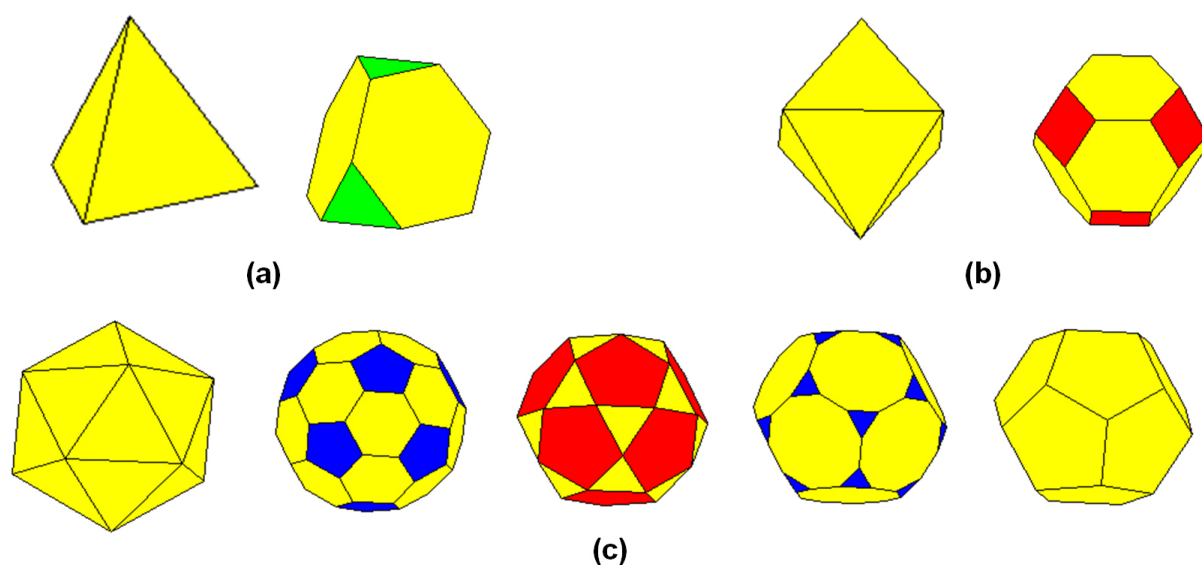


Figura 20 – Truncaduras com: (a) tetraedro; (b) octaedro; (c) icosaedro e dodecaedro.

No caso da figura 16a, em que  $d \rightarrow a/2$ , no caso da figura 16b e como combinar esses dois casos ocorre de maneira análoga. Neste último caso a matriz de transformação mista,  $T_M$ , é tal que:

$$T_M = T_A \circ T_V \quad (2.2)$$

Onde  $T_A$  é a truncadura pela arestas e  $T_V$  é a truncadura pelos vértices.

Determinaremos uma expressão que permita encontrar as coordenadas dos vértices do novo poliedro, após a seção do poliedro original, no caso da figura 16b (obter-se a truncadura pelas arestas).

Considere-se a figura 21a a qual apresenta três truncaduras à distância  $d$  pela arestas ( $AB$ ,  $AD$  e  $AE$ ) de um poliedro convexo que partem de um mesmo vértice (vértice  $A$ ).



Nessa figura, deve ser determinada uma expressão para o ponto  $P_{TA}(D, A, B)$ , visto que os outros vértices do novo poliedro, após as trincaduras,  $P_{TA}(D, A, E)$  e  $P_{TA}(E, A, B)$  são determinados por analogia.

Inicialmente determinemos o ponto  $T(A, B)$  à distância  $d$  sobre a aresta  $AB$ , conforme indicado na figura 21b.

Seendo  $\vec{u}_{(A,B)}$  o vetor unitário na direção de  $AB$ , podemos escrever:

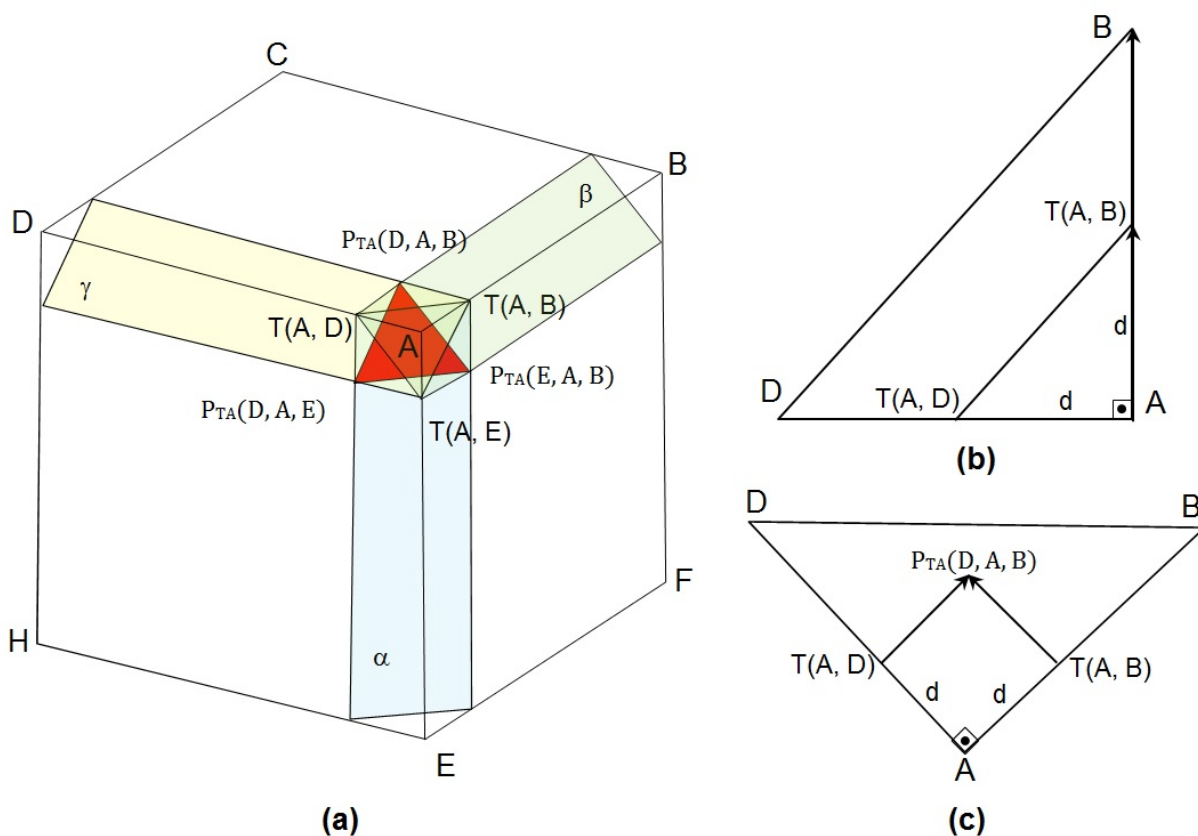


Figura 21 – (a) Poliedro truncado por três arestas; (b) e (c) Esquematização do problema com emprego de vetores.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AT(A, B)} &= \vec{u}_{(A,B)} \cdot d \\ \text{Como } \vec{u}_{(A,B)} &= \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{B-A}{a} \\ T(A, B) - A &= \frac{B-A}{a} \cdot d \\ T(A, B) &= A + \frac{d}{a} \cdot (B - A) \end{aligned}$$

Determinemos agora a expressão para o ponto  $P_{TA}(D, A, B)$ .

Observando a figura 21c, temos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T(A, D)P_{TA}(D, A, B)} &= \vec{u}_{(A,B)} \cdot dv \\ P_{TA}(D, A, B) - T(A, D) &= \vec{u}_{(A,B)} \cdot dv \\ P_{TA}(D, A, B) &= T(A, D) + \vec{u}_{(A,B)} \cdot dv \\ P_{TA}(D, A, B) &= T(A, D) + \frac{dv}{a} \cdot (B - A) \end{aligned}$$

Em geral:

$$P_{TA}(i, j, k) = T(j, i) + \frac{dv}{a} \cdot (k - j) \tag{2.3}$$

Alguns exemplos com o emprego da equação 2.3 podem ser visualizados na figura 22.

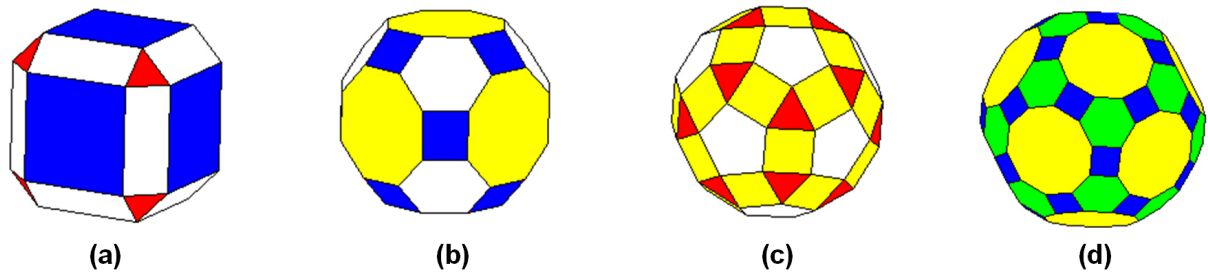


Figura 22 – (a) Cubo truncado pelas arestas; (b) cubo ou octaedro truncado pelas arestas e vértices; (c) dodecaedro truncado pelas arestas; (d) dodecaedro ou icosaedro truncado pelas arestas e vértices.

A figura 23 apresenta um trecho do código fonte do programa computacional do raciocínio concretizado nas equações 2.1 e 2.3.

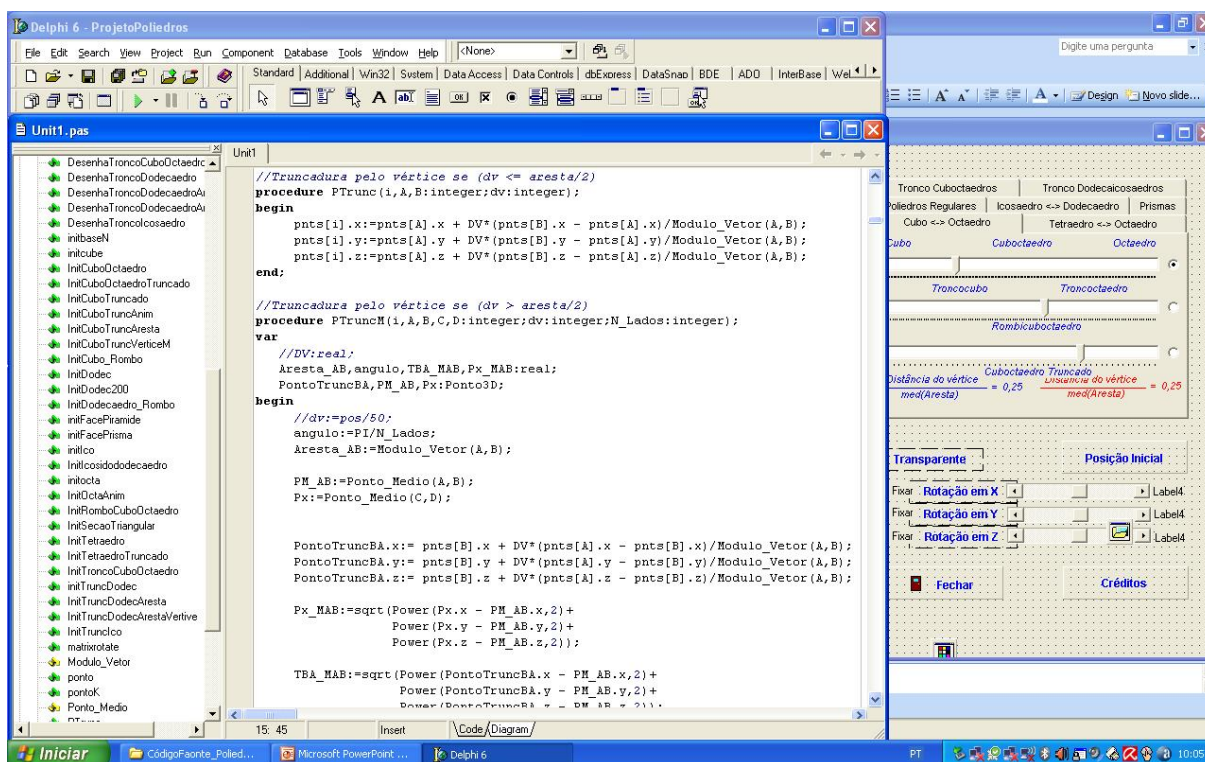


Figura 23 – Código do programa computacional do raciocínio concretizado nas equações 2.1 e 2.3 (Zeferino, 2011)

Com o software facilmente se apresenta a dualidade dos poliedros, como as dualidades cubo  $\leftrightarrow$  octaedro, dodecaedro  $\leftrightarrow$  icosaedro, tetraedro  $\leftrightarrow$  tetraedro, entre outras. Tal fato será apresentado em detalhes no capítulo “Em Sala de Aula”.

Observe que seções por planos aleatórios de um poliedro podem ocorrer, mas a determinação de suas propriedades nem sempre é fácil. Tal estudo é realizado em detalhes em livros texto como UNDERWOOD (1970) e RUSS e DEHOFF (1999). Didaticamente, sabidamente, se um plano interceptar um cubo, ter-se-á a possibilidade de ocorrer um dos seguintes polígonos: triângulo, quadrilátero, pentágono ou hexágono (desconsideramos aqui as degenerações). Observe-se a figura 24 com alguns desses exemplos.

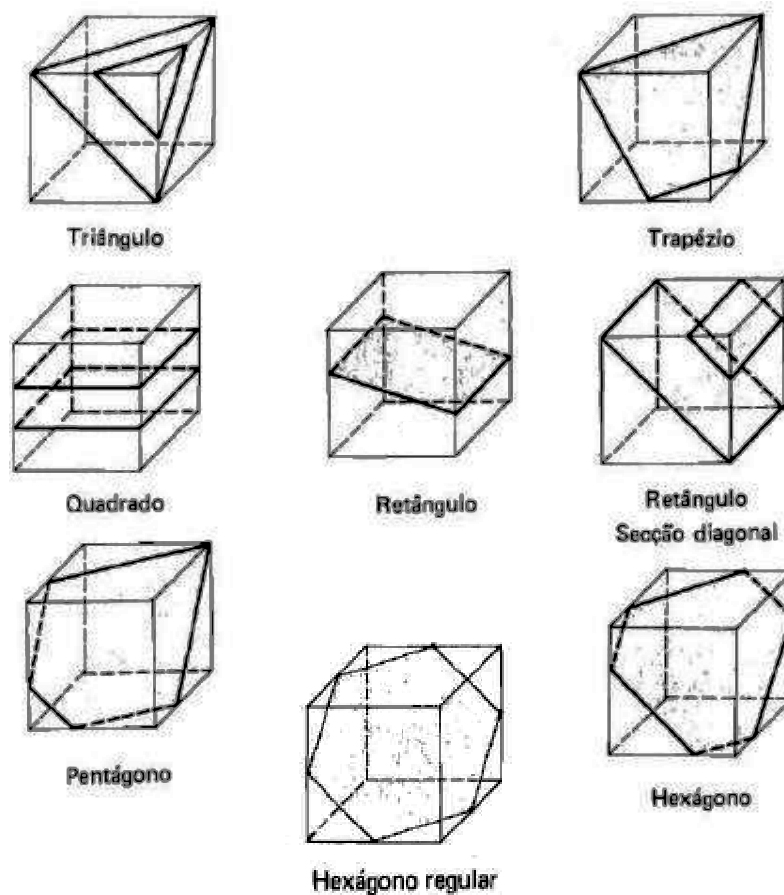


Figura 24 – Algumas seções de um cubo (DOLCE; POMPEO, 1985).

Na realidade, para determinar numericamente os pontos de interseção de um desses casos é necessário resolver o sistema linear formado com as equações que representam os segmentos de reta que caracterizam as arestas do cubo e equação do plano de interseção. Este problema também pode ser resolvido através da Geometria Espacial e é um problema que será abordado mais adiante no presente trabalho.

Duas aplicações de seções planas na Engenharia de Materiais e na Biologia são apresentadas por RUSS e DEHOFF (1999) e são: contagem de grãos na estrutura de materiais compostos e a contagem de organelas ou glóbulos no sangue, respectivamente.

Outro aspecto que deve ser apresentado ao estudante, já que hoje há recursos computacionais para isso, é o das possibilidades de transformações que podem ser obtidas (rígidas ou não) a figura 25. A figura 25a apresenta um ator em queda livre e que irá colidir um obstáculo (um poliedro não convexo que lembra uma escada). Durante a queda é assumida a rigidez total do ator (tem-se um corpo indeformável). Quando do impacto, no caso da figura 25b, assume-se que tal ente apresenta um valor de elasticidade que permite contornar os degraus

da escada de forma que a linha que representa a coluna vertebral do ator forme uma curva suave (que lembra uma das seções cônicas abertas). Por outro lado, supondo que o ator fosse um balão inflado e que fosse esvaziado durante a queda, ter-se-ia o que a figura 25c retrata (a transformação que ocorreria quando o mesmo caísse sobre a superfície): o ator envolveria os degraus como que os encapando. Finalmente, a figura 25d apresenta o caso em que se supõe que o ator fosse construído de um material quebradiço, tal qual a porcelana ou o vidro, fragmentando-se quando do impacto.

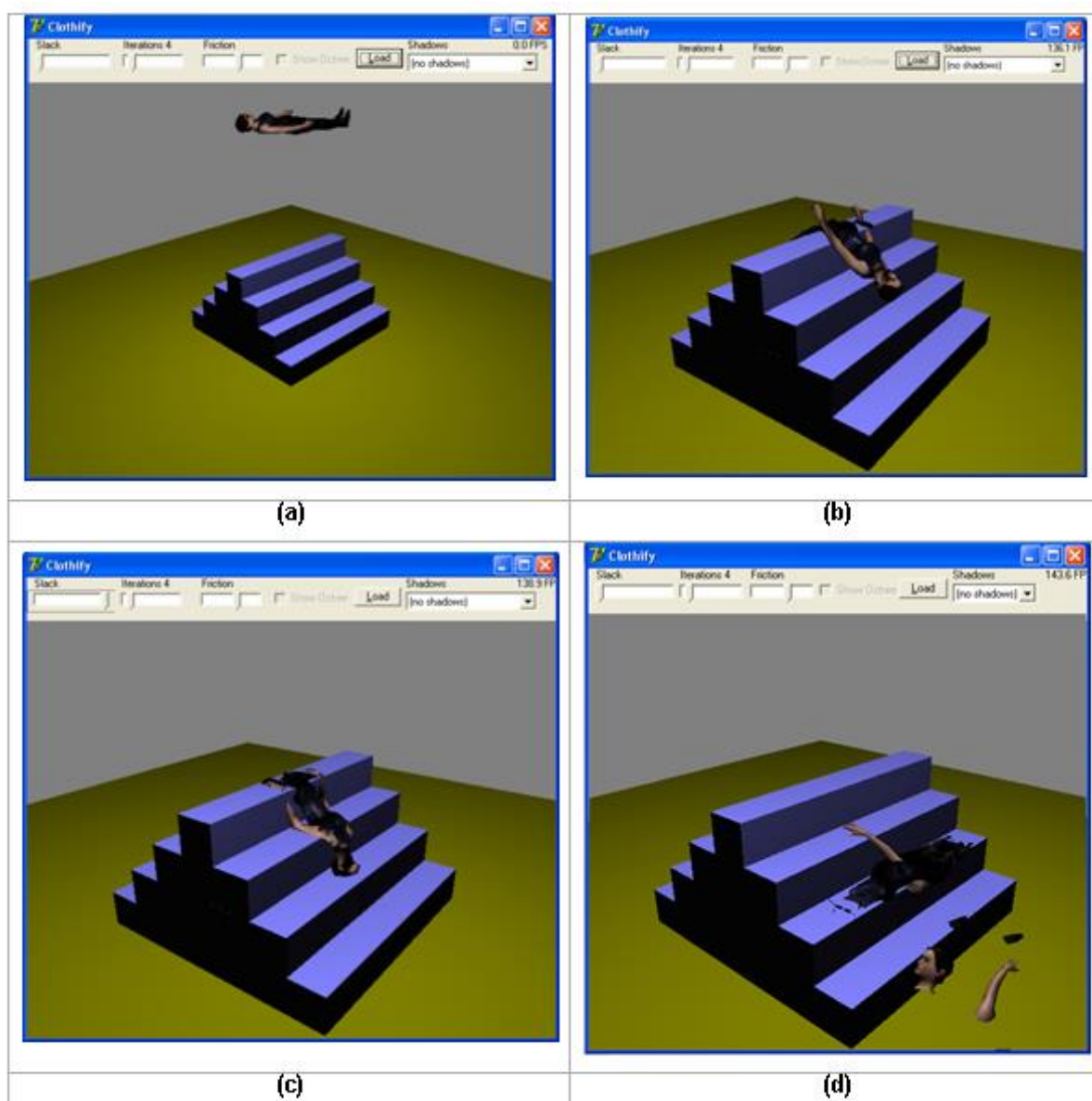


Figura 25 – (a) um corpo em queda livre (translação); (b) após impacto o corpo apresenta elasticidade; (c) após impacto o corpo se comporta como uma capa; (d) após impacto o corpo se comporta de maneira quebradiça (descontinuidade). Adaptado de Grange (2004)

O próximo capítulo trata dos “Parâmetros Curriculares Nacionais Brasileiros do Ensino Médio (PCNEM) e o Currículo Mínimo” referentes ao ensino de poliedros.

## Capítulo 3

# Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio Brasileiros (PCNEM) e o Currículo Mínimo

### 3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio Brasileiros.

Neste ponto, convêm deixar claros dois aspectos:

- 1) Enfatizamos que o nosso público alvo principal é o estudante do Ensino Médio, embora os poliedros estejam incluídos no currículo de matemática do Ensino Fundamental e Ensino Superior.
- 2) Apresentaremos aspectos de interdisciplinaridade do assunto abordado.

Os PCNEM brasileiros quanto à Matemática afirmam ([BRASIL, 1998](#)):

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno.

Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço,

a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. (BRASIL, 1998).

Os mesmos parâmetros ainda afirmam:

Numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 1998).

Assim, apresentamos exemplos de aplicações de poliedros (fazem parte do currículo mínimo de Matemática que será visto na seção 3.2), enfatizando a interdisciplinaridade. Um importante exemplo de interdisciplinaridade do assunto poliedros está presente na Química. Podemos citar “O fulereno e sua espantosa geometria molecular” (BRASIL, 2006), onde Rocha-Filho explica em seu quadro 2, apresentado na figura 26.

#### Quadro 2 – Fulerenos e a lei de Euler para poliedros

Uma molécula de fulereno é um poliedro de átomos de carbono nos vértices, formado somente por faces pentagonais e hexagonais. No século 18, Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço, estudou as relações entre os números de arestas (A), vértices (V) e faces (F) de poliedros, tendo encontrado a seguinte relação simples entre eles:

$$\text{lei de Euler: } F + V = A + 2 \quad (1)$$

Por exemplo, no caso de um cubo,  $F = 6$ ,  $V = 8$  e  $A = 12$ .

No caso dos fulerenos, como cada átomo está ligado a três outros, em cada vértice há o encontro de três arestas (cada uma ligada a dois vértices); assim:

$$V = 2/3A \quad (2)$$

Substituindo-se essa relação na equação anterior, tem-se que:

$$F = 1/3A + 2 \quad (3)$$

O número de faces numa molécula fullerênica é:

$$F = P + H \quad (4)$$

onde P é o número de pentágonos e H o de hexágonos. Ao contar as arestas para todas as faces, sendo cada aresta compartilhada por duas faces, cada aresta é contada duas vezes; assim, numa molécula fullerênica:

$$A = 1/2(5P + 6H) \quad (5)$$

Substituindo-se as equações 4 e 5 na equação 3, encontra-se simplesmente o número de pentágonos numa molécula fullerênica:

$$P = 12$$

Isso significa que a lei de Euler não impõe qualquer restrição quanto ao número de hexágonos nas moléculas fullerênicas, e que elas sempre têm exatamente 12 pentágonos.

Usando as relações acima, é possível deduzir que o  $C_{540}$  (540 vértices!) tem 810 arestas e 272 faces (260 hexagonais e 12 pentagonais).

Empiricamente, encontrou-se que  $C_{60}$  (32 faces) e  $C_{70}$  (37 faces) são os menores fulerenos suficientemente estáveis, os quais correspondem às duas menores estruturas possíveis em que todas as 12 faces pentagonais estão isoladas uma da outra. Daí a *regra do pentágono isolado*, que afirma que o isolamento entre as 12 faces pentagonais é um requisito para a estabilidade de uma molécula fullerênica; até agora, não se conhece exceção a esta regra.

No caso do  $C_{60}$ , cada pentágono está rodeado por um colar de cinco hexágonos. Se o número desses colares ao redor de cada pentágono for aumentado para 2, 3 ou mais, obtém-se uma família de fulerenos gigantes que começa com  $C_{240}$  e  $C_{540}$  (a família é dada por  $C_{60n^2}$ , onde  $n = 1, 2, 3$  etc.). Essas moléculas, à medida que se tornam maiores, ficam menos esféricas.

Figura 26 – Exemplo de importância dos poliedros na Química (BRASIL, 2006).

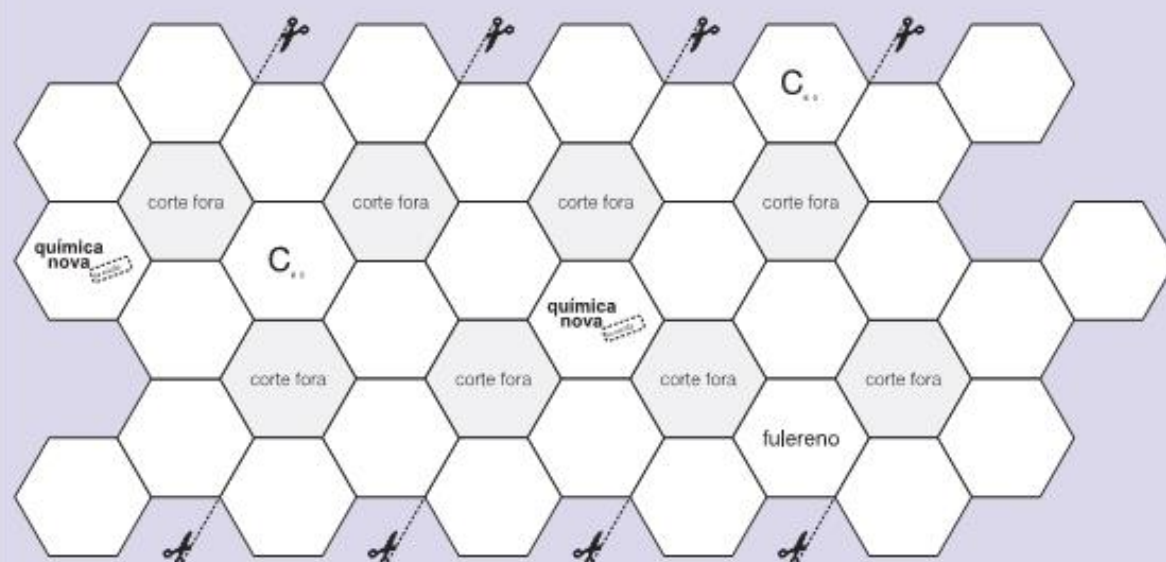


Ainda no seu quadro 3, apresentado na figura 27, o autor completa o seu raciocínio mostrando como construir a estrutura geométrica que representa o fulereno  $C_{60}$ , o qual tem estrutura poliedral idêntica à base da bola de futebol tradicional (o poliedro que inflado resulta na bola do esporte mais popular e barato do mundo).

### Quadro 3 – Como construir um modelo da molécula de $C_{60}$

Embora seja um poliedro de 20 faces hexagonais e 12 pentagonais, o  $C_{60}$  pode ser visualizado como constituído de 12 pentágonos igualmente distribuídos pela superfície de uma esfera, cada um conectado a seus cinco vizinhos por uma ligação-ponte; essas pontes geram os 20 hexágonos. Se os pentágonos forem realçados, essa simetria molecular pode ser melhor visualizada; isso pode ser feito deixando os pentágonos como buracos.

Um modelo da molécula de  $C_{60}$  pode ser facilmente construído somente a partir de papel marcado hexagonalmente e com buracos apropriadamente distribuídos, como mostrado:



Primeiramente recorte as linhas e os hexágonos indicados. A seguir, recorte todo o contorno da figura. Usando cola, sobreponha os hexágonos vizinhos separados pelos cortes (cola de bastão facilita seu trabalho); note que os hexágonos recortados tornam-se pentágonos. À medida que os hexágonos forem sendo sobrepostos a estrutura poliedral do  $C_{60}$ , uma bola de futebol, surge naturalmente. [adaptado do *J. Chem. Educ.*, v. 69, n. 8, p. 610, 1992]



Figura 27 – Como construir o modelo da molécula  $C_{60}$  (BRASIL, 2006).

Existem inúmeras estruturas de fulerenos. Por exemplo: Em meados de 1991, meses após a publicação do método de síntese de quantidades macroscópicas de fulerenos, cientistas em todo o mundo pesquisavam diferentes aspectos dos fulerenos. No Laboratório de Pesquisas Básicas da NEC, em Tsukuba, no Japão, o cristalógrafo japonês Sumio Iijima, especialista em ciência do carbono, se perguntava se outros tipos de moléculas de carbono não seriam

formados. Ao buscar respostas para sua indagação, Iijima fez uma pequena, mas crucial, modificação no método de síntese. E, foram obtidas, posteriormente, estruturas denominadas Nanotubos (BRASIL, 2006), um exemplo é apresentado na figura 28.

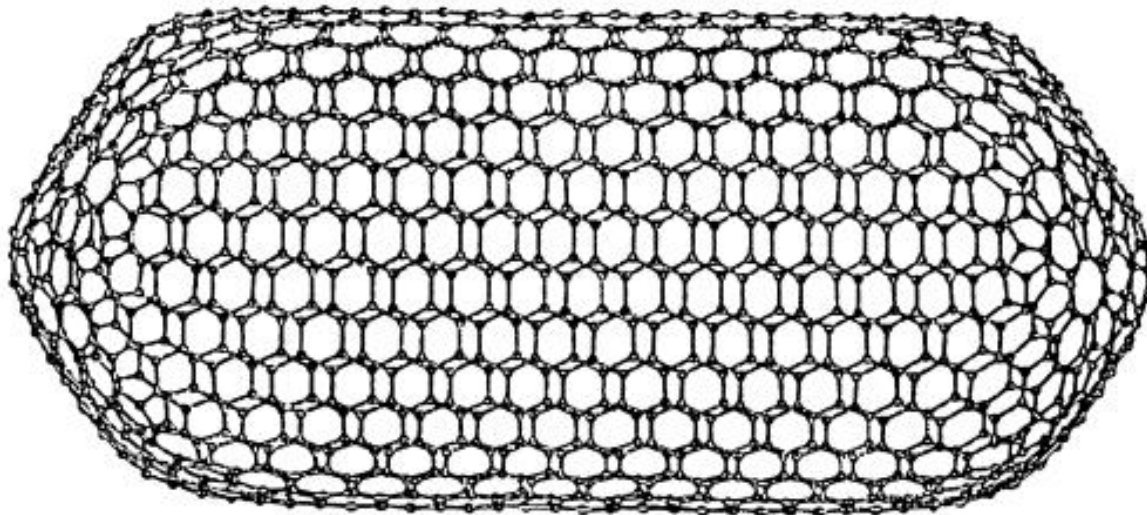


Figura 28 – Exemplo de nanotubo (BRASIL, 2006).

O volume 3 da Coleção Explorando o Ensino – Matemática (BRASIL, 2004), apresenta em seu capítulo 3, o que enfatiza a importância da Geometria Sólida e dos poliedros assuntos intitulados: “A mágica do cubo”, “A capacidade do graneleiro”, “Fulerenos e futebol: aplicações da fórmula de Euler”. As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio Brasileiro - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 1998) apresentam a “Organização do trabalho escolar”:

A escolha de uma forma e sequência de distribuição dos temas nas três séries do ensino médio traz em si um projeto de formação dos alunos. Por exemplo, em todas as disciplinas da área, os temas de estudo da primeira série deveriam tratar do entorno das informações que cercam os alunos, numa visão contextualizada, colocando-os em contato com as primeiras ideias e procedimentos básicos para ler e interpretar situações simples. Na segunda série, já poderia haver uma mudança significativa no sentido de que cada disciplina mostrasse sua dimensão enquanto Ciência, com suas formas características de pensar e modelar fatos e fenômenos. A terceira série ampliaria os aprendizados das séries anteriores com temas mais abrangentes que permitissem ao aluno observar e utilizar um grande número de informações e procedimentos, aprofundando sua compreensão sobre o que significa pensar em Matemática e utilizar os conhecimentos adquiridos para análise e intervenção na realidade. Uma organização dos temas e suas unidades que corresponderia a essa visão, em uma situação de 4 aulas semanais, trabalhando concomitantemente os três temas estruturadores. (BRASIL, 1998)

A divisão de conteúdos presentes nessa proposta é apresentada no quadro apresentado na figura 29, onde grifamos o tópico poliedro que aparece na segunda série do Ensino Médio:

1ª série	2ª série	3ª série
<p>1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica.</p> <p>1. Trigonometria do triângulo retângulo.</p>	<p>1. Funções seno, cosseno e tangente.</p> <p>1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.</p>	<p>1. Taxas de variação de grandezas.</p>
<p>2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.</p>	<p>2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos.</p> <p>2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.</p>	<p>2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.</p>
<p>3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.</p>	<p>3. Estatística: análise de dados.</p> <p>3. Contagem.</p>	<p>3. Probabilidade.</p>

Figura 29 – Uma organização dos temas e suas unidades correspondentes a visão, em uma situação de 4 aulas semanais, trabalhando concomitantemente os temas estruturadores, proposta por (BRASIL, 1998)).

Assim, confirmamos a grande importância do tema poliedros, não somente na Educação Básica, pois os PCNEM brasileiros também afirmam a importância da unidade 2 destacada no quadro apresentado na figura 29 no Ensino Superior e na vida do estudante egresso do Ensino Médio.

Trataremos na próxima seção do Currículo Mínimo de Matemática quanto ao tópico Poliedros.

## 3.2 Currículo Mínimo de Matemática quanto ao tópico Poliedros.

Trataremos nesse ponto do currículo mínimo da disciplina Matemática da Rede Pública Estadual do Estado do Rio de Janeiro. A Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro, SEEDUC-RJ, é a responsável pela definição nesse estado.

Na página da Internet que aparece na figura 30 os professores da rede estadual de educação têm acesso (desde que possuam os devidos privilégios) aos componentes curriculares das disciplinas de suas áreas de atuação.

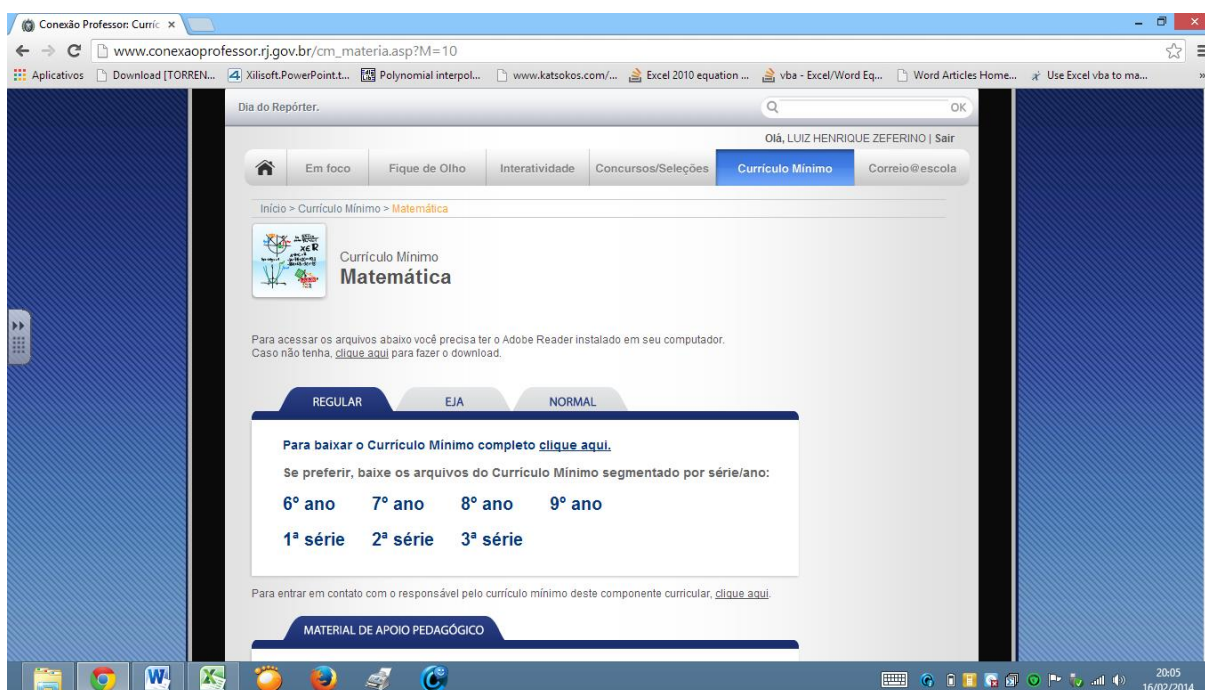


Figura 30 – A página da SEEDUC-RJ “Conexão Professor” de acesso aos Currículos Mínimos de Matemática (SEEDUC-RJ, 2014).

Discutiremos aqui apenas o Ensino Regular Médio, pois o Ensino Fundamental, o Ensino de Jovens e Adultos (EJA) e o Curso Normal (formação de professores) fogem ao escopo de estudo do presente trabalho. Pesquisando os currículos de cada uma das séries do Ensino Médio Regular, descobrimos que a Geometria tem grande destaque na 2ª série, como pode se visto no quadro 3-2 da página da (SEEDUC-RJ, 2014). Já no primeiro bimestre, no Campo Geométrico, as habilidades indicadas são claras:

- Compreender os conceitos primitivos da geometria espacial.
- Reconhecer as posições de retas e planos no espaço.

- Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações.
- Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema (Relação de Euler).
- Identificar e nomear os poliedros regulares.(SEEDUC-RJ, 2014).

Além do mais, notamos que a Geometria Espacial abrange, aproximadamente, cinquenta por cento do currículo mínimo da segunda série do Ensino Médio Regular no ensino público regular no Estado do Rio de Janeiro, conforme pode ser observado no quadro apresentado na figura 31.

1º Bimestre	
<b>Campo Algébrico Simbólico</b>	<b>Função Logarítmica</b>
<b>Habilidades e Competências</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcular o logaritmo de um número real positivo.</li> <li>- Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.</li> <li>- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas significativos.</li> <li>- Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial.</li> <li>- Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica.</li> <li>- Resolver problemas significativos utilizando a função logarítmica.</li> </ul>
<b>Campo Geométrico</b>	<b>Introdução à Geometria Espacial</b>
<b>Habilidades e Competências</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Compreender os conceitos primitivos da geometria espacial.</li> <li>- Reconhecer as posições de retas e planos no espaço.</li> <li>- Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações.</li> <li>- Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema (Relação de Euler).</li> <li>- Identificar e nomear os poliedros regulares.</li> </ul>
3º Bimestre	
<b>Campo Algébrico Simbólico</b>	<b>Matrizes e Determinantes</b>
<b>Habilidades e Competências</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes.</li> <li>- Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.</li> <li>- Resolver problemas utilizando as operações com matrizes e a linguagem matricial.</li> <li>- Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.</li> </ul>
<b>Campo Geométrico</b>	<b>Geometria espacial: Pirâmides e Cones</b>
<b>Habilidades e Competências</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Reconhecer e nomear pirâmides e cones.</li> <li>- Resolver problemas envolvendo o cálculo de área lateral e área total de pirâmides e cones.</li> <li>- Resolver problemas envolvendo o cálculo do volume de pirâmides e cones.</li> </ul>

Figura 31 – O Currículo Mínimo de Matemática da segunda série do Ensino Médio (SEEDUC-RJ, 2014).

Desejamos enfatizar que a página da SEEDUC-RJ também apresenta “Conteúdos Pedagógicos” para o “Currículo Mínimo”, ver figura 32.

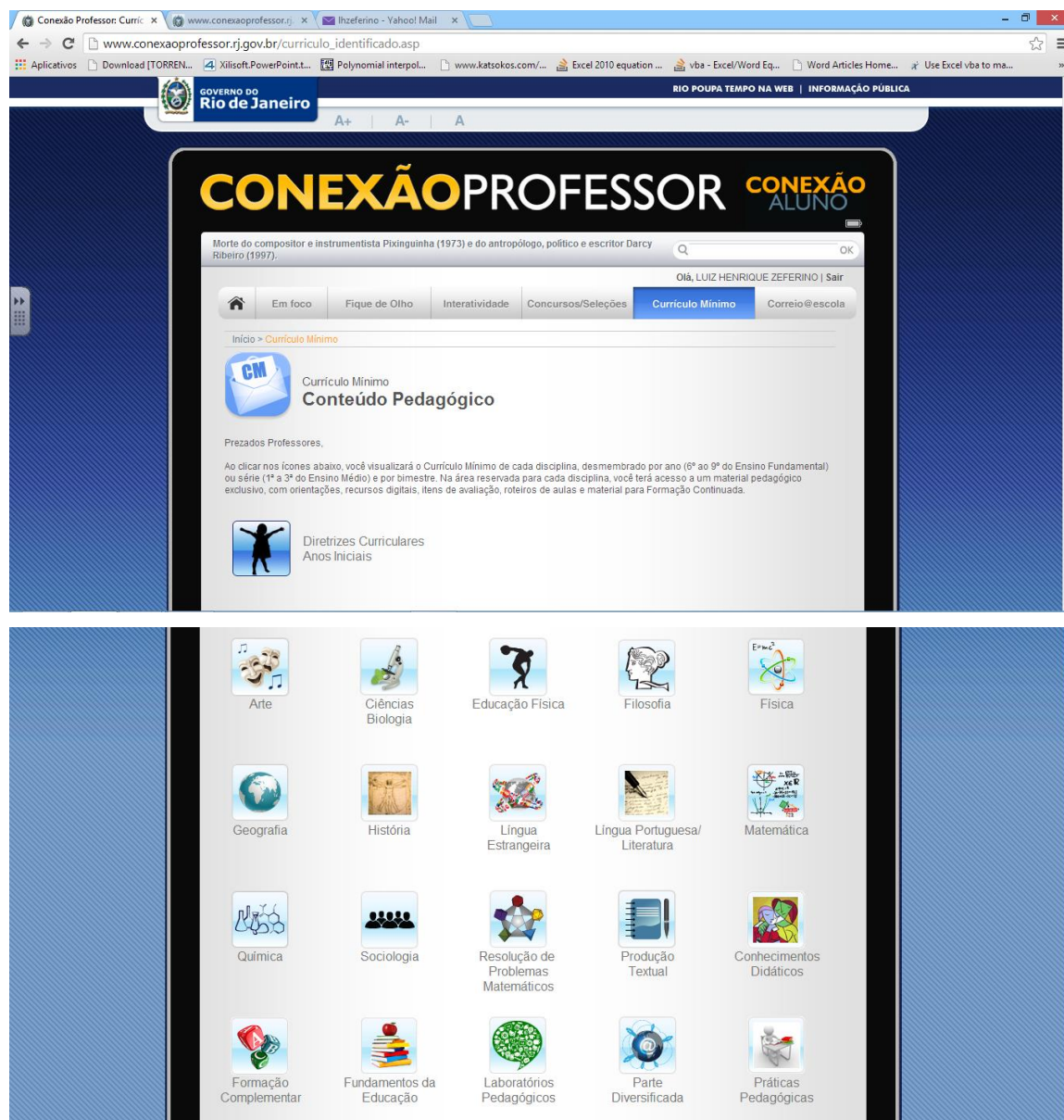


Figura 32 – A página da SEEDUC-RJ “Conexão Professor” de acesso aos Conteúdos Pedagógicos dos Currículos Mínimos de Matemática (SEEDUC-RJ, 2014).

Nessa figura, destacamos com setas, Matemática e Resolução de Problemas Matemáticos, nos quais podem ser encontrados materiais de apoio para professores da disciplina Matemática quanto ao tema Poliedros (como planificações e exercícios com soluções).

Ainda, podemos citar que a página da SEEDUC-RJ indica recursos computacionais para o ensino de Geometria Espacial, e, incentiva o uso dos laboratórios de informática do MEC-PROINFO que apresentam o LINUX Educacional como sistema operacional instalado.

Destacamos desse modo, a relevância do ensino e aprendizagem do tema aqui abor-

dado.

O próximo capítulo trata da metodologia usada neste trabalho para o ensino de Políedros em duas escolas públicas do Estado do Rio de Janeiro, esperando contribuir para o ensino e aprendizagem desse tema.

## Capítulo 4

### Em sala de aula

Consideramos a postura do professor em sala de aula muito importante. Por exemplo: Para [Lima \(1999\)](#) a dosagem adequada de cada um dos componentes que compõem o tripé para uma boa educação matemática - conceituação, manipulação e aplicações, depende o equilíbrio do processo de aprendizagem, o interesse dos alunos e a capacidade de empregar a clareza das ideias, o hábito de pensar e agir ordenadamente. O autor considera, quanto à conceituação:

A conceituação compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos. É importante ter em mente e destacar que a conceituação é indispensável para o bom resultado das aplicações. ([LIMA, 1999](#)).

Note-se que fica claro para o autor que a conceituação é a base da formação em matemática. Quanto à manipulação o mesmo autor afirma:

A manipulação, de caráter principalmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado da Matemática, assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a música (ou mesmo como o repetido treinamento dos chamados “fundamentos” está para certos esportes, como o tênis e o voleibol). A habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-o da perda de tempo e energia com detalhes secundários. ([LIMA, 1999](#)).



O autor também destaca a relevância dada a se explorar a aplicação dos conteúdos ensinados na prática, como segue:

As aplicações são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a auto-estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. (LIMA, 1999).

Concordamos com Lima, mas completamos que os recursos empregados, sejam eles concretos ou virtuais, são muito importantes. Também compreendemos que a experimentação é muito importante para os alunos e para os professores. Enfatizamos que deve ficar claro para o aluno a “perfeição” da Matemática em contraste com as limitações impostas por situações no mundo real (como a diferença entre o resultado obtido com massa de modelar na figura 15 e a “perfeição” da transformação matemática equivalente). Também, faz-se necessário um conjunto de estratégias para ensinar, combinando os recursos disponíveis e o tripé proposto por Lima (1999).

Outro aspecto a ser levado em consideração é o fato de o ser humano ser por natureza um ser curioso. Esse aspecto pode ser explorado em exemplos como o que segue:

Heródoto, “pai da História”, viajando pelo Egito no ano de 450 a.C., conseguiu obter dos sacerdotes certos pormenores sobre a construção dessas maravilhas e os transmitiu ao resto do mundo. Segundo seu relato, a Grande Pirâmide, como é chamada a de Quéops, foi construída num espaço de vinte anos. Cem mil homens trabalhavam nessa obra durante três meses por ano, provavelmente durante a época das cheias do rio Nilo, quando a agricultura ficava paralisada. Foram utilizadas mais de 2 milhões de pedras calcárias. (FLOOD; WILSON, 2013).

Fazendo os cálculos, os alunos chegam à conclusão de que trabalhando por vinte anos, três meses no ano, considerando o mês de trinta dias e trabalhando dezesseis horas por dia, os egípcios colocaram (considerando o acabamento) 1,157 pedras por minuto (!). Há muitos exemplos curiosos da História da Matemática a se explorar no processo de ensino e aprendizagem, cativando os alunos.

A próxima seção trata da importância que damos ao ensino da teoria, mas também da experimentação.

## 4.1 A Teoria e a Experimentação

Inicialmente, na sala de aula chamada “convencional” foi transmitida aos alunos, em uma escola, a Conceituação de poliedros, conforme enfatizou Lima (1999). Essa escola pública apresenta lousa interativa, conforme apresenta a figura 33.

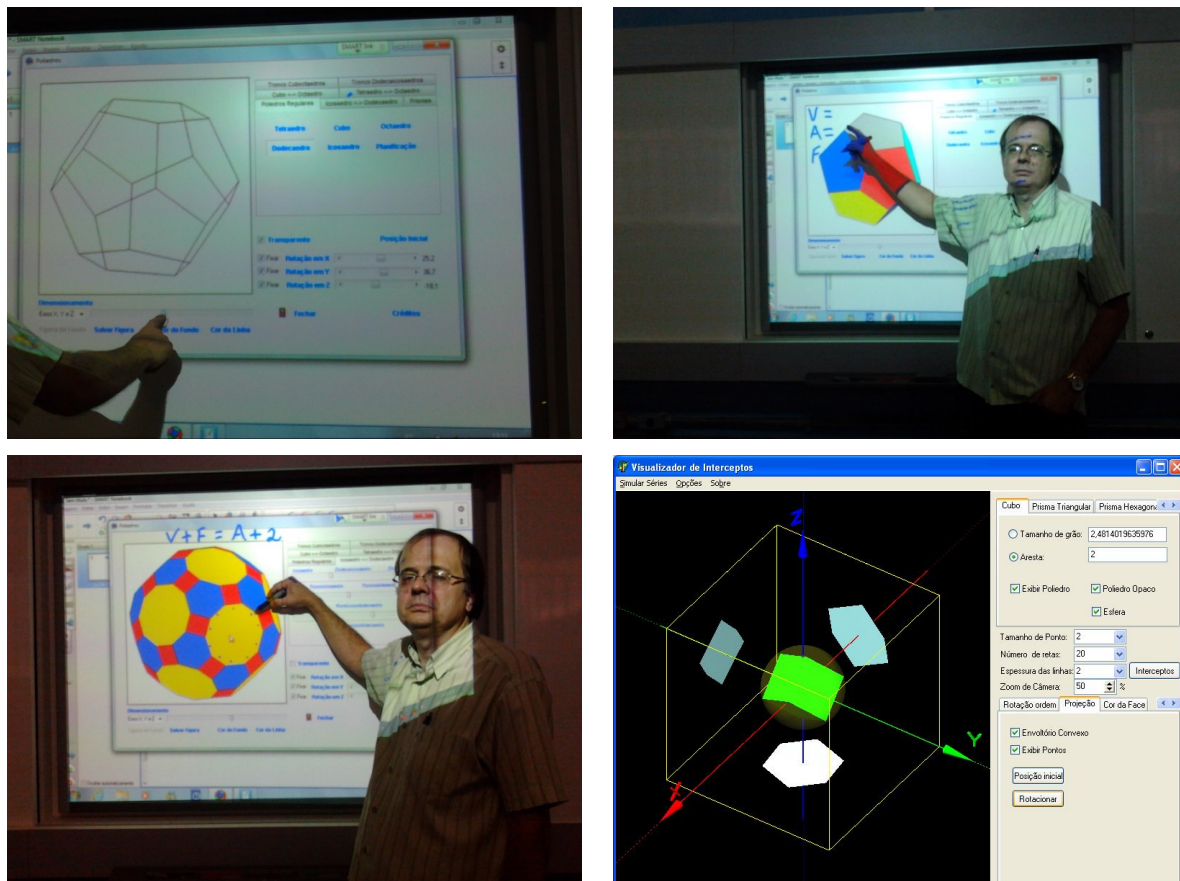


Figura 33 – A Conceituação auxiliada por recursos computacionais e lousa interativa.

Na segunda escola pública não há lousa interativa, entretanto os mesmos softwares empregados na primeira escola foram utilizados para auxiliar na transmissão de conceitos em conjunto com um quadro branco e canetas marcadoras coloridas.

Observamos resultados similares nas duas escolas, mas o quadro interativo é mais chamativo, pois permite maior interação do professor com os recursos didáticos. Os alunos, em sua maioria, prestavam mais atenção na aula com lousa interativa.

Num segundo momento, partiu-se para a manipulação (nas turmas das duas escolas): exercícios teóricos sobre o assunto abordado (Conceituação) anteriormente. Esses exercícios constituíam uma lista de exercícios (ver anexo 1 no CD). Os exercícios foram corrigidos e

devolvidos aos alunos. Num terceiro momento, partiu-se para a experimentação como a apresentada no vídeo norte americano Working with platonic solids materials - The Visual Geometry Project (PRESS, 1991).

Enfatizamos a teoria necessária. Como a relação de Euler para poliedros eulerianos, como destaca o currículo mínimo de Matemática do Estado do Rio de Janeiro.

Foram trabalhos poliedros regulares, semirregulares, convexos e não convexos (estrelados inclusive) com materiais concretos. Os resultados foram similares nas duas escolas. Enfatizamos que o trabalho em equipes viabilizou a construção de sólidos com muitas faces ou facetas. As figuras 34 e 35 apresentam alguns poliedros trabalhados e montados ou produzidos pelos estudantes.



Figura 34 – A construção de poliedros em sala de aula por alunos do Ensino Médio.

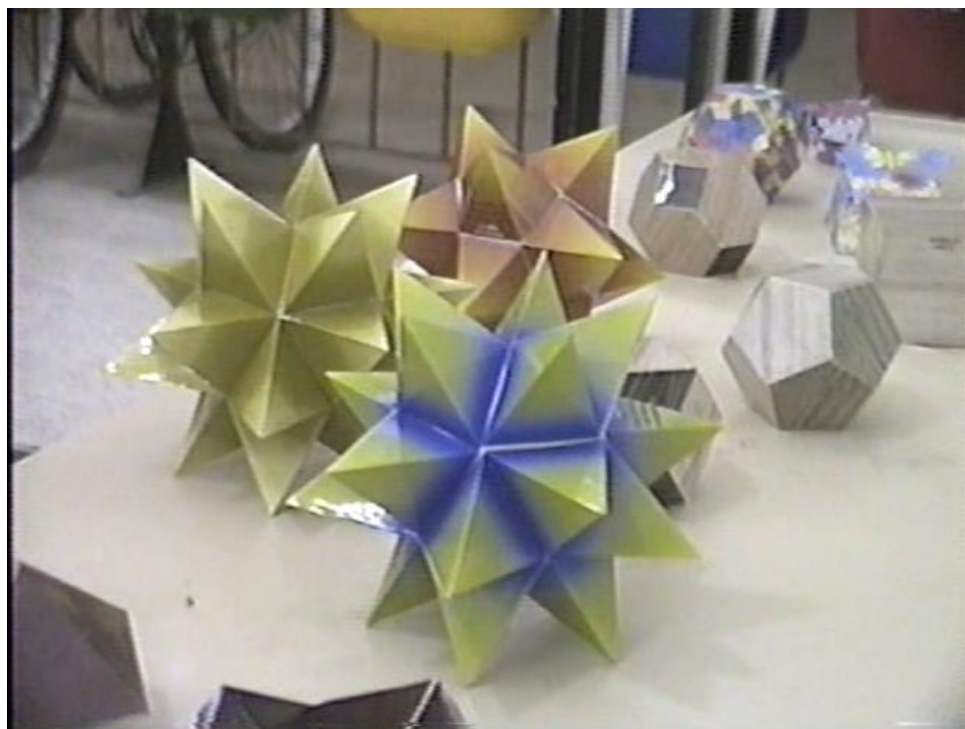


Figura 35 – O resultado obtido com alunos do Ensino Médio.

Os sólidos foram usados para discutir questões como as apresentadas na folha apresentada na figura 36, extraída de Machado (1990), além de questões como mostrar com polígonos regulares a possibilidade de existência ou não de determinados poliedros sob condições de existência impostas (como a não existência e poliedros regulares com faces hexagonais, por exemplo). Observamos que muitos alunos comparavam o que estudaram ou viram de conceituação e comparavam com as construções efetuadas e seus elementos.

# vivendo a matemática

Nas atividades que se seguem, você reencontrará algumas das questões tratadas ao longo do livro-texto, embora enunciadas de uma outra maneira.

Quando necessário, releia o texto para compará-las com o que já foi discutido anteriormente.

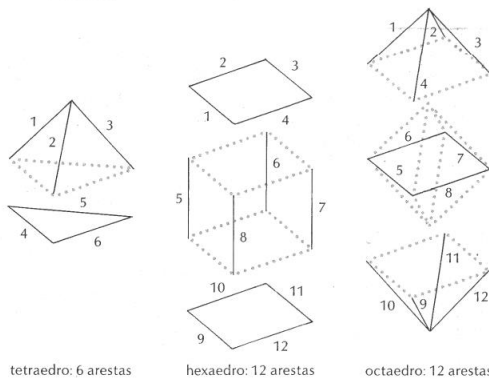
Caso você não consiga responder a algumas das questões, troque idéias com os colegas e com o professor.

1. Você já sabe que um poliedro tem **faces**, que são polígonos; **vértices**, que são os pontos onde várias faces se encontram formando um bico; e **arestas**, que são os lados dos polígonos que constituem as faces.

Vimos também que só existem cinco tipos de poliedros regulares: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

Agora, perguntamos: quantas **arestas** tem cada um desses poliedros?

No caso dos três primeiros, é muito simples **contar diretamente** as arestas.



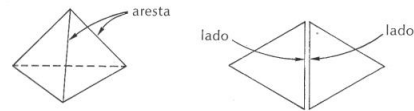
## os poliedros de platão e os dedos da mão

nilson José machado

Em outros casos, como por exemplo no icosaedro ou no poliedro parecido com a bola de futebol (20 hexágonos e 12 pentágonos), é muito fácil perder-se na contagem direta.

Existe um modo simples de descobrir o número de arestas de um poliedro sem precisar percorrê-las uma a uma. Basta que notemos o seguinte:

- as arestas são os lados dos polígonos das faces;
- cada aresta surge quando juntamos dois polígonos, sendo que **dois lados** vão formar **uma aresta**.



Assim, o **número total de arestas** deve ser igual à **metade do número total de lados das faces**.

Por exemplo:

- no tetraedro, que é formado por 4 triângulos, temos 12 lados e, portanto, **6 arestas**.
- no hexaedro, como são 6 quadrados, temos 24 lados e **12 arestas**.
- no octaedro, como são 8 triângulos, temos 24 lados e **12 arestas**.

Experimente, dessa maneira, determinar o número de arestas do dodecaedro, do icosaedro e do "poliedro-bola".

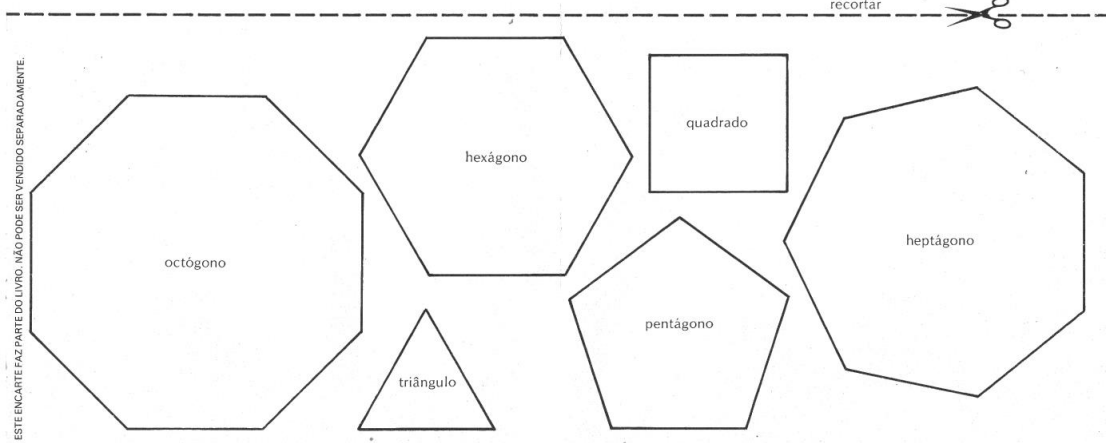
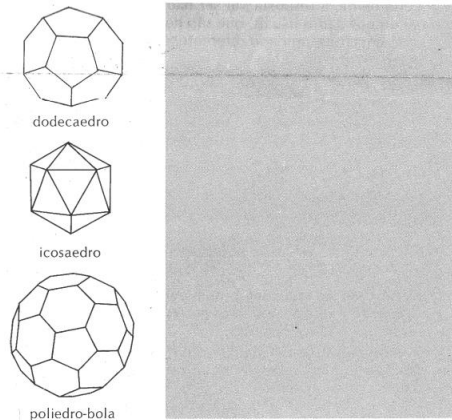


Figura 36 – Folha de exercícios de (MACHADO, 1990).

Na próxima seção dissertaremos sobre a aula no laboratório de informática educativa.

## 4.2 No Laboratório de Informática

Nas duas escolas em que houve trabalho com as turmas, há laboratório de informática educativa. Na primeira está presente o sistema operacional Windows, na segunda há o sistema operacional Linux Educacional. Nosso trabalho consiste no uso softwares, normalmente simples, para o sistema Windows. Para trabalhar esses softwares no Linux Educacional, empregamos o emulador do Windows para Linux Wine.

Numa das atividades, são desenhadas planificações de poliedros regulares em editores de texto (MSWord no Windows e Write no OpenOffice) e os alunos recebem a explicação de como inserir uma imagem (textura ou foto, por exemplo) em suas planificações. Posteriormente, as planificações são cortadas e coladas, obtendo-se o poliedro decorado. A figura 37 apresenta uma dessas planificações elaborada por um aluno e impressa em uma impressora ato de tinta.



Figura 37 – Exemplo de planificação produzida em editor de texto e impressa.

Nesse caso são exploradas com os alunos: simetrias, reflexões, associação do número de faces com eventos ou objetos (meses do ano, ou dados de jogos, etc.). Propomos aos alunos desafios de montar sólidos com imagens como a da figura 38 com suas fotos tiradas em seus celulares.

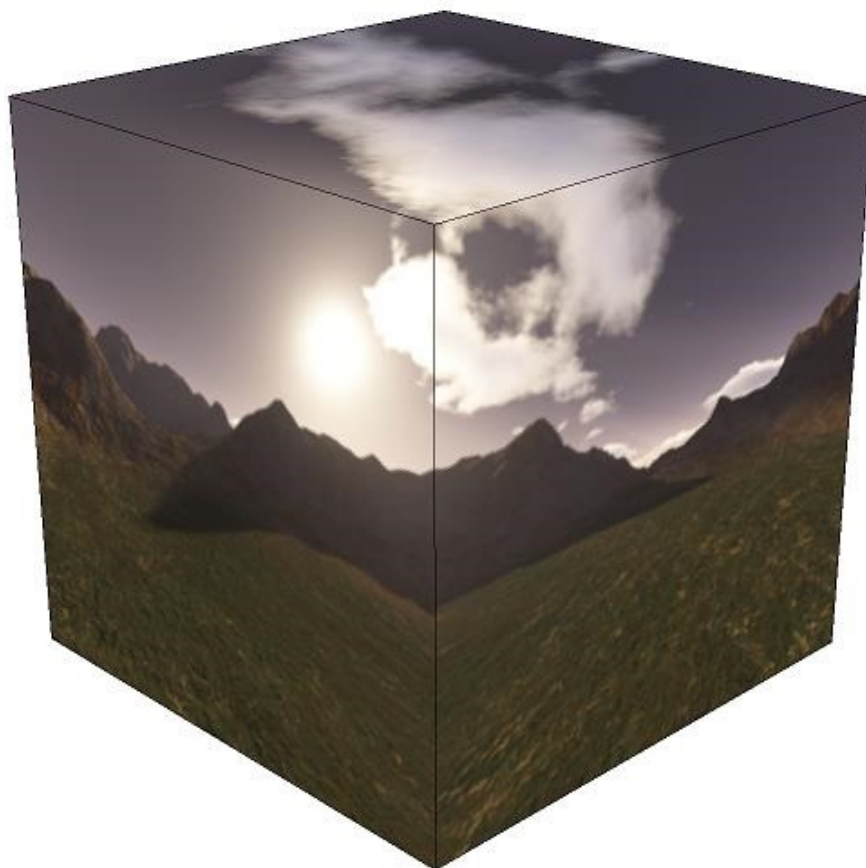


Figura 38 – Exemplo de desafio proposto aos alunos.

Quanto aos poliedros estrelados, os alunos se surpreendem: como é fácil preparar num editor de textos com recursos de desenhos as planificações dos poliedros estrelados. O difícil, afirmam eles, é colar todas as pontas das estrelas. Mas concordam que em equipe fica mais fácil. Também não é fácil decidir quem ficará com qual estrela após a mesma ficar pronta. Além das construções físicas dos poliedros, são trabalhadas transformações e visualizações em softwares de nossa implementação ou de terceiros (mas todos são freeware ou open source).

Por exemplo, podemos transmitir ao aluno no que se transformará um prisma reto quando o número de lados da base aumenta consideravelmente. Observe-se na figura 39 a sequência de imagens que o aluno experimenta no software Poliedros de [Zeferino \(2011\)](#). A resposta à questão parece óbvia e transmite ao aluno do Ensino Médio a noção intuitiva de limite.

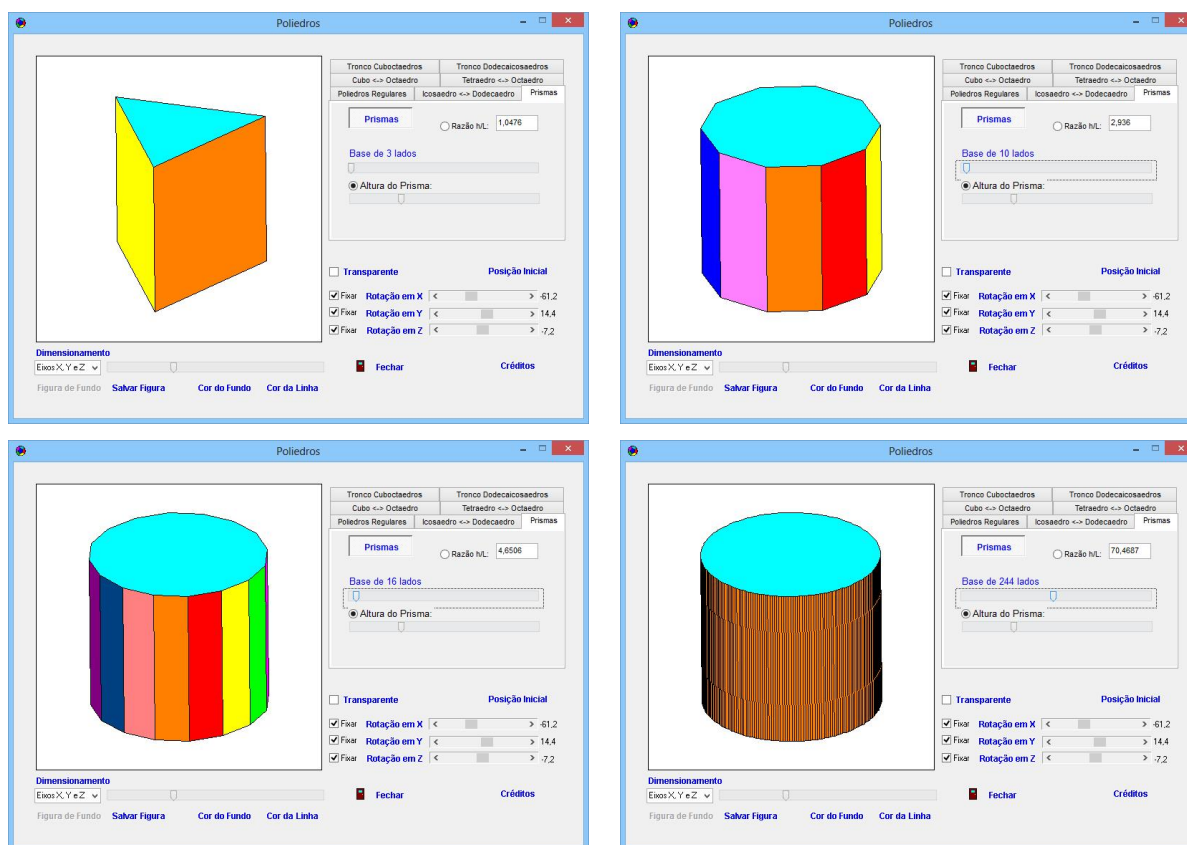


Figura 39 – Simulando o aumento de número de lados da base de um prisma reto.

Também fica fácil mostrar a ideia de dualidade entre os pares de poliedros regulares cubo e octaedro; icosaedro e dodecaedro; e o poliedro impar tetraedro (ele é seu próprio dual). A figura 20c ilustra o caso icosaedro  $\leftrightarrow$  dodecaedro, que experimentado no software de simulação Poliedros, torna perfeitamente clara a relação ou “parentesco próximo” desses dois poliedros. Também se podem mostrar seções de um hexaedro (regular ou não) com muita facilidade em softwares de simulação. Pode-se inclusive criar uma distribuição de frequência de seções aleatórias, com contagem de tipos de polígonos, cálculo de áreas e de perímetros, a figura 40 apresenta um instante desse tipo de simulação e o respectivo gráfico de distribuição de frequência dos tipos de seções observadas. Do mesmo modo, podem ser obtidos os parâmetros de área e de perímetro. O aluno já resolveu alguns desses exercícios na sala de aula em exercícios de manipulação e aplicação, e, compara os resultados presentes em seu caderno.



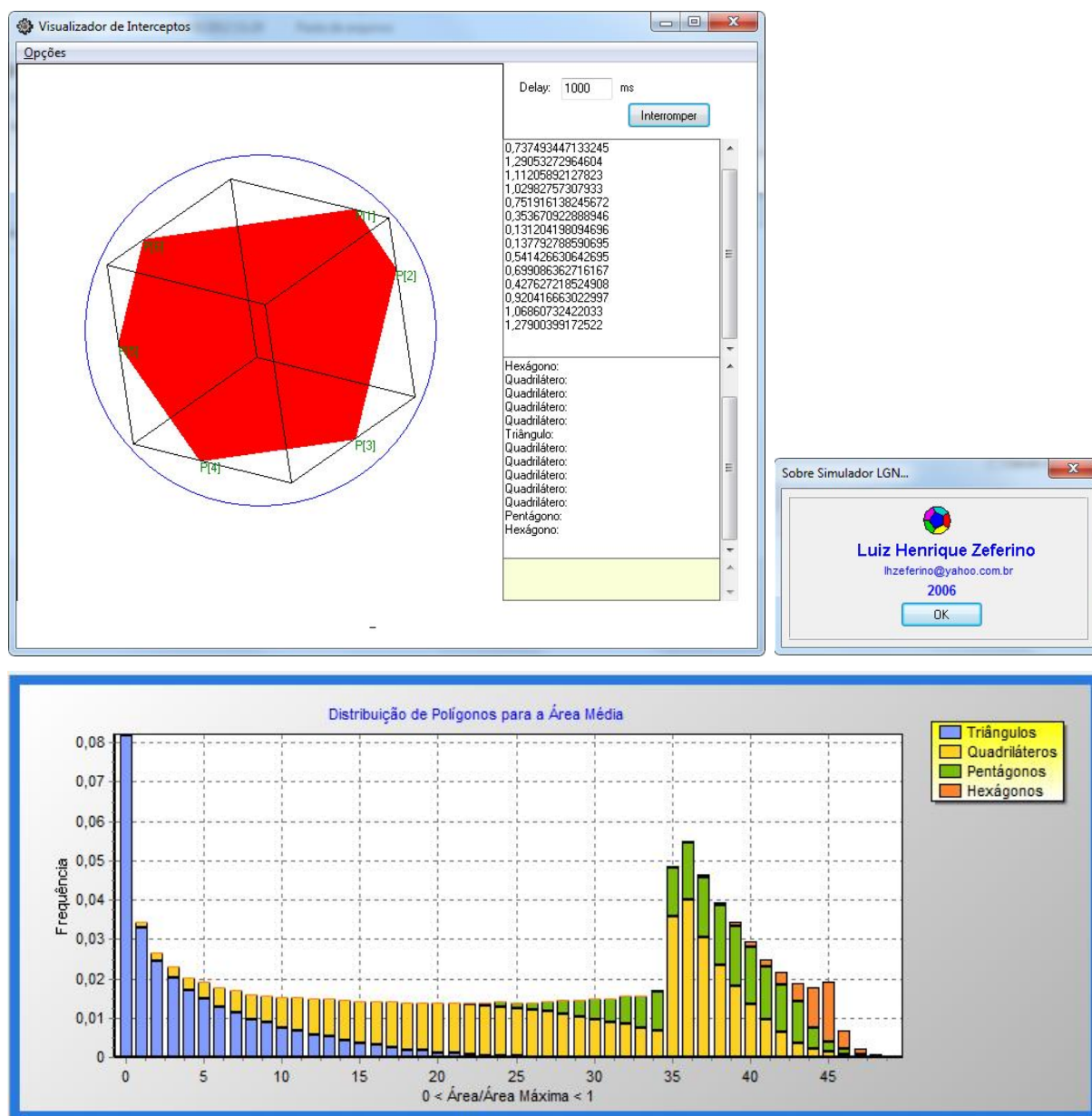


Figura 40 – Simulador de seções de um cubo com os respectivos parâmetros.

Aplicando um pouco das Leis da Física Newtoniana, podemos simular um cubo imerso num fluido e perguntar aos alunos: Qual a seção mais frequente? Por quê? A figura 40 apresenta essa simulação que na verdade é uma aplicação da Matemática na Mecânica dos Fluidos. Os cubos podem ser trocados por outros objetos para análise de alunos no ensino de Física no Ensino Médio.

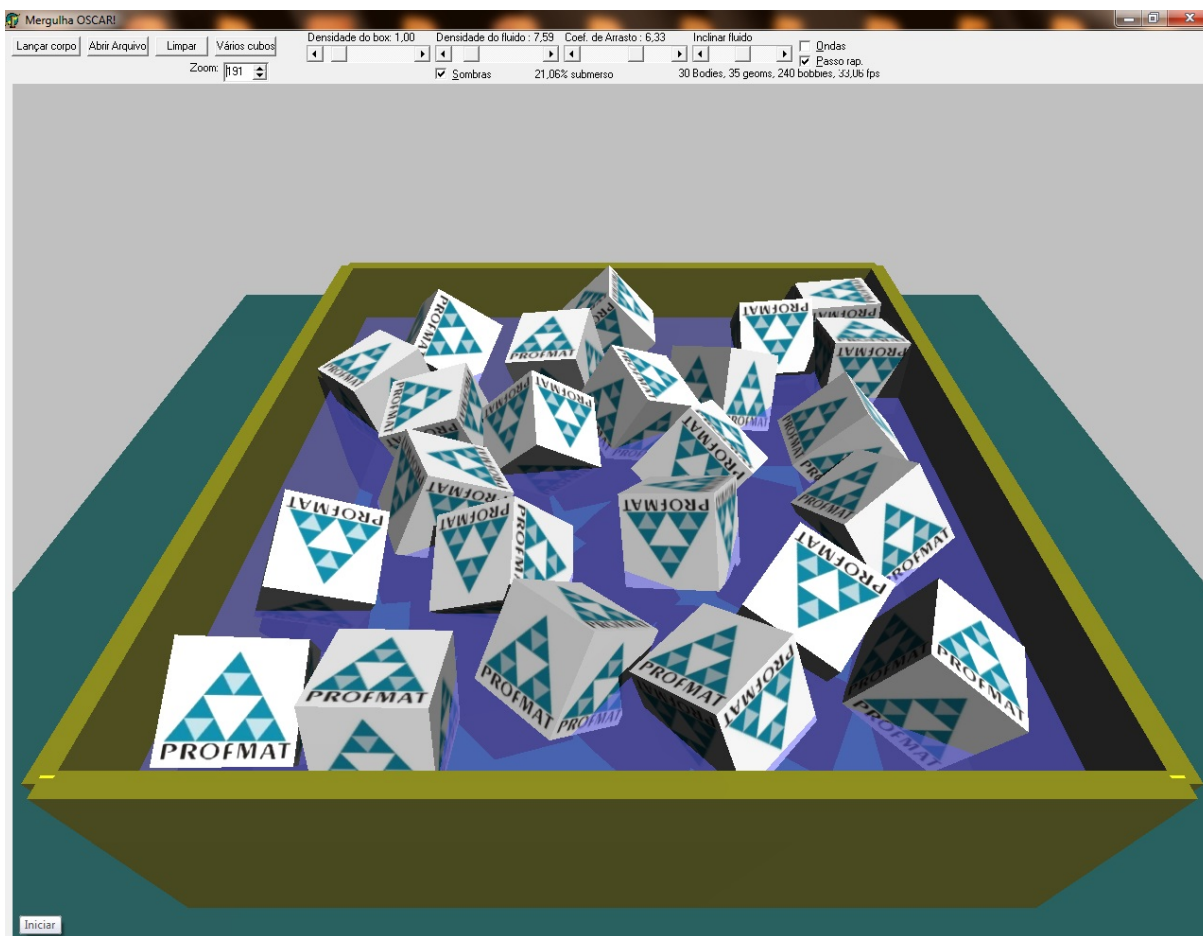


Figura 41 – Simulador de seções de cubos imersos num fluido. Adaptado de Grange (2004)

Observe-se que se acabou de obter um problema interdisciplinar, de uma situação que parecia ser aplicada somente na Matemática.

O que pretendemos mostrar é que há inúmeros recursos para o ensino desse importante tópico do Ensino Médio – os Poliedros – e que podem contribuir para ao menos estimular os alunos no processo de ensino e aprendizagem. Além do mais, concordamos com Lima (1999), mas compreendemos que os recursos materiais e as estratégias de ensino também são muito importantes.

Terminamos o Capítulo, propondo o que indica a figura 40 como as componentes para o bom ensino de Poliedros, modestamente.

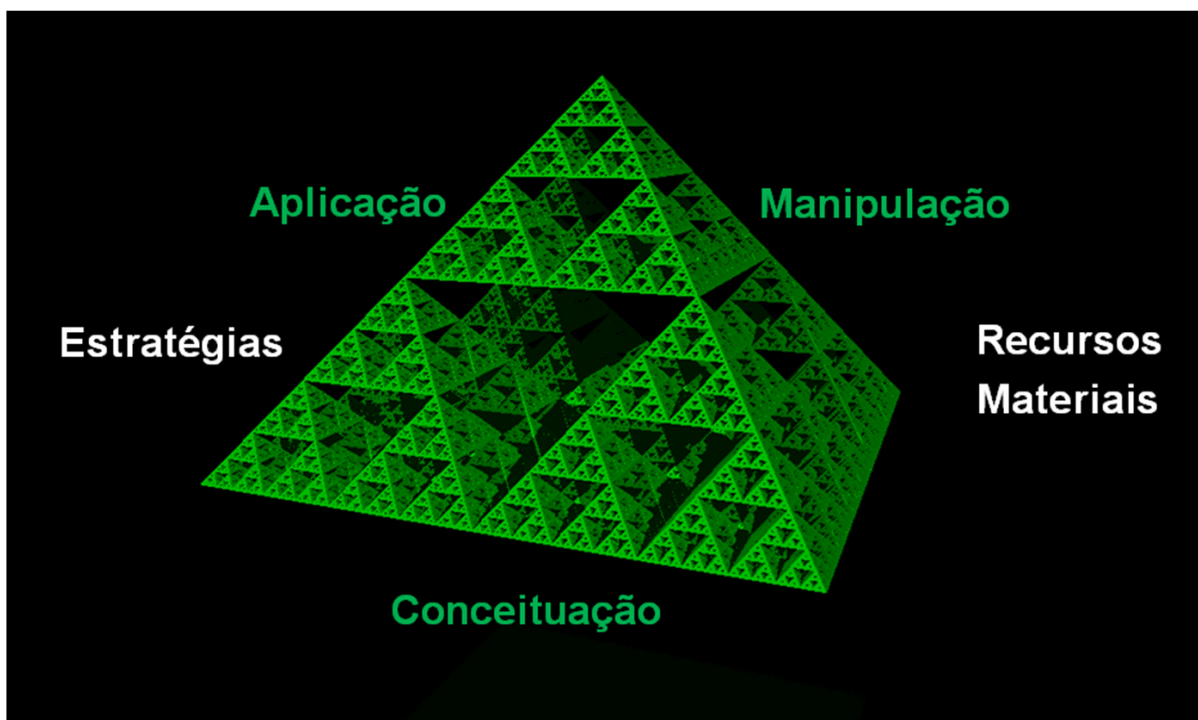


Figura 42 – As componentes para o ensino e aprendizagem de Poliedros.

A próxima seção apresenta as conclusões deste trabalho.

## Conclusões

A ideia central deste trabalho foi apresentar, de uma forma sucinta e introdutória, alguns dos principais conceitos envolvidos na metodologia do ensino de Poliedros, bem como apresentar algumas técnicas e recursos existentes para sua realização desse processo de aprendizagem no Ensino Médio Regular. Além disso, outro objetivo importante foi o de chamar a atenção para as inúmeras possibilidades do emprego de simulação computacional sob a forma acadêmica.

Deve-se destacar que em suas aplicações comerciais em entretenimento e nas possibilidades do seu emprego em aplicações de pesquisa e educacional do conteúdo abordado, este tipo de simulação está relacionado a desafios científicos e tecnológicos maiores, especialmente nas áreas de computação gráfica, engenharia de software e hardware. Alguns alunos perguntam: “Que faculdade devo fazer para fazer esses programas?”.

O que parece ficar claro, para grande parte dos alunos, ao final do processo, é que a criação dos produtos finais só é possível com a cooperação e/ou a colaboração de profissionais de áreas afins, tais como artistas visuais, engenheiros, programadores, arquitetos, matemáticos, entre outros.

Outro ponto relevante a considerar é que há inúmeros recursos para o ensino desse importante tópico do Ensino Médio – os Poliedros – e que esses podem contribuir, e muito, para ao menos estimular os alunos no processo de ensino e aprendizagem. Além do mais, reafirmamos, concordamos com [Lima \(1999\)](#), mas compreendemos que os recursos materiais e as estratégias de ensino são também muito importantes.

Por fim, salientamos que na verdade o professor de Matemática é no fundo um artista, e, que nesses 23 anos de magistério, não encontramos nenhum outro tópico pelo qual nos apaixonamos mais que os Poliedros, assim como o Professor Rangel que sempre viajou pelo Brasil levando seus inúmeros Poliedros.



## Referências

- BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*,. 3. ed. [S.l.]: Editora Harbra, 1980.
- BRASIL. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio Brasileiros - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, Ministério da Educação , Secretaria de Educação Básica, 1998.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEB, 1998.
- BRASIL. *Matemática: ensino médio (coleção explorando o ensino)*. Brasília: MEC/SEB, 2004. 288 p.
- BRASIL. *Química: ensino médio - (Coleção explorando o ensino)*. Brasília: MEC, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 165 p.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Espacial: Posição e Métrica*. 4. ed. [S.l.]: Atual, 1985.
- FLOOD, R.; WILSON, R. *Os grandes matemáticos - As descobertas e a propagação do conhecimentos através das vidas dos grandes matemáticos*. São Paulo: M.Books, 2013.
- GONCALVES, A. *Introdução á Álgebra, Projeto Euclides*. 2. ed. [S.l.]: IMPA, 1987.
- GRANGE, E. *GLScene - Open Solution for Delphi*. 2004. Acesso em 05 jul. 2013. Disponível em: <[http://http://www.glscene.org/](http://www.glscene.org/)>.
- JAIN, R. *The art of computer systems performance analysis: techniques for experimental design, measurement, simulation and modeling*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991. 685 p.
- LIMA, E. L. Conceituação, manipulação e aplicações - os três componentes do ensino da matemática. *Revista do Professor de Matemática*, n. 41, p. 1–6, 1999.
- LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM, 2006.
- MACHADO, J. N. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*. 2. ed. [S.l.]: Scipione, 1990.
- PRESS, K. C. *Working with platonic solids materials-The Visual Geometry Projec*. P.O. Box 2304, Berkeley, CA 94702, 1991.
- RANGEL, A. P. *Poliedros*. [S.l.]: LTC, 1983.
- ROONEY, A. *A história da Matemática - Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito*. São Paulo: M.Books, 2012.

- RUSS, J.; DEHOFF, R. *Practical Stereology*. 2. ed. [S.l.]: New York: Plenum Press,, 1999. 307 p.
- SALDANHA, N. Coordenadas para o icosaedro. *Revista do Professor de Matemática*, n. 38, 1998.
- SEEDUC-RJ. Rio de Janeiro, 2014. Acesso em 11 de jan.2014. Disponível em: <<http://www.conexaprofessor.rj.gov.br/>>.
- UNDERWOOD, E. E. *Quantitative Stereology*. New York: Addison-Wesley Pub. Co, 1970. 274 p.
- ZEFERINO, L. H. *Capacitação de Professores do Ensino Médio da Região Central de Campos e o Uso de Tecnologia de Informação na Prática Docente*. In: *Inovação Tecnológica*. UENF. CCT-LEPROD, *mim.*, 15p. 2001.
- ZEFERINO, L. H. O computador na sala de aula. *Revista do Professor de Matemática*, n. 75, p. 47–50, 2011.

# Anexos



# ANEXO A

