Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

A Matemática do GPS

Expedito Henrique Ulisses Pereira

Teresina - 2014

Expedito Henrique Ulisses Pereira

Dissertação de Mestrado:

A Matemática do GPS

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2014

Pereira, E.H.U.

xxxx A Matemática do GPS.

Expedito Henrique Ulisses Pereira – Teresina: 2014.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.

1. Área de Concentração

CDD 516.36

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **A Matemática do GPS**, defendida por **Expedito Henrique Ulisses Perreira** em 25/04/2014 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Paulo Alexandre A. Souza

Presidente da Banca Examinadora

Jurandir de Oliveira Lopes

Examinador

Pedro Antonio Soares Júnior

Examinador Externo

Dedicatória. À Minha Família.

Agradecimentos

Ao chegar ao final de mais uma etapa da minha vida, quero agradecer ao Senhor Deus, o todo poderoso, por tudo que tenho na minha vida.

Agradeço a todos aqueles que não estão nesse plano que juntamente com Deus me guiaram e ajudaram a trilhar esse caminho sem baixar a cabeça em nenhum momento.

Agradeço à minha família, em especial minha mãe Alda, meu irmão Rodrigo, minha sobrinha Rafaela, minha irmã Mariana e minha amiga Fátima por todo apoio que me deram nas horas difíceis e entenderem as minhas ausências em momentos que eu deveria está presente.

Agradeço ao meu Orientador e professor Paulo Alexandre que aceitou de prontidão ao meu convite e norteou nessa fase da minha vida e aos meus professores da Pós - Graduação por toda dedicação e zelo quando passavam o conhecimento na sala de aula.

Agradeço aos meus amigos TFR's, amigos do futebol e amigos do peito que tanto me apoiaram quando precisei. Agradeço também aos meus amigos da graduação que me ajudaram quando sentia dificuldades e nas prosas depois das aulas.

Agradeço à SBM pela iniciativa de implementar esse programa que elava o nível de professores, bem como a da educação no Brasil.

Agradeço aos membros da Banca Examinadora que aceitaram prontamente o convite e nos honraram com suas presenças e contribuições.

Agradeço a todos que, direto ou indiretamente, contribuíram para que este sonho pudesse ser realizado.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"*Corte sua própria lenha. Assim, ela aquecerá você duas vezes*".

Henry Ford.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo evidenciar a matemática envolvida no Sistema de Posicionamento Global (GPS). Após uma abordagem histórica que evidencia a evolução dos meios de localização até chegarmos a essa tecnologia, entenderemos como foi desenvolvida a Matemática utilizada no GPS, para isto utilizaremos resultados da geometria plana, espacial e analítica. Evidenciaremos alguns princípios básicos da Física (velocidade média, velocidade da luz e efeito Doppler) e algumas definições como latitude, longitude e altitude pra entender como esse magnífico sistema pode localizar, com notável precisão, pessoa, veículo ou qualquer outro objeto que tenha um receptor GPS.

Palavras Chaves: Sistema de Posicionamento Global(GPS), satélites, globo terrestre.

Abstract

This study aims to show the math involved in Global Positioning System (GPS). After a historical approach that explains the evolution of the location means until we get this technology,it is possible to understand how math was developed when we use GPS. For this, results of the plain, spatial and analytical geometry will be used, as well as linear algebra involved in this localization system. Some basic Physics principles will be highlighted, such as average speed, speed of light and Doppler effect, as well as latitude, longitude and altitude, in order to understand how this magnificent system can accurately locate a person, vehicle or any other object that has a GPS receiver.
Keywords: Global Positioning System (GPS), Satellites, terrestrial globe.

Sumário

Introdução

A tentativa de se localizar foi um grande desafio do homem desde os primórdios da humanidade, mas para saber responder onde estava, a humanidade passou por um processo de evolução bastante interessante. Conforme fica relativamente evidenciado no livro "A matemática das Coisas"de Nuno Crato e outras publicações citadas nas referências bibliográficas e na referência [6].

O problema só foi resolvido quando entrou em funcionamento o GPS. É claro que, antes dele, existiam outros meios de localização, mas nada que se compare ao Sistema de Posicionamento Global. Esse sistema nos permite relacionar a Física, a Matemática e a Geografia tornando um projeto interdisciplinar bastante amplo. Em sua essência, o GPS está repleto de Geometria básica e avançada e além disso, conhecimentos físicos bastante complexos, mas nesse trabalho nos deteremos a explicar os aspectos matemáticos e o básico de Física e Geografia para entendermos como funciona esse magnífico sistema.

Os capítulos desse trabalho estão organizados de maneira que possamos entender desde o surgimento das primeiras ideias de localização que encontramos no histórico, o embasamento matemático e geográfico que encontramos na geometria do globo terrestre, em "Como funciona o GPS"no capítulo 3 aprenderemos como se localiza um receptor e teremos uma ideia de como podemos aplicar esse estudo no cotidianos dos alunos. Explanaremos também os possíveis erros que interferem nesse sistema.

É claro que para explicarmos todo esse sistemas tivemos auxílio de gigantes que iremos citar no decorrer do trabalho.

Capítulo 1

Noções Históricas

O processo de localização se deu através da evolução de diversos instrumentos e ideias. Nesse capítulo iremos mostrar um pouco desse processo evolutivo e algumas figuras para melhor entendimento, conforme as referências [1], [4], [6], [7] e [10]. Nos primórdios, os referenciais como árvores, rios, montanhas, pedras, dentre outros não eram uma maneira segura de localização devido aos seus desgastes e mutabilidades servindo para pequenos deslocamentos e logo ficaram ultrapassados com a evolução da sociedade. A busca continuava por meios de localização mais seguro e foi aí que o homem olhou para o céu encontrando um referencial imutável como as estrelas e astros que poderiam guiá-los, de maneira confiável, por distâncias bem maiores. A partir daí começava uma série de estudos para inventar instrumentos que pudessem orientá - los em seus deslocamentos. Conheceremos agora alguns desses instrumentos.

I) Balestilha - conjunto com duas varas graduadas perpendiculares entre si de modo que uma deslize sobre a outra. Para utiliza-lá desvia-se o olhar por uma extremidade de maior vara e mover a menor de modo a visualizar simultaneamente, por suas extremidades a linha do horizonte e astro.Este instrumento foi largamente utilizado na época dos descobrimentos nos séculos XV e XVI.

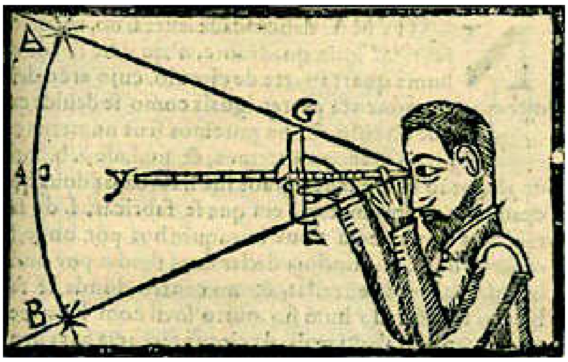


Figura 1.1: Balestilha

II) O Kamal - Pequena tábua quadrada ou retangular presa a uma corda com nós, que era erguida a altura dos olhos e suas bordas opostas eram alinhadas com o horizonte e a estrela polar, respectivamente. A corda era presa aos dentes e esticada de modo que os nós determinavam o ângulo de elevação. Foi utilizado entre os séculos XVIII e XIX.

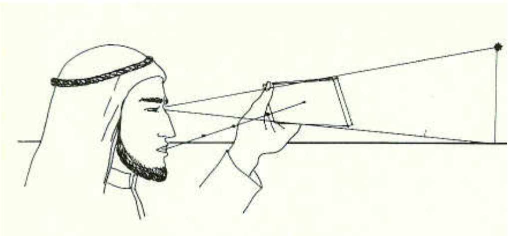


Figura 1.2: Kamal

III) O Astrolábio - roda graduada que tem, presa ao seu centro, uma seta móvel que quando alinhada com o astro, indicava, na roda, a altura do mesmo. Esse instrumento foi bastane utilizado pelos Persas no século XVIII.

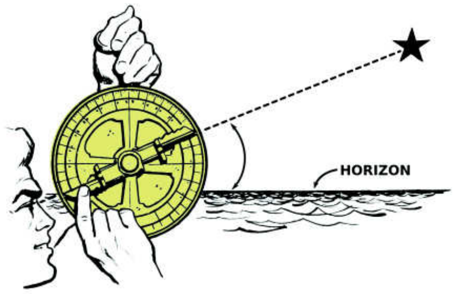


Figura 1.3: Astrolábio

IV) O Quadrante - quarta parte de um círculo graduado em sua borda, feito com madeira ou latão e com duas miras em um dos lados retos. Mirando no astro determinava-se, por um fio prumo preso ao centro do arco, o ângulo de elevação do astro. Esse instrumento foi largamente utilizado no século XVIII.

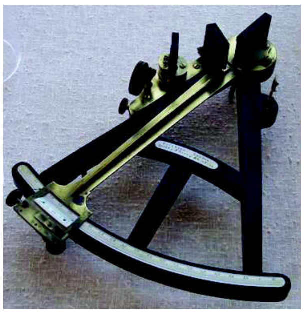


Figura 1.4: Quadrante

V) Bússola (agulha metálica, magnetizada, suspensa pelo centro de gravidade de modo a girar livremente e apontando sempre para o polo sul magnético da terra que equivale ao polo norte geográfico) que, no período das grandes navegações, foi amplamente utilizada assim como os instrumentos acima citados.

Figura 1.5: Bússola

Mesmo com todos esses recursos existiam limitações, uns só poderiam ser utilizados quando estivesse nublado e por isso a busca de instrumentos mais confiáveis continuava. Com o avanço da ciência e a descoberta da forma da terra, foram criados conceitos como latitude e longitude, sendo a primeira facilmente determinada através da estrela polar. No entanto, a segunda exigia a determinação da diferença entre o horário local e a horário de Greenwich (cada hora equivale a 15 graus, já que $\frac{360}{24} = 15$). Entretanto, os relógios não eram confiáveis, pois não suportavam as intempéries marítimas.

Em 1761 o inglês John Harrison desenvolveu os cronômetros marítimos que tinham compensadores de dilatação térmica e peças resistentes a desgastes, mas mesmo com todos esses avanços o homem ainda não tinha um meio eficiente de localização.

Somente quando o homem começou a utilizar ondas de rádio para localizar veículos e tropas, durante a segunda guerra mundial, o processo de localização teve seu grande avanço. Isso era feito com o auxílio do efeito Doppler que relaciona a velocidade do móvel com a diferença entre as frequências com que as ondas de rádio incidem e refletem e assim determinavam as distâncias até as emissoras. A localização era definida pelo processo de trilateração, três circunferências, cuja intersecção é um único ponto. "*LORAN*"(long rangenavigation - navegação de longo alcance em inglês), "*Decca*"e "*Ômega*"são exemplos de sistemas desenvolvidos com essa tecnologia. Tais sistemas apresentavam limitações como o pequeno alcance dos sinais de rádio e da disponibilidade de um número pequeno de estações. Iniciando a corrida espacial com o lançamento do satélite Sputnik 1, pela antiga União Soviética em 1957 e a contrapartida americana com o satélite Explorer 1 em 1958 foi criado o primeiro sistema de navegação por satélite, baseado no efeito Doppler, em 1960 quandos os Estados Unidos lança o satélite Transit 1B. No entanto, esse sistema era bidimensional e seu uso ficou restrito a navegação devido a interferências nos satélites e por calcular posições de móveis em baixas velocidades.

Em 1973 começou a se desenvolver o projeto que iria revolucionar o processo de navegação mundial, esse recebia investimentos e melhorias constantemente e em 1991 entrou em pleno funcionamento O NAVSTAR/GPS (Navigation Satellite with Time and Ranging / Global Positioning System) sendo que sua autoria foi atribuída a pelo menos três americanos:

a)O astrofísico Ivan Getting (1912 - 2003);

b)O engenheiro Bradford Parkinson (1935 -);

c)O físico Roger L. Easton (1921 -),

os quais foram premiados pelo feito por diferentes instituições cientificas.

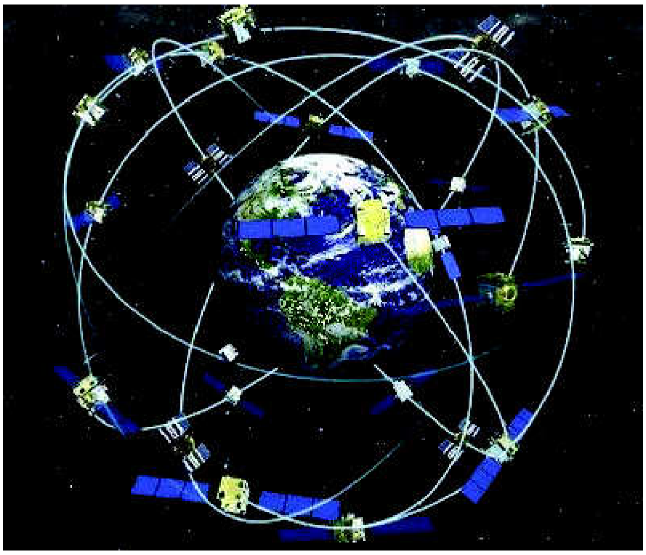
Existem outros sistemas de localização como o GALILEU (Europeu), Compass (Chinês) e a renovação dos satélites GLONASS (lLobal'naya Navigatsionnay Sputnikovaya Sistema- Russo), mas estão muito longe da tecnologia envolvida no GPS.

O GPS, no início, era de uso exclusivamente militar, mas como em tantas outra inovações tecnológicas foi liberado para o uso civil. A liberação foi incentivada quando um avião comercial americano invadiu o espaço aéreo russo e foi abatido por mísseis. Os americanos temendo que o sistema fosse utilizado contra eles, distorceram o sinal que ocasionava baixa precisão da localização. Somente em 2000, a dirtorção do sinal foi corrigida permitindo que uma pessoa, munida de um receptor pudesse determinar em tempo real informações como: latitude, longitude, altitude e velocidade.

O System Global Positioning (Sistema de Posicionamento Global), trata-se de uma constelação de vinte e quatro satélites, orbitando em torno da Terra a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, permitindo a receptores conhecer sua posição em qualquer lugar sobre a Terra com uma notável precisão.

O sistema do GPS, está dividido em três partes, um segmento espacial (os satélites), um segmento de controle (as estações terrestres de gerenciamento) e um segmento do usuário.

O primeiro segmento é o espacial, formado por vinte e quatro satélites, cada um pesa 1600 kg são movidos à luz solar trafegando em 6 órbitas cada uma com 4 satélites e espaçadas 60 graus uma da outra e inclinadas em 55 graus em relação ao plano que contém a linha do Equador, estáveis e predeterminadas em um período de 11 horas e 58 minutos. Isso assegura que todo ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, esteja visualizado por pelo menos quatro satélites. Várias áreas da Terra são, por alguns momentos, visualizadas por até dez satélites acima da linha do horizonte. Cada satélite dispõe de quatro relógios de alta precisão dois de césio e dois de rubídio.



O segundo segmento é o de controle, formado por 5 estações localizadas estrategicamente nas proximidades da linha do Equador: Colorado Springs (EUA) - principal estação que controla todo o sistema, Havaí (no Pacífico), Kwajalein (Ilhas Marshall, no Pacífico), Ilha de Ascensão (no Atlântico Sul), Ilha de Diego Garcia (no Índico). As estações rastreiam os satélites, atualizam as suas posições orbitais, calibram e sincronizam os seus relógios. Outra função importante é determinar as órbitas de cada satélite e prever a sua trajetória nas 24 horas seguintes, essas informações são transmitidas a cada satélite para depois serem transmitidas, por este, ao receptor.

O terceiro segmento é o do usuário que é um aparelho receptor usado para receber e converter o sinal GPS em posição, velocidade e tempo. Inclui, ainda, todos os elementos necessários nesse processo, como as antenas e software de processamento.

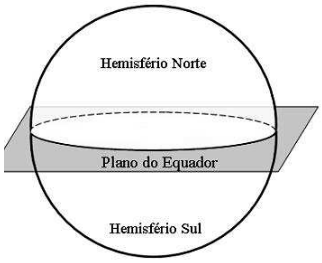
Capítulo 2

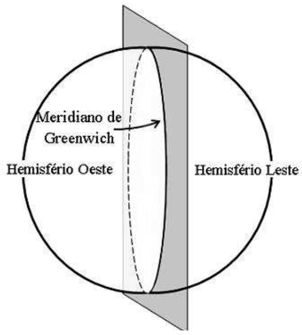
O Globo Terrestre e sua Geometria

Nesse capítulo, iremos definir conceitos ligados à localização como latitude, longitude, meridianos e paralelos e também provar alguns teoremas de geometria plana, espacial e analítica e relembrar alguns tópicos da álgebra linear os quais podem ser encontrados nas referências [1], [5], [6] e [7]. Com isso, teremos o embasamento necessário para entender a matemática utilizada no GPS.

2.1 Coordenadas Geocêntricas

Para o melhor entendimento da geometria envolvida no GPS, iremos definir alguns elementos já conhecidos de nossa vida acadêmica. Supondo que a terra seja uma esfera, chamaremos de eixo polar a reta que contém o centro da terra e ao redor do qual a mesma desenvolve o movimento de rotação. A interseção do eixo polar com a superfície da terra chamaremos de polo norte (N) e polo sul (S). O plano do Equador (plano que contém o centro da terra) é perpendicular ao eixo polar e a divide em duas partes chamadas hemisfério norte e hemisfério sul. Esse plano determina com a superfície terrestre uma circunferência que é chamada de linha do equador. Planos paralelos ao plano do equador e a intersectam com a superfície terrestre em circunferências chamados paralelos. Os Meridianos são semicircunferências com extremidades nos polos. O meridiano de Greenwich é o mais importante, onde, por definição, a longitude é zero grau e divide a terra em duas partes hemisfério oeste e hemisfério leste. As ilustrações a seguir refletem o que foi explicado acima.

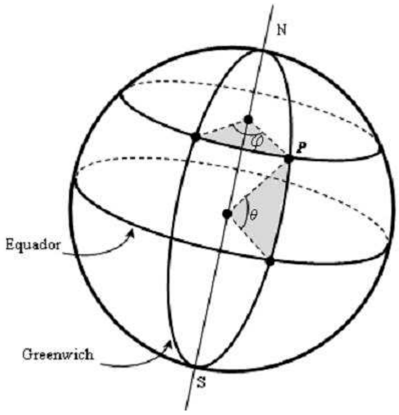




Vamos definir agora dois elementos essências para localização:

Definição 1. *Dado um ponto* P *na superfície terrestre a Latitude de* P *é a medida (em graus, minutos e segundos) do arco que vai de* P *até o Equador e que está contido em um meridiano. A latitude se mede de 0 grau a 90 graus e, dependendo do hemisfério onde* P *está, é classificada em* N *(North - Norte em inglês) ou* S *(South - Sul em inglês).*

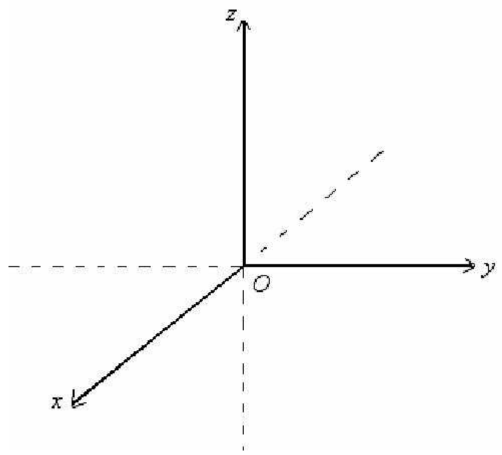
Definição 2. *Dado um ponto* P *na superfície terrestre a Longitude de* P *é a medida (em graus, minutos e segundos) do arco que vai de* P *até o Meridiano de Greenwich e que está contido em um paralelo. A longitude mede de 0 grau a 180 graus e, dependendo do hemisfério onde* P *está, é classificada em* E *(East - leste em inglês) ou* W *(West - oeste em inglês).*



2.2 Sistemas de Coordenadas no Espaço

Apresentaremos agora importantes definições, lemas e teoremas para entendermos o processo de localização através de um aparelho de GPS, conforme pode ser vista na referência [5].

O sistema de coordenadas ortogonais no espaço é formado por três eixos: OX, OY e OZ, de mesma origem O e dois a dois perpendiculares entre si.



Cada par de eixos define um plano coordenado. Assim, têm-se três planos coordenados: xy, yz e zx.

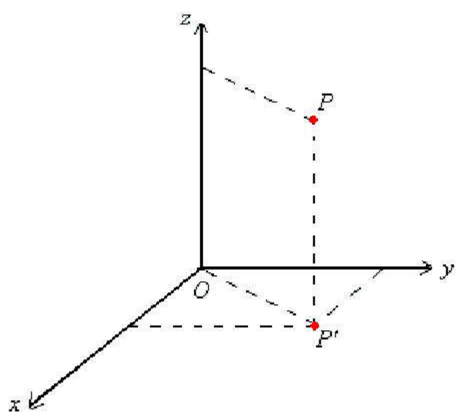
Dado um sistema de coordenadas no espaço, a cada ponto do espaço pode ser associada uma coordenada composta por três números (x, y, z), obtidos da seguinte forma:

1- Por P traça-se uma reta paralela ao eixo OZ.

2- A interseção dessa reta com o plano xy é o ponto P'.

3- As coordenadas de $P'(x, y)$ no sistema de coordenadas xy são as duas primeiras coordenadas de P.

4- A terceira coordenada de P é igual ao comprimento do segmento PP', se P estiver acima do plano xy, e ao comprimento PP' com sinal negativo, se P estiver abaixo do plano xy.

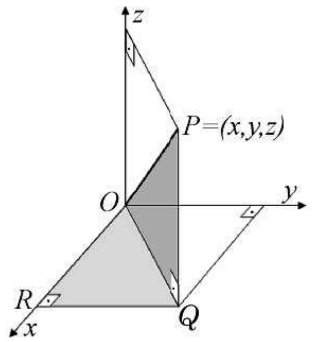


$P = (x, y, z)$

2.3 Distância entre dois pontos

Dados os pontos $P = (x, y, z)$ e Q (projeção de P sobre o plano Oxy) do espaço em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O, ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras, primeiramente no triângulo $\triangle QOR$, determinamos a distância $d(O, Q) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e depois, no triângulo $\triangle OPQ$, concluímos que a distância de P até O é dada por:

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

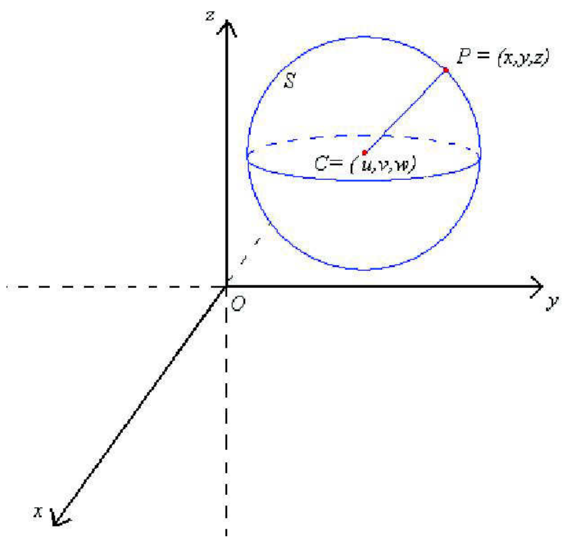


De modo geral, a distância entre dois pontos $P = (a, b, c)$ e $O = (x, y, z)$ é dada por:

$$d(P, O) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}.$$

2.4 Superfície Esférica e Esfera

Definição 3. *Dado um ponto* C *e um número real* R*, chamamos de superfície esférica de raio* R *e centro* C*, indicada por* S*, o conjunto de todos os pontos* P *do espaço tais que* $d(P, C) = R$*, onde* $d(P, C)$ *denota a distância entre* P *e* C*. Na figura o ponto* P *pertence à superfície esférica.*



Definição 4. *: Dado um ponto* C *e um número real* r*, chamamos de esfera de raio* r *e centro* C*, indicada por* S'*, o conjunto de todos os pontos* P *do espaço tais que* $d(C, P) \leqslant r$ *que pode ser imaginada com o auxílio da figura acima.*

Seja $C = (u, v, w)$ centro de S, então P pertence a S se, somente se, $d(C, P)^2 = r^2$. Então:

$$d(C, P) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2}$$

ou

$$(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2=r^2. \qquad (1)$$

A equação (1) é denominada equação reduzida de S. Desenvolvendo-se os quadrados de (1), obtém-se:

$$x^2+y^2+z^2-2xu-2yv-2zw+u^2+v^2+w^2-r^2=0$$

sendo a, b, c e d números reais tais que $a=-2u$, $b=-2v$,$c=-2s$ e $d=u^2+v^2+w^2-r^2$, logo a equação ficará escrita da seguinte maneira:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \qquad (2)$$

que é chamada de equação geral da superfície esférica.

Nem toda equação escrita na forma da equação (2) é uma superfície esférica, pois é necessário que, quando escrita na forma da equação (1) r seja positivo e como

$$r^2=u^2+v^2+w^2-d=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d}.$$

Então,

$$r>0 \text{ } se \text{ } a^2+b^2+c^2>4d.$$

Exemplo 1 : Verificar se $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+17=0$ representa uma superfície esférica.
Resolução:
Basta completar quadrados.

$$x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z=-17$$

$$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)+(z^2-2z+1)=-17+4+9+1$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=-3\leqslant 0.$$

Assim, a equação $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+17=0$ não representa uma superfície esférica e sim um conjunto vazio, visto que não existem x, y e z tais que a soma de seus quadrados seja negativa.

Exemplo 2: Uma equação que tem centro $C=(2,4,6)$ e raio $r=5$ tem equação reduzida:

$$(x-2)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=5^2$$

e desenvolvendo os quadrados, terá a seguinte equação geral:

$$x^2+y^2+z^2-4x-8y-12z-31=0.$$

2.5 Pontos Coplanares

Lema 1. *Os pontos* A, B, C *e* D *em* $\mathbb{R}^3$ *são coplanares se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} = 0,$$

onde cada linha é dada pelas coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB} = B-A$, $\overrightarrow{AC} = C-A$ *e* $\overrightarrow{AD} = D-A$.

Demonstração. Se quatro pontos distintos A, B, C e D do $\mathbb{R}^3$ são coplanares, então $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ também são coplanares logo, um desses vetores é combinação linear dos demais. Iremos supor que $\overrightarrow{AB}$ seja combinação linear de $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$, então $\overrightarrow{AB} = x.\overrightarrow{AC} + y.\overrightarrow{AD}$ onde $x, y \in \mathbb{R}$, logo temos que $B - A = x.(C - A) + y.(D - A)$ então:

$$\begin{vmatrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x.(C-A)+y.(D-A) \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x.(C-A) \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y.(D-A) \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix}.$$

Portanto, segue que

$$\begin{vmatrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} = x.\begin{vmatrix} C-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} + y.\begin{vmatrix} D-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix}.$$

como os determinantes possuem linhas iguais, temos:

$$\begin{vmatrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} = x.0 + y.0 = 0.$$

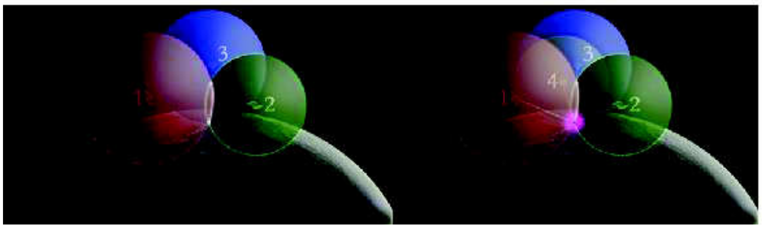
Para a volta, suponha que

$$\begin{vmatrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} = 0.$$

Teremos dois casos, uma possibilidade é que um dos vetores seja nulo. Vamos supor que seja o vetor $\overrightarrow{AB} = B - A$. Logo teremos que $A = B$, que é um absurdo, pois são pontos distintos. A outra possibilidade é que um dos vetores linha seja combinação linear dos outros dois. Novamente vamos supor que $\overrightarrow{AB}$ seja combinação linear de $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$, então $\overrightarrow{AB} = x.\overrightarrow{AC} + y.\overrightarrow{AD}$, onde $x, y \in \mathbb{R}$, logo temos que $B - A = x.(C - A) + y.(D - A)$ o que implica que o vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são coplanares. Portanto A, B, C e D são coplanares .

2.6 Interseção de quatro superfícies esféricas

Enunciaremos um teorema que será de fundamental importância na explicação da geometria envolvida no aparelho de GPS. É com esse teorema que mostraremos que para a localização de um objeto no planeta Terra nós precisaremos de, no mínimo, 4 satélites que serão os centros de 4 superfícies esféricas diferentes, concluindo que a interseção de 4 superfície esférica será um único ponto.



Teorema 1. *Sejam* S_1, S_2, S_3 *e* S_4 *quatro superfícies esféricas distintas tais que* $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$*. Se os centros dessas esferas não são coplanares, então o conjunto de interseção* $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ *contém um único ponto.*

Demonstração Algébrica. Sejam $S_1,\ S_2,\ S_3$ e S_4 superfícies esféricas de centros $C_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $C_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $C_3 = (x_3, y_3, z_3)$ e $C_4 = (x_4, y_4, z_4)$.

Então as equações das superfícies esfericas S_1, S_2, S_3 e S_4 são as equações E_1, E_2, E_3 e E_4 abaixo:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc} x^2 & + & y^2 & + & z^2 & + & a_1x & + & b_1y & + & c_1z & + & d_1 & = & 0 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & + & a_2x & + & b_2y & + & c_2z & + & d_2 & = & 0 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & + & a_3x & + & b_3y & + & c_3z & + & d_3 & = & 0 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & + & a_4x & + & b_4y & + & c_4z & + & d_4 & = & 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Então devemos mostrar que o sistema acima tem uma única solução. Devemos lembrar que a interseções das superfícies S_1, S_2, S_3 e S_4 é um conjunto não vazio.

Para resolver esse sistema de uma forma rápida e eficaz vamos subtrair a primeira equação pelas as demais $E_1 - E_2$, $E_1 - E_3$, $E_1 - E_4$ e assim eliminaremos os termos quadráticos obtendo um sistema linear cujas equações representam, respectivamente, os planos que contém as interseções $S_2 \cap S_1$, $S_3 \cap S_1$ e $S_4 \cap S_1$ cuja solução é solução do sistema (1).

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x & + & (b_1 - b_2)y & + & (c_1 - c_2)z & + & (d_1 - d_2) & = & 0 \\ (a_1 - a_3)x & + & (b_1 - b_3)y & + & (c_1 - c_3)z & + & (d_1 - d_3) & = & 0 \\ (a_1 - a_4)x & + & (b_1 - b_4)y & + & (c_1 - c_4)z & + & (d_1 - d_4) & = & 0 \end{cases}$$

Este sistema terá uma única solução se:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sabemos que os valores de $a_i = -2x_i$, $b_i = -2y_i$ e $c_i = -2z_i$ com $i = 1, 2, 3$ e 4, logo:

$$D = \begin{vmatrix} -2x_1 + 2x_2 & -2y_1 + 2y_2 & -2z_1 + 2z_2 \\ -2x_1 + 2x_3 & -2y_1 + 2y_3 & -2z_1 + 2z_3 \\ -2x_1 + 2x_4 & -2y_1 + 2y_4 & -2z_1 + 2z_4 \end{vmatrix}$$

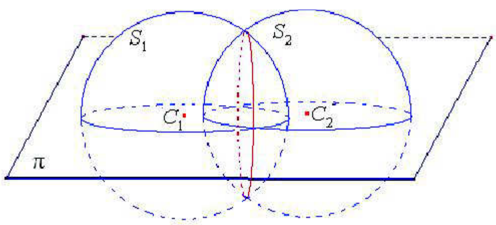
$$D = 8.\begin{vmatrix} -x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 & -z_1 + z_2 \\ -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 \\ -x_1 + x_4 & -y_1 + y_4 & -z_1 + z_4 \end{vmatrix}$$

$$D = 8.\begin{vmatrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{vmatrix}$$

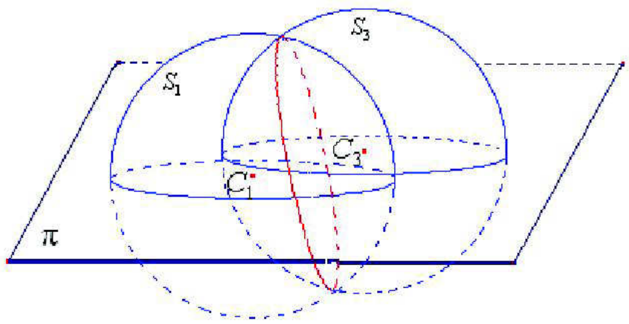
Como, os centros C_1, C_2, C_3 e C_4 não são coplanares segue do Lema 1 que $D \neq 0$.

Demonstração Geométrica. Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 quatro superfícies esféricas de centros C_1, C_2, C_3 e C_4. Se duas dessas superfícies esféricas têm como interseção um único ponto, como a interseção de quatro superfícies esférica é um conjunto não vazio, segue que o conjunto de interseções das quatro superfície esféricas só tem esse ponto, e o teorema fica demonstrado. Desse modo, supõe-se que o conjunto de interseção de duas superfícies esféricas seja uma circunferência.

Considere agora um plano π que contém C_1, C_2 e C_3, a interseção $S_1 \cap S_2$ é uma circunferência contida num plano α_1 perpendicular a π.

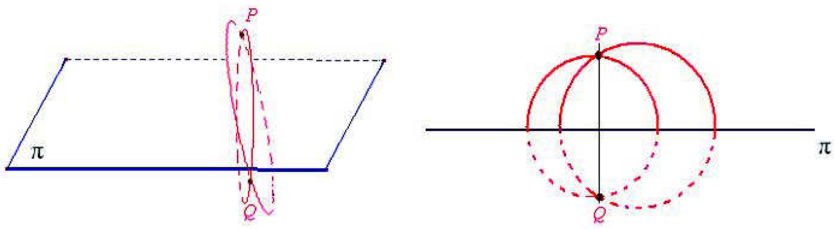


Analogamente, $S_1 \cap S_3$ é uma circunferência contida num plano α_2 perpendicular a π.



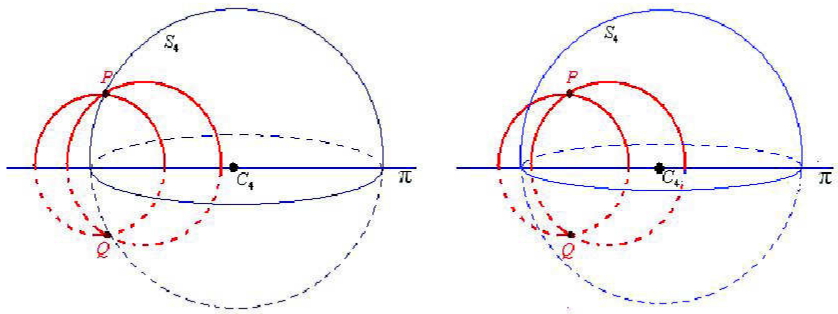
Daí, $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ é igual à interseção dessas duas circunferências, que é um conjunto com dois pontos, P e Q, simétricos em relação ao plano π e que estão na reta de interseção de α_1 e α_2.

As figuras a seguir mostram duas perspectivas da circunferência $S_1 \cap S_2$ e $S_1 \cap S_3$, intersectando-se nos pontos P e Q.

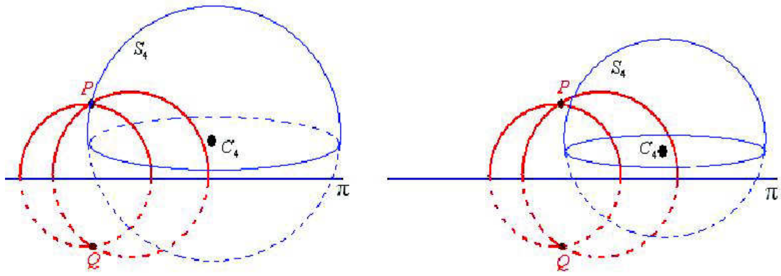


Vejamos agora de que modo a superfície esférica S_4 pode intersectar as superfícies esféricas S_1, S_2 e S_3.

Caso 1: Se $C_4 \in \pi$, então a superfície esférica S_4 ou passa por esses dois pontos ou não passa por nenhum deles.



Caso 2: Se $C_4 \notin \pi$, então a superfície esférica S_4 ou não passa por nenhum dos dois pontos ou passa por apenas um deles.



Então, se os centros das esferas não são coplanares, conclui-se que a interseção dessas superfícies esféricas ou é vazia ou é um conjunto com um único ponto. No entanto, por hipótese, as superfícies esféricas tem interseção não vazia e centros não coplanares, o que implica que elas devem concorrer em um único ponto.

2.7 Relação entre coordenadas geográficas e coordenadas cartesianas

Estabeleceremos agora a relação entre o sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com as coordenadas geográficas para localizarmos qualquer ponto que esteja na esfera do planeta terra. Para isso vamos considerar a terra como uma esfera perfeita e levar em consideração os eixos positivos O_x, O_y e O_z tais que:

- O é o centro da terra;

-O_z é o eixo positivo positivo aponta na direção norte;

-O_{xy} é o plano do Equador;

-O_{xz} é o plano que contém o meridiano de Greenwich;

-O_y é o eixo cortado pelo meridiano de longitude 90 graus oeste.

A altitude de P indicaremos por h e será dada por:

$$h = OP - r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r,$$

onde OP é a elevação do ponto P e r é o raio da terra cuja medida é aproximadamente 6.400km. Sendo assim a altitude também será aproximada.

Do triângulo retângulo $\triangle OPB$ da figura temos que:

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Como $\cos(90^\circ - \theta) = \text{sen}\ \theta$ temos que:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\ .$$

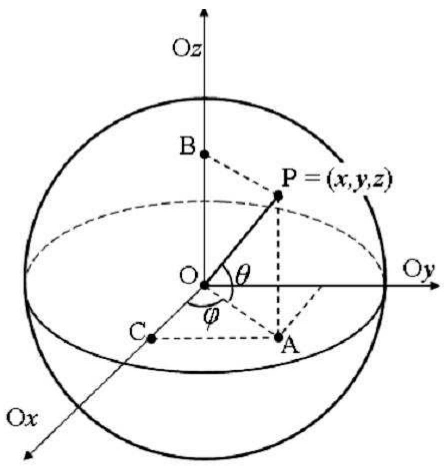


Figura 2.1: latitude $\theta = m(< AOP)$ e longitude $\varphi = m(< COA)$

Observe que, quando $z > 0$, θ assume um único valor entre 0° e 90° e quando $z < 0$, θ assume um único valor entre −90° e 0°. Assim, se $z > 0$, então diremos que o ponto P tem latitude θ $N(norte)$ e se $z < 0$, então diremos que o ponto P tem latitude $-\theta$ $S(sul)$.

Do triângulo retângulo $\triangle OAC$ da figura acima temos que:

$$\text{sen } \varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

e

$$\cos \varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

Ressaltamos que, quando $y > 0$, φ assume um único valor entre 0° e 180°, e quando $y < 0$, φ assume um único valor entre −180 e 0°. Assim, se $y > 0$, então diremos que o ponto P tem longitude φ $E(leste)$ e se $y < 0$, então diremos que o ponto P tem longitude $-\varphi$ $W(oeste)$.

Podemos ainda determinar as coordenadas cartesianas (x, y, z) em função de coordenadas geográficas θ e φ e de sua elevação $\rho = OP$.

Como $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, temos que sen $\theta = \frac{z}{\rho}$ portanto, $z = \rho.\text{sen } \theta$. Nota-se também que $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\rho}$, portanto $\sqrt{x^2+y^2} = \rho.\cos\theta$ que substituindo nas equações obtemos $x = \rho.\cos\theta.\cos\varphi$ e $y = \rho.\cos\theta.\text{sen } \varphi$. Assim:

$$\begin{cases} x &= \rho.\cos\theta.\cos\varphi \\ y &= \rho.\cos\theta.\text{sen } \varphi \\ z &= \rho.\text{sen } \theta \end{cases}$$

Exemplo 3: Determinar as coordenadas geográficas do ponto P cujas coordenadas cartesianas são dadas, em metros, por $P = (3\sqrt{3}.10^6, -3.10^6, 6\sqrt{3}.10^6)$.

Temos que $x^2 + y^2 + z^2 = 27.10^{12} + 9.10^{12} + 108.10^{12} = 144.10^{12}$. Assim teremos que

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \rho = 12.10^6$.

Sabemos também que $x^2 + y^2 = 36.10^{12}$. Calculando, sen $\theta = \frac{z}{\rho}$ temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{6\sqrt{3}.10^6)}{12.10^6} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

portanto $\theta = 60°$.

Como sen $\varphi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, tem-se:

$$\text{sen } \varphi = \frac{-3.10^6}{6.10^6} \Rightarrow \text{sen } \varphi = \frac{-1}{2}.$$

Como $\cos \varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, temos:

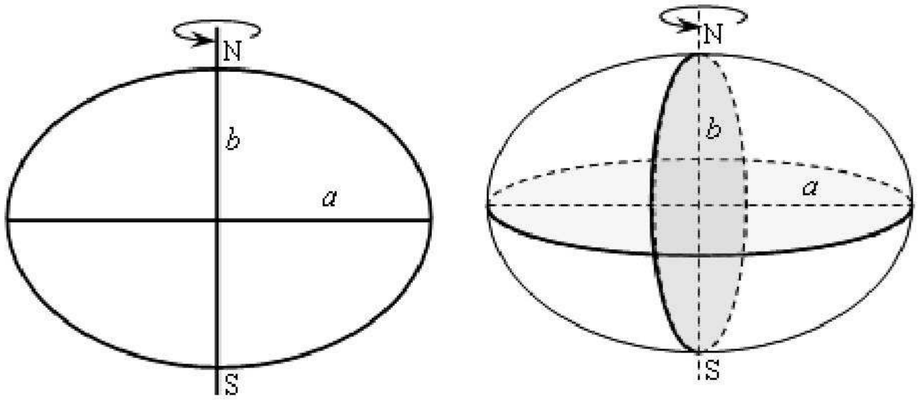
$$\cos \varphi = \frac{3\sqrt{3}.10^6}{6.10^6} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

portanto $\varphi = -30°$.

Assim, as coordenadas geográficas de P são $\theta = 60°N$ e $\varphi = 30°W$. Supondo que, o raio da terra é $6,4.10^6$ metros, temos que a altura h de P que é dada por $h = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r \Rightarrow h = 12.10^6 - 6,4.10^6 \Rightarrow h = 5,6.10^6$ m.

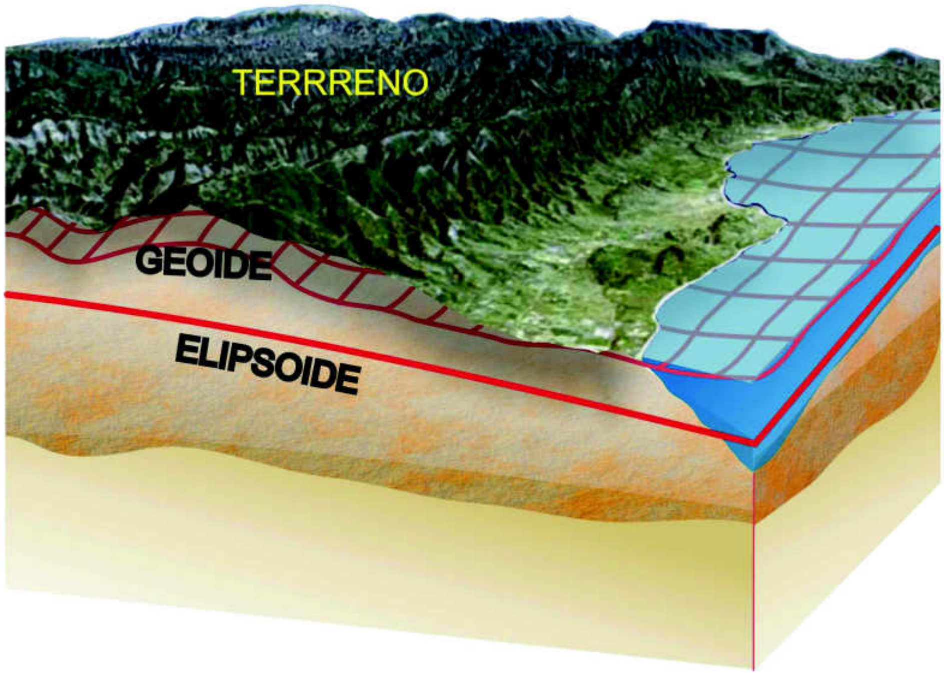
2.8 Altitude no Globo Terrestre

Para entendermos como o GPS determina a altitude em um planeta que não é perfeitamente esférico precisamos considerar alguns detalhes. Nesse tópico tivemos auxílio de algumas definições e figuras do Instituto Nacional de Estadística Y Geografia (INEG) do México conforme referência [11]. A altitude é a distância entre um ponto na superfície do planeta até a curva que determina o nível do mar. Por ser levemente achatada nos polos a forma da terra pode ser modelada matematicamente por um elipsoide, que é um sólido geométrico formado quando giramos uma elipse em torno de um de seus eixos. Considerando uma elipse de eixo maior medindo $2a$ e eixo menor medindo $2b$, ao girarmos em torno do eixo menor geramos o elipsoide E. No caso da terra chamamos de "*elipsoide de referência*" aquele em que os eixos $2a$ e $2b$ são respectivamente o diâmetro equatorial e a distância entre os polos.



Atualmente o elipsoide de referência mais usado no contexto de Sistema de Posicionamento Global é o "*World Geodésico System*"(do inglês - Sistema Geodésico Mundial), criado em 1984 e conhecido pela sigla WGS-84. Assim, pode-se determinar a altitude chamada de elipsoidal, pela diferença entre as distâncias do centro da terra ao receptor e ao elipsoide, respectivamente.

O geoide é outro modelo físico que representa uma superfície plana que representa o nível médio do mar, que se estende abaixo dos continentes e cobre toda a Terra. Ele pode ser imaginado como a superfície do mar, em cada ponto é perpendicular ao fio de prumo ou a direção da gravidade. O geoide é um modelo físico que pretende representar a forma verdadeira da Terra por cálculo como uma superfície de campo gravitacional constante com potencial e é usada como referência para determinar a elevação do terreno. Ele simula o planeta Terra como uma superfície inteiramente coberta pelos oceanos e sob a ação das forças centrípeta (gerada pela rotação da terra) e de atração de massas (gravidade). Como essas forças interferem no nível do mar, esse modelo apresenta-se como uma superfície relativamente irregular. Comparando com a topografia, o geoide é consideravelmente mais suave (varia em ± 100 m) que a superfície terrestre (varia de -11530 m a 8844 m).

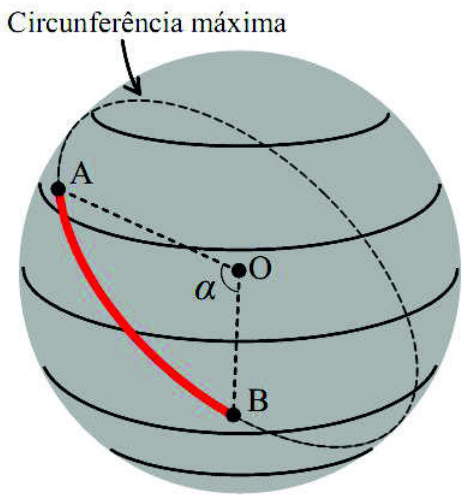


Para modelá-lo matematicamente utiliza-se uma função com aproximadamente 65.000 diferentes coeficientes cujas variáveis θ, φ e ρ correspondem respectivamente à latitude, longitude e ao raio geocêntrico. Para efeitos didáticos, evitaremos cálculos excessivos considerando que a terra é uma esfera de raio $\rho = 6.400$ km como já havíamos estabelecido anteriormente.

2.9 Distância entre dois pontos em uma superfície esférica.

Quem já não ouviu falar ou disse, ou até mesmo viu em desenhos animados, que para chegarmos ao Japão, deveríamos cavar um túnel reto em direção ao centro da terra e quando chegássemos à superfície já estaríamos no Japão? Bem, já vimos que para calcularmos a distância entre dois pontos $P = (a, b, c)$ e $O = (x, y, z)$ no espaço utilizaremos a fórmula $d(P, O) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, mas devemos lembrar que nem todas às vezes podemos traçar uma reta entre dois pontos da superfície terrestre, pois seria bastante inviável sair cavando túneis na superfície terrestre.

Portanto, em uma superfície esférica, o arco que mais se aproxima de uma reta é o arco menor de uma circunferência máxima como mostra a figura abaixo em relação ao arco $\widehat{AB}$ que corresponde ao ângulo central α.



Já sabemos que para calcularmos a distância do ponto A até o ponto B faremos o uso de proporção e lembrando que o comprimento de uma circunferência é dado por $2.\pi.r$ utilizaremos o raio terrestre que é aproximadamente 6.400 km , temos:

$$\frac{360°}{\alpha} = \frac{2.\pi.r}{d(A,B)}$$

Portanto,

$$d(A,B) = \frac{\alpha}{360°}.\pi.12800.$$

Entretanto, não temos o valor de α e para encontra-lo faremos o uso de um pouco de álgebra linear no teorema 2 que veremos logo a seguir.

Vamos definir primeiramente produto interno de dois vetores, norma de um vetor e mostrar que podemos determinar um ângulo entre dois vetores utilizando a fórmula

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|}.$$

Definição 5. *Dados dois vetores* $u = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $v = (x_2, y_2, z_2)$ *do* $\mathbb{R}^3$ *chamamos de produto interno usual e denotamos por* $\langle u, v\rangle$ *ao número real*

$$\langle u, v\rangle = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2.$$

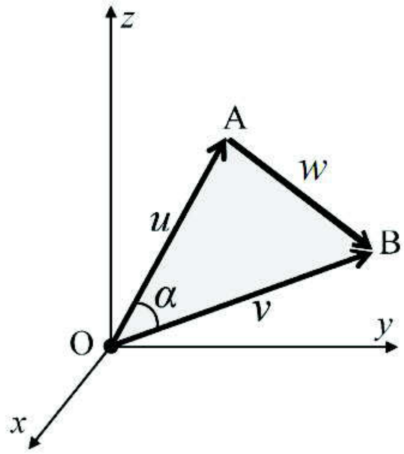
Definição 6. *Chamamos de norma de um vetor* $u = (x_1, y_1, z_1)$ *e denotamos por* $\|u\|$ *o número real*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Teorema 2. *Se* α *for a medida do ângulo entre dois vetores não nulos* $u = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $v = (x_2, y_2, z_2)$ *do* $\mathbb{R}^3$*, então*

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|}.$$

Demonstração.



Sejam $u = \overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$, sabemos que $m(< AOB) = \alpha$. Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo $\triangle OAB$ temos,

$$\cos\alpha = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|w\|^2}{2\|u\|.\|v\|}.$$

Substituindo os valores, sendo $w = v - u = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ tem-se:

$$\cos\alpha = \frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]}{2.\|u\|.\|v\|}.$$

Daí

$$\cos\alpha = \frac{2.x_1.x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2}{2\|u\|.\|v\|}.$$

Portanto,

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|}.$$

Capítulo 3

Como Funciona o Aparelho de GPS

Depois de boa parte do contexto histórico explicado e grande parte dos teoremas demonstrados podemos agora mostrar como se dá o processo de localização através do aparelho de GPS. Nessa parte do trabalho tivemos grande auxílo das referências [1],[2],[6] e [8].

Primeiro, vamos classificar os aparelhos GPS de acordo com a precisão em três categorias:

- Receptores de Navegação: com erros em torno de 15m;
- Receptores Topográficos: com erro em torno de 1 m;
- Receptores Geodésicos: com erro em torno de 1 cm.

Vamos agora aprender como se dá o processo de localização de um receptor GPS :

1º passo: O receptor GPS, ao ser ligado, se contacta com no mínimo 4 satélites que nunca são coplanares, pois estes satélites descrevem órbitas elípticas em torno do globo terrestre. Ressaltamos que a todo momento os satélites trocam informações, que serão citadas após o 5ºpasso desse capítulo, com as estações de controle que foram citadas no Capítulo 1;

2º passo: Em determinado instante, cada um dos 4 satélites transmite um longo sinal digital, chamado pseudorrandômico. No mesmo instante, o receptor (GPS) começa a gerar o mesmo código. Quando o sinal do satélite chega ao receptor, haverá uma defasagem, em relação ao sinal gerado pelo receptor. Esta diferença é igual ao trânsito do sinal. Essa defasagem do sinal permitirá calcular a distância do receptor a cada satélite. As ondas de rádio viajam na velocidade da luz: 299.792.458 metros por segundos, logo o receptor multiplica o tempo que o sinal gastou para chegar até ele pela velocidade da luz determinando assim à distância até o satélite ($d = v.t$) que será o raio da superfície esférica cujo centro é o satélite. Essas medições, para serem executados, os relógios do satélite e do receptor precisam está sincronizados com precisão de nano segundos (um erro de um nano segundo provoca um erro de 300m), por isso os satélites tem relógios atômicos muito precisos e o relógio do receptor é constantemente reiniciado em sincronia com quatro ou mais satélites. Já sabemos que para determinar a posição do receptor é necessário que o mesmo receba sinal de no mínimo 4 satélites;

3º passo: A localização é dada pela interseção de quatro superfícies esféricas que tem os quatro satélites como centros e o raio dessas superfícies serão à distância do receptor ao satélite, como mostramos a interseção de quatro superfícies esféricas é um único ponto;

4º passo: O receptor, ao receber o sinal de no mínimo 4 satélites, usa essas informações para calcular sua própria posição, que é dada em um sistema de coordenadas espaciais previamente fixado por um terno de números reais (x, y, z) onde o centro da terra é o centro desse sistema ;

5º passo: Essas coordenadas cartesianas serão transformadas em coordenadas geográficas (latitude, longitude altitude) pelo software do receptor do mesmo modo que foi explicado anteriormente no Exemplo 3 do Capítulo 2 no tópico 2.7. Com o processamento contínuo de sua posição é possível determinar velocidade e direção do deslocamento do receptor.

Vale ressaltar que o sinal gerado pelos satélites contém:

- "*Código de identidade*", que identifica qual satélite está transmitido o sinal e permite que todos os satélites do sistema compartilhem a mesma frequência, com o mínimo de interferência.

- Dados efêmeros (status). Cada satélite é programado para emitir o que se chama efeméride, que informa a sua posição exata, naquele instante, em relação a um fixado sistema ortogonal de coordenadas. Tal posição é permanentemente rastreada e conferida pelas estações terrestres de gerenciamento. A unidade receptora processa esses sinais. Com a posição do satélite e a distância acima calculada obtém-se a chamada equação geral da imaginária superfície esférica.

- Dados do almanaque, que são listas com as posições orbitais dos satélites.

3.1 Erros do sistema

Apesar de toda tecnologia aplicada nesse sistema de localização, o GPS está sujeito a erros. Os sinais de rádio percorrem a atmosfera na velocidade da luz que é constante somente no vácuo. Ao chegar à ionosfera á presença de partículas ionizadas ocasiona erro de aproximadamente 5m. Já na troposfera pela presença de grande quantidade de vapor d' água o erro é de aproximadamente 0,5 m.

Além dos erros citados anteriormente podem ocorrer pequenas variações nas órbitas dos satélites que são causadas pela atração gravitacional da lua, ou do sol e pela pressão da radiação solar sobre os satélites.

3.2 Uma Situação Real

O exemplo a seguir retrata uma situação real em que um usuário do GPS é detectado por quatro satélites conforme encontramos na referência [1]. A tabela indica as efemérides (posições em metros) de cada satélite tomadas em relação ao nosso fixado sistema ortogonal de coordenadas cartesianas (x, y, z) cujo centro é o centro da terra que são constantemente calculadas pelas estações de controle.

Satélite 1: $(1,877191188.10^6\ ,\ -1,064608026.10^7\ ,\ 2,428036099.10^7)$

Satélite 2: $(1,098145713.10^7\ ,\ -1,308719098.10^7\ ,\ 2,036005484.10^7)$

Satélite 3: $(2,459587359.10^7\ ,\ -4,336916128.10^6\ ,\ 9,090267461.10^6)$

Satélite 4: $(3,855818937.10^6\ ,\ 7,251740720.10^6\ ,\ 2,527733606.10^7)$

O receptor GPS registra os seguintes lapsos de tempo (em segundos) entre a transmissão e a recepção do sinal de cada satélite.

Satélite 1: 0,08251731391

Satélite 2: 0,07718558331

Satélite 3: 0,06890629029

Satélite 4: 0,07815826940

Multiplicando-se cada lapso de tempo pela velocidade da luz ($2,99792458.10^8 m/s$), obtemos a distância entre o receptor e cada satélite. Isso permite escrever as equações reduzidas das imaginárias superfícies esféricas centradas em cada satélite e raios iguais às distâncias calculadas.

$$\begin{array}{lcccccccc}
S1 & : & (x-1,8.10^6)^2 & + & (y+10,6.10^6)^2 & + & (z-24,2.10^6)^2 & = & 611,9.10^{12} \\
S2 & : & (x-10,9.10^6)^2 & + & (y+13.10^6)^2 & + & (z-20,3.10^6)^2 & = & 535,4.10^{12} \\
S3 & : & (x-24,5.10^6)^2 & + & (y+4,3.10^6)^2 & + & (z-9.10^6)^2 & = & 426,7.10^{12} \\
S4 & : & (x-3,8.10^6)^2 & + & (y-7,2.10^6)^2 & + & (z-25,2.10^6)^2 & = & 549.10^{12}
\end{array}$$

Desenvolvendo os quadrados, obtemos as respectivas equações gerais, e o sistema linear acima é dado por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
18,2x & - & 4,88y & - & 7,84z & - & 76,52.10^6 & = & 0 \\
45,43x & + & 12,61y & - & 30,38z & - & 185,23.10^6 & = & 0 \\
3,95x & + & 35,79y & + & 1,99z & - & 62,95.10^6 & = & 0
\end{array}\right.$$

cuja única solução é $x = 0,5660.10^7$, $y = 0,0978.10^7$ e $z = 0,2775.10^7$.

O ponto P com essas coordenadas cartesianas pertence simultaneamente às quatro imaginárias superfícies esféricas. Suas coordenadas geográficas podem ser calculadas como fizemos no Exemplo 3 do Capítulo 2 no Tópico 2.7 (considerando o raio da Terra medindo $6,378164.10^6$ metros), onde obteremos os seguintes resultados :

$$\text{Latitude: } \theta = 26°N;\ \text{Longitude: } \varphi = 10°E;\ \text{Elevação: } 919,71 \text{ metros.}$$

Consultando um atlas geográfico ou um globo terrestre, identificamos a posição desse usuário do GPS como sendo a cidade de Djanet, localizada nos Montes Tássili, na fronteira entre Argélia e Líbia.

Capítulo 4

Considerações Finais

Neste estudo fizemos uma explanação desde a origem das ideias de localização até chegar a extrema tecnologia que é o GPS. É notórea a importância desse sistema para a sociedade, a sua estrutura de funcionamento e as aplicações deste recurso tecnológico que muito tem auxiliado na solução de problemas em inúmeras áreas profissionais, e também mostrou que os recursos matemáticos são imprecidíveis para o desenvolvimento desse sistema.

Os conhecimentos matemáticos relacionados ao sistema GPS podem ser aplicados ao ensino, com o objetivo de mostrar a importância da matemática no contexto científico e para o desenvolvimento da sociedade, portanto pode ser apresentado aos alunos do ensino fundamental e médio, para que possam compreender a importância da matemática no auxílio ao desenvolvimento da tecnologia, também para os acadêmicos das mais diversas áreas do conhecimento para que utilizem esse estudo como uma opção para pesquisa e trabalhos científicos, e ainda para leitores em geral que utilizam essa tecnologia mas não sabem como funciona. Os professores tanto do ensino fundamental, médio e superior, professor poderão utilizar esse trabalho pra dar significados aos conteúdos matemáticos que deverão ser ensinados aos estudantes, com o objetivo de motivar e despertar o interesse pela matemática. Poderemos apresentar esse tarabalho quando fizermos a explanação de temas da geometria analítica, geometria plana, geometria espacial e algebra linear.

Explorar a origem dos conhecimentos envolvido nesse trabalho, relativos a história e a origem do sistema GPS, valorizam a produção do conhecimento científico e mostram as contribuições matemáticas para o desenvolvimento da ciência e consequentemente para expansão da tecnologia atual.

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, S. A geometria do globo terrestre, II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004 (disponível pela Internet no site www.bienasbm.ufba.br).

[2] ALVES, S. A matemática do GPS Revista Professor de Matemática, n.59, 2006.

[3] AMES, P. Uma professora de olho nas aplicações, em Aplicações da Matemática Escolar, MAA e NCTM (tradução de Domingues H.), Atual Editora, 1997.

[4] CRATO, N. P., A Matemática das Coisas, Editora Gradiva,10 edição, pp. 71 - 74,2010.

[5] LIMA, E.L. Coordenadas no espaço, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1993.

[6] LIMA, D. D. Desvendando a Matemática do GPS / Davi Dantas Lima; orientador Almir Rogério Silva Santos, São Cristóvão, 2013.

[7] NORD, G.D., JABON, D. and NORD, J. The Mathematics of the Global Positioning System, The Mathematics Teacher, vol. 90, no 6, September, 1997.

[8] http://www.lps.usp.br/lps/arquivos/conteudo/grad/dwnld/ApostilaGPS.pdf (19/03/2014).

[9] http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1107 (19/03/2014).

[10] http://bibliodrruydandrade.no.sapo.pt/curiosidadedomes/conteudos/agosto2006.htm(10/03/2014)

[11] http://www.inegi.org.mx/geo/contenidos/geodesia/que_ es_ geoide.aspx(21/03/2014).