UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MARCIANO FOREST

ENSINO E APRENDIZAGEM DE LOGARITMOS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO

2014

MARCIANO FOREST

ENSINO E APRENDIZAGEM DE LOGARITMOS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Janecler A. Amorin Colombo

Co-orientador: Santos Richard W. S. Bejarano

PATO BRANCO

2014

F716e Forest, Marciano.
Ensino e aprendizagem de logaritmos através da resolução de problemas / Marciano Forest. -- 2014.
147 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Profa. Dra. Janecler Aparecida Amorin Colombo
Coorientador: Prof. Dr. Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2014.
Bibliografia: f. 122 – 124.

1. Logaritmos. 2. Resolução de problemas. 3. Ensino médio. I. Colombo, Janecler Aparecida Amorin, orient. II. Beiarano, Santos Richard Wieller Sanguino, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD (22. ed.) 510

Ficha Catalográfica elaborada por
Suélem Belmudes Cardoso CRB9/1630
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Pato Branco

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 003

"**Ensino e aprendizagem de Logaritmos através da Resolução de Problemas**".

por

Marciano Forest

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 9h00 do dia 30 de abril de 2014. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Profa. Janecler Aparecida Amorin Colombo, Dra.
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

Prof Dionisio Burak, Dr.
(UNICENTRO/Guarapuava)

Prof. Santos Richard Wieller Sanguino, Dr.
(UTFPR/Pato Branco)

Prof. Fredy Maglorio Sobrado Suárez, Dr.
(UTFPR/Branco)

Profa. Luz Delicia Castillo, Dra.
(Suplente - UTFPR/Branco)

Assinatura da Coordenação: ______________________________

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer em primeiro lugar a Deus, em quem deposito minha fé particular, que ilumina os caminhos e nos dá força e energia para superar os obstáculos.

Aos meus pais, irmãos e em especial minha esposa Keila Dall'lgna Forest pelo apoio nos momentos difíceis e pela compreensão em minhas ausências.

Aos professores e em especial meu co-orientador professor Dr. Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano por todos os ensinamentos recebidos até este momento.

Um agradecimento muito especial à minha orientadora professora Dr. Janecler Aparecida Amorin Colombo, que conduziu muito bem a construção deste trabalho e também por ter me mostrado os caminhos a seguir e as formas de organização e escrita.

E por fim agradecer ao Colégio Intelectus por permitir que desenvolvêssemos nosso trabalho com seus alunos.

RESUMO

FOREST, Marciano. ENSINO E APRENDIZAGEM DE LOGARITMOS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. 147 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2014.

Com o intuito de melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática nas escolas, buscamos investigar como tornar mais compreensível e interessante o estudo dos logaritmos no Ensino Médio e qual a possibilidade de se usar a Metodologia da Resolução de Problemas para isso. O percurso metodológico da investigação compreendeu estudos teóricos sobre a Resolução de Problemas como metodologia de ensino; estudos detalhados sobre as potências e suas propriedades, bem como dos logaritmos; elaboração e aplicação de uma sequência de ensino envolvendo problemas de diversos tipos; análise e discussão dos resultados coletados. Os problemas foram dispostos de tal forma que os alunos puderam trabalhar com todos os conceitos e propriedades dos logaritmos necessárias para o Ensino Médio. A sequência foi aplicada para 23 estudantes do 1° ano do Ensino Médio, em uma escola cooperativa da cidade de Xanxerê - SC, o Colégio Intelectus. Para isso foram utilizadas 15 aulas de 50 minutos cada, sendo 13 para aplicação da sequência de ensino e 2 para aplicação dos testes avaliativos. Em sua grande maioria, as atividades foram desenvolvidas em grupos de 2 ou 3 pessoas. Os resultados foram obtidos através da análise qualitativa das anotações do diário de campo, que foram registradas pelo professor pesquisador após a realização de um questionário respondido pelos alunos no final do trabalho e análise quantitativa dos testes aplicados. Os resultados apontaram que o ensino de Logaritmos por meio da Resolução de Problemas despertou o interesse nos alunos pelo conteúdo e contribuiu para que a aprendizagem ocorresse dentro do esperado. Além disso, o trabalho contribui para a formação continuada do professor, melhorando e complementando, a sequência de ensino para aplicações de futuras novas turmas.

Palavras-chave: Logaritmos, Resolução de Problemas, Ensino Médio

ABSTRACT

FOREST, Marciano. TEACHING AND LEARNING THROUGH LOGARITHMS TROUBLESHOOTING. 147 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2014.

In order to improve the teaching and learning of mathematics at schools, we seek to investigate how to make it understandable and interesting study of logarithms in high school and what's the possibility of using the Problem Solving Methodology for it. The methodological approach of the research comprised theoretical studies on the Troubleshooting and teaching methodology; detailed on the powers and properties studies as well as logarithms; development and implementation of a sequence of learning problems involving various types; analysis and discussion of the results listed. The problems have been arranged in a way that students might work with all concepts and properties of logarithms required for high school. The sequence was applied for 23 students from the first year of high school in a cooperative school called Intelectus in Xanxerê SC. For this, it was used 15 lessons of 50 minutes each, 13 for applying the teaching sequence and two of them for the application of the evaluative tests. Most of the activities were conducted in groups of two or three students. The results were obtained through the qualitative analysis of daily notes, which were recorded by the teacher researcher after each meeting, qualitative analysis of a questionnaire answered by the students at the end of the work and quantitative analysis of the tests. The results showed that teaching logarithms by Troubleshooting sparked off interest in students and contributed to learning occurred according to the expected. Moreover, the work contributes to the continuing education of teachers, improving and complementing the teaching sequence for future new classes of applications.

Keywords: Logarithms, Troubleshooting, Teaching Medium

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A preocupação com o ensino e a aprendizagem na disciplina de matemática vem sendo crescente nos últimos anos.

Segundo Rodrigues (2013) a recente pesquisa realizada pela ONG "Todos pela Educação"relata que os índices do ensino médio, etapa da educação que tem os piores resultados no Brasil, pioraram. De cada 100 pessoas que estavam para se formar em 2011, apenas 10 obtiveram na Prova Brasil resultados equivalentes ao mínimo esperado em matemática.

A ONG "Todos pela Educação"também apontou em suas pesquisas que o grande problema do ensino aprendizagem pode estar na deficiência em leitura dos estudantes e não nos números (Disponível em: http://www.todospelaeducacao.org.br). Uma avaliação realizada nas escolas públicas e particulares de todo país revelou que quanto maior a nota da redação melhor o desempenho do aluno nas questões de matemática. Para Priscila Cruz, diretora-executiva do Todos Pela Educação, é correto dizer que, para estudar matemática, a "competência leitora" é fundamental. A criança que está sendo avaliada pela sua competência matemática e esbarra na leitora não consegue sequer ser avaliada. É uma barreira inicial — argumenta Priscila. — O ensino de matemática deve estar ligado à leitura, à contextualização. O objetivo é preparar o aluno para a vida. E a vida não vai dar equações prontas para ele. Os resultados dessas pesquisas apontam que os estudantes brasileiros têm sérias dificuldades para resolver problemas de matemática aplicados à vida real.

Além do problema com a leitura, o problema da aprendizagem da matemática pode estar relacionado com o ensino da mesma. A experiência empírica do professor mostra que infelizmente vários conteúdos que fazem parte dos currículos das escolas não motivam nossos alunos, este fato pode ser atribuído à abordagem superficial e mecânica realizada muitas vezes pela escola ou em alguns casos pela dificuldade encontrada pelos docentes para aprofundar os aspectos mais relevantes, aqueles que possibilitam considerar os conhecimentos anteriores dos alunos, as situações didáticas e os novos saberes a construir.

Sem dúvida, os conhecimentos matemáticos são essenciais na vida pessoal e profissional de qualquer um, por isso, é um direito de todo e qualquer cidadão adquiri-lo (LOPES, 2011).

O saber matemático permite a pessoa intervir criticamente nas ações cotidianas, adquirindo maior capacidade de argumentar suas considerações frente às problemáticas da vida. O estudo da Matemática torna-se significativo quando os alunos percebem as relações entre o conhecimento matemático produzido pela humanidade e os conhecimentos produzidos por outras áreas (LOPES, 2011). Dessa forma, entendemos que não é possível que a Matemática seja trabalhada de forma descontextualizada, fragmentada e repetitiva, sem considerar a realidade em que a escola está inserida.

Para isso, conforme as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, ao final desse nível de ensino,

> Espera - se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebem a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p.69)

Neste contexto, entendemos ser de extrema importância a elaboração de iniciativas por parte da escola e dos professores no sentido de elaborar estratégias para que tais objetivos sejam atendidos e para que a aprendizagem da matemática dos estudantes brasileiros melhore gradativamente. Atualmente, as tendências metodológicas mais citadas por educadores matemáticos como possibilidades para a melhoria do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática são a Etnomatemática, a Modelagem Matemática, a Investigação Matemática, o uso de Novas Tecnologias, que estão sendo inseridas nas escolas gradativamente, além é claro, da Resolução de Problemas, tendência metodológica que escolhemos para referenciar a elaboração da Sequência de Ensino proposta nesta pesquisa.

A Resolução de Problemas tem surgido nos últimos anos como uma alternativa para o ensino da matemática. Entendemos que, por meio da resolução de problemas, é que a matemática se desenvolve por manter um elo, com todas as outras tendências da Educação Matemática. Para Krulik e Reys (1980) “a resolução de problemas é a própria razão do ensino de Matemática”. Os problemas são importantes porque trazem ideias novas, impulsionando os diversos ramos da matemática, muitas vezes sem estarem diretamente ligados. Na Resolução de Problemas como metodologia de ensino, os conceitos e as técnicas operatórias são apresentadas aos alunos fazendo uma relação entre a ideia matemática e o contexto, fazendo uso fortemente das conexões com a competência leitora dos estudantes.

Entre os conteúdos propostos pelos PCNs, Parâmetros Curriculares Nacionais, o conteúdo de logaritmos, trabalhado na 1ª série do Ensino Médio nos intriga um pouco mais. A escolha do tema logaritmo deve-se a sua importância na aplicação da Matemática nas mais diversas ciências. Pesquisas revelam que a forma tradicional de ensino (definição, demonstração de propriedades, exemplos e exercícios de aplicação) não desperta interesse nos alunos pelo assunto. Acreditamos que possamos melhorar a forma de se trabalhar o ensino dos logaritmos a fim de motivar o aluno a gostar dos mesmos e perceber suas inúmeras aplicações no cotidiano. As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM Plus, 2002) afirmam que o logaritmo é uma operação matemática, mas que é também uma linguagem de representação em todas as ciências. Por isso é necessário que o estudante saiba sua importância e conheça técnicas para seu uso.

Dessa forma, um dos objetivos do nosso trabalho é mostrar aos alunos que tal conteúdo não é composto apenas de repetições exaustivas de resoluções de exercícios e que não demonstram aplicações práticas. Outro objetivo desta pesquisa é justamente saber se, ao aplicarmos um metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação baseada na Resolução de Problemas para o ensino do conteúdo de Logaritmos, os alunos envolvidos terão desenvolvido a) um interesse maior pelo conteúdo e aulas de matemática, b) uma aprendizagem efetiva. Para isso, elaboramos uma Sequência de Ensino baseada na resolução de problemas, que envolvem os logaritmos, para que através da aplicação da mesma, possamos desenvolver junto com os alunos os mais variados conceitos e propriedades que envolvem esse conteúdo.

No capítulo 2, situamos o estudo, apresentando as justificativas, o caminho metodológico, o problema e as questões de estudo.

No capítulo 3, tratamos sobre aspectos relacionados ao ensino da Matemática e, mais precisamente, dos Logaritmos, no Ensino Médio. Realizamos uma pesquisa para situar o Ensino dos Logaritmos na atualidade. Realizamos também uma revisão bibliográfica e um detalhamento sobre Logaritmos, além de ressaltar como a metodologia da resolução de problemas pode contribuir para o Ensino da Matemática.

O capítulo 4 apresenta a Sequência de Ensino elaborada.

No Capítulo 5, trazemos uma análise sobre os resultados obtidos, analisamos as notas obtidas pelos alunos nas avaliações, as respostas do questionário e o envolvimento dos alunos com o processo.

Por último, no capítulo 6 apresentamos nossa conclusão a respeito de todo o processo, desde a elaboração e aplicação da Sequência de Ensino às análises dos resultados.

2 A PESQUISA SITUADA

2.1 JUSTIFICATIVA, PROBLEMA E QUESTÕES DE ESTUDO

Há tempos que o estudo de logaritmos não empolga nossos alunos, muitos, não conseguem entender os motivos para este conteúdo fazer parte do currículo do Ensino Médio, já que não conseguem perceber utilidade em seu cotidiano. Se observarmos, muitos dos livros do Ensino Médio trazem apenas exercícios que tratam da resolução de equações logarítmicas prontas ou simplificações de expressões que requerem uma repetição exaustiva das propriedades operatórias, tão pouco trazem problemas de aplicação que possam motivar o aluno a estudar os logaritmos.

Muitas situações cotidianas envolvem a aplicação dos logaritmos e requerem um conhecimento amplo desse conteúdo para resolvê-las. Descobrir o tempo que se deve aplicar um determinado capital, para que este gere um lucro pré-definido, o calculo do ph de uma substância, a medida do nível sonoro de um determinado ruído em um chão de fábrica, o tempo necessário para que um medicamento saia do nosso organismo, etc. Enfim, são inúmeras aplicações interessantes que fazem parte do dia a dia do aluno que podem tornar o conteúdo dos logaritmos mais empolgante, uma vez que pode ser a falta de motivação dos alunos que torna esse conteúdo um dos mais difíceis de ser assimilado.

Além disso, o conteúdo de logaritmo é de extrema importância em alguns assuntos abordados no ensino superior, principalmente quando se trata de modelar matematicamente algum fenômeno natural que envolve a variável tempo. O resultado final desse modelo quase sempre requer o conhecimento sobre logaritmos naturais e suas propriedades. É com esse intuito de motivar os alunos através de problemas de aplicação prática que queremos obter resultados melhores em dois aspectos: 1) na atenção e envolvimento dos alunos com conteúdos; 2) no rendimento dos mesmos através dos resultados de sua aprendizagem:

> A justificativa maior para o ensino do logaritmo reside em seu aspecto funcional, isto é, no fato de ser o logaritmo uma função. As funções logarítmicas, juntamente com as suas inversas, as exponenciais, constituem modelos ideais para descrever matematicamente certos fenômenos de variação nos quais uma

> grandeza tem taxa de variação proporcional à quantidade daquela grandeza existente em cada instante. Exemplos deste tipo de variação, chamado variação exponencial, são encontrados em diversas áreas do conhecimento, como teremos oportunidade de ver, em quantidade e importância suficientes para justificar o enorme interesse das funções exponenciais e logarítmicas na Matemática, nas Ciências e na Tecnologia. (RIBEIRO, PRATES, VERGASTA, DOMINGUEZ, FREIRE, BORGES, MASCARENHAS 2009, p. 1).

Percebemos através das mudanças nos currículos em âmbitos nacionais e até mesmo pelas provas do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) que o ensino não deve ser focado apenas no conteúdo, sem uma contextualização com a realidade do dia a dia dos alunos, nem deve ser um ensino em que a matemática esteja voltada só para a matemática, que não abranja vários assuntos, temas que possam ser usados para um ensino contextualizado. Com isso, espera-se que a aula de matemática proporcione aos alunos meios para a construção de um "pensar matemático" diante de situações interdisciplinares, de modo que o aluno consiga interpretar as situações-problemas, organizar as informações, relacioná-las aos conhecimentos disponíveis para conseguir solucioná-las.

Segundo Parra e Saiz (1996), a realidade social vive em constante processo de transformação, que em determinados momentos da história, tornam-se verdadeiras revoluções, implicando na necessidade de mudanças para não perecermos. A razão pela qual escolhemos a metodologia da Resolução de Problemas para elaborar e aplicar nossa Sequência Didática para o ensino de logaritmo se deve à necessidade de modificar o ensino tradicional no sentido de melhores resultados tanto no rendimento acadêmico quanto no envolvimento do aluno com as atividades propostas. Julgamos a Resolução de Problemas uma metodologia completa e adequada para o trabalho escolar nos dias de hoje, na qual o conhecimento é tratado de diferentes formas, sendo uma delas a contextualização. De acordo com Gálvez (1996), o professor deve participar da produção das situações didáticas que analisa em sala de aula e não somente observá-las e analisá-las, já que seu objetivo é determinar as condições de apropriação do saber pelos estudantes.

Um dos aspectos fundamentais que rege as mudanças educacionais e estimula as diferentes pesquisas em educação é o fato de se buscar desenvolver nos alunos a capacidade de aprender a aprender.

> Em nenhum momento se secundaria o conhecimento vigente, que é sempre o ponto de partida para o conhecimento novo, como bem mostra a hermenêutica. Apenas é equívoco pretender que na escola se faça apenas repasse, ou que nela apenas se ensina e apenas se aprende. O desafio do processo educativo, em termos propedêuticos e instrumentais, é construir condições do aprender a aprender e do saber pensar.' (DEMO, 1996, p.30)

Uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos que aprendam a aprender é a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino. Segundo Pozo e Echeverría (1988), a solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos atitude e esforço para buscar suas próprias respostas e seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas busca promover nos alunos o domínio de técnicas, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para resolver situações variáveis e diferentes.

Deste modo, configura-se o problema de investigação deste estudo: ao aplicarmos uma metodologia de ensino-aprendizagem e avaliação baseada na Resolução de Problemas para o ensino do conteúdo de Logaritmos, os alunos envolvidos terão desenvolvido um interesse maior pelo conteúdo das aulas de matemática e também uma aprendizagem efetiva?

A questão principal da pesquisa pode se desdobrar nas seguintes questões de estudo:

a) A Resolução de Problemas desperta o interesse dos alunos, deixando-os mais motivados para estudar Matemática?

b) A Sequência Didática proposta promove no aluno o estudo autônomo?

c) Quais as principais dificuldades encontradas pelos alunos, durante a resolução dos problemas propostos?

d) A metodologia da Resolução de Problemas melhora o rendimento e aprendizagem do aluno?

2.2 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.

A pesquisa classifica-se quanto à abordagem, como qualitativa e quantitativa, o que significa, sobretudo pensar em duas correntes paradigmáticas que têm norteado a pesquisa científica. Pois pode-se ter duas visões diferentes e complementares que alicerçam as definições metodológicas da pesquisa, são elas: a visão realista/objetiva (quantitativa) e a visão idealista/subjetiva (qualitativa).

> Embora possamos contrastar os métodos quantitativos e qualitativos enquanto associados a diferentes visões da realidade, não podemos afirmar que se oponham ou que se excluam mutuamente como instrumentos de análise. Uma pesquisa pode revelar a preocupação em diagnosticar um fenômeno (descrevê-lo e interpretá-lo); o autor poderia também estar preocupado em como explicar esse fenômeno, a partir de seus determinantes, isto é, as relações de nexo casual. Tais pontos de vista não se contrapõem; na verdade complementam-se

> e podem contribuir, em um mesmo estudo, para um melhor entendimento do fenômeno estudado (NEVES, 1996).

Segundo Bicudo (2012), a metodologia quantitativa tem a ver com o objetivo passível de ser mensurável. Dessa forma, os dados quantitativos que analisaremos em nosso trabalho são oriundos das aplicações das avaliações e do questionário. Esta modalidade de pesquisa busca traduzir opiniões e informações em números para classificá-las e analisá-las. "Funda-se na frequência de aparição de determinados elementos da mensagem", obtendo dados descritivos através de um método estatístico (BARDIN, 2009, p. 140).

A pesquisa quantitativa utiliza-se de números ou quantidades para traduzir os dados e informações, obedecendo a regras matemáticas e estatísticas. Busca explanar as causas das mudanças nos fatos sociais por meio da medida objetiva. O foco desta pesquisa são os traços individuais. A abordagem quantitativa é superestimada na pesquisa de paradigma positivista. Ela se vale do método dedutivo, ou seja, da teoria para os dados (SEVERINO, 2000).

Além disso, haverá a análise qualitativa dos dados através das observações do professor pesquisador pelo diário de campo, esta análise está relacionada com a pesquisa exploratória de fenômenos não passiveis de quantificação dos dados. Para García (2014) os estudos advindos deste tipo de metodologia têm caráter indicativo em oposição ao caráter afirmativo que pode ser atribuído ao resultado de pesquisa com o método estatístico.

A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Segundo Severino (2000) a sua preocupação é com o nível do que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações. Sendo que, o principal propósito desta pesquisa é a compreensão, explanação e especificação do fenômeno social e o foco a construção do significado do "como".

O método qualitativo "engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões" (BICUDO, 2006, p. 106). Para Bardin (2009), a pesquisa qualitativa "é válida, sobretudo, na elaboração das deduções específicas sobre um acontecimento ou uma variável de inferência precisa, e não em inferências gerais".

> A diversidade existente entre os trabalhos qualitativos enumera um conjunto de características essenciais capazes de identificar uma pesquisa desse tipo, a saber:
>
> 1 O ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento fundamental;
>
> 2 O caráter descritivo;

3 O significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida como preocupação do investigador;

4 Enfoque indutivo (GODOY, 1995ª, p. 62).

Em relação aos procedimentos técnicos de coleta de dados a pesquisa classifica-se como pesquisa-ação, uma vez que o próprio professor da turma pesquisada é também o pesquisador.

Segundo Severino (2000) a pesquisa-ação é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos os quais, estão envolvidos de modo cooperativo e participativo. Sendo que aqui, os pesquisadores desempenham um papel ativo no que se refere a problemas encontrados, sendo assim é indispensável a participação das pessoas envolvidas nos problemas sob investigação para o desenvolvimento da pesquisa.

De acordo com García (2014) a pesquisa-ação "além de visar a observação e a compreensão dos fenômenos do mundo real, visa igualmente, intervir na realidade para modificá-la", ao mesmo tempo em que se realiza uma análise de determinada situação o pesquisador faz intervenção no sentido de propor mudanças que levem ao aprimoramento das práticas observadas.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009), "o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas, sobretudo, para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes".

Para os autores, este tipo de pesquisa está centrado na reflexão-ação e apresenta-se como "transformadora, libertadora, provocando mudança de significados".

Um dos instrumentos de coleta de dados utilizado neste estudo é o diário de campo que é:

> "É um dos instrumentos mais ricos de coleta de informações. Tem como objetivo registrar de maneira detalhada e sistematizada, os acontecimentos, as rotinas e as conversas que contribuirão no processo de análise das ocorrências observadas" (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p.118).

A pesquisa torna-se pesquisa explicativa que além de registrar e analisar os fenômenos estudados busca identificar as suas causas, valendo-se dos métodos científicos disponíveis em quantitativos e qualitativos. Outro instrumento, considerado tradicional na coleta de informações qualitativas que foi utilizado, é o questionário.

Sendo assim, a coleta de dados feita através das anotações do diário de campo serviram para fazer a análise qualitativa, ou seja, para identificar quais as maiores dificuldades encontradas pelos alunos durante o processo, as contribuições da resolução de problemas para a aprendizagem. O questionário serviu para identificar as percepções dos alunos sobre tal metodologia, quais os motivos pelos quais encontraram ou não dificuldade, tipos de dificuldade, e os motivos pelos quais os alunos acham importante a Resolução de Problemas. Os dados quantitativos foram obtidos através das notas dos testes avaliativos.

Os procedimentos metodológicos contemplaram os estudos bibliográficos, construção dos instrumentos de coleta de dados, elaboração da Sequência de Ensino e posterior aplicação no trabalho de campo, análise dos dados obtdos e conclusões.

A partir do estudo bibliográfico detalhado sobre os Logaritmos para o Ensino Médio, iniciando com uma breve revisão sobre o conteúdo de potências, aspectos históricos dos logaritmos além de escrever detalhadamente os conceitos as propriedades e as definições existentes dentro do conteúdo de funções logarítmicas. Foram utilizados alguns livros do ensino médio para fazermos uma análise de como está sendo ensinado o conteúdo dos Logaritmos, e também analisamos de que maneira os autores abordam a Metodologia de Resolução de Problemas em tais livros. Além de estudar os logaritmos, fizemos um estudo sobre a metodologia da Resolução de Problemas, e buscamos entender o porquê da necessidade de se usar novas metodologias nas aulas de Matemática, e como a Resolução de problemas pode melhorar o aprendizado e a motivação dos alunos.

Inicialmente pretendíamos utilizar apenas problemas de aplicação, porém no decorrer do estudo das bibliografias percebemos que era extremamente importante para o ensino e também para a aprendizagem ser completa, que diversos tipos de problema fossem utilizados, pois os tipos de problemas se complementam, esse foi o grande motivo da escolha da Resolução de Problemas.

Após o estudo bibliográfico para referenciar teoricamente a proposta de Sequência de Ensino, buscamos e elaboramos problemas diversos, focando em problemas de aplicação prática que envolvem logaritmo tanto em sua resolução como em seu próprio enunciado. Buscamos em livros didáticos do Ensino Médio, em provas de vestibular de diferentes universidades e provas do ENEM, além disso, elaboramos alguns problemas com base em situações vivenciadas por nossos alunos. Dessa forma, organizamos uma Sequência de Ensino para o ensino do conteúdo de logaritmos a fim de construir todos os conceitos através da metodologia da Resolução de Problemas.

De maneira geral, o conteúdo de logaritmos foi trabalhado através da resolução prévia de problemas, cujas conclusões das atividades eram discutidas junto com o professor de maneira expositiva e através do diálogo entre os alunos e o professor.

A turma escolhida para a realização da pesquisa foi o primeiro ano do Ensino Médio, por ser o conteúdo de logaritmos previsto no currículo desta etapa da Educação Básica. O colégio onde foi realizada tal pesquisa foi o Colégio Intelectus, localizada na cidade de Xanxerê, SC, justamente por ser o local de trabalho do pesquisador, e ser um dos objetivos do PROFMAT, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional, que compreende a melhoria do Ensino Médio em âmbito Nacional. O Colégio Intelectus faz parte da rede particular de ensino que oferece o Ensino Fundamental, Médio, Curso Pré-Vestibular e Preparatório para o ENEM. O colégio tem como principal prática pedagógica desenvolver os conteúdos a partir da construção do conhecimento, da atenção, do desenvolvimento da memória, da observação, da abstração, da capacidade de estabelecer comparações e produzir sínteses, o que envolve constante atividade mental por parte de seus educandos.

O primeiro ano do Ensino Médio do Colégio Intelectus é formado por vinte e três alunos, sendo 13 do sexo masculino e 10 do sexo feminino, com faixa etária de 15 a 17 anos. Durante a aplicação da sequência aplicamos dois testes mistos (Apêndice 3) de questões objetivas e dissertativas, sendo que um dos testes foi aplicado após os 8 primeiros encontros, e outro no final do nosso trabalho, ou seja após a realização dos 13 encontros. Esses testes deveriam ser respondidos individualmente e para resolvê-los, os alunos deveriam possuir o conhecimento dos conceitos, regras e propriedades dos logaritmos, além de saberem interpretar os mais diversos tipos de problemas. Estes testes tratam-se de provas escritas elaboradas com questões utilizadas nos mais diversos vestibulares do Brasil e do ENEM. No último encontro, os alunos responderam um questionário (Apêndice 2) com intuito de obtermos informações qualitativas sobre todo o processo.

Após ser aplicada a Sequência de Ensino, os testes e o questionário, obtemos os dados quantitativos e qualitativos que representarão os resultados da pesquisa. Portanto, a análise foi feita através da representação dos resultados em gráficos estatísticos para uma melhor compreensão dos mesmos, utilizando assim a Estatística Indutiva para a conclusão da eficácia do método e a categorização das respostas do questionário.

Por fim, elaboramos o relatório da pesquisa, contendo tudo o que estudamos, quais nossas pretensões, os meios pelos quais buscamos atender nossas expectativas e o que podemos concluir ao final de todo o trabalho realizado.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O ENSINO DA MATEMÁTICA

Desde a antiguidade a matemática está diretamente relacionada com a história e o desenvolvimento da humanidade, ela está presente em todas as etapas da evolução do conhecimento científico, na vida diária e nos locais de trabalho.

Ao longo do tempo também aconteceram mudanças na maneira de ensinar, surgindo pesquisas que apontam caminhos para um ensino e aprendizagem mais efetivos da matemática. O momento atual do ensino da Matemática requer uma capacitação especial e empenho por parte do professor, que muitas vezes não é bem preparado para exercer suas funções. O professor de Matemática nos dias atuais deve estar sempre disposto a buscar novas estratégias de ensino e o domínio dos conteúdos matemáticos correspondentes, para que esteja preparado para lidar com as dificuldades que esta profissão impõe na sala de aula. Tais estratégias podem ser encontradas dentro da Educação Matemática.

A Educação Matemática estuda as relações existentes entre o ensino e aprendizagem da Matemática. De certa forma é um elo entre a Matemática, a Pedagogia e a Psicologia.

Desde o início do século XX professores e pesquisadores se reúnem para pensar o ensino da Matemática. A partir da década de 1950, surgem os primeiros congressos sobre educação matemática. E na década de 1970 começa a se desenvolver na França, a didática da matemática enquanto campo para a sistematização dos estudos acerca do ensino da matemática.

O desenvolvimento das pesquisas dentro das universidades, por parte de professores e pesquisadores da área promoveu a criação de organizações de professores de matemática, que atualmente tem grande influência sobre a elaboração das diretrizes curriculares na área em diversos países.

Para Fiorentini (1994), a Educação Matemática, enquanto campo profissional começa a se constituir, no início do século passado, e perdura até o final dos anos 60. Aos poucos, estudos sistemáticos do ensino brasileiro, desse período, foram realizados por pedagogos e psicólogos.

Os problemas percebidos no ensino da matemática eram, na maioria, no âmbito dos conteúdos escolares que deveriam ser reformulados e atualizados e diziam respeito quase sempre ao ensino primário.

No início dos anos 70 deu-se a implantação dos primeiros cursos de pós-graduação “stricto sensu” em educação. Através destes cursos foi possível evoluir no aspecto de se discutir novas maneiras de se trabalhar o ensino da matemática.

Segundo Colombo e Lagos (2005), foi na década de 1980 que houve uma ampliação da região de inquérito da Educação Matemática e também o surgimento de algumas linhas temáticas de pesquisa com indícios de continuidade e consistência teórico-metodológicas, tais como: a Etnomatemática, o currículo escolar da matemática, a prática e o cotidiano da sala de aula, influenciando significativamente as tendências contemporâneas em Educação Matemática. Todas essas tendências envolviam dimensões mais amplas, como histórico-filosófica, a epistemológica, a lingüística, a sociológica e a teleológico-axiológica.

Ainda segundo as autoras, no início dos anos 90 a área da Educação Matemática começa a se consolidar, ou seja, começou a ganhar força no campo da pesquisa, cada vez mais professores buscaram pesquisar e conhecer sobre a área, desta forma foi possível que os estudos da educação matemática começassem a aparecer com maior freqûencia nos currículos escolares da disciplina de Matemática. Este processo de consolidação da área se deu entre outros motivos, pelo retorno ao Brasil de educadores que concluíram seus doutorados em outros países, fato que contribuiu muito para o crescimento e fortalecimento da área. Nesse período surgem novas propostas para a sala de aula no ensino aprendizagem da Matemática. Destacam-se, de acordo com Burak (1998), as mais relevantes tendências que são discutidas nos encontros e pesquisas referentes ao ensino da matemática: Resolução de problemas, Modelagem Matemática, Etnomatemática, História da Matemática, Tecnologias e Jogos Matemáticos.

A Resolução de Problemas é uma tendência que propõe um ensino estimulante por meio de situações problemas, levando o aluno a elaborar estratégias diferentes para cada problema. Para esse autor, se o professor apresentar aos alunos problemas que desafiem a curiosidade certamente vai despertar o interesse dos mesmos, para resolvê-los. A satisfação gerada, pela solução encontrada, pode ativar um talento natural para a matemática que poderá ser um instrumento profissional.

A Modelagem Matemática é a tendência que trata da arte de transformar problemas da realidade em problemas para serem resolvidos em sala de aula. Ao falar sobre as atividades de modelagem matemática em sala de aula, Burak (2004) apresenta as etapas para o encaminhamento e desenvolvimento desse trabalho: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução do (s) problema (s) e desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema; análise crítica da (s) solução (es). De certa forma a Modelagem Matemática surge para romper as barreiras existentes entre a matemática escolar formal e a sua utilidade na vida real.

A etnomatemática trata das raízes sócio-culturais da arte ou técnica de explicar e conhecer. Prioriza a cultura local onde quer que o trabalho seja desenvolvido valorizando sempre a matemática presente nas diferentes culturas, tenta-se valorizar os conhecimentos que o aluno traz de suas experiências fora do contexto escolar.

A História da Matemática propõe mostrar ao professor e ao aluno como os conhecimentos matemáticos surgiram e que importância tiveram para o desenvolvimento da humanidade. Segundo Maior e Trobia (2010) através da história da Matemática o estudante pode ser instigado a compreender como o conhecimento matemático é construído tornando-o, assim mais significativo para o aluno.

A tendência do uso de Tecnologias permite ao aluno uma aprendizagem mais rica, dando-lhe mais autoconfiança na sua capacidade de criar e fazer matemática (Toledo, 1997). Para Maior e Trobia (2010) as tecnologias precisam ser compreendidas como ferramentas que auxiliam o trabalho do professor, que deve ser indispensável no processo de interpretação, de relacionamento, de julgamento de tais tecnologias para assim fazer as complementações necessárias.

Os Jogos Matemáticos, segundo Colombo e Lagos (2005), estimulam o raciocínio, a estimativa o cálculo mental e conceitos matemáticos, desenvolvendo o pensamento lógico-matemático e o espacial, além de estimular o planejamento das ações.

Dentre todas essas tendências, para desenvolver nossa proposta de Sequência de Ensino, escolhemos a tendência da Resolução de Problemas. Esta tendência, propõe um ensino estimulante por meio de problemas que envolvem situações vivenciadas pelo aluno em seu dia a dia e que para resolvê-los terá que elaborar estratégias diferentes, envolvendo assim todos os seus conhecimentos. É durante a vida escolar que o aluno deve ter oportunidades de se envolver com diferentes situações-problema, sendo que dessa forma quando amadurecer poderá agir com inteligência e naturalidade ao enfrentar problemas da vida diária, tanto de ordem econômica, política ou social.

É inegável que um dos principais objetivos da escola é a de fazer com que os alunos não somente tenham para si determinados problemas, mas que adquiram e desenvolvam os meios para resolvê-los. Ela também deve possibilitar a elaboração e o desenvolvimento de estratégias de identificação e resolução de problemas utilizando o raciocínio objetivo, sistemático e rigoroso para aplicar às situações da vida cotidiana.

A metodologia de resolução de problemas em educação matemática propõe maneiras para extrair o aluno de sua tradicional postura, muitas vezes consideradas como passiva em sala de aula, para uma postura mais ativa e motivadora. Desta forma busca modificar a noção de que a matemática é algo já determinado, ou seja, pronto e acabado.

Segundo Onuchic (1999) problema é algo para o qual não se tem solução imediata, mas se está interessado em buscar uma. A motivação em resolver um problema permite que se realize um processo de investigação que desenvolve no aluno uma nova visão, apropriação e aplicação das propriedades matemáticas. Na busca da solução de um determinado problema surgem novas situações, que instigam a curiosidade matemática, muitas vezes não manifestada nas pessoas.

Desta forma o aluno torna-se sujeito de sua própria aprendizagem e assim, construindo estrutura mais sólida para a aplicação das fórmulas e conceitos matemáticos levando-o a refletir uma estruturação e apropriação mais concisa do conhecimento matemático, sendo capaz de compreender, aplicar e discutir com o educador fórmulas, conceitos, propriedades e modelos matemáticos, podendo assim até com isso modificá-los e aplicá-los na forma em que o problema propõe, para chegar ao resultado esperado, que satisfaça a resolução do problema.

Acreditamos que essa metodologia possa trazer uma motivação para o aluno aprender matemática, "a resolução de problemas é uma metodologia de ensino que coloca professor e aluno como sujeitos ativos no processo de ensino-aprendizagem e que relaciona a matemática aprendida na escola com os problemas vivenciados no cotidiano"(COLOMBO, LAGOS, 2005, p. 11).

Segundo Onuchic e Allevato (2005) na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Entendemos que a resolução de problemas consiste em permitir que o aluno utilize seus conhecimentos e desenvolva a capacidade de organizar e dominar as informações ao seu redor. Com isso o aluno tem a oportunidade de ampliar seu conhecimento, desenvolver seu raciocínio lógico, enfrentar novas situações e por em prática as aplicações da matemática. Da mesma forma, o professor que trabalha com a resolução de problemas permite-se atingir os objetivos de aprendizagem definidos, além de tornar a aula mais interessante e motivadora, neste sentido, em nossa concepção o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas, quanto aprende matemática para resolvê-los.

O professor deve ter bastante cuidado na escolha dos problemas, pois existem problemas cuja solução pode ser desde muito trivial até problemas que farão o aluno ter um ganho cognitivo maior. É preciso organizá-los de tal forma que os objetivos da sala de aula, ou seja, os objetivos que a metodologia da resolução de problemas propõe, sendo o principal, tornar o aluno um sujeito mais ativo, sejam alcançados.

No âmbito da Educação Matemática existem vários tipos de problemas, e com o objetivo de facilitar e orientar os alunos na resolução de problemas e também auxiliar o professor na escolha de atividades que tenham um ganho cognitivo maior, que sejam mais interessantes e com os quais se harmonizam melhor os interesses de uma determinada aula, vários autores resolveram classificá-los. Entre outras, escolhemos duas propostas para nos guiar. De acordo com a proposta de Polya (1995) os problemas dividem-se em:

1) Problemas Auxiliares – são utilizados como auxílio para resolver outros problemas.
2) Problemas de Determinação, Problemas de Demonstração – nos problemas de determinação o objetivo é encontrar a incógnita do problema; já os problemas de demonstração devem mostrar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa;
3) Problemas Práticos – são problemas aplicados em situações da sociedade
4) Problemas Rotineiros – é um problema que exige do aluno apenas o desempenho mecânico das operações matemáticas rotineiras, ou seja, a resolução é processo pré-determinado que segue uma rotina;

Para Dante (1988), pesquisador em Educação Matemática e autor de outros livros didáticos os problemas classificam-se em:

1) Exercícios de Reconhecimento – Esse é o tipo de problema que induz o aluno a reconhecer, recordar ou enunciar alguma propriedade;
2) Exercícios de algoritmos – São exercícios que o aluno pode resolver usando algum método pré – determinado, ou seja, são exercícios resolvidos passo a passo que tem como objetivo reforçar conhecimentos anteriores.
3) Problemas padrões: São problemas de repetição, o aluno resolve o problema seguindo um modelo já aplicado anteriormente, são necessários, porém não devem ser predominantes como muitas vezes são.

4) Problemas-processo ou heurísticos. São problemas que tem como finalidade exigir do aluno que ele pare um tempo para pensar e desenvolver uma maneira de agir, ou seja, desenvolver uma estratégia que poderá levá-lo à solução e, por isso, tornam-se mais interessantes e motivadores do que os problemas padrões. Eles desenvolvem a curiosidade do aluno que possibilita o mesmo a desenvolver sua criatividade, além disso, "inicia o aluno ao desenvolvimento de estratégias e procedimentos para resolver situações-problema o que, em muitos casos é mais importante que a própria resposta correta das mesmas". (DANTE, 1988, p.86-87)

5) Problemas de aplicações ou situações-problema. São problemas nos quais se procura matematizar uma situação real, através de conceitos e técnicas matemáticas, organizando os dados em tabelas ou gráficos, tirando informações a partir dos dados, fazendo operações, etc. Em geral exigem pesquisa e levantamento de dados.

6) Problemas de quebra-cabeça – São problemas que fazem parte da matemática recreativa, cuja solução depende da percepção de algum truque ou estratégia.

Como podemos perceber, as classificações apresentadas tratam de vários tipos de problema, e mostram a finalidade de cada um deles, isso pode ser um indicativo que, em matemática é importante utilizar problemas de tipos variados, justamente porque possibilita tratar de aspectos diferentes do mesmo conteúdo. Ou seja, em sala de aula, podemos trabalhar com todos eles, desde que sejam enfatizados de acordo com o que estamos trabalhando no momento.

3.1.1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO

No início do século XX, o ensino de matemática resumia-se basicamente em técnicas de memorização, uso de regras já determinadas e prontas, algoritmos e repetição de exercícios. O professor era um mero transmissor do conteúdo e o aluno um sujeito passivo que deveria apenas memorizar, escrever e repetir as técnicas do professor na resolução de exercícios rotineiros. Segundo Onuchic (1999), nessa época, o currículo de matemática ainda não estava bem definido, ou seja, ainda buscava-se em consenso mais geral, embora houvesse um caminho de trabalho: aritmética, álgebra e geometria.

Nas décadas de 1970 e 1980, surge uma nova orientação, ou seja, substituir tal matemática, que era focada na repetição, para uma matemática que levasse os alunos a aprender matemática com compreensão. Esta nova forma de ensinar a matemática baseava-se no desenvolvimento de técnicas e habilidades para a resolução de problemas pré-determinados ou para aprender um novo conteúdo. "Essas duas formas de ensino não lograram sucesso quanto à aprendizagem dos alunos. Na verdade, alguns alunos aprendiam, mas a maioria não." (ONUCHIC, ALLEVATO, 2005, p. 214).

Questiona-se muito nos dias de hoje se as técnicas que os professores utilizam em sala de aula são as mais adequadas para o momento em que a sociedade se encontra.

Nossa sociedade tem passado por transformações profundas, devido aos avanços científicos e tecnológicos. De certa forma a educação não consegue acompanhar tais mudanças resultantes dessas transformações e muitas vezes não atende os objetivos de uma sociedade moderna. Segundo Maior e Trobia (2010) na escola, ainda persistem os métodos tradicionais de ensino, pois a grande maioria dos professores vem de uma formação, onde o ensino era centrado no professor.

Muitas teorias e técnicas de ensino que surgiram para que o professor pudesse aprimorar sua maneira de trabalhar acabaram não decolando, são várias propostas inovadoras que ficaram esquecidas, e isso se deve ao fato de que as práticas pedagógicas de sala de aula sempre retornam ao ensino mecanizado que prioriza a repetição e o seguimento de um método já determinado não levando o aluno a desenvolver todas as suas aptidões. Ensinar através da resolução de problemas pode melhorar a maneira com que professor e aluno interagem em sala de aula. É possível também que tais métodos tenham fracassado pelo fato de não conseguirmos promover a interação da matemática com outras áreas do conhecimento, para que os alunos possam ser desafiados a perceber que ela não é uma ciência isolada. Dessa forma, é importante que o aluno receba informações de acordo com sua realidade, mas para isso a Educação deve evoluir mais rapidamente.

> Quando o professor adota a metodologia da resolução de problemas, seu papel será de incentivador, facilitador, mediador das idéias apresentadas pelos alunos, de modo que estas sejam produtivas, levando os alunos a pensarem e a gerarem seus próprios conhecimentos. Deve criar um ambiente de cooperação, de busca, de exploração e descoberta, deixando claro que o mais importante é o processo e não o tempo gasto para resolvê-lo ou a resposta final. (SOARES, PINTO, 2001, p.7)

Nosso intuito de ensinar através da resolução de problemas é ensinar evitando que o professor se torne mais ativo do que o aluno, o que acontece muito quando ensinamos por alguns métodos mais tradicionais, métodos pelos quais o aluno recebe o conceito pronto e repete o que lhe foi dito. Conforme afirma Bicudo (1999) citada em Colombo (2005, p. 23):

> A resolução de problemas como um ponto de partida é um meio de se ensinar matemática. Nessa concepção, a resolução de problemas é feita de modo a contribuir para a formação de conceitos antes mesmo da sua apresentação em linguagem formal.

O ensino da matemática através da Resolução de Problemas pode motivar o aluno a ser um sujeito ativo a fim de que ele possa desenvolver e organizar seu conhecimento matemático em vários níveis de complexidade, como dito anteriormente, é preciso organizar os problemas de maneira que a resolução dos mesmos, leve o aluno a esses diferentes níveis de conhecimento.

> A resolução de problemas precisa ser desafiadora, um problema deve ser formulado para aguçar a curiosidade dos alunos, proporcionando a elaboração de um ou vários procedimentos, ou seja, à medida que o aluno for aprofundando a resolução do problema, a compreensão do conteúdo torna-se mais ampla e a sua habilidade em usar matemática em vários conceitos aumenta consideravelmente.(COLOMBO, LAGOS, 2005, p.23)

Nós professores não podemos inibir o aluno de seu pensamento crítico e criativo, por isso é preciso saber propor situações problemas e orientar os alunos para que eles possam construir o seu próprio conhecimento e serem capazes de interpretarem e lembrarem fatos baseados em seu conhecimento juntamente com suas experiências cotidianas.

A seguir mostraremos como deve ser uma aula baseada na resolução de problemas segundo Onuchic e Allevato (2009, p.8). As autoras apresentam uma proposta que consiste em organizar as atividades de resolução de problemas de acordo com nove etapas:

1) Preparação do problema - Selecionar um problema com o intuito de induzir o aluno à construção de um novo conceito, propriedade ou método. Esse problema será chamado problema gerador. Geralmente esse tipo de problema é utilizando sem que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha sido trabalhado previamente.

2) Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3) Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos. - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo-lhes o problema.

4) Resolução do problema – Realizadas as leituras, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, buscam resolvê-lo, é importante que haja colaboração de todos os componentes do grupo, para que se cumpram os objetivos da resolução de problemas. O problema gerador é aquele que, durante o processo de, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5) Observar e incentivar – Nessa etapa o professor não atua como mero transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. O professor atua como mediador e deve induzir os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. Deve também estimulá-los a escolher diferentes caminhos ou métodos a partir dos próprios recursos de que dispõem.

6) Registro das resoluções na lousa – Pelo menos uma pessoa de cada grupo é convidada para ir à lousa registrar suas resoluções. Mesmo que sejam resoluções incorretas ou feitas por diferentes caminhos, devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7) Plenária – Nesta etapa todos os alunos são convidados para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, assim cada grupo pode defender seu ponto de vista e todos poderão esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante importante e necessário para a aprendizagem.

8) Busca do consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor deve buscar junto com todos os alunos, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal”, organizada e estruturada em linguagem matemática para uniformizar os conceitos, as propriedades e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades indispensáveis sobre o assunto.

3.2 O ENSINO DOS LOGARITMOS E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, pretendemos fazer uma análise de como está sendo ensinado o conteúdo dos logaritmos na atualidade e o que alguns documentos oficiais preconizam para o ensino deste conteúdo. Iremos observar a Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina, que é de nosso interesse, uma vez que o colégio no qual aplicaremos a Sequência de Ensino segue tal Proposta e também os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM.

Outro aspecto será a analise de alguns livros didáticos mais utilizados na atualidade e também o material didático utilizado pela escola de interesse (O Colégio Intelectus). Nosso intuito é observar se a metodologia baseada na Resolução de Problemas vem sendo tratada nestes documentos.

Desde já podemos afirmar que na principal prova da educação básica do país, o Exame Nacional do Ensino Médio, o conteúdo logaritmo aparece em raras oportunidades, e quando apareceu, apareceu em forma de um problema de aplicação, que exigia do aluno, além do conhecimento da definição e propriedades dos logaritmos, a interpretação do texto. Apresentaremos este problema em nossa sequência de ensino no capitulo 4, o problema é que esse tipo de problema, O Problema de Aplicação, como chama Dante (1988) quase não é abordado pelos livros didáticos, problemas desse tipo deveriam e poderiam ser abordados com muito mais freqüência, uma vez que a quantidade de aplicações dos logaritmos é extensa.

Quantidade essa que é, muitas vezes, desconhecida pelos alunos e até por alguns professores, a ponto de o conteúdo dos logaritmos ser deixado de lado. A experiência empírica do pesquisador em cursos técnicos e cursos superiores, com alunos das mais diversas escolas públicas da região de Xanxerê, SC, provenientes de escolas que não seguem um material específico, mostrou que vários deles nunca tiveram contato com logaritmo, e nem se quer sabiam do que se tratava. Mas esse não é o único motivo, a falta de profissionais da área nas escolas da região, faz com que professores não preparados o suficiente trabalhem tais conteúdos, e como não dominam totalmente a matemática, acabam trabalhando de uma maneira superficial e os problemas de aplicação quase nunca são abordados.

Apesar de os livros didáticos abordarem muito pouco os problemas de aplicação, acreditamos que o professor pode desenvolver um trabalho abordando mais problemas desse tipo. Basta não seguir um único livro ou autor, e sim utilizar pelo menos três ou quatro exemplares. O acesso a esse material não seria um problema, pois nas bibliotecas das escolas encontramos diversos livros de Matemática de autores diferentes.

Em nosso trabalho, elaboramos uma sequência de ensino baseada na Resolução de Problemas, utilizamos vários tipos de problemas porque julgamos que todos são necessários para que o aluno tenha uma fundamentação completa do conteúdo estudado, porém a grande maioria são problemas de aplicação, uma vez que esse é o diferencial de nosso trabalho. É importante aqui lembrar que nossa idéia inicial era construir uma proposta de ensino dos Logaritmos baseada apenas em situações-problema, mas no decorrer da pesquisa percebemos que é importante que haja também outros tipos de problema.

> No entanto, a abordagem de conceitos, idéias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas ainda é bastante desconhecida da grande maioria e, quando é incorporada à prática escolar, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagem

> de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos (BRASIL, 1997).

O material utilizado pelo Colégio Intelectus e consequentemente pelo professor que também é o pesquisador, é a Apostila Positivo. É um material eleborado por mestres e doutores em Matemática e Educação Matemática. Este material é utilizado em todo o Brasil por um grande número de escolas da rede particular de ensino. O conteúdo de logaritmos é abordado neste material mesclando o Ensino Tradicional com a Resolução de Problemas. Diferente da maioria dos livros didáticos, este material contém atividades que fazem o aluno formar o conceito, dessa forma podemos dizer que a metodologia utilizada se aproxima muito da Resolução de Problemas. Mesmo assim, a maior parte do conteúdo é abordada da forma tradicional, ou seja, da forma usual que estamos acostumados a ver em diversos livros didáticos e que também faz lembrar nossa prática em sala de aula, que consiste na apresentação dos conceitos seguidos de atividades de memorização, com alguns problemas de aplicação abordados no final, mas em pequeno número, menos do que julgamos necessário.

Além de analisar este material, analisamos alguns dos livros mais presentes nas bibliotecas das escolas, escritos por autores bastante conhecidos e renomados.

O Livro Matemática: Contexto e Aplicações de Luiz Roberto Dante de 2011 também faz uma mescla entre o Ensino Tradicional e a Resolução de problemas? Por exemplo, Dante (2011) inicia com a abordagem dos logaritmos baseada na Resolução de Problemas, ou seja, com atividades que levam o aluno a formar o conceito da definição do logaritmo ou seja, que o logaritmo de um número “a” na base “b”, é o expoente ao qual se deve elevar “b” para obter “a”, e também da condição de existência, além de abordar alguns aspectos históricos, mas logo segue com o Ensino Tradicional, apresentando as conseqüências da definição e as propriedades já prontas para que o aluno resolva os exercícios posteriormente. Depois, o autor volta a apresentar a Função Logarítmica, baseado na Metodologia da resolução de Problemas. Em todo o conteúdo referente ao Logaritmo, Dante aborda pouquíssimos problemas de aplicação, ou seja, o que ele mesmo chama de situações-problemas. Já na parte referente a Função Logarítmica a maioria das atividades são os problemas de aplicação. Apresentamos dois exemplos que comprovam esta mescla.

Exemplo 1: A que número x se deve elevar:

a) o número 2 para se obter 8?

b) O número 3 para obter o número $\frac{1}{81}$?

O autor efetua os cálculos e apresenta as respostas e as define:

a) $x = 3$, esse valor representa o logaritmo do número 8 na base 2;

b) $x = -4$, esse valor representa o logaritmo do número $\frac{1}{81}$ na base 2.

(DANTE, 2011, p.150).

Exemplo 2: 1ª propriedade: Logaritmo de um produto. Da propriedade fundamental das potências, $a^x \times a^y = a^{x+y}$, surge uma propriedade semelhante nos logaritmos a qual é $\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$. Veja um exemplo:

a) $\log_2(4 \times 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$.

Outro livro que há tempos vem sendo usado nas escolas, que inclusive no Ensino Médio do autor foi utilizado, é o livro Matemática Fundamental dos autores, José Ruy Giovanni, José Ruy Giovanni Jr e José Roberto Bonjorno de 1994. Neste livro, todo o conteúdo de logaritmos é abordado da Metodologia tradicional, ou seja, inicia com toda a explicação dos conceitos, apresenta exemplos resolvidos e em seguida os problemas propostos. A maioria Problemas de Algoritmo, ou seja, problemas cujas soluções são obtidas através de um modelo a ser seguido. Apresentamos um exemplo dado por Bonjorno e Giovanni e Giovanni Junior (1994).

Exemplo 1: O logaritmo de 1 em qualquer base é igual a zero. Dê o valor dos logaritmos:

a) $\log_9 1$

b) $\log_{\frac{1}{7}} 1$.

Também analisamos um livro mais recente (2011) escrito por esses mesmos três autores, o Livro Matemática Fundamental: Uma nova abordagem, a diferença é que neste livro há uma maior variedade nos tipos de problema propostos, sendo a grande maioria Problemas de aplicação ou situações-problema. Apresentamos um exemplo.

Exemplo: ‘(Vunesp – SP) O altímetro dos aviões é um instrumento que mede a pressão atmosférica e transforma esse resultado em altitude. Suponha que a altitude h acima do nível do mar, em quilômetros, detectada pelo altímetro do avião seja dada em função da pressão atmosférica p, em atm, por $h(p) = 20 \times \log \frac{1}{p}$. Num determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro era 0,4 atm. Considerando a aproximação $\log 2 = 0,3$, a altitude h do avião nesse instante, em quilômetros, era de:

a) 5

b) 8

c) 9

d) 11

e) 12

(BONJORNO, GIOVANNI, GIOVANNI JUNIOR, 2011, p.259)

Outro livro que analisamos é o Livro Matemática: Aula por Aula de Benigno Barreto Filho e Claudio Xavier da Silva de 2000. Este livro traz uma abordagem extremamente tradicional e apenas exercícios de algoritmos, e apesar de apresentar algumas aplicações do logaritmo, nenhum problema proposto é de Aplicação. Apresentamos um trecho do livro.

> “O sistema de logaritmos decimais é um sistema no qual se adota a base 10, o que vem simplificar cálculos no campo da Matemática. Para esse sistema de logaritmos, na notação iremos omitir a base.

Exemplo: $\log_{10} 0,001 = \log 0,001 = -3$.

(BARRETO FILHO, SILVA, 2000, p. 155)

Por esta análise e também tomando como base alguns livros didáticos, tais como os abordados na pesquisa de Patrícia Rodrigues da Silva Rossi, Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática, podemos concluir que muitos ainda não estão atualizados para acompanhar a nova tendência de ensino da matemática, abordados nas propostas curriculares, nos PCNs e provas de vestibulares como o ENEM. Esta tendência pode ser traduzida como a busca pela contextualização dos conteúdos. Ou seja, o ensino não só dos logaritmos mas de toda matemática utilizando problemas como ponto de partida e motivador para que o aluno aprenda a gostar da matemática e consequentemente dos logaritmos. Vale ressaltar que os livros analisados na pesquisa Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática, segundo Rossi (2010), em diversos momentos estes livros apresentam um problema motivador como ponto de partida de algum conteúdo, mas os analisados pelo autor deste trabalho raramente se utilizam desta metodologia.

Deixando um pouco de lado os livros didáticos é preciso salientar que existem ótimas propostas de ensino dos logaritmos desenvolvidas por colegas professores de matemática, em nossa pesquisa encontramos propostas de ensino do logaritmo baseadas na História da Matemática (Função Logaritmica: Uma Abordagem a partir da História da Matemática, de Ingo Valter Schreiner, O Estudo dos Logaritmos Através de uma Perspectiva Histórica, de Andreia

Julio de Oliveira), na Utilização de Softwares (O Geogebra como Ferramenta de Auxílio no Ensino de Logaritmo, de Emanuel Gomes Lourenço, Introduzindo o Conceito de Logaritmo com a Calculadora Científica, de Erivam Lima Laureano e Kátia Maria de Medeiros) e também na Resolução de Problemas (A Resolução de Problemas como Estratégia Didática para o Ensino da Matemática, de Ariana Bezerra de Souza), entre outras propostas igualmente interessantes.

Agora que concluímos a fundamentação teórica e metodológica, vamos apresentar um estudo detalhado do conteúdo de Logaritmos para o Ensino Médio, ou seja, a fundamentação matemática dos Logaritmos. Este estudo contém conceitos, propriedades e suas respectivas demonstrações e será apresentado na próxima seção.

3.3 O ESTUDO DE LOGARITMOS

Nesta seção apresentamos o detalhamento do conteúdo de logaritmos, ou seja, a fundamentação teórica sobre o conteúdo matemático, contendo as definições, as propriedades e as demonstrações das mesmas além dos aspectos históricos. O estudo da fundamentação matemática dos conceitos é de extrema importância, uma vez que é ela, juntamente com a fundamentação metodológica apresentada nas seções anteriores, que nos dará condição de elaborar a Sequência de Ensino de tal maneira que o aluno possa compreender de forma efetiva os Logaritmos.

3.3.1 PANORAMA HISTÓRICO

Por volta dos séculos XVI e XVII, com os avanços da astronomia, navegação e comércio, surgiu a necessidade de se fazer cálculos mais complexos e com números considerados muito grandes ou muito pequenos. Os grandes trabalhos publicados por volta de 1614 por John Napier (1550 - 1617), um Barão Escocês, que buscava um sistema que facilita-se a multipliicação de seno e por volta de 1620 Jobst Burgi, um matemático e teólogo suíço, fabricante de instrumentos astronômicos, os quais desenvolveram os seus estudos separadamente, contribuíram para a facilidade e agilidade desses cálculos. Esses trabalhos continham as ideias sobre logaritimos mais próximo do que hoje. Eles criaram tabelas que eram muito utilizadas no desenvolvimento das expressões logarítmicas. Como surgimento das calculadoras e computadores, essas tabelas foram deixadas de lado, mas as ideias dos logaritimos são utilizadas até hoje em diversas áreas do conhecimento humano.

O método de Napier baseou-se no fato de que associando aos termos de uma progressão geométrica e os termos de uma progressão aritmética

PA	1	2	3	4	...	n	...
PG	b	b^2	b^3	b^4	...	b^n	...

então o produto de dois termos da primeira progressão, $b^n.b^p$, está associada a soma $n+p$ dos termos correspondentes na segunda progressão. Considerando, por exemplo, para $b=2$.

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Para efetuar, por exemplo, 256×32, basta observar que:

- 256 na segunda linha corresponde a 8 na primeira, ou seja, $256 = 2^8$;
- 32 na segunda linha corresponde a 5 na primeira, ou seja, $32 = 2^5$;
  Assim, $256 \times 32 = 2^8 \times 2^5$.
- Como $8+5=13$,
- 13 na primeira linha corresponde a 8192 na segunda, ou seja, $8192 = 2^{13}$.

Assim, $256 \times 32 = 8192$ resultado esse que foi encontrado através de uma simples observação e adição. É dessa forma que os logaritmos de Napier facilitavam e agilizavam as multiplicações e divisões.

Napier elaborou tabuadas de logaritmos mais úteis de modo que o logaritmo de 1 fosse zero e o logaritmo de 10 fosse 1. Nascendo assim os logaritmos dos dias de hoje.

Voltamos a analisar o exemplo anterior:

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PG	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Os números da PA, que é a série geradora, são chamados de logaritmo na base 2, e, as potências obtidas (PG) chamados de logaritmando ou antilogaritmo. Observando estas tabelas, nos motivamos a estudar primeiramente as potências.

3.3.2 POTÊNCIAS E PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS

Sabemos que é possível multiplicar várias vezes um mesmo número, por exemplo: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, existe uma forma compacta de representar esse produto? Neste caso, seria 2^5. Desta forma podemos ter outras representações: 3^{10}, 7^{15}, 2^{100} e sabemos o que isso significa, isto nos motiva a estudar números na forma a^n.

Consideramos $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ o conjuntos dos números naturais.

Definição 3.1. *Potências com expoente natural*

Sejam a um número natural diferente de zero e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número natural a^n tal que:

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n \times a \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \end{cases}$$

Desta definição decorre que:

$$a^2 = a^{1+1} = a^1 \times a = a \times a$$

$$a^3 = a^2 \times a = a \times a \times a$$

e, de modo geral, para p natural, $p \geq 2$, temos que a^p é um produto de p fatores iguais a "*a*". Observe que não há produto de um só fator.

Observação 3.2. *: Na definição da potência a^n, a base a pode ser um número real positivo ou negativo. Então podemos extender a definição 3.1 para a base sendo um número real diferente de zero.*

Vejamos o que ocorre em cada um desses casos:

1º caso: $a > 0$

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0; \ \forall n \in \mathbb{N}$$

2º caso: $a < 0$

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n < 0 \ se \ n \ é \ impar \\ a^n > 0 \ se \ n \ é \ par \end{cases}$$

Observe também que se $a > 1$ *obtemos que* $1 < a < a^2 < \ldots < a^n < a^{n+1} < \ldots$. *Além disso se* $0 < a < 1$ *tem-se* $1 > a > a^2 > \ldots > a^n > a^{n+1} > \ldots$.

Propriedades de potências com expoente natural: Seja $a \neq 0$, um número real, m, $n \in \mathbb{N}$

P1: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

P2: $(a \times b)^n = a^n \times b^n, b \in \mathbb{R}$

P3: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, se $b \neq 0$, em particular $\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$

P4: $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Inicialmente, vamos demonstrar as propriedades P1, P2 e P4, fixando m e aplicando o principio da indução sobre n. Lembramos que quando desejamos provar que uma propriedade é válida para todo número natural usamos o princípio da indução sobre n.

O princípio da indução sobre n(n natural), consiste em provar, primeiramente, que para $n = 1$ é verdadeiro, supor verdadeiro para $n = k$ (H.I.) e logo provar que para $n = k + 1$ também é verdadeiro. Dessa forma estaremos provando que a proposição é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração de P1

1º) A propriedade é verdade para $n = 1$, pois

$$a^{m+1} = a^m \times a = a^m \times a^1$$

2º) Suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = p$ (H.I.), isto é $a^m \times a^p = a^{m+p}$.

3º) Mostraremos que é verdadeira para $n = p + 1$, isto é, $a^m \times a^{p+1} = a^{m+(p+1)}$. De fato,

$$a^m \times a^{p+1} = a^m \times (a^p \times a) = (a^m \times a^p) \times a = a^{m+p} \times a = a^{(m+p)+1} = a^{m+(p+1)}$$

Demonstração de P2 (por indução sobre n)

1º) A propriedade é verdadeira para $n = 1$, pois

$$(a \times b)^1 = a \times b = a^1 \times b^1$$

2º) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $(a \times b)^p = a^p \times b^p$.

3º) Mostraremos que é verdadeira para $n = p+1$, isto é, $(a \times b)^{p+1} = a^{p+1} \times b^{p+1}$. De fato, $(a \times b)^{p+1} = (a \times b)^p \times (a \times b) = (a^p \times b^p) \times (a \times b) = a^p \times (b^p \times a) \times b = a^p \times (a \times b^p) \times b = (a^p \times a) \times (b^p \times b) = a^{p+1} \times b^{p+1}$

Demonstração de P3: A demonstração de P3 será apresentada mais adiante.

Demonstração de P4 (fixando m)

1º) A propriedade é verdadeira para $n = 1$, pois

$$(a^m)^1 = a^m = a^{m \times 1}$$

2º) Suponhamos que a propiedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $(a^m)^p = a^{m \times p}$, mostraremos que é verdadeira para $n = p+1$, isto é, $(a^m)^{p+1} = a^{m \times (p+1)}$. De fato,

$$(a^m)^{p+1} = (a^m)^p \times a^m = a^{m \times p} \times a^m = a^{(m \times p)+m} = a^{m \times (p+1)}$$

Definição 3.3. *Potência com expoente inteiro negativo*

Dado um número real a, não nulo e um número n natural, define-se a potência a^{-n} pela relação

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

isto é, a potência de base real, não nula, e expoente $-n$ é igual a $\frac{1}{a^n}$.

Observação 3.4. Com a definição de expoente negativo temos a propriedade P5.

P5: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ com $a \neq 0, m, n \in \mathbb{N}$.

Para demonstrar a propriedade P5, basta usar a definição 3.3, $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ e usar a P1 para demonstrar. Da mesma forma, podemos definir $\frac{1}{b^n} = b^{-n}$ para demonstrar P3 de forma análoga a P2.

Com as definições de potência de expoente natural e a potência de expoente negativo, podemos estender a definição para $\mathbb{Z}$:

Definição 3.5. *S*e $a \in \mathbb{R}$, diferente de zero e $n \in \mathbb{Z}$

$$a^n = \begin{cases} 1 \ se \ n = 0 \\ a^n \ se \ n \geq 1 \\ \dfrac{1}{a^{-n}} \ se \ n < 0 \end{cases}$$

Estendendo a definição 3.3, se $n \in \mathbb{Z}$, então $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Propriedades de potência com expoente inteiro

Seja $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$

P1: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

P2: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$

P3: $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

P4: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$, em particular $(\frac{1}{b}) = \frac{1}{b^n}$

P5: $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Demonstrações: Dados m e $n \in \mathbb{Z}$, se m e n são não negativos, as propriedade são válidas, pois já demonstramos anteriormente (Propriedades em $\mathbb{N}$), Vamos provar agora que as propriedades também são válidas para m e n negativos.

Sejam p e $q \in \mathbb{N}$, vamos definir $m = -p$ e $n = -q$.

P1: $a^m \times a^n = a^{-p} \times a^{-q} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p \times a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{(-p)+(-q)} = a^{m+n}$;

P2: $\frac{a^m}{a^n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^{-p} \times \frac{1}{a^{-q}} = a^{-p} \times a^q = a^{-p+q} = a^{m-n}$;

P3: $(a \times b)^n = (a \times b)^{-q} = \frac{1}{(a \times b)^q} = \frac{1}{a^q} \times \frac{1}{b^q} = a^{-q} \times b^{-q} = a^n \times b^n$;

P4: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-q} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^q} = \frac{1}{\left(\frac{a^q}{b^q}\right)} = \frac{b^q}{a^q} = b^q \times \frac{1}{a^q} = b^q \times a^{-q} = b^{-n} \times \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{b^n} \times a^n = \frac{a^n}{b^n}$;

P5: $(a^m)^n = (a^{-p})^{-q} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{pq}}\right)} = a^{pq} = a^{-m \times -n} = a^{m \times n}$;

Agora, podemos questionar quem será o número x que multiplicado 4 vezes resulte em 16, por exemplo: $x \times x \times x \times x = 16$, este número seria $\sqrt[4]{16}$. Dessa forma, existem números do tipo $\sqrt[5]{30}$, $\sqrt[7]{41}$, ... o que nos motiva a estudar a raiz enésima aritmética.

Definição 3.6. *Raiz enésima*

Dados um número real $a > 0$ e um número natural n, demonstra-se de acordo com (LIMA, 2004, P.84) que existe sempre um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$.

Definimos raiz enésima como $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow a = b^n$.

Ao número b chamaremos raiz enésima de a e indicaremos pelo simbolo $\sqrt[n]{a}$ onde a é chamado radicando e n é o índice.

Observação 3.7. *Desta definição decorre que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.*

Propriedades das Raízes

Sejam m, n, $p \in \mathbb{N}$

P1: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

Demonstração:

Façamos $\sqrt[n]{a^m} = x$ então:
$x^{np} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^p = [a^m]^p = a^{mp} \Rightarrow x = \sqrt[np]{a^{mp}} \Rightarrow \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$. Uma outra maneira de demonstrar:

Façamos $\sqrt[n]{a^m} = x$, pela definição $x^n = a^m$ daí $x^{np} = a^{mp}$, que pela definição vem que $x = \sqrt[np]{a^{mp}}$ então $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

P2: $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$

Demonstração:

Façamos $x = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$, então:
$x^n = \left(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \times \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \times b$ pela definição vem que $x = \sqrt[n]{a \times b}$ logo $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$

P3: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Demonstração:

Façamos $x = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, daí,
$x^n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \dfrac{a}{b}$ pela definição $x = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ logo $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

P4: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Demonstração:

Da observação 3.7 decorre que $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Logo $a^m = (\sqrt[n]{a})^{nm} = [(\sqrt[n]{a})^m]^n$ pela definição $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

P5: $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

Demonstração:

Façamos $x = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$, então:

$x^p = \left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}\right)^p = \sqrt[n]{a} \Rightarrow (x^p)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \Rightarrow x^{pn} = a \Rightarrow x = \sqrt[pn]{a}$

Observamos que $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, ou seja, temos números da forma $2^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{3}}$, assim nos motivamos a estudar as potências com números racionais.

Definição 3.8. *Potência com expoente racional*

Dados $a \in (0;+\infty)$ e $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(p \in \mathbb{Z};\ q \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$ *define-se potência de base a e expoente* $\dfrac{p}{q}$ *pela relação* $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Propriedades de potência com expoente racional

As propriedades a seguir se verificam para as potências de expoente racional. Se $a \in (0;+\infty)$, $b \in (0;+\infty)$, $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ então valem as seguintes propriedades:

P1: $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$;

P2: $\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$;

P3: $(a \times b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \times b^{\frac{p}{q}}$;

P4: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p}{q}}}$;

P5: $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}}$;

Demonstrações. Sejam $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.

P1: $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \times \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \times \sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps} \times a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$;

P2: $\dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = \dfrac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[s]{a^r}} = \dfrac{\sqrt[qs]{a^{ps}}}{\sqrt[qs]{a^{rq}}} = \sqrt[qs]{\dfrac{a^{ps}}{a^{rq}}} = \sqrt[qs]{a^{ps-rq}} = a^{\frac{ps-rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$;

P3: $(a \times b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a \times b)^p} = \sqrt[q]{a^p \times b^p} = \sqrt[q]{a^p} \times \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \times b^{\frac{p}{q}}$;

P4: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^p} = \sqrt[q]{\dfrac{a^p}{b^p}} = \dfrac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}} = \dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$;

P5: $(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{(a^{\frac{p}{q}})^r} = \sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^p})^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}} = \sqrt[sq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}}$;

Na seção anterior estudamos números da forma a^r com $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, uma pergunta natural é se existem números da forma $2^{\sqrt{2}}$ e qual o significado. Isso nos motiva a estudar as potências com números irracionais.

Significado de potência com expoente irracional

Seja por exemplo a potência $3^{\sqrt{2}}$. Sabendo quais são os valores racionais aproximados por falta e por excesso de $\sqrt{2}$, obtemos em correspondência de valores aproximados por falta ou por excesso de $3^{\sqrt{2}}$ (potência de base 3, com expoente racional, já definidas como segue):

1	$<$	1,4	$<$	1,41	$<$	1,414	$<$	1,4142	$<$	...	$\sqrt{2}$	...	$<$	1,4143	$<$	1,415
3^1	$<$	$3^{1,4}$	$<$	$3^{1,41}$	$<$	$3^{1,414}$	$<$	$3^{1,4142}$	$<$	...	$3^{\sqrt{2}}$	...	$<$	$3^{1,4143}$	$<$	$3^{1,41}$

Observe que quanto mais próximo o expoente racional fica de $\sqrt{2}$, o correspondente 3 elevadoa ao expoente racional fica mais próximo de $3^{\sqrt{2}}$.

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ *e* α um número irracional, consideremos os conjuntos $A_1 = \{r \in \mathbb{Q}/r < \alpha\}$, o conjunto de aproximações por falta de α, e $A_2 = \{s \in \mathbb{Q}/s > \alpha\}$, o conjunto de aproximações por excesso de α.

Note que:

a) Todo número de A_1 é menor que qualquer número de A_2. De fato $r < \alpha < s.\forall r \in A_1, \forall s \in A_2$

b) Existem dois racionais $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tais que $r < \alpha < s$ e a diferença $s - r$ pode se tormar tão pequena quanto queiramos.

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2 consideremos os conjuntos:

B_1=$\{a^r; r \in A_1\}$, o conjunto de aproximações por falta de a^α, e B_2=$\{a^s; s \in A_2\}$, o conjunto de aproximações por excesso de a^α.

a) Afirmamos que $a^r < a^\alpha, \forall a^r \in B_1$ e $a^\alpha < a^s, \forall a^s \in B_2$.

   Se $a > 1$, temos que :

b) Todo número de B_1 é menor que qualquer número de B_2.

c) Existem dois números a^r e a^s tais que a diferença $a^s - a^r$ pode se tornar tão pequena quanto queiramos.

Definição 3.9. $a \in \mathbb{R}, a > 0$ e α irracional definimos a^α se existem B_1 e B_2 tais que satisfazem a, b e c.

Nestas condições, dizemos que a^r e a^s são aproximações por falta e por excesso, respectivamente, de a^α e que B_1 e B_2 são as classes que definem a^α.

Não existem dois números reais diferentes, digamos $A < B$ com a propriedade acima. Se existissem tais A e B teríamos $a^r < A < B < a^s, \forall a^r \in B_1, a^s \in B_2$, então o intervalo $[A,B]$ não conteria nenhuma potência com expoente racional, contradição com o lema encontrado em (LIMA, 2012, P.194).

Lema: Fixado o Número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

Observações:

i) Se $a = 1$ então $1^\alpha = 1, \forall \alpha$ irracional.

ii) Se $a < 0$ e α é irracional e positivo então o simbolo a^α não tem significado.

iii) Para as potências de expoente irracional, são válidas as propriedades vistas até agora.

Potência com expoente real.

Considerando que já foram definidas anteriormente as potências de base $a \in (0;+\infty)$ e expoente b (b racional ou irracional) então já está definida a potência a^b com $a \in (0;+\infty)$ e $b \in \mathbb{R}$, que significa que está definida a potência de expoente real.

Observações:

i) Toda potência de base real e positiva com expoente real é um número positivo.

Se $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$, então $a^b > 0$

ii) Para as potências de expoente real são válidas as propriedades seguintes:

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

P1: $a^b \times a^c = a^{b+c}$

P2: $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

P3: $(a \times b)^c = a^c \times b^c$

P4: $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$

P5: $\left(a^b\right)^c = a^{b \times c}$

Para demonstrar tais propriedades, podemos utilizar a definição 3.9.
A demonstração formal fica como exercício para o leitor.

3.3.3 O LOGARITMO E AS EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Como foi dito anteriormente, a ideia de logaritmo como facilitador de operações de multiplicação e divisão mais complexas e demoradas, já não se faz mais necessário, porém existem outras aplicações. Mas, apesar disso o estudo dos logaritmos possuem várias aplicações na Matemática, Física, Medicina, Geografia, Química entre outras. Vários fenômenos relacionados a essas áreas requerem a resolução de equações exponenciais, devido ao fato de a variável desconhecida estar no expoente.

Observamos os problemas $2^x = 16$ e $10^x = 100$. São problemas naturalmente fáceis de resolver, agora, $2^x = 5$, por exemplo, como determinar x?

Um outro exemplo é se estamos interessados em descobrir quanto tempo leva para uma dívida de R$ 500,00 numa instituição bancária que cobra juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos atingir R$ 3500,00. A fórmula do cálculo de juros compostos nos leva ao desenvolvimento

$$M = c.(1+i)^t$$

$$3500 = 500.(1+0,035)^t$$

$$7 = 1,035^t$$

Note que t é o expoente da base $1,035$ que resulta em 7. Nesse caso o problema é determinar o valor de t, sendo t o logaritmo de 7 na base 1,035. Nos próximas seções, mostraremos como escontrar o valor de t.

Sem o uso dos logaritmos, a resolução dessa equação, torna-se extremamente difícil, uma vez que t não é um número inteiro. A operação utilizada para encontar tal expoente é denominada logaritmação.

3.3.4 DEFINIÇÃO E EXISTÊNCIA

Consideramos dois números reais, a e b, positivos com $a \neq 1$. Chamamos de logaritmo do número b na base a, o expoente x, de forma que $a^x = b$, e escrevemos:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Conforme a definição de a e b chamamos de condição de existência do logaritmo, quando, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Além disso, ”b” é o logaritmando, “a” é a base e x é o logaritmo.

Exemplos:

a) $\log_2 16 = 4$, porque $2^4 = 16$

b) $\log_3 243 = 5$, porque $3^5 = 243$

c) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$, porque $7^{-2} = \frac{1}{49}$

Vamos observar alguns casos, nos quais não é possível efetuar a logaritmação.

a) Não existe $\log_{-3} 27$, pois não existe x real para que se tenha $(-3)^x = 27$.

b) Não existe $\log_0 7$, pois não existe x real para que se tenha $0^x = 7$;

c) Não existe $\log_1 3$, pois não existe x real para que se tenha $1^x = 3$;

d) Não existe $\log_2(-8)$, pois não existe x real para que se tenha $2^x = -8$;

e) Não existe $\log_5 0$, pois não existe x real para que se tenha $5^x = 0$;

Estes exemplos, nos ajudam a entender o por quê das condições de existência $b = a^x > 0$ e $0 < a \neq 1$, pela definição de potência.

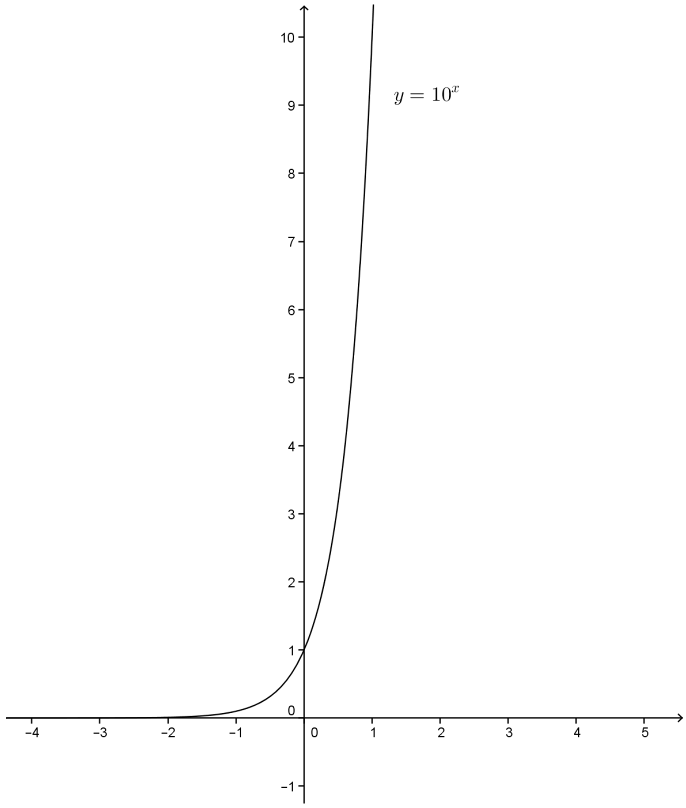
3.3.5 BASES ESPECIAIS

3.3.5.1 LOGARITMO NA BASE 10

O conjunto dos logaritmos na base 10 de todos os números reais positivos é chamado de sistema de logaritmos decimais ou de Briggs.

Na maioria dos casos, torna-se difícil escrever alguns números como potência de base 10, exata. Nestes casos, podemos encontrar uma aproximação destes números, utilizando planilhas eletrônicas. Vejamos o gráfico da função $y = 10^x$, cujo domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $(0, +\infty)$.

x	10^x	Aproximação
0,000	1,000	1
0,301	1,999	2
0,477	2,999	3
0,602	3,999	4
0,699	5,000	5
0,778	5,998	6
0,845	6,998	7
0,903	7,998	8
0,954	8,995	9
1,000	10,000	10
		$\vdots$
2,000	100,000	100
		$\vdots$
3,000	1000,000	1000



Teorema 3.10. *Todo número positivo pode ser escrito como uma potência de base 10, ou como uma aproximaçao dessa potencia.*

Demonstração:
Como a imagem da função $y = 10^x$ *é* $(0, +\infty)$*, ou seja, é sobrejetora, então para cada* $r \in \mathbb{R}, r > 0$*, existe* $x \in \mathbb{R}/r = 10^x$.

Assim, podemos definir o logaritmo na base 10:

$$\log_{10} r = x \Leftrightarrow r = 10^x$$

.

3.3.5.2 A BASE E

Um outro sistema de logaritmos com muitas aplicações, principalmente em fenômenos naturais, é o sistema de logaritmos naturais, também chamados imprópriamente de logaritmos neperianos, em homenagem a John Napier. Abase desses logaritmos é o número irracional $e = 2,71828\ldots$.

O número "e" é mais um, entre tantos números facinantes. Quem o designou foi o matemático suiço Leonard Euler (1707 - 1783), que provou ser esse número o limite de $(1+\frac{1}{x})^x$ quando x cresce infinitamente.

Utilizando una planilha eletrônica, fica fácil de notar esse limite. Intuitivamente, neste caso o limite é o valor no qual y se aproxima, quando x cresce infinitamente.

x	$y=(1+\frac{1}{x})^x$
1	2
5	2,44832
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,716924
10000	2,717603
100000	2,718268
1000000	2,718280

Seja b um número real positivo, podemos escrever $\log_e b = ln\ b$ ($ln \rightarrow$ logaritmo natural).

3.3.6 CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO DO LOGARITMO

Conhecendo as propriedades dos logaritmos e supondo que estejam satisfeitas as condições de existência dos logaritmos, verifica-se que:

i) O logaritmo de 1 em qualquer base é igual a zero:

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

ii) O logaritmo da própria base é igual a 1:

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

iii) O logaritmo de uma potência da base é igual ao expoente: $\log_a a^m = m$, de fato.
$\log_a a^m = m$, pois $\log_a a^m = p \Leftrightarrow a^p = a^m$
Portanto, $p = m$ e, então $\log_a a^m = m$

vi) O logatimo de b na base a é o expoente ao qual devemos elevar a para obter b.

$$a^{\log_a b} = b, \text{ de fato,}$$

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$. substituindo x por $\log_a b$ em $a^x = b$, resulta em $a^{\log_a b} = b$.

3.3.7 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

As propriedades estudadas no 3.3.2 serão usadas nesta seção.

1ª Propriedade: Logaritmo de um produto

O logaritmo de um produto é à soma dos logaritmos dos fatores, tomados na mesma base, isto é:

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c, \text{ com } a > 0, c > 0 \text{ e } 1 \neq b > 0$$

Demonstração:
Considere os logaritmos

$$\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x, \;\; x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\log_b c = y \Leftrightarrow c = b^y, \;\; y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$\log_b(ac) = z \Leftrightarrow ac = b^z, \;\; z \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Substituindo (1) e (2) em (3) tem-se $b^z = ac = b^x b^y \Rightarrow b^z = b^{x+y}$ segue que $z = x + y$ então $\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$.

2ª Propriedade: Logaritmo de um quociente

O logaritmo de um quociente é igual ao logaritmo do dividendo menos o logaritmo do divisor, tomados na mesma base, isto é:

$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c, \text{ com } a > 0, c > 0 \text{ e } 1 \neq b > 0, \text{ em particular } \log_b \tfrac{1}{c} = -\log_b c$$

Demonstração:
Considere os logaritmos

$$\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x, \ \ x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$\log_b c = y \Leftrightarrow c = b^y, \ \ y \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$\log_b \frac{a}{c} = z \Leftrightarrow \frac{a}{c} = b^z, \ \ z \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Substituindo (4) e (5) em (6): $b^z = \dfrac{a}{c} = \dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y} \Rightarrow z = x - y \Rightarrow \log_b \dfrac{a}{c} = \log_b a - \log_b c.$

3ª Propriedade: Logaritmo de uma potência

O logaritmos de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, isto é:

$$\log_b a^n = n \times \log_b a, \text{ com } a > 0,\ 1 \neq b > 0 \text{ e } n \in \mathbb{R}$$

Demonstração:

Considere o logaritmo $\log_b a = x$. O qual é equivalente: $a = b^x$.

Elevando os dois membros ao expoente n, temos $a^n = (b^x)^n$ daí $a^n = b^{nx}$. Pela definição, nx é o logaritmo de a^n na base b, isto é:

$$\log_b a^n = nx$$

Substituindo x por $\log_b a$, obtemos

$$\log_b a^n = n \times \log_b a$$

3.3.8 MUDANÇA DE BASE

Usando uma tabela de logaritmos decimais ou uma calculadora científica, também é possível calcular qualquer logaritmo em uma outra base, diferente de 10.

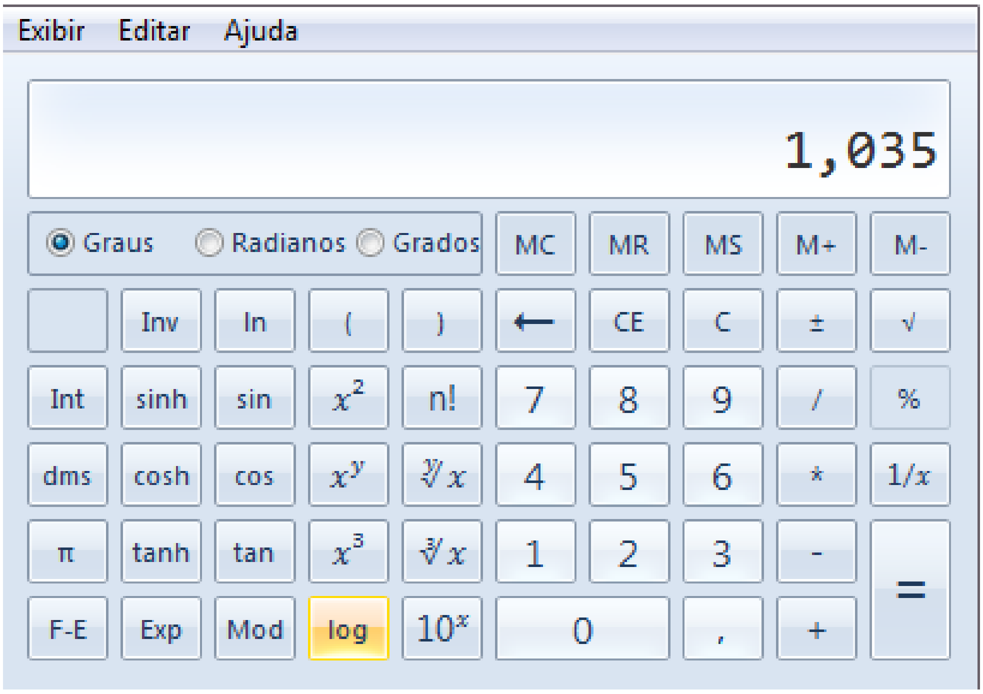
Agora, para motivar como podemos fazer isso, vamos retornar ao problema da página 41, no qual tínhamos que resolver a equação

$$7 = 1{,}035^t \Leftrightarrow t = \log_{1{,}035} 7$$

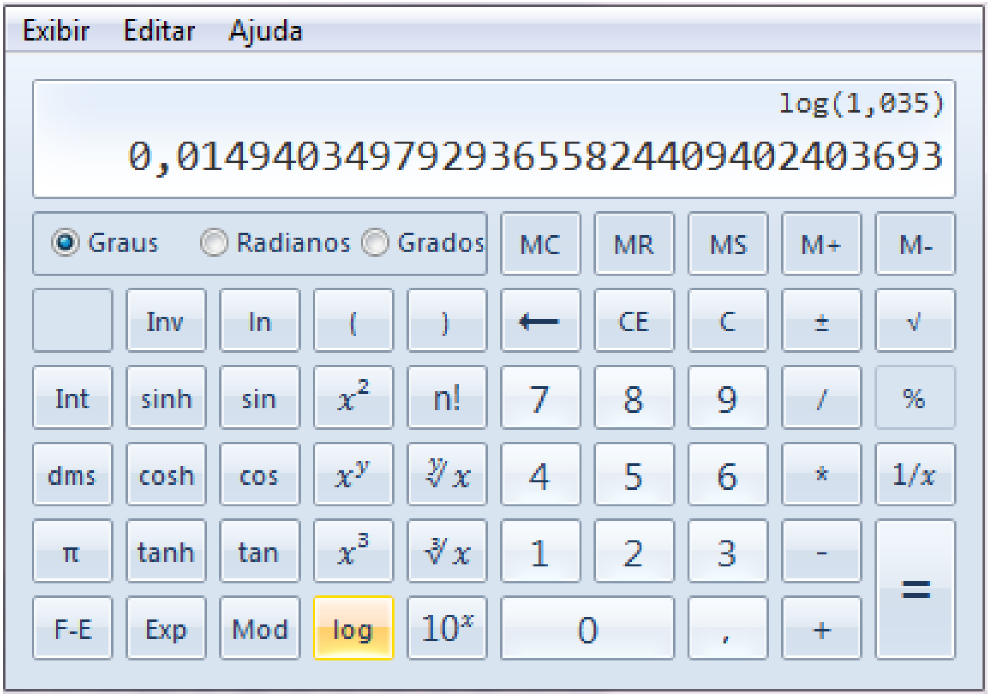
Primeiramente, calculamos, usando a calculadora, o logaritmo de 1,035, lembrando que a calculadora só tem log e ln, da seguinte forma:

Digitamos 1,035

e apertamos a tecla log



automaticamente aparece no visor o valor de $\log 1,035$



Em seguida, calculamos o logaritmo de 7 pelo mesmo procedimento. Usaremos 4 casas decimais após a vírgula. Assim, pela definição de logaritmo:

$7 = 1,035^t \Rightarrow \log 7 = \log 1,035^t \Rightarrow \log 7 = t \log 1,035 \Rightarrow t = \dfrac{\log 7}{\log 1,035} = \dfrac{0,8450}{0,0149}$

Assim, $t \cong 56,7$ meses.

O exemplo anterior indica que, para simplificar expressões ou resolver equações logarítmicas, necessitamos aplicar as propriedades operativas, e os logaritmos devem ser da mesma base.

Para mostrar como isso pode ser feito, vamos apresentar a propriedade da mudança de base de logaritmo.

Propriedade da Mudança de Base

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $b > 0$, $0 < a \neq 1$, $0 < c \neq 1$ então $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, com $\log_c a \neq 0$.

Demonstração:

Se $\log_a b = x$, pela definição $a^x = b$.

Aplicando o logaritmo na base c, em ambos os membros, que existe por hipótese, temos:

$$\log_c a^x = \log_c b \Rightarrow x \times \log_c a = \log_c b \Rightarrow x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Assim, $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Exemplo 3.11. $\log_4 5 = x \Rightarrow 4^x = 5 \Rightarrow \log 4^x = \log 5 \Rightarrow x \log 4 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 4}$

Considerando a aproximação com 3 casas decimais $\log 2 = 0,301$*, temos:*

$$x = \frac{\log \frac{10}{2}}{\log 2^2} = \frac{\log 10 - \log 2}{2 \log 2} = \frac{1 - 0,301}{2 \times 0,301} = \frac{0,699}{0,602} = 1,161$$

Em alguns livros técnicos é comum aparecer fórmulas como a do PH da água, que significa potencial de hidrogênio, que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa. $PH = colog[H^+]$, que significa que o PH é o cologaritmo da concentração de $[H^+]$. Se uma determinada água possui $PH = 6$, significa que a cada 10^6 átomos, um deles é ionizado, isso mede a acidez da água.

Definição 3.12. *Chama-se Cologaritmo de um número real b* $\in (0, +\infty)$*, numa base* $a \in (0, +\infty), a \neq 1$ *ao oposto do logaritmo de b na base a.*

$$colog_a b = -\log_a b$$

Exemplo 3.13. $colog_2 8 = -\log_2 8 = -3$

3.3.9 EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Para descobrir, por exemplo, a concentração de $[H^+]$ de uma solução aquosa de PH=6, precisa-se resolver a equação $6 = -\log_{10}[H^+]$, por isso se faz necessário o estudo das equações logarítmicas.

Observando as equações:

i) $\log_3(x-1) = 2$

ii) $\log_{x+1}(19 - x) = 2$

iii) $-\log_2 x = \frac{3}{2} + 4 \log_2 x$

Podemos notar que elas apresentam a incógnita envolvida com logaritmos e, por esse motivo, são chamadas de equações logarítmicas.

Para resolvê-las aplicaremos, além da definição de logaritmo, a seguinte propriedade:

Propriedade: $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$, com $1 \neq a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$

Demonstração:

Sejam, $\log_a b = x_1 \Leftrightarrow a^{x_1} = b$ e $\log_a c = x_2 \Leftrightarrow a^{x_2} = c$. Logo,

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow b = c.$$

Exemplo 3.14. Resolva a equação $\log_2(x-4) = 3$.
Da condição de existência do logaritmo, devemos ter:
$x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$.
Usando a definição de logaritmo, vem:
$\log_2(x-4) = 3 \Rightarrow x - 4 = 2^3 \Rightarrow x - 4 = 8 \Rightarrow x = 12$.
Na resolução de equações logarítmicas,devemos sempre verificar se os valores obtidos para a incógnita satisfazem a condição de existência.
Somente tais valores é que devem ser apresentados como solução da equação.
Como $x = 12$ satisfaz a condição de existência do logaritmo, o conjunto solução da equação é $S = \{12\}$. O conjunto solução é o conjunto formado pelos elementos que satisfazem a equação e as condições de existência dos logaritmos.

Exemplo 3.15. Determine o conjunto solução da equação $\log_x(3x^2 - x) = 2$.
Da condição de existência do logaritmo, devemos ter:

$$\begin{cases} x > 0, \;\; x \neq 1 & \text{(I)} \\ 3x^2 - x > 0 & \text{(II)} \Leftrightarrow x \times (3x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \;\; e \;\; 3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \;\; e \;\; x > \dfrac{1}{3} \\ \text{ou} \\ x < 0 \;\; e \;\; 3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0 \;\; e \;\; x < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \ldots$$

$$\ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{3} \\ \text{ou} \\ x < 0 \end{cases}$$

Dessa forma temos:

CE: $x > \frac{1}{3}$ e $x \neq 1$

Agora, da definição de logaritmo, vem:
$\log_x(3x^2 - x) = 2 \Rightarrow 3x^2 - x = x^2 \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.
Mas $x = 0$ não satisfaz a condição de existência, enquanto $x = \frac{1}{2}$ satisfaz. Nesse caso, $x = \frac{1}{2}$ é a única soluçao da equação. Logo, o conjunto de solução é $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

3.3.10 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Em muitas situações do cotidiano, os logaritmos aparecem expressos em forma de função logarítmica. O PH da água, que pode ser escrito na forma $PH = colog[H^+]$ ou $PH = -\log[H^+]$, é um exemplo de função logarítmica, uma vez que $[H^+]$ é variável e consequentemente o PH também é. Os valores que o PH pode assumir formam a imagem $(0, +\infty)$ e os valores de $[H^+]$ o domínio $(0,+\infty)$. Usa-se a notação $x \mapsto f(x)$ para indicar que uma função f faz corresponder a x o valor $f(x)$. O conjunto formado pelos elementos x chama-se domínio e o conjunto formado pelos elementos $f(x)$ é a imagem.

Para melhor entendermos a função logarítmica, faremos uma breve revisão sobre função exponencial.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

A Função logarítmica é vista como inversa da função exponencial, por isso é importante lembrarmos da função exponencial.

A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0;+\infty)$ dada por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$) e $a \neq 1$ é denominada função exponencial de base a.
Note que:

i) Se $a < 0$, então $f(x) = a^x$ não estaria definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Por exemplo, supondo $a = -2$ e $x = \frac{1}{2}$, teríamos $f(\frac{1}{2}) = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$, que não é um número real.

ii) Se $a = 1$, então $f(x) = a^x$ é uma função constante:

   $f(x) = 1^x \Longrightarrow f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A imagem da função exponencial definida acima é o conjunto $(0;+\infty)$ e o domínio é $D = \mathbb{R}$

GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Podemos observar o comportamento da função exponencial traçando seu gráfico no plano.
Casos:

- 1º caso $a > 1$

  Como exemplo, seja $f(x) = 2^x$.

  Observe que se $x_2 > x_1$, quaisquer no domínio, temos $f(x_2) > f(x_1)$, isso significa dizer que se $a > 1$ a função exponencial é crescente. É importante notar que esse crescimento acontece de maneira muito rápida. Observe o gráfico 1:

x	$f(x) = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

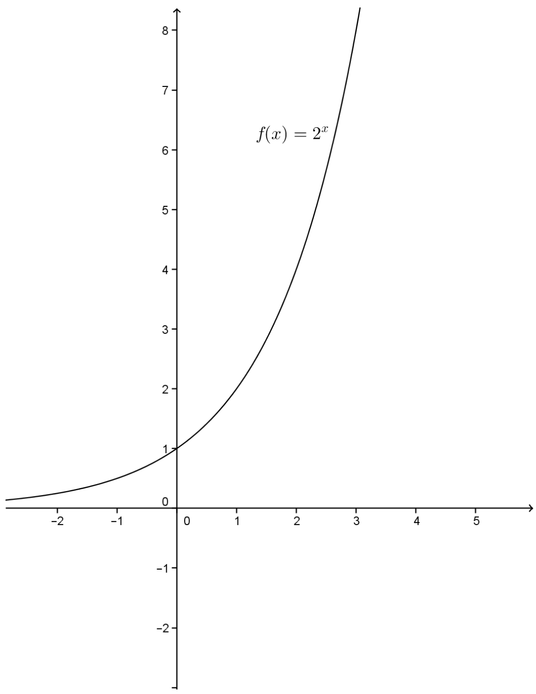


Figura 1: gráfico 1

- 2º Caso $0 < a < 1$

  Como exemplo, seja $f(x) = (\frac{1}{2})^x$.

  Observe que se $x_2 > x_1$, quaisquer no domínio, temos $f(x_2) < f(x_1)$, isso significa dizer que se $0 < a < 1$ a função exponencial é decrescente. Observe o gráfico 2:

x	$f(x) = (\frac{1}{2})^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

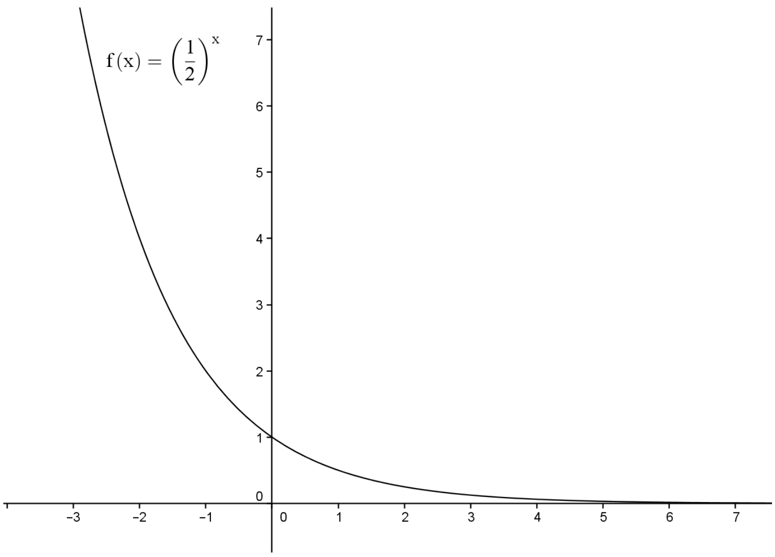


Figura 2: gráfico 2

Definição 3.16. *Uma função $f : A \longrightarrow B$ chama-se injetora quando, dados x, y quaisquer em $A, f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Em outras palavras: quando $x \neq y$ em A, implica $f(x) \neq f(y)$ em B.*

Definição 3.17. *Uma função $f : A \longrightarrow B$ chama-se sobrejetora quando, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

Definição 3.18. *Uma função $f : A \longrightarrow B$ chama-se bijetora quando for sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.*

FUNÇÃO INVERSA

Dados os subconjuntos de $\mathbb{R}$, A e B. Considere a função $f : A \longrightarrow B$, bijetora. Chama-se função inversa de f a função $g : B \longrightarrow A$ quando e somente quando $f(x) = y$ equivale a $g(y) = x$, quaisquer que sejam $x \in A$ e $y \in B$. Indicamos a função inversa de f por $f^{-1} = g$.

***P*ropriedade:** A função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0; +\infty)$, $x \mapsto f(x) = a^x$ é bijetora.

Demonstração:

i) Seja $a \in (0; +\infty)$, com $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0; +\infty)$, $x \longrightarrow a^x$ é injetora.

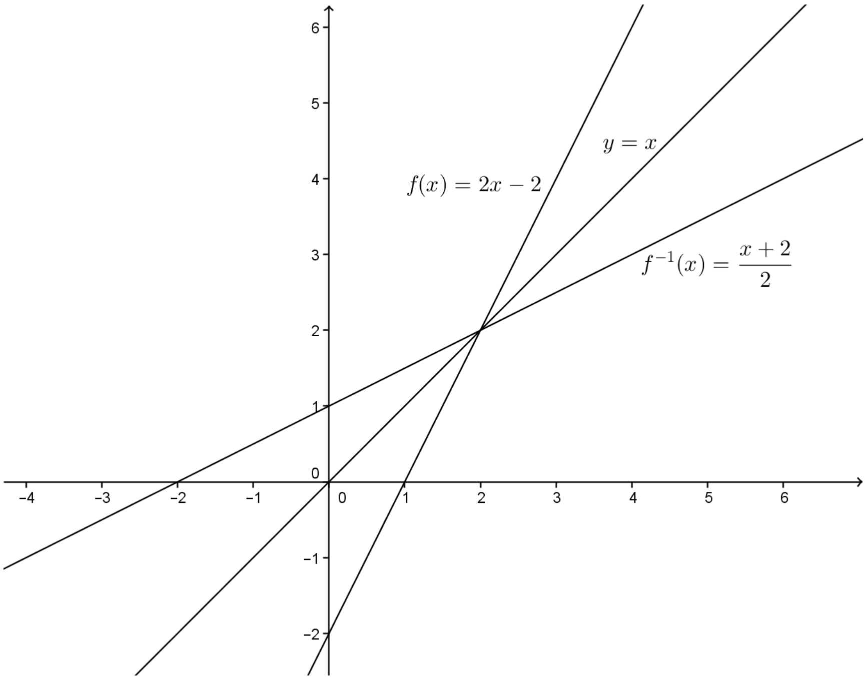
   1º caso: Se $a > 1$ tem-se que f é estritamente crescente, isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Temos então, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, logo f é injetora.

   O caso em que f é estritamente decrescente demonstra-se de modo análogo. Como a função exponencial é estritamente crescente se $a > 1$ e estritamente decrescente se $0 < a < 1$, concluímos que ela é injetora.

ii) Se definirmos a função exponencial da maneira que definimos em (i), temos que o contradomínio e a imagem são iguais. Desta forma, f é sobrejetora.

   De (i) e (ii) vem que f é injetora e sobrejetora, dessa forma f é bijetora.

É importante lembrarmos que o gráfico de uma função f e o gráfico de sua inversa f^{-1}, são simétricos em relação à reta $y = x$, por exemplo, as funções $f(x) = 2x - 2$ e $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{2}$, são inversas. Observe que os gráficos são simétricos em relação a reta $y = x$.



FUNÇÃO LOGARÍTMICA

A função exponencial $g : \mathbb{R} \longrightarrow (0;+\infty)$ definida por $g(y) = a^y$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é bijetora. Nesse caso, podemos determinar a função inversa. Note que:

$x = g(y) = a^y$, pela definição de logaritmo, tem-se: $\log_a x = \log_a a^y = y$

$f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, adequando à notação mais usada tem-se: $x \mapsto y = f(x) = \log_a x$

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow (0;+\infty) \\ x \mapsto f(x) = a^x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} f^{-1} : (0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f^{-1}(x) = \log_a x \end{cases}$$

O domínio da função logarítmica é o conjunto dos números reais estritamente positivos. $D = (0;+\infty)$.

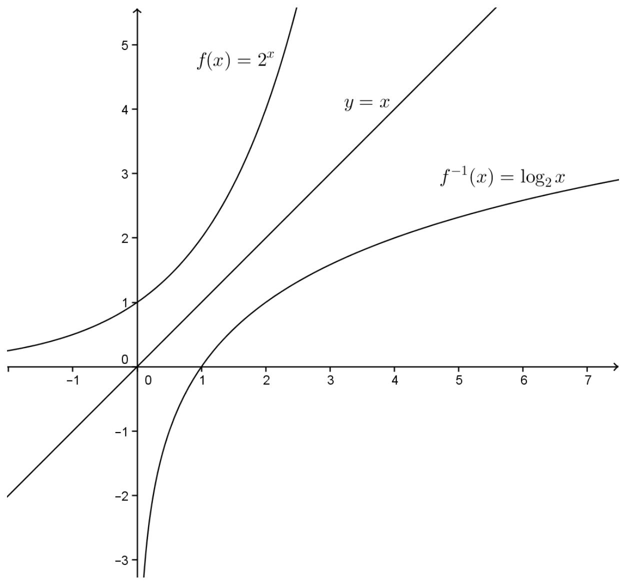
O conjunto imagem da função logarítmica é o conjunto dos números reais $Im = \mathbb{R}$.

GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Vamos observar o comportamento da função Logarítmica construindo o gráfico. Faremos isso usando a propriedade que nos diz que os gráficos de uma função e sua inversa são simétricos em relação à reta $y = x$. Para ilustrar, observamos o gráfico 1 da pág. 52.
1º Caso: quando $a > 1$

No gráfico trazemos a reta $x = y$, logo aplicando a simetria temos o gráfico da função $y = \log_2 x$.

x	$f^{-1}(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2

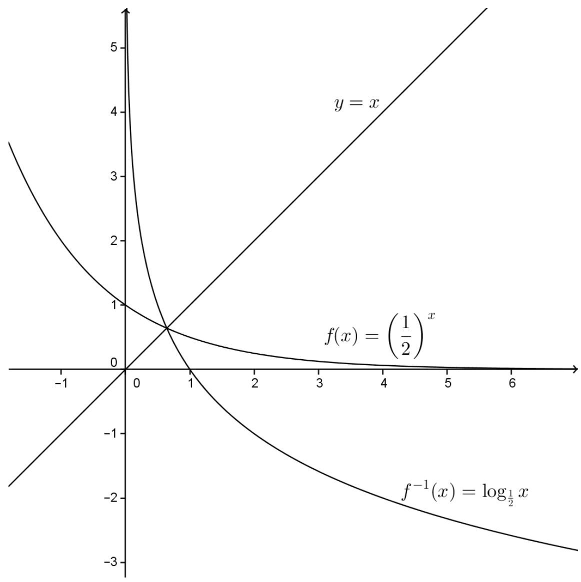


Agora do gráfico 2 pág. 53.

2º Caso: quando $0 < a < 1$. De forma análoga temos:

Por exemplo, $y = log_{\frac{1}{2}} x$.

x	$f^{-1} = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3

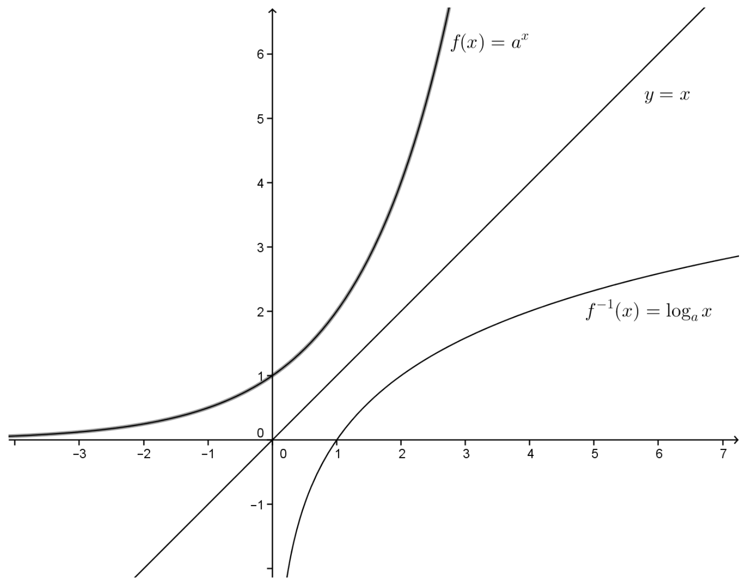


Observamos no 1º caso que a função $\log_2 x$ é crescente e sendo assim percebe-se que o crescimento da função logarítmica é mais lento que o crescimento da função exponencial, ou seja, grandes variações para o eixo x provocam pequenas variações no eixo y.

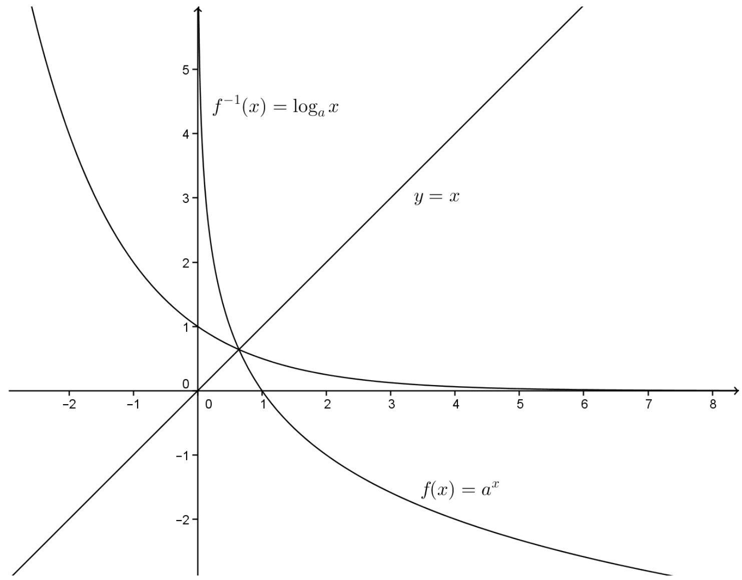
Desta forma podemos generalizar quando $a > 0$ e $a \neq 1$.

A seguir os gráficos de, $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, no mesmo plano, temos:

(i) Base $a > 1$



(ii) Base $0 < a < 1$



3.3.11 INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

O nível sonoro de um ruído em decibéis, é medido pela fórmula $B = 10\log\frac{I}{I_0}$, onde I é a intensidade sonora do ruído, medida em W/m^2 e $I_0 = 10^{-12}W/m^2$ é a intensidade sonora minima perceptível pelo ouvido humano. Sabe-se que a partir de $80dB$ o ruído já apresenta risco a audição humana.

Dessa forma, para descobrirmos quais os valores da intensidade sonora não oferecem riscos a audição deveríamos resolver a inequação:

$$10\log\frac{I}{I_0} < 80$$

É devido a esse tipo de problema que se faz necessário o estudo das inequações logarítmicas.

Vimos que se $a > 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é crescente. Logo, para quaisquer x_1, x_2 no domínio, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$.

Ainda, se $0 < a < 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é decrescente. Dessa forma, para quaisquer x_1, x_2 no domínio, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1$.
Essas duas propriedades importantes são muito úteis na resolução de uma inequação logarítmica.

Exemplo 3.19. *Resolver a inequação:* $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$

Resolução:

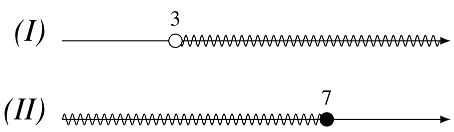
A condição de existência é:

$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \quad (I)$

Como a base é um número entre 0 e 1, a função logarítmica é decrescente e o sentido da igualdade se inverte para os logarítmos.
Dai, $x - 3 \leq 4 \Rightarrow x \leq 7 \quad (II)$

A solução da inequação deve satisfazer as duas condições, (I) *e* (II).

Na reta real:



Portanto, a solução da equação é $S = (I) \cap (II)$*, ou seja,* $S = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x \leq 7\}$

Exemplo 3.20. *Resolver a inequação* $\log_{12}(x-1) + \log_{12}(x-2) \leq 1$
Resolução:

A condição de existência é: $\begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (I) \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \quad (II) \end{cases}$
Como a base é maior que 1, o logaritmo é crescente logo temos:

$\log_{12}(x-1) + \log_{12}(x-2) \leq 1 \Rightarrow \log_{12}[(x-1)(x-2)] \leq \log_{12} 12 \Rightarrow (x-1)(x-2) \leq 12 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 12 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0 \Rightarrow (x-5) \times (x+2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 \geq 0 \ \ e \ \ x + 2 \leq 0 \\ x - 5 \leq 0 \ \ e \ \ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \emptyset \\ -2 \leq x \leq 5 \quad (III) \end{cases}$$

Dessa forma, das três condições (I), (II) e (III) devem ser satisfeitas logo vem que:

$S = \{x \in \mathbb{R}; 2 < x \leq 5\}$

4 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DE LOGARITMOS NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

4.1 SEQUÊNCIA DE ENSINO PROPOSTA

A seguir, apresentamos nossa proposta de Sequência de Ensino. Cada encontro mencionado corresponde a uma aula de 50 minutos. Os alunos receberão uma cópia de cada um desses encontros separadamente, para que possam realizar as atividades da melhor maneira possível. Esta sequência foi organizada de tal forma que todos os objetivos compreendidos dentro do conteúdo de logaritmos para o primeiro ano do Ensino Médio sejam atendidos. Algumas das atividades abaixo foram elaboradas pelo próprio professor, mas a maior parte delas foi selecionada do banco de questões do site Portal Positivo. Esse banco de questões é composto das mais diversas questões cobradas em vestibulares de Universidades de todo o país.

Esta Sequência de Ensino trata-se de um encadeamento de passos, ou seja, etapas ligadas entre si para tornar mais eficiente o processo de aprendizagem, evidenciando-se uma maior preocupação com o conteúdo matemático aplicado em situações-problema.

A Sequência de Ensino foi elaborada e aplicada pelo próprio professor da turma, que é o pesquisador.

Os alunos participantes da pesquisa foram informados do trabalho e assinaram o termo de Livre Consentimento e Esclarecido (Apêndice 2).

Encontro 1: Panorama Histórico

Objetivos:

1) Aplicar e manipular a definição e as propriedades das potências;

2) Resgatar alguns aspectos históricos no sentido de como os logaritmos eram úteis na antiguidade, para se efetuar multiplicações e divisões com números considerados grandes para aquela época;

3) Interpretar quadros e tabelas;

4) Resgatar a definição de progressões geométricas e aritméticas;

5) Iniciar o desenvolvimento da definição formal de logaritmo de um número;

6) Elaborar o conceito de Logaritmo;

Descrição das atividades:

1) Conforme já mencionamos, nem sempre foi possível fazer cálculos de multiplicação e divisão de números grandes com a facilidade que temos hoje, utilizando calculadoras e computadores. A atividade que segue nos permite um contato com as ideias descritas por Napier, para efetuar cálculos sem o uso de calculadoras. Observe atentamente o quadro abaixo e responda:

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 1	Coluna 2
1	0	64	6	4096	12
2	1	128	7	8192	13
4	2	256	8	16384	14
8	3	512	9	32768	15
16	4	1024	10	65536	16
32	5	2048	11	131072	17

a) Qual a relação entre os elementos da coluna 1 e da coluna 2?
Resposta: Os números da coluna 2 são os expoentes, aos quais devemos elevar a base 2 para obter os números da coluna 1.

b) Escreva os números 256 e 512 como potências de base 2.
Resposta: $256 = 2^8$ e $512 = 2^9$.

c) Note que podemos encontrar o produto de 256 por 512, através do uso da tabela:

$$256 \times 512 = 2^8 \times 2^9 = 2^{17} = 131072$$

Agora, efetue as multiplicações e divisões abaixo, utilizando apenas a tabela e as propriedades das potências:

i) $32 \times 256 =$

ii) $128 \times 1024 =$

iii) $131072 \div 16384 =$

iv) $65536 \div 4096$

d) Pesquise, com auxílio da internet, como se chamam os números da coluna 2 em relação aos números da coluna 1 e como são representados.
Resposta: Os números da coluna 2 chamam-se logaritmos de base 2 dos números da coluna 1 e representamos da seguinte forma:
$\log_2 1 = 0, \log_2 2 = 1, \log_2 4 = 2, \ldots$

e) Usando a tabela e as propriedades das potências, encontre:

i) $\log_2 128 =$

ii) $\log_2 512 =$

iii) $\log_2 131072 =$

iv) $\log_2 \frac{1}{2048} =$

2) (Portal Positivo) O estudo dos logaritmos teve origem na análise de relações entre progressões aritméticas e progressões geométricas. Considerando que a quadro abaixo, incompleto, apresenta uma PA e uma PG com o mesmo número de termos, determine o último termo X, da PG.

PA	0	0,5	1	1,5	$\ldots$	6
PG	1	2	4	8	$\ldots$	X

3) (Portal Positivo) O quadro abaixo possibilita calcular aproximadamente o valor de $\sqrt[5]{1000}$

n	$\log n$
1,99	0,3
2,51	0,4
3,16	0,5
3,98	0,6
5,01	0,7

De acordo com os dados da tabela, esse valor aproximado é

a) 1,99

b) 2,51

c) 3,16

d) 3,98

e) 5,01

Comentários das atividades

Com as atividades do primeiro encontro pretendemos explorar a idéia inicial de logaritmo de um número “b” na base “a” como expoente no qual devemos elevar um número “a” para obter um número b. Vale lembrar que nas aulas anteriores os alunos tiveram conhecimento do conteúdo de Função Exponencial e durante o processo de aprendizagem do mesmo foi feita uma revisão sobre potências de expoentes inteiros, racionais e irracionais, bem como as propriedades das potências mencionadas no item 3.3.2. Neste encontro, não mencionaremos e nem trabalharemos a definição formal de logaritmo, nosso objetivo é que o aluno resolva às atividades apenas interpretando os quadros e fazendo uso de seus conhecimentos sobre o conteúdo de potências e suas propriedades, sabendo manipulá-las de forma correta. Dessa forma procuraremos resgatar um pouco dos processos utilizados na antiguidade para resolver multiplicações e divisões com números grandes, com objetivo de mostrar ao aluno de hoje que tais cálculos nem sempre foram tão fáceis de fazer como se faz atualmente.

Por ser o primeiro contato dos alunos com o conteúdo de logaritmos, organizaremos a turma para que as atividades sejam realizadas em grupo, nos quais o professor deve agir apenas como mediador, colaborando com os grupos apenas quando julgar necessário.

Encontro 2: Panorama Histórico e Elaboração da definição de logaritmo

Objetivos:

1) Ampliar o conhecimento sobre a importância dos logaritmos ao longo da história;

2) Manipular as propriedades das potências com expoentes não inteiros;

3) Elaborar a definição e a condição de existência de um logaritmo;

4) Elaborar o conceito de Logaritmo;

Descrição das atividades: As tabelas de logaritmos publicadas por Napier (1550-1617) e Briggs (1561-1630) contribuíram para a facilidade e agilidade dos cálculos relacionados à astronomia, navegação e comércio. Essas tabelas eram muito parecidas com a que vimos acima, mas com diferentes tipos de bases, que eram utilizadas no desenvolvimento das expressões logarítmicas, o objetivo era transformar produtos em somas, uma vez que é muito mais fácil efetuar as somas aos produtos. Os logaritmos introduzidos por Napier utilizavam bases consideradas inadequadas, foi partindo dessa ideia que o matemático Inglês Henry Briggs sugeriu a Napier a mudança dos logaritmos para uma base decimal. Partindo dos estudos de Napier, Briggs desenvolveu logaritmos na base decimal, construindo uma tabela de logaritmos dos números de 1 a 1000. Henry Briggs foi responsável pela introdução dos logaritmos na prática e da imensa vantagem em sua utilização.

1) Observe o quadro abaixo, contendo alguns valores da tabela construída por Briggs, esco-

lhidos aleatoriamente;

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 1	Coluna 2
1	0,000	7	0,845	50	1,699
2	0,301	8	0,903	100	2,000
3	0,477	9	0,954	200	2,301
4	0,602	10	1,000	400	2,602
5	0,699	20	1,301	500	2,699
6	0,778	30	1,477	1000	3,000

a) Utilize uma calculadora científica para encontrar o valor aproximado das potências:

i) $10^{0,301}$

ii $10^{0,477}$

iii $10^{0,699}$

iv $10^{2,699}$

b) Qual a relação entre os elementos da coluna 1 e da coluna 2?

Resposta: Os números da coluna 2 são os expoentes, aos quais devemos elevar a base 10 para obter os números da coluna 1.

c) Escreva os números 8 e 400 como potências de 10 aproximadas.

d) Note que podemos encontrar o produto de 8 por 50, através do uso da tabela:

$$8 \times 50 = 10^{0,903} \times 10^{1,699} = 10^{2,602} = 400$$

Agora, efetue as multiplicações e divisões abaixo, utilizando apenas a tabela e as propriedades das potências:

i) $5 \times 5 \times 20 =$

ii) $20 \times 50 =$

iii) $200 \div 50 =$

iv) $16 \times 25 =$

v) $500 \div 25 =$

e) Pesquise, com auxílio da internet, como se chamam os números da coluna 2 em relação aos números da coluna 1 e como são representados.

Resposta: Os números da coluna 2 chamam-se logaritmos de base 10 dos números da coluna 1 e representamos da seguinte forma:

$$\log 1 = 0, \log 2 = 0,301, \log 3 = 0,477, \ldots$$

f) Usando a tabela e as propriedades das potências, encontre:

i) $\log 30 =$

ii) $\log 500 =$

iii) $\log 1 =$

iv) $\log \frac{1}{20} =$

v) $\log 0,001 =$

2) Na história do desenvolvimento da matemática, os logaritmos apareceram para facilitar os cálculos em uma época em que ainda não existiam calculadoras. Os logaritmos estão associados à ideia de construir uma tabela que auxilie em cálculos de multiplicação, que envolvem muitos dígitos e que seriam trabalhosos de serem feitos à mão. Essa ideia, que motivou o surgimento dos logaritmos, associa-se com a propriedade matemática $a^n a^m = a^{n+m}$. Fixada uma base b, o logaritmo n de um número x qualquer é o expoente da equação $x = b^n$. O quadro a seguir é similar àquelas que os matemáticos construíam e utilizavam na época da invenção dos logaritmos. Nela, tem-se a base $0,99999$ fixada.

Logaritmo	Valor de x
1	0,99999
2	0,99998
3	0,99997
4	0,99996
5	0,99995
6	0,99994
7	0,99993
8	0,99992
9	0,99991
10	0,99990

Com o uso do quadro, pode-se afirmar que $0,99998 \times 0,99994$ vale:

a) 0,99991

b) 0,99992

c) 0,99993

d) 0,99994

e) 0,99995

Comentários das atividades:

As atividades do encontro 2 tem como objetivo principal complementar as ideias desenvolvidas no encontro 1, haja vista que neste encontro trabalhamos apenas com expoentes inteiros, já no encontro 2 introduziremos também expoentes racionais. Dessa forma conseguimos deixar a idéia inicial de logaritmo um pouco mais ampla para conseguir a partir desses dois encontros, elaborar a definição formal de logaritmo e a partir dela elaborar também a condição de existência dos logaritmos. Usamos a mesma metodologia do encontro 1, cada aluno recebe uma cópia impressa das atividades e organizados em grupo realizarão as mesmas, com auxílio do professor mediador. Após as discussões e orientações nos grupos, faz-se a plenária, onde o professor retoma as soluções e a partir dos problemas define formalmente "logaritmos" de acordo com o referencial teórico estuda no Capítulo 3, no item 3.3.4.

Encontro 3: Utilização da definição de logaritmo para resolver problemas

Objetivos:

1) Utilizar a definição de logaritmo para resolver problemas;
2) Praticar as diferentes formas de definir um logaritmo;
3) Ler, interpretar e resolver problemas do cotidiano que envolvem logaritmos;

Descrição das atividades:

1) Calcule os logaritmos:
   a) $\log_2 64$
   b) $\log 0,001$
   c) $\log_5 \sqrt[5]{5}$
   d) $\log_4 \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$
   e) $\log_{0,2} 0,04$
   f) $\log_{0,04} 0,2$
   g) $\log_9 3\sqrt{27}$
   h) $\log_8 \sqrt[3]{16}$
2) (Portal Positivo – Adaptada) Numa experiência de laboratório, verifica-se que uma população de certo micro-organismo cresce segundo a relação $N(t) = x_0\left(-1+2^{0,1t}\right)$, onde $N(t)$ é o número de micro-organismo t meses após o início da experiência e x_0 é o número de micro-organismos no ínicio da experiencia. Quantos anos devem se passar, para que se tenha 63 vezes a população inicial de micro-organismos?

3) (Portal Positivo – Adaptada) O pH do suco gástrico presente no estômago humano varia no intervalo de 1 a 3. O valor do pH está relacionado com a concentração de íons hidrogênio através da equação pH = - $\log_{10}[H^{+}]$. Quantas vezes a concentração de íons hidrogênio diminui quando o pH aumenta de 1 para 3?

4) O valor de y na expressão $y = \log 1000 - \log_4$ é:

   a) 1

   b) 2

   c) 3

   d) 4

   e) 5

5) Determine o valor da expressão $E = \log_2 16 + \log 0,0001 - \log_4 8$

6) (Portal Positivo) Por volta dos anos 80, durante a implantação do projeto Proálcool, uma montadora estimou que sua produção de carros a álcool teria um crescimento anual de acordo com a expressão: $P(t) = 105 \times \log 3\,(t+1)$, onde P é a quantidade produzida e t o número de anos. Dessa forma, daqui a 8 anos de quanto será a produção estimada?

7) (Portal Positivo) Aproximando $\log 2$ por $0,301$, verificamos que o número 16^{10} está entre:

   a) 10^9 e 10^{10}

   b) 10^{10} e 10^{11}

   c) 10^{11} e 10^{12}

   d) 10^{12} e 10^{13}

   e) 10^{13} e 10^{14}

8) (Portal Positivo) O número de peças produzidas por uma indústria é dada pela função $N(t) = 300 \times \log 3\,(1+t)$, sendo $N(t)$ o número de peças produzidas em t meses. Considerando-se que, em n meses, a produção é o dobro da de 2 meses, pode-se afirmar que o valor de n é

   a) 6

   b) 8

   c) 9

   d) 11

9) Calcule o valor da expressão $A = \frac{2\times\log_4 8+3\times\log_2 4-5\times\log_{\frac{1}{2}} 16}{\log_9 \sqrt{3}}$.

Comentários das atividades:

As atividades do encontro 3 tem como objetivo principal aplicar a definição de logaritmo de diferentes formas, para resolver os mais variados tipos de problemas envolvendo os logaritmos, ou seja, é uma aula de problemas de complementação. Neste encontro, os alunos terão o primeiro contato com situações do cotidiano que envolvem os logaritmos, como por exemplo o PH da água. A metodologia utilizada é a mesma dos encontros anteriores, cada aluno recebe uma cópia impressa das atividades e organizados em grupo realizarão as mesmas, com auxílio do professor mediador. Após este momento, o professor discute as soluções coletivamente no quadro.

Encontro 04: Elaboração da condição de existência dos logaritmos

Objetivos:

1) Elaborar, juntamente com os alunos a condição de existência dos logaritmos;

2) (Portal Positivo) Analisar as condições especiais para que tais logaritmos existam;

Descrição das atividades:

1) Esta é uma atividade com vários logaritmos impossíveis de calcular, ao tentar resolver o aluno irá perceber que existem algumas condições que devem ser satisfeitas, para que possamos efetuar a logaritmação. Calcule os logaritmos abaixo

   a) $\log_{-2} 16 =$

   b) $\log_0 11 =$

   c) $\log_1 5 =$

   d) $\log_3 (-9) =$

   e) $\log_7 0 =$

2) Para que o $\log_3 (x-1)$ exista, então:

   a) $\{x \in \mathbb{R} / x > -1\}$

   b) $\{x \in \mathbb{R} / x < -1\}$

   c) $\{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} / x < 1\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 3\}$

Comentários das atividades:

Depois de realizada esta atividade, os alunos vão perceber algumas condições especiais para a existência de um logaritmo, ou seja, perceberão que a base só pode ser positiva e diferente de um, que o logaritmando não pode ser negativo e não pode ser zero. Assim, podemos elaborar a condição de existência dos logaritmos, que será muito útil na resolução de equações logarítmicas e no estudo das funções logarítmicas. Ou seja, a construção da idéia de condição de existência dos logaritmos foi desenvolvida a partir da resolução da atividade 1 deste encontro e após, para complementar, os alunos resolveram a atividade 2.

Encontro 5: Consequências da definição de logaritmos

Objetivos:

1) Desenvolver e aplicar as conseqüências da definição de logaritmo;

2) Efetuar cálculos de logaritmos de forma mais direta, utilizando as conseqüências da definição;

3) Ler, interpretar e resolver problemas, utilizando as conseqüências da definição de logaritmo;

Descrição das atividades:

1) Com base no que foi visto até agora calcule os logaritmos;

   a) $log 1 =$

   b) $log_2 1 =$

   c) $log_3 1 =$

2) Suponha que sejam satisfeitas as condições de existência dos logaritmos, o que se pode concluir a respeito do logaritmo de 1 em uma base qualquer?

3) Como base no que foi visto até agora calcule os logaritmos;

   a) $log 10 =$

   b) $log_2 2 =$

c) $log_3 3 =$

4) Suponha que sejam satisfeitas as condições de existência dos logaritmos, o que se pode concluir a respeito do logaritmo de x em uma base x qualquer?

5) (Portal Positivo) Avalie se as afirmativas sobre $\log_a K$ a seguir são verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) O logaritmando também é conhecido como antilogaritmo.

b) O logaritmo é o expoente a que se deve elevar a base para se obter o logaritmando.

c) Para que seja possível calcular o logaritmo: $K > 0$, $a > 0$ e a diferente de um.

d) Se a base for igual ao logaritmando, o logaritmo será sempre zero.

e) $\text{colog}_a K$ é o inverso de $\log_a K$.

6) (Portal Positivo) Um médico, após estudar o crescimento médio das crianças de uma determinada cidade, com idades que variavam de 1 a 12 anos, obteve a fórmula $h(i) = \log\left(10^{0,7} \times \sqrt{i}\right)$ onde h é a altura (em metros) e i é a idade (em anos). Pela fórmula, uma criança de 10 anos desta cidade terá de altura:

a) 1,0m

b) 1,1m

c) 1,2m

d) 1,3m

e) 1,4m

7) Associando verdadeiro (V) ou falso (F) às afirmativas:

I - O logaritmo de 70 na base 5 está compreendido entre os números naturais consecutivos 1 e 2;

II - A base onde o logaritmo de 5 é 5, é igual a 5;

III - Para que um número inteiro positivo possua logaritmo negativo, sua base deve ser maior que 0 e menor que 1;

temos:

a VFV

b FVV

c FFV

d FFF

e VVV

Comentários das atividades:

Neste encontro, trabalhamos as conseqüências das definições abordadas no item 3.3.6 do Capitulo 3. Através da realização destas atividades, o aluno deverá perceber que existem caminhos mais curtos para resolver alguns tipos de problemas, caminhos estes que nos permitirão elaborar as conseqüências da definição de logaritmos, que são regras diretas usadas para resolver alguns logaritmos especiais. A elaboração das condições de existência se dará mediante a resolução dos problemas descritos acima.

Encontro 6: Propriedades dos Logaritmos

Objetivos:

1) Desenvolver junto com os alunos as propriedades dos logaritmos;

2) Aplicar as propriedades dos logaritmos na resolução dos problemas;

1) Observe novamente a tabela da atividade 1

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 1	Coluna 2
1	0	64	6	4096	12
2	1	128	7	8192	13
4	2	256	8	16384	14
8	3	512	9	32768	15
16	4	1024	10	65536	16
32	5	2048	11	131072	17

a) Calcule $\log_2 128 \times 256$;

b) Calcule $\log_2 128 + \log_2 256$;

c) O que podemos concluir a respeito dos itens a e b?

2) (Portal Positivo) Analise e algumas propriedades dos logaritmos:

I $\log_a J - \log_a K = \log_a (JK)$

II $\log_a J + \log_a K = \log_a \frac{J}{K}$

III $k \times \log_a J = \log_a J^k$

O que se pode afirmar sobre elas?

3) (Portal Positivo) Se a soma entre o quádruplo de $\log x$ e $\log y$ resulta em 3 e a diferença entre $\log x$ e o triplo de $\log y$ resulta em 4, determine a razão entre x e y.

4) (Portal Positivo) O nível de álcool presente no sangue de uma pessoa que ingeriu uma certa quantidade de bebida alcoólica decresce de acordo com a relação $N(t) = 3 \times 2^{-t}$, sendo t o tempo, medido em horas, a partir do momento $t = 0$, em que o nível foi constatado. Sabendo-se que o Código de Trânsito Brasileiro estabelece 0,6 gramas por litro como limite máximo de álcool no sangue, para quem dirige, e considerando-se $\log 2 = 0,3$, quanto tempo, no mínimo essa pessoa deve aguardar, antes de dirigir?

5) John Napier foi um pastor,estudou teologia, gostava de resolver problemas e por isto tinha varias invenções na área de engenharia e a matemática era um hobby, um passa tempo, ele não era nem nunca foi matemático, era fazendeiro e administrava terras e criações. Ele nunca foi considerado matemático e sim admirado por todos os matemáticos pela sua invenção dos logaritmos, que fez para ajudar amigos pessoais próximos que eram astrônomos e trabalhavam com números muito grandes. Em 1614, publicou a primeira tabela de logaritmos. Essa descoberta revelou-se uma das mais importantes concepções matemáticas, simplificando de maneira considerável a computação aritmética. Os logaritmos facilitam a computação aritmética, valendo-se da propriedade de que

   a) o logaritmo de um número N qualquer, em uma base b qualquer, é igual a b^n.
   b) o logaritmo da soma de dois números quaisquer M e N, em uma base b qualquer, é igual ao produto dos logaritmos de M e de N na base b.
   c) o logaritmo do produto de dois números quaisquer M e N, em uma base b qualquer, é igual à soma do logaritmo de M com o logaritmo de N, ambos na base b.
   d) o logaritmo do quociente de dois números quaisquer M e N, em uma base b qualquer, é o quociente do logaritmo de M na base b, pelo logaritmo de N na base b.
   e) o logaritmo da diferença de dois números quaisquer M e N, em uma base b qualquer, é igual ao quociente do logaritmo de M na base b pelo logaritmo de N na base b.

6) (Portal Positivo- Adaptada) Numa experiência realizada em laboratório, Alice constatou que, dentro de t horas, a população P de determinada bactéria crescia segundo a função $P(t) = 25 \times 2^t$. Nessa experiência, sabendo-se que $\log_2 5 = 2,32$, quanto tempo levou para a população atingir 625 bactérias?

7) (Portal Positivo) Sabendo-se que os números $1+\log a, 2+\log b, 3+\log c$ formam uma progressão aritmética de razão r, é correto afirmar que os números a, b, c formam uma

a) progressão geométrica de razão 10^{r-1}

b) progressão geométrica de razão $\log r$

c) progressão geométrica de razão $10^{r}-1$

d) progressão aritmética de razão $1+\log r$

e) progressão aritmética de razão $10^{1+\log r}$

8) (Portal Positivo) Se $f(x) = a \times \log_1 0(x) + b$, em que a e b são números reais, assinale a alternativa incorreta:

a) $f\left(x^2\right) = 2f(x)–b$

b) $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

c) $f(1) = b$

d) $f(10x) = a + f(x)$

9) (Portal Positivo) O eucalipto é muito usado para a produção de papéis e celulose por causa da qualidade da matéria-prima e seu curto ciclo de vida. Um produtor de eucalipto possui uma plantação de determinada espécie adequada ao clima e ao tipo de solo de sua região. Essa espécie tem seu crescimento modelado pela função $h(t) = 50\left(1-10^{-kt}\right)$, onde h é a altura (em metros) em função do tempo t (em anos) e k é uma constante. Sabe-se que esse eucalipto alcança a altura de 10 m em 2 anos e que o produtor realizará o corte quando as árvores tiverem 8 anos. Com base nestas informações, calcule o valor da constante k e a altura que os eucaliptos terão, em metros, quando o produtor for realizar o corte.

10) Todo número real positivo pode ser escrito na forma 10^x. Sabendo-se que $2 = 10^{0,30}$ e que x é um número tal que $5 = 10^x$. Calcule o valor de x.

11) (Portal Positivo) Uma das soluções do sistema $\begin{cases} x+y = 502 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

a) $x = 100$ e $y = 402$

b) $x = -2$ e $y = 504$

c) $x = 10$ e $y = 100$

d) $x = 2$ e $y = 500$

e) $x = 504$ e $y = -2$

Comentários das atividades:

Neste encontro, vamos desenvolver as propriedades dos logaritmos, citadas no item 3.3.7 do Capítulo 3, e utilizá-las para resolver problemas. A partir do conhecimento destas propriedades o aluno poderá ter um contato maior com os problemas de aplicação que envolvem logaritmo, cada vez mais poderemos introduzir em nosso trabalho problemas melhor elaborados, cuja resolução requer um conhecimento mais amplo do conteúdo de logaritmos. A partir da análise das atividades 1 e 2, iremos observar as propriedades dos logaritmos, explicadas pelo professor e após, os alunos irão complementar a aprendizagem resolvendo as atividades do encontro, Como são muitas atividades destinadas para o encontro, algumas serão realizadas como tarefa de casa.

Encontro 7: Mudança de base

Objetivos:

1) Definir e compreender a técnica da mudança de base;

2) Utilizar a técnica da mudança de base para resolver problemas;

3) Ressaltar a importância dos logaritmos na resolução de equações exponenciais;

4) Resolver equações exponenciais não exatas;

Descrição das atividades:

1) Faça o que se pede:

   a) Na tabela da atividade 1 encontre o logaritmo na base 2 de 16;

   b) Na tabela da atividade 2 encontre $\log 2$ e $\log 16$;

   c) Divida $\log 16$ por $\log 2$. Compare o resultado com o item a, o que podemos concluir?

2) Se $\log 5 = 0,7$ e $\log 7 = 0,84$ então, calcule $\log_5 7$, aproximadamente.

3) Adotando-se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule o valor de $\log_{1,5} 135$.

4) Em um teste de Matemática, um aluno deveria calcular o valor de $M = \log_6 16$, sem o auxílio de calculadora, mas, além das propriedades operatórias dos logaritmos, ele se lembrou, apenas, dos valores de $a = \log 2$ e $b = \log 3$. Assim, M pode ser calculado por:

5) (UNIT - 2010) Suponha que para estimar o número de tipos de insetos em uma região um entomologista usa a expressão $N(t) = 20 \times A^t$, em que $N(t)$ é o número de insetos

encontrados após t anos de pesquisa e A é a área da região do estudo, em quilômetros quadrados. Nessas condições, estima-se que o tempo de pesquisa necessário para que numa superfície de $100km^2$ sejam encontrados 6 400 tipos de insetos é de? (Use a aproximação $\log 2 = 0,3$)

6 (UPF - 2011) A instalação de radares para controle de velocidade dos veículos nas avenidas de Passo Fundo tem proporcionado uma diminuição no número de acidentes. Esse número pode ser calculado pela lei $n(t) = n(0) \times (0,8)^t$, onde $n(0)$ indica o número de acidentes anuais registrados no ano da instalação dos radares e $n(t)$, o número de acidentes anuais t anos depois. O tempo necessário para que o número de acidentes se reduza à metade da quantidade registrada no ano da instalação dos radares é: (considere $\log 2 = 0,30$)

a) 1 ano

b) 1,5 anos

c) 2,4 anos

d) 2 anos e 8 meses

e) 3 anos

7) (UEPA - 2009) Um produtor do interior do estado do Pará decidiu investir no plantio de uma nova variedade de banana, a BRS Conquista, em função das vantagens apresentadas, entre elas a resistência às doenças como o Mal do Panamá, Sigatoka Amarela e Negra. No primeiro ano do plantio, esse produtor plantou X mudas de bananas. Em seu planejamento, o produtor previu que seu plantio dobraria a cada ano. Após quanto tempo o número de mudas passará a ser 20 vezes a quantidade inicial? ($\log 2 = 0,3$)

8) (UNEMAT - 2009) Os biólogos consideram que, ao chegar a 100 indivíduos, a extinção da espécie animal é inevitável. A população de determinada espécie animal ameaçada de extinção diminui segundo a função $f(t) = ka^t$, na qual k e a são números reais e $f(t)$ indica o número de indivíduos dessa espécie no instante t (em anos). Atualmente (instante $t = 0$) existem 1500 indivíduos da espécie e estima-se que, daqui a 10 anos, haverá 750. Caso nenhuma providência seja tomada, mantido tal decrescimento exponencial, daqui a quantos anos será atingido o nível de população que os biólogos consideram irreversível para a extinção?Para os cálculos utilize, se necessário, alguns dos valores da tabela abaixo:

n	2	3	7	10
$\log n$	0,30	0,47	0,85	1

9) (UNIFOR - 2009) Em 1987, uma indústria farmacêutica iniciou a fabricação de certo tipo de medicamento e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 8% ao ano. Assim sendo, em que ano a produção de tal medicamento quadruplicou a quantidade fabricada em 1987? (São dadas as aproximações: $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$)

10) Sendo $\log 2 = 0,301$ e $\log 7 = 0,845$, qual será o valor de $\log 28$?

11) (Portal Positivo) Você deixou sua conta negativa em R$ 100,00 em um banco que cobrava juros de 10% ao mês no cheque especial. Um tempo depois, você recebeu um extrato e observou que sua dívida havia duplicado. Sabe-se que a expressão que determina a dívida (em reais) em relação ao tempo t (em meses) é dada por:

$$X(t) = 100 \times (1,10)^t$$

Após quantos meses a sua dívida duplicou?

Comentários das atividades:

Neste encontro o aluno utilizará a técnica da mudança de base para encontrar logaritmos não inteiros, logaritmos que são muito difíceis de encontrar utilizando apenas a definição de logaritmo e as propriedades operatórias. Dessa forma o aluno poderá solucionar problemas de aplicação que requerem a resolução equações exponenciais cujas soluções não são inteiras. Nossa metodologia neste encontro será utilizar o logaritmo como a solução de uma equação exponencial. Após a realização da atividade 1 o professor corrige e discute no quadro a questão, induzindo o aluno a chegar na regra da mudança de base exposta no item 3.3.8 do Capítulo 3.

Encontro 8: Logaritmos Decimais

Objetivos:

1) (Portal Positivo) Resolver problemas envolvendo logaritmos na base 10;

Descrição:

1) Um tipo especial de bactéria caracteriza-se por uma dinâmica de crescimento particular. Quando colocada em meio de cultura, sua população mantém-se constante por dois dias e, do terceiro dia em diante, cresce exponencialmente, dobrando sua quantidade a cada 8 horas. Sabe-se que uma população inicial de 1000 bactérias desse tipo foi colocada em meio de cultura. Considerando essas informações;

    a) Calcule a população de bactérias após 6 dias em meio de cultura.

b) Determine a expressão da população P, de bactérias, em função do tempo t em dias.

c) Calcule o tempo necessário para que a população de bactérias se torne 30 vezes a população inicial.

(Em seus cálculos, use $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,47$.)

2) (UNIRIO 2008) A Música tem ligações muito fortes com a Matemática, uma delas diz respeito à escala musical temperada que contém 12 semitons (notas). A tabela abaixo relaciona cada uma dessas notas com uma potência de base 2 que é a razão entre a frequência da nota considerada e a frequência da nota DÓ.

DÓ	DÓ#	RÉ	RÉ#	MI	FÁ	FÁ#	SOL	SOL#	LÁ	LÁ#	SI
2^0	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{6}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$

Considere que a razão entre as frequências de uma dessas notas e a da nota DÓ seja 1,6. Determine que nota é essa. Use $\log 2 = 0,3$.

3) São dados $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,4$. Com base nos dados, determine $\log 18$.

4) O valor de $\log 100 + \log 0,1$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

5) Considerando $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, determine os logaritmos a seguir em função de a e b:

a) $\log 120$

b) $\log 72$

7) (Portal Positivo - Adaptada) Uma droga na corrente sanguínea é eliminada lentamente pela ação dos rins. Admita que, partindo de uma quantidade inicial de Q_0 miligramas, após t horas a quantidade da droga no sangue fique reduzida a $Q(t) = Q_0 (0,64)^t$ miligramas. Determine:

a) A porcentagem da droga que é eliminada pelos rins em 1 hora.

b) O tempo necessário para que a quantidade inicial da droga fique reduzida à metade. Utilize $\log_{10} 2 = 0,30$.

8) Um carro novo tem uma desvalorização de 20% no primeiro ano. A partir daí, a cada ano que passa, o valor desse carro diminui 10% em relação ao do ano anterior. Se o preço do carro novo é de R$ 25.000,00, em quanto tempo, aproximadamente, o preço desse carro será inferior a R$ 10.000,00? Se necessário, utilize as aproximações: $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,47$

9) (Portal Positivo) Um professor de matemática, desejando verificar a capacidade de entendimento e interpre-tação da linguagem matemática de seus alunos, propôs a seguinte questão: "Admitindo que uma potência de base 10 com expoente que expoente deve-se elevar o número 3 para obter o número 12?"Nessas condições, os alunos que interpretaram e resolveram corretamente essa questão responderam:

10) (Portal Positivo - Adaptada) O número N de bactérias em uma cultura, após T horas, é dado por $N = 1000 \times \left(10^{0,159T}\right)$. Determine a quantidade de horas necessárias para que o número de bactérias seja igual a 3000. (Use logaritmo decimal de 3 igual a 0,477).

Comentários das atividades:

A base 10 no estudo dos logaritmos é uma base muito especial, como nosso sistema de numeração é decimal, os problemas tornam-se mais fáceis de resolver quando aplicamos a mudança da base estudada para a base 10. Neste encontro não trabalharemos nenhuma nova técnica do estudo dos logaritmos, apenas usaremos tudo o que foi visto até aqui para os logaritmos de base 10 em especial. Ou seja, o professor inicia a aula falando sobre a base 10 e relembrando os tópicos mais importantes vistos até o momento, em seguida distribui a lista contendo as atividades deste encontro para os alunos resolverem. Após algum tempo o professor discute as soluções no quadro, como são muitas atividades para serem resolvidas, algumas podem ser realizadas como tarefa.

Encontro 9: Logaritmos na base "*e*"

Objetivos:

1) Resolver problemas envolvendo os logaritmos na base e;

2) Definir e reconhecer a importância do número e;

3) Ressaltar a importância do número e, nos problemas de aplicação;

Descrição das atividades:

1) (FGV - 2011) Meia-vida de uma grandeza que decresce exponencialmente é o tempo necessário para que o valor dessa grandeza se reduza à metade. Uma substância radioativa decresce exponencialmente de modo que sua quantidade, daqui a t anos, é $Q = A \times (0,975)^t$. Adotando os valores $\ln 2 = 0,693$ e $\ln 0,975 = -0,025$, calcule o valor da meia-vida dessa substância.

2) (UFPA -2010) Uma das técnicas para datar a idade das árvores de grande porte da floresta amazônica é medir a quantidade do isótopo radioativo C^{14} presente no centro dos troncos. Ao tirar uma amostra de uma castanheira, verificou-se que a quantidade de C^{14} presente era de 84% da quantidade existente na atmosfera. Sabendo-se que o C^{14} tem decaimento exponencial e sua vida média é de 5730 anos e considerando os valores de $\ln(0,50) = -0,69$ e $\ln(0,84) = -0,17$, podemos afirmar que a idade, em anos, da castanheira é aproximadamente:

   a) 420
   b) 750
   c) 1030
   d) 1412
   e) 1700

3) (UESPI - 2009) Suponha que, ao colocarmos $25kg$ de açúcar na água, a quantidade de açúcar que permanece inalterada, após t horas, seja dada pela função $A(t) = 25e^{ct}$, com c sendo uma constante real, e $A(t)$ medido em kg. Se, após três horas, a quantidade de açúcar restante era de $10kg$, quanto tempo será necessário para que restem $5kg$ de açúcar? Dados: use as aproximações $\ln 0,4 \approx -0,92$ e $\ln 0,2 \approx -1,61$.

4) (UFPB - 2011) O movimento de uma bola de golfe é influenciado tanto pela força gravitacional como também pela resistência do ar. Essa força retardadora atua no sentido oposto ao da velocidade da bola. Em um estudo realizado durante uma partida de golfe, observou-se que, quando foi considerada a força de resistência do ar, a distância horizontal $d(t)$, em metros, percorrida por uma bola em função do tempo t, em segundos, a partir do instante em que a bola foi lançada ($t = 0$), era dada por $d(t) = 50\left(1 - e^{0,1t}\right)$. Use $\ln 2 = 0,7$. A partir dessas informações, conclui-se que, para que a bola percorra uma distância na horizontal de $25m$, o tempo gasto, a partir do instante do lançamento, é de:

   a) $5,0s$
   b) $6,6s$

c) $7,0s$

d) $8,5s$

e) $10,0s$

5) (UFLA - 2006) Segundo o modelo malthusiano para crescimento populacional, as populações podem crescer sem limites. Apesar desse aspecto, o modelo funciona bem durante certo tempo. Utilizando dados dos censos de 1940 a 1991, o modelo prevê para a população brasileira um crescimento segundo a equação: $P(t) = 40e^{0,02t}$, sendo $P(t)$ a população, em milhões de habitantes em cada ano t, e $t = 0$ o ano de 1940. De acordo com a projeção malthusiana, determine o ano a partir do qual a população brasileira irá ultrapassar os 200 milhões de habitantes. Considere $\ln 5 = 1,6$.

6) (Portal Positivo) A população mundial não para de crescer. Já é de mais de 6 bilhões de pessoas no planeta, e esse número cresce a uma taxa média de 1,3% ao ano. Se essa taxa se mantiver constante, a população mundial, dentro de t anos, pode ser estimada a partir da equação $P(t) = P_0 \times e^{0,013t}$, em que P_0 representa a população atual. Com base nessas informações e considerando-se $log_e 2 = 0,693$, calcule quanto tempo levará para a população mundial duplicar.

Comentários das atividades:

Neste encontro vamos trabalhar com os logaritmos na base "*e*". O aluno perceberá a importância desses logaritmos em problemas de aplicação, principalmente quando se trata de crescimento populacional e datação de seres vivos pela quantidade de carbono 14 presente. Aplicaremos todos os conceitos estudados até aqui, mas considerando apenas os logaritmos cuja base é este número tão magnífico conhecido como número de Euler, o número "*e*". Sem entrar muito no contexto histórico, pois não é nosso objetivo neste trabalho, começaremos a aula falando um pouco sobre a importância de tal número, em seguida tratamos da notação desses logaritmos, ou seja o $\ln x$, em seguida os alunos começarão a resolver as atividades.

Encontro 10: Equações Logarítmicas

Objetivos:

1) Resolver equações logarítmicas;

2) Ler, interpretar e resolver problemas cuja solução requer a resolução de uma equação logarítmica;

Descrição das atividades:

1) Se $\log x = 3 + \log 3 - \log 2 – 2 \times \log 5$, então calcule x.

2) Determine a solução da equação logarítmica $\log_3 x + \log_3 x^2 + \ldots + \log_3 x^{49} + \log_3 x^{50} = 2550$.

3) Considere a equação (na variável x), $1 + \log_2 \left(x^2 - 6x + 9\right) = \log_2 (x - 2)$; onde $U = \{x \in \mathbb{R}/x > 2 \text{ e } x \neq 3\}$ é o seu conjunto universo. Determine as soluções desta equação.

4) Calcule o número real x, que satisfaz a equação $\log_2 \left(48 - 2^{x+1}\right) = x$.

5) (UFES - Adaptada) A massa $m(t)$ de um certo material radioativo, no instante t anos, é expressa por $m(t) = m_0 \times a^t$, sendo m_0 a massa inicial e a um número real positivo. Em um período de 14000 anos, a massa do material sofre uma redução de 80%. Calcule:

   a) em quantos anos a massa inicial do material reduz-se à metade;

   b) o percentual da massa inicial que restará em 100.000 anos.

   Obs.: Considere log 2 = 0,3.

6) Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\log_4 (x–2) + \log_4 (x + 3) = \log_4 50$.

7) (ULBRA - Adaptada) Segundo a lei de resfriamento de Newton, a taxa de resfriamento de um corpo é diretamente proporcional à diferença de temperatura entre este objeto e o meio ambiente. Sendo assim, a temperatura de um objeto pré-aquecido, após colocado por t minutos em um ambiente a $20°C$, é dada por $T(t) = 20 + Ke^{ct}$. Considerando que o objeto foi aquecido a uma temperatura de $200°C$ e em 10 minutos estava a $110°C$, calcule as constantes K e c.

8) Se $x = p$ é a solução em $\mathbb{R}$ da equação $2 – \log_x 2 – \log_2 x = 0$, calcule p.

9) Dada a equação logarítmica: $\log(x–1) + \log(x + 2) = 0$, julgue os itens abaixo:

   a) Aplicando as propriedades dos logaritmos pertinentes à equação, temos que

   $$x^2 + x - 2 = 1 \text{ e } x_1 = x_2 = -1 + \sqrt{13}$$

   b) A equação terá solução se, e somente se, x for um número real positivo($x > 0$).

   c) O conjunto solução da equação é $S = \{1\}$.

   d) Nas condições apresentadas, a equação não possui solução no conjunto dos reais.

10) Determine o conjunto-verdade, ou seja, a solução da equação $\log x + \log(x + 1) - \log 6 = 0$.

11) (Portal Positivo) Uma empresa de derivados químicos considera que, quando x milhões de dólares são investidos em pesquisas, o lucro anual, em milhões de dólares, passa a ser

$$L(t) = 20 + 5 \times \log_3(x+3)$$

De quanto deveria ser o investimento em pesquisa para que o lucro anual fosse de 40 milhões de dólares?

12) Resolva a equação $\log 3^x + \log(1+3^x) = \log 12$ no conjunto dos números reais.

Comentários das atividades:

Neste encontro os alunos utilizarão os conceitos e propriedades referentes aos logaritmos para resolver equações logarítmicas, bem como os problemas de aplicação que envolvem a resolução de equações logarítmicas. Neste encontro esperamos que o aluno apresente um bom domínio do conteúdo, dessa forma o professor deve agir apenas como mediador e acompanhar as resoluções de cada aluno. Como é comum os alunos terem dificuldade em resolver as equações logarítmicas, julgamos necessário modificar um pouco nossa estratégia, ou seja, invertendo alguns passos, a idéia é resolver previamente e coletivamente algumas das atividades, até que os alunos se sintam preparados para resolver em grupo as restantes, que por sua vez serão discutidas juntamente com o professor e toda a turma no quadro.

Encontro 11: Inequações Logarítmicas

Objetivos:

1) Resolver inequações logarítmicas;

2) Resolver problemas que envolvem inequações logarítmicas;

Descrição das atividades:

1) (Portal Positivo) Uma empresa foi inaugurada em 2013, passando a produzir 250000 canetas e ficou estabelecida uma taxa de crescimento de 20% ao ano. A partir de que ano essa empresa atingirá uma produção superior a meio milhão de canetas por ano? (dados $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$)

2) (Portal Positivo) Em uma danceteria, há um aparelho com várias caixas de som iguais. Quando uma dessas caixas é ligada no volume máximo, o nível R de ruído contínuo é de $95dB$. Sabe-se que:

   i) $R = 120 + 10 \times \log I_s$, em que I_s é a intensidade sonora, dada em $watt/m^2$; e

ii) a intensidade sonora I_s é proporcional ao número de caixas ligadas. Seja N o maior número dessas caixas de som que podem ser ligadas, simultaneamente, sem que se atinja o nível de $115dB$, que é o máximo suportável pelo ouvido humano. Calcule N.

3) Determine o conjunto de todos os números reais x para os quais temos $\frac{\log x}{1-x^2} < 0$.

4) Apliquei R$ 500,00 a juros compostos de 5% ao mês. A partir de quantos meses poderei resgatar mais de R$ 1.000,00?
(Dados: $\log 2 = 0,301$ e $\log 1,05 = 0,021$)

5) (UERJ - 2011) Para melhor estudar o Sol, os astrônomos utilizam filtros de luz em seus instrumentos de observação. Admita um filtro que deixe passar 80% da intensidade da luz que nele incide. Para reduzir essa intensidade a menos de 10% da original, foi necessário utilizar n filtros. Considerando $\log 2 = 0,301$, o menor valor de n é igual a:

   a) 9
   b) 10
   c) 11
   d) 12

6) (UCS - 2012) Quando um paciente ingere um medicamento, a droga entra na corrente sanguínea e, ao passar pelo fígado e pelos rins, é metabolizada e eliminada a uma taxa que é proporcional à quantidade presente no corpo. Suponha uma dose única de um medicamento cujo princípio ativo é de $250mg$. A quantidade q desse princípio ativo que continua presente no organismo t horas após a ingestão é dada pela expressão $q(t) = 250 \times (0,6)^t$. Usando $\ln 3 = 1,1$, $\ln 5 = 1,6$ e $\ln 2 = 0,7$, obtenha o tempo necessário para que a quantidade dessa droga presente no corpo do paciente seja menor que $50mg$.

Comentários das atividades:

Neste encontro os alunos utilizarão os conceitos e propriedades referentes aos logaritmos para resolver inequações logarítmicas e exponenciais, bem como os problemas de aplicação que envolvem a resolução dessas inequações. Quando se trata de inequação devemos ter uma atenção especial com os símbolos de “maior e menor”, isso deve ser comentado pelo professor, e o aluno deve tomar nota para não esquecer, antes do inicio das atividades. Neste encontro, também esperamos que o aluno apresente um bom domínio do conteúdo, dessa forma o professor deve agir apenas como mediador e acompanhar as resoluções de cada aluno, é muito importante relembrar alguns conceitos das operações com conjuntos, pois as mesmas se fazem necessárias para a resolução das inequações.

Encontro 12: Função Logarítmica

Objetivos:

1) Definir e estudar a função logarítmica;

2) Aplicar o conceito de função logarítmica para resolver problemas de aplicação;

Descrição das atividades:

1) (UFSCAR - 2001) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático:
$$h(t) = 1,5 + \log_3(t+1),$$
com $h(t)$ em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu $3,5m$ de altura, calcule o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte.

2) Com base nas condições de existência determine o domínio da função $f(x) = \log_{(4-x)}\left(x^2-4x-21\right)$.

3) (Enem 2011) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:
$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$
Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o $dina \times cm$. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de Janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$. U.S. GEOLOGICAL SURVEY.Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em 1 maio 2010 (adaptado) U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy. Mostrando que é possível determinar

a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe em $(dina \times cm)$?

a) $10^{-5,10}$

b) $10^{-0,73}$

c) $10^{12,00}$

d) $10^{21,65}$

e) $10^{27,00}$

4) (Portal Positivo) A fórmula para medir a intensidade de um dado terremoto na escala Richter é $R = \log_{10}(I/I_0)$, com I_0 sendo a intensidade de um abalo quase imperceptível e I a intensidade de um terremoto dada em termos de um múltiplo de I_0. Se um sismógrafo detecta um terremoto com intensidade $I = 32000 \times I_0$, qual a intensidade do terremoto na escala Richter? Indique o valor mais próximo.
Dado: use a aproximação $\log_{10} 2 \approx 0,30$.

a) 3,0

b) 3,5

c) 4,0

d) 4,5

e) 5,0

5) (UFG – 2011) Estudos apontam que o aumento de CO_2 na atmosfera intensifica a acidificação dos oceanos, o que pode prejudicar a vida marinha. Nesses estudos, em um experimento (E_1) em água com $PH = 8,05$, ovos de caracóis (lesma-marinha) geraram embriões que formaram conchas, após um certo período de tempo. Em outro experimento (E_2) com ovos desse mesmo tipo, em água com $PH = 7,6$, após o mesmo período de tempo, verificou-se que alguns ovos estavam vazios e os embriões ainda não haviam criado conchas. OCEANOS AMEAÇADOS DE DENTRO PRA FORA. Scientific American Brasil, São Paulo, set. 2010, p. 64-71. [Adaptado]

Considerando estas informações, a razão entre as concentrações hidrogeniônicas nos experimentos E_1 e E_2 é (Dado $10^{0,45} = 3$)

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) 1

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{5}{3}$

6) (UESC - 2010) O NIS (Nível de Intensidade Sonora) é dado por $NIS = \log\left(\frac{IS}{IR}\right)^{10}$ em que IS é a intensidade sonora e IR é o valor padrão da intensidade (em *watt* por cm^2). Se, em uma danceteria, um aparelho de som ligado no volume máximo produz $60dB$, considerando-se $\log 2 = 0,301$ pode-se afirmar que, ao serem ligados no mesmo ambiente mais quatro aparelhos de som, exatamente iguais ao primeiro, no volume máximo, serão produzidos, aproximadamente,

a) $63dB$

b) $64dB$

c) $65dB$

d) $66dB$

e) $67dB$

Comentários das atividades:

Neste encontro vamos definir a função logarítmica. Primeiramente deve-se lembrar, os principais conceitos do conteúdo de funções. Considerando o fato que os alunos possuem dificuldade de entender o conteúdo de funções, nesta etapa é necessário que o professor não seja apenas o mediador, ou seja, que atue definindo estes conceitos, resolvendo exemplos e definindo Função logarítmica. Também é interessante resgatar um pouco sobre função exponencial para que mais tarde o aluno possa perceber a relação existente entre as duas. Nesta etapa o aluno terá um maior contato com problemas de aplicação e esperamos que ele não encontre tantas dificuldades um vez que já está familiarizado com este tipo de problema, e também com a resolução de equações logarítmicas, pois já foram abordados nos encontros anteriores.

Encontro 13: Gráfico de uma Função Logarítmica

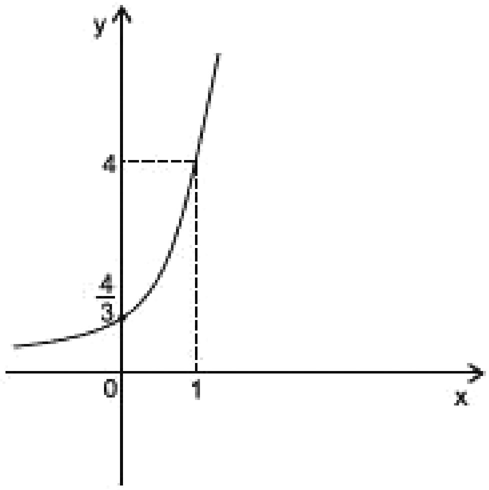
Objetivos:

1) Construir e Interpretar gráfico de funções logarítmicas;

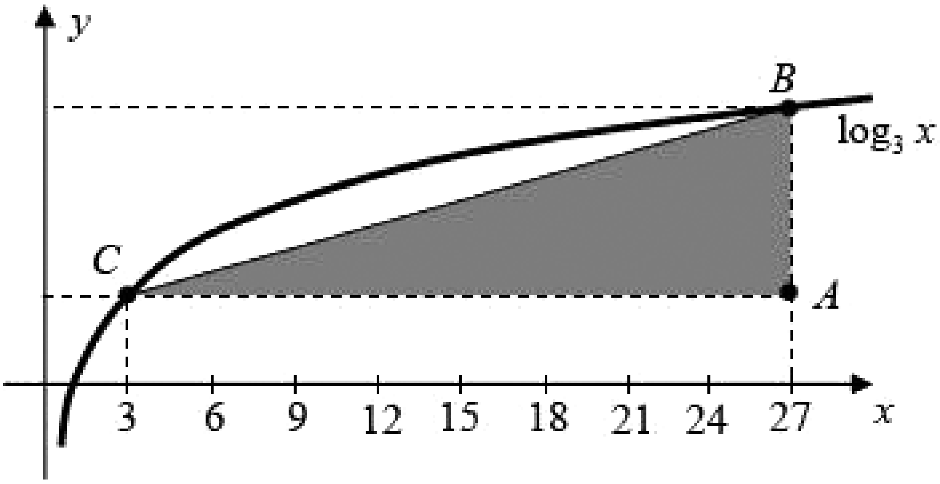
2) Interpretar gráficos de função logarítmica para resolver problemas;

Descrição das atividades:

1) (Portal Positivo) Na figura, está representado o gráfico da função $f(x) = A \times a^x$, sendo A e a constantes positivas. Com base nessas informações calcule o valor de $f(1)$.



2) (Portal Positivo) Na figura a seguir a curva representa o gráfico da função $f(x) = \log_3 x$. A área do triângulo ABC é igual a:



a) 25 unidades de área

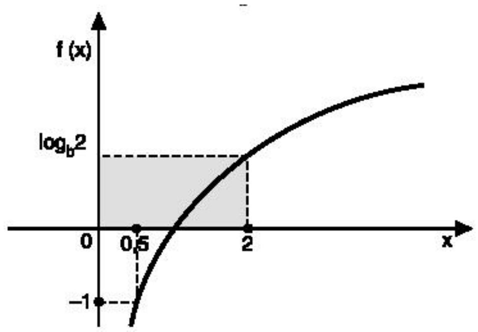
b) 24 unidades de área

c) 23 unidades de área

d) 21 unidades de área

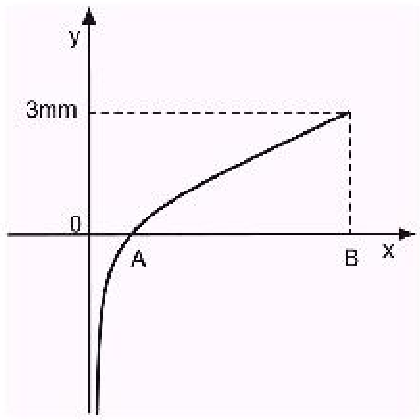
e) 20 unidades de área

3) (UFRGS - 2003) Na figura abaixo está representado o gráfico da função $f(x) = \log_b x$:



Calcule a área da região sombreada.

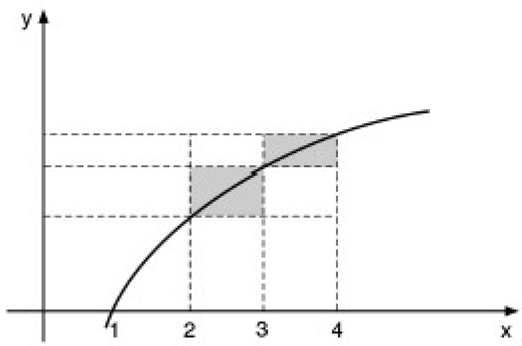
4) (Portal Positivo) O gráfico representa a função $y = \log_3 x$.



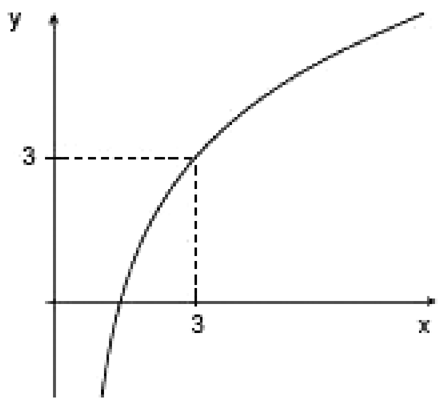
Tomando-se o milímetro por unidade de medida, calcule o comprimento do segmento de extremos A e B.

5) (Portal Positivo) A curva da figura abaixo representa o gráfico da função $y = \log_{10} x$, para $x > 0$.

Assim sendo, calcule a área da região hachurada.



6) (Portal Positivo) A ilustração a seguir é parte do gráfico de uma função do tipo $f(x) = c \times \log_b x$, com b e c constantes reais e $b > 0$, $b \neq 1$. O domínio de f é o conjunto dos números reais positivos, e o contradomínio é o conjunto dos reais. O gráfico de f passa pelo ponto com coordenadas $(3,3)$.



Consideradas estas informações, é incorreto afirmar que:

a) $b^3 = 3^c$

b) A função inversa de f tem como domínio o conjunto dos números reais, e, contra-domínio, o conjunto dos números reais positivos, e é dada por $f^{-1}(x) = 3^{3x}$, para x real.

c) $c = 3\log_3 b$

d) $f(\sqrt[3]{x}) = \log_3 b$

e) f uma função crescente

Comentários das atividades:

Iniciaremos este encontro construindo alguns gráficos de funções logarítmicas em sala de aula, utilizando o quadro. Dessa forma, o aluno irá perceber como se comporta uma função logarítmica. Em seguida os alunos vão construir manualmente alguns gráficos de funções logarítmicas. Feito isso os alunos irão responder as questões propostas, que consistem em problemas que requerem a interpretação dos gráficos.

No próximo capítulo, apresentamos os resultados da aplicação desta sequencia de ensino para o conteúdo de logaritmos a uma turma de primeiro ano do Ensino Médio.

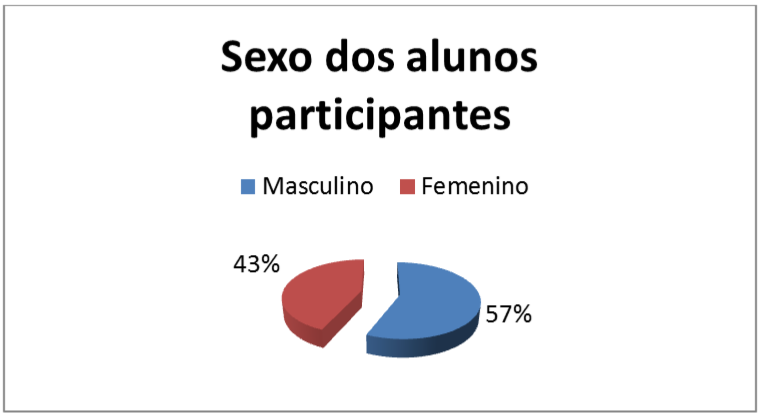
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A análise dos dados foi realizada em 3 etapas: Análise do diário de campo, análise dos testes e análise do questionário.

Estas etapas estão interligadas, por isso neste trabalho aparecerão triangulações das observações, respostas e dados quantitativos.

5.1 PERFIL DO GRUPO

A sala é composta por 23 alunos, com uma pequena superioridade no número de meninos, a grande maioria com 15 anos completos. Por ser o 1º ano do Ensino Médio, existem alunos oriundos de diferentes escolas da rede pública e privada. Das observações registradas no diário de campo, percebe-se que, de uma maneira geral a turma apresenta grande dificuldade de aprendizagem na matemática. Entre outras, dificuldade para interpretar situações-problema e defasagem na matemática do Ensino Fundamental. Apesar de apresentarem dificuldades existe um grupo seleto que se destaca por gostar e conseguir aprender de maneira efetiva a matemática. Dessa forma, buscamos organizar os grupos de maneira que os alunos que apresentavam maior facilidade para aprender pudessem ajudar os que demonstravam maior dificuldade. É importante destacar aqui, que foi sugerido à escola, para que os alunos que possuíam maior dificuldade tivessem acesso à aulas extras de reforço escolar, principalmente no âmbito da matemática do Ensino Fundamental.



Vale destacar que a idade foi respondida no dia 9/12/2013, data em que os alunos responderam o questionário do Apêndice 2.

5.2 ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DE ENSINO PELAS OBSERVAÇÕES DO DIÁRIO DE CAMPO

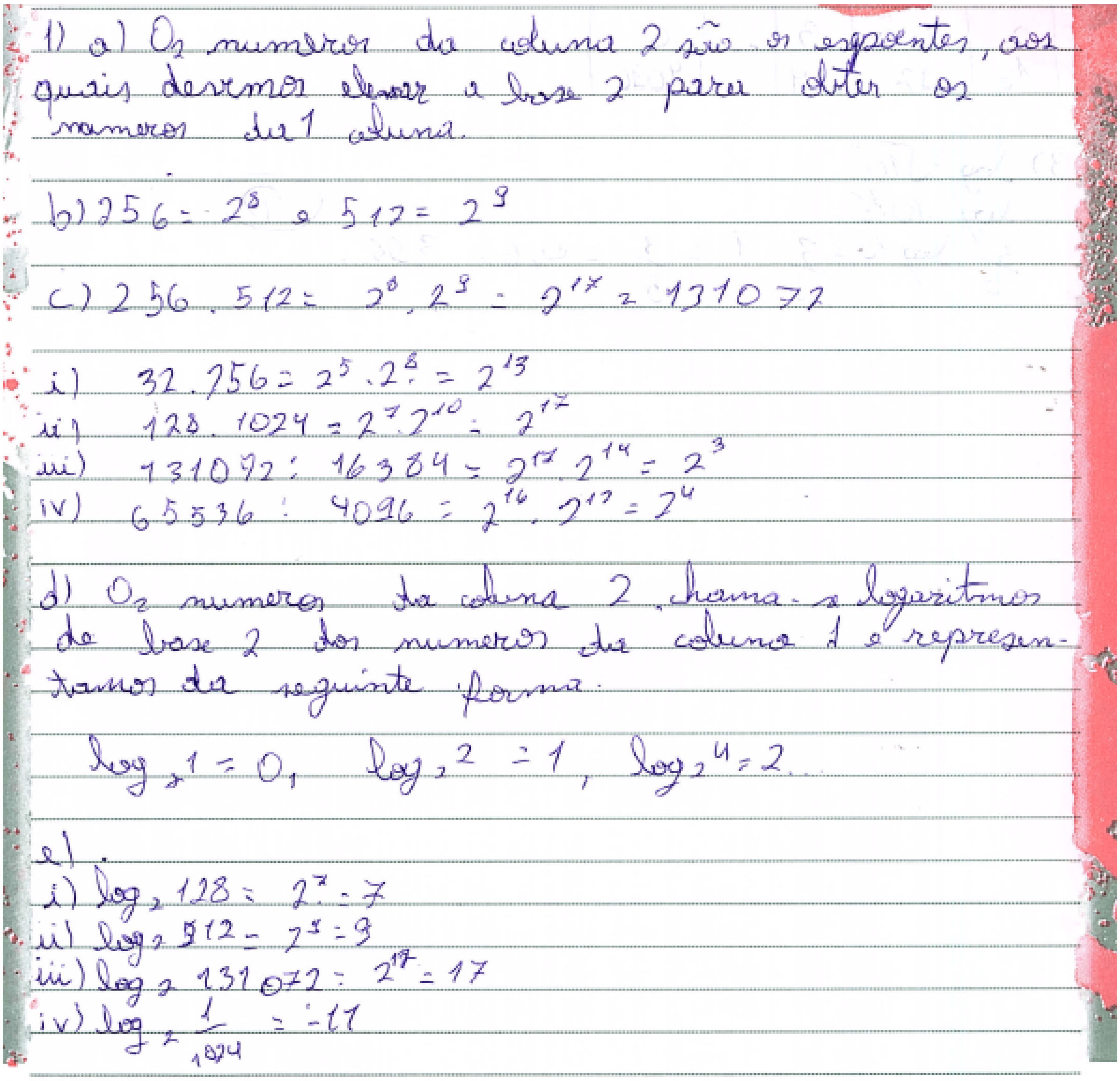
1º e 2º Encontros

Neste primeiro encontro exploramos a idéia de logaritmo como expoente no qual devemos elevar um número "a" para obter um número b.

Como os alunos já possuíam das aulas anteriores, conhecimento do conteúdo de Função Exponencial e durante o processo de aprendizagem do mesmo foi feita uma revisão sobre potências de expoentes inteiros, racionais e irracionais, bem como as propriedades das potências, eles praticamente não apresentaram dificuldades. Além disso, foi possível discutir a importância dos logaritmos na antiguidade.

Esta primeira lista de exercícios, que continha o 1º e 2º encontro da nossa Sequência de Ensino, uma vez que seriam duas aulas consecutivas, foi elaborada utilizando a gênese histórica dos logaritmos, com as ideias de John Napier e Henry Briggs.

A atividade 1 do 1º encontro, segundo Dante (1988), é um problema-processo ou heurístico, pois exige que o aluno pare para pensar e desenvolva uma maneira de agir, ou seja, que ele desenvolva uma estratégia específica que poderá levá-lo à solução. Entregamos a atividade para os alunos e buscamos analisar o que eles eram capazes de resolverem sozinhos, e o que eram capazes de resolver com a ajuda do professor e dos colegas. Em alguns grupos foi necessária a ajuda do professor para que os alunos chegassem à ideia de "logaritmo". Observamos uma solução apresentada por um dos grupos:


1) a) Os numeros da coluna 2 são os expoentes, aos quais devemos elevar a base 2 para obter os numeros da 1 coluna.

b) $256 = 2^8$ e $512 = 2^9$

c) $256 . 512 = 2^8 . 2^9 = 2^{17} = 131072$

i) $32 . 256 = 2^5 . 2^8 = 2^{13}$
ii) $128 . 1024 = 2^7 2^{10} = 2^{17}$
iii) $131072 : 16384 = 2^{17} . 2^{14} = 2^3$
iv) $65536 : 4096 = 2^{16} . 2^{12} = 2^4$

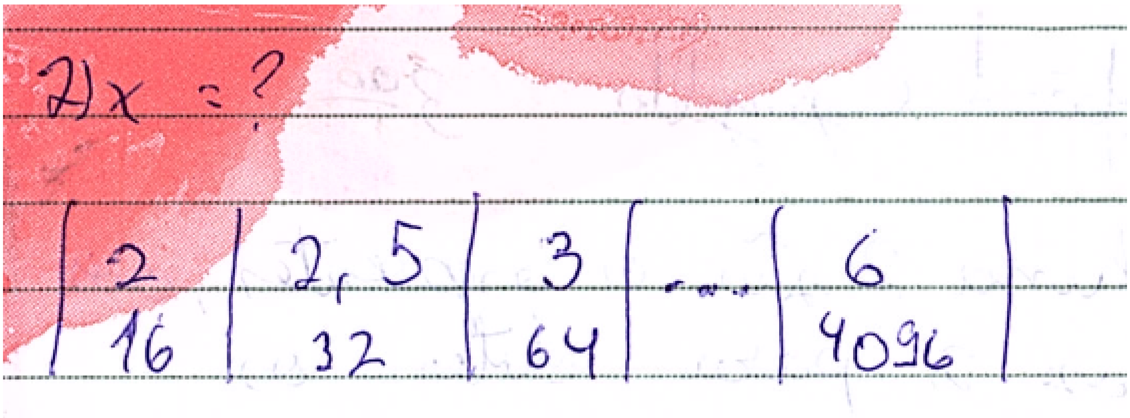
d) Os numeros da coluna 2 chama-se logaritmos de base 2 dos numeros da coluna 1 e representamos da seguinte forma:

$\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$.

e)
i) $\log_2 128 = 2^7 = 7$
ii) $\log_2 512 = 2^9 = 9$
iii) $\log_2 131072 = 2^{17} = 17$
iv) $\log_2 \frac{1}{1024} = -11$

Escolhemos representar a solução desta atividade, pois se trata de um problema gerador. Esta atividade é a base para todos os outros encontros, ela foi realizada sem que o conteúdo fosse apresentado previamente como sugerem Onuchic e Allevato (2009) e como podemos perceber pela atividade de item “e”, os alunos entenderam o conceito de logaritmo sem que este lhes fosse apresentado de forma pronta e usual.

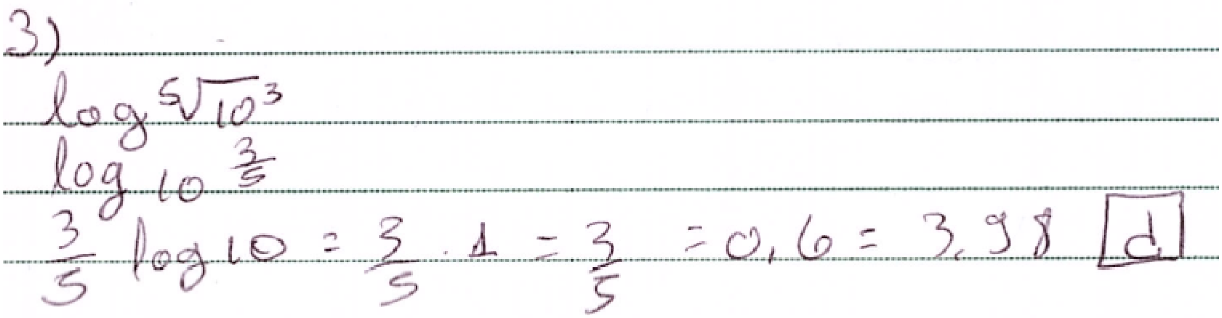
Para que os alunos conseguissem resolver a atividade 2 do 1º encontro que tinha como objetivo relacionar o Logaritmo com as progressões geométricas e aritméticas, foi preciso fazer uma pequena revisão sobre Progressão Aritmética e Progressão Geométrica no quadro. Dante (1988) chama esse tipo de problema de Exercício de Reconhecimento, pois induz o aluno a recordar as propriedades da P.A e da P. G, além é claro de aplicar as ideias de logaritmo. Alguns alunos resolveram completando a tabela, sem o uso do logaritmo, como abaixo:



2) $x = ?$

2	2,5	3	...	6
16	32	64		4096

A atividade 3 é também segundo Dante (1988) um exercício de reconhecimento, pois nesta atividade deve ser resgatada a definição de logaritmo. Poderíamos chamar também de problema-processo, uma vez que o aluno deve elaborar a estratégia, que nesse caso seria primeiramente igualar esta raiz a x, elevar ambos os membros no expoente 5 e aplicar o logaritmo nos dois membros da equação, este último passo o pesquisador deu a dica. É claro que podem existir outras estratégias, essa é apenas uma que encontramos. Alguns alunos chegaram a solução de uma maneira um pouco estranha, como a que segue, representando um pouco da dificuldade que alguns alunos tem de organizar suas resoluções:



3)

$\log \sqrt[5]{10^3}$

$\log 10^{\frac{3}{5}}$

$\frac{3}{5} \log 10 = \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5} = 0,6 = 3,98$ $\boxed{d}$

Observe que a solução parece um pouco estranha. Os alunos conseguiram chegar a resposta final, mas não conseguiram organizar de forma correta. A tabela induz que se pode calcular o log n para conseguir através dela o valor de n. Nota-se que escreveram 0,6=3,98 sem mencionar o uso da tabela.

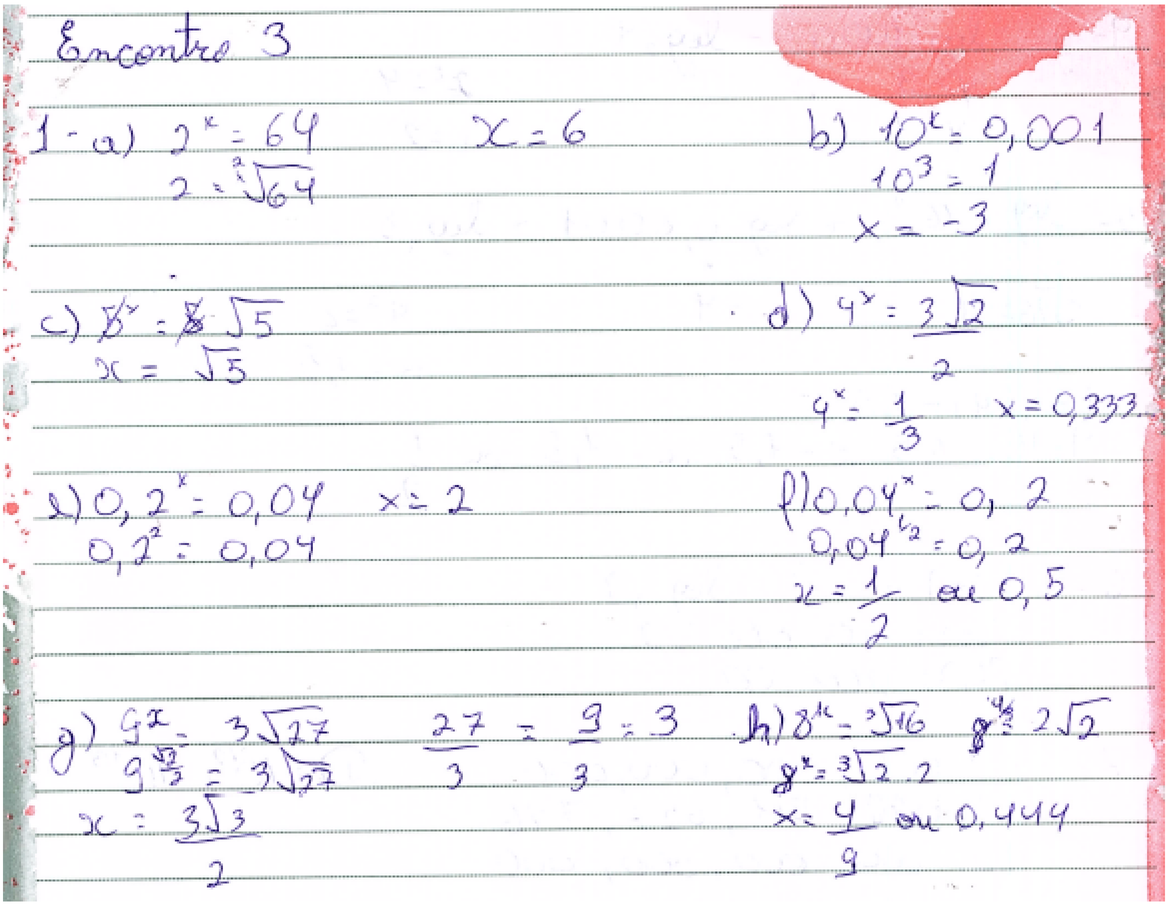
Nas atividades do encontro 2, os alunos apenas repetiram as ideias do encontro 1, sendo que a única mudança foi a utilização de expoentes racionais ao invés de inteiros, além de se trabalhar os logaritmos com a base 10. Nesse caso as atividades são problemas de algoritmo, pois seguem um método pré-determinado.

Por fim, a utilização dos quadros e das tabelas nas atividades facilitou muito o entendimento da definição de Logaritmo.

3º Encontro

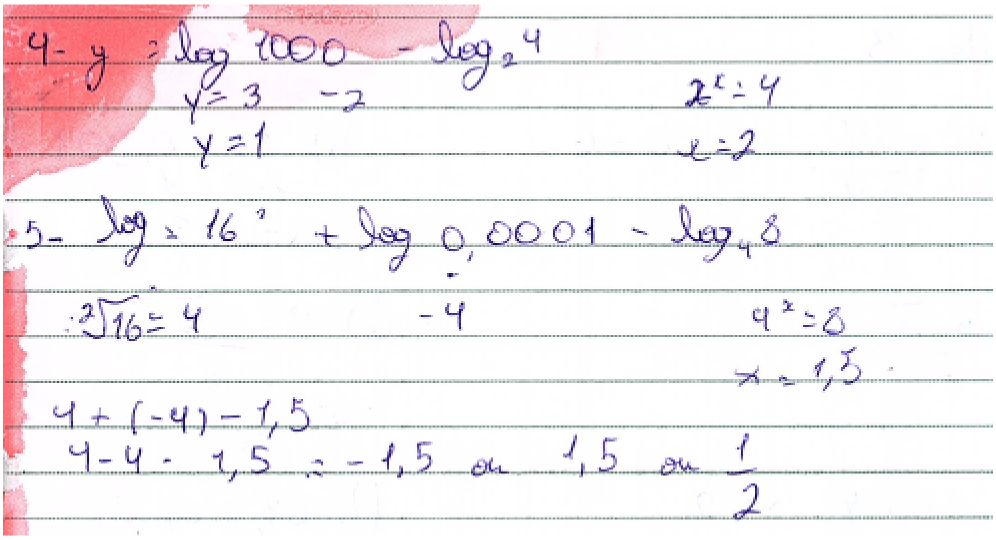
Neste encontro os alunos tiveram o primeiro contato com situações do cotidiano que envolvem os logaritmos, como por exemplo o PH da água. O objetivo principal era aplicar a definição de logaritmo, trabalhada nos dois primeiros encontros, para resolver os mais variados tipos de problemas envolvendo os logaritmos. Foi uma aula de problemas de complementação.

Iniciamos com um exercício de algoritmo segundo Dante (1988), a atividade 1, seguem algumas soluções:


Encontro 3
1- a) $2^x = 64$ $x = 6$
$2 = \sqrt[x]{64}$
b) $10^x = 0,001$
$10^3 = 1$
$x = -3$
c) $\cancel{5}^x = \cancel{5}\sqrt{5}$
$x = \sqrt{5}$
d) $4^x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
$4^x = \frac{1}{3}$ $x = 0,333$
e) $0,2^x = 0,04$ $x = 2$
$0,2^2 = 0,04$
f) $0,04^x = 0,2$
$0,04^{1/2} = 0,2$
$x = \frac{1}{2}$ ou $0,5$
g) $9^x = 3\sqrt{27}$ $\frac{27}{3} = \frac{9}{3} = 3$
$9^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3\sqrt{27}$
$x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
h) $8^x = \sqrt[3]{16}$ $8^{4/9} = 2\sqrt{2}$
$8^x = \sqrt[3]{2}\,2$
$x = \frac{4}{9}$ ou $0,444$

Pode-se observar que o conhecimento prévio que os alunos possuíam sobre as equações exponenciais os induz a resolver as atividades de uma maneira mais tradicional.

Complementam os exercícios de algoritmos as atividades 4, 5 e 9. Observamos as soluções dos problemas 4 e 5 apresentada pelos alunos. Percebemos que eles resolveram de uma forma mais direta, alguns logaritmos foram calculados de forma imediata, fruto da maneira com que foi definido o logaritmo na atividade 1, outros trataram de transformar em equações exponenciais, fruto da equivalência $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$, também apresentada no primeiro encontro.



Ainda neste encontro abordamos algumas situações-problemas ou, segundo Dante (1988), problemas de aplicação, tratam-se das atividades 2, 3, 6 e 8, pois estas relacionam as aplicações do logaritmo nas mais diversas áreas. Além dos problemas de aplicação, temos um problema-processo, a atividade 7.

As maiores dificuldades apareceram nos problemas 2, 3 e 7, os alunos tiveram muita dificuldade para interpretar, sendo assim, o professor pesquisador decidiu auxiliar os alunos a encontrar os possíveis caminhos para as respostas. O problema 7 foi resolvido no quadro, para que todos acompanhassem, já que ninguém havia conseguido resolver e demandava interpretação e domínio amplo das manipulações necessárias para resolver problemas envolvendo logaritmo.

Como trata Dante (1988), os problemas-processo ou heurísticos, requerem que o aluno pare para pensar e elabore sua estratégia, talvez se deixássemos mais tempo algum aluno até pudesse descobrir a solução da atividade 7, porém não podemos negar que estávamos preocupados com o tempo também, o que pode ter sido um erro, uma vez que para a metodologia da resolução de Problemas o tempo não deve ser um empecilho. O mesmo vale para as atividades 2 e 3, que também foram resolvidas pelo professor no quadro. De qualquer maneira acreditamos que isso pode ter ajudado os alunos a encontrarem sozinhos as soluções dos problemas 6 e 8. Seguem as soluções destes problemas:

6) $p(t) = 10^5 \cdot \log_2 4$

$p(t) = 100.000 \cdot 2$

$p(t) = 200.000$

FORONI

8) $N(2) = 300 \log$

$N(2) = 300 \log_3 3$

$N(2) = 300 \rightarrow 600$

$600 = 300 \log_3 (1+t)$

$2 = \log_3 (1+t)$

$3^2 = 1+t$

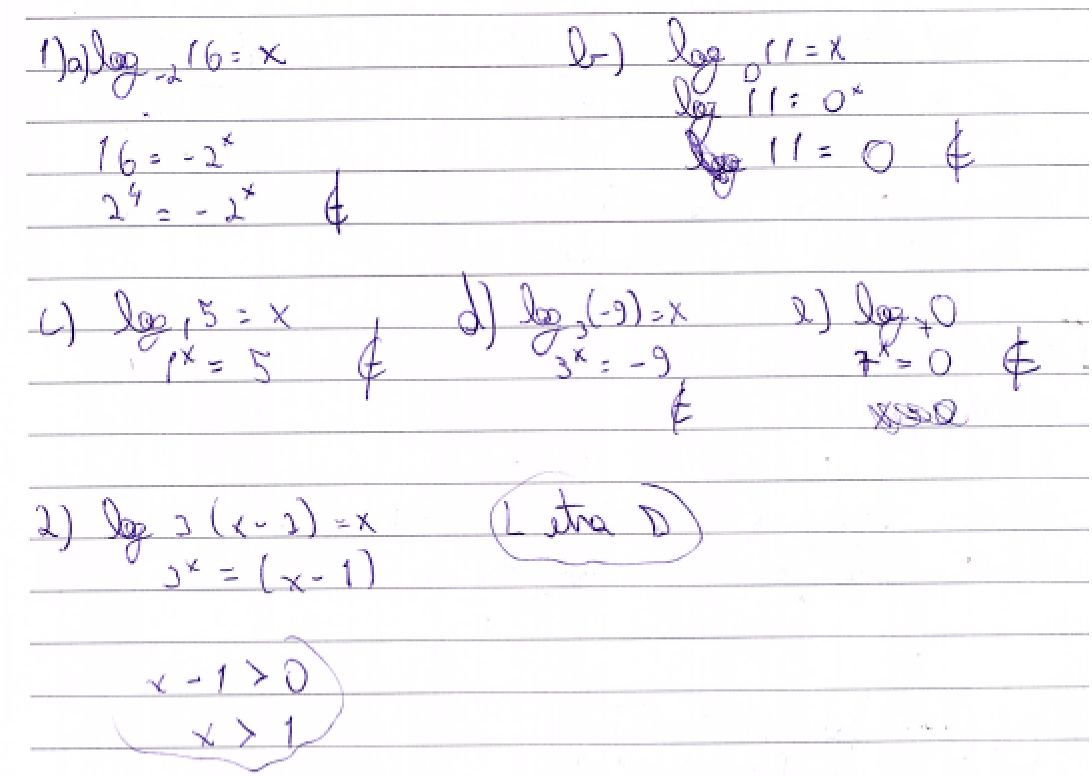
$9 = 1+t$

$t = 8$

Pode-se perceber que os alunos resolveram, manipulando a definição do logaritmo e também usando o conhecimento que já possuíam sobre equações exponenciais. Pode-se perceber a semelhança da resolução com as resoluções das atividades 2 e 3 apresentadas pelo professor à turma.

4º Encontro

O quarto encontro foi muito tranqüilo, realizadas as atividades os alunos conseguiram perceber as condições especiais para a existência de um logaritmo. A princípio não foi mencionado que não era possível resolver tais logaritmos, ou seja, logaritmos de base um, de base zero, de base negativa ou logaritmando negativo e base positiva, todos tentaram resolver, alguns até resolveram, de forma incorreta é claro, mas no final ficou claro que era impossível resolver tais logaritmos. Em plenária, discutindo junto com os alunos foram elaboradas e registradas as condições de existência dos logaritmos. As duas atividades abordadas nesse encontro são chamadas, segundo Dante (1988) Exercícios de Conhecimento, pois os alunos além de recordarem a definição de logaritmo, enunciaram as condições de existência. Observamos:


1)a) $\log_{-2} 16 = x$
$16 = -2^x$
$2^4 = -2^x$ $\notin$

b) $\log_0 11 = x$
$\log 11 = 0^x$
$\log 11 = 0$ $\notin$

c) $\log_1 5 = x$
$1^x = 5$ $\notin$

d) $\log_3 (-9) = x$
$3^x = -9$
$\notin$

e) $\log_7 0$
$7^x = 0$ $\notin$

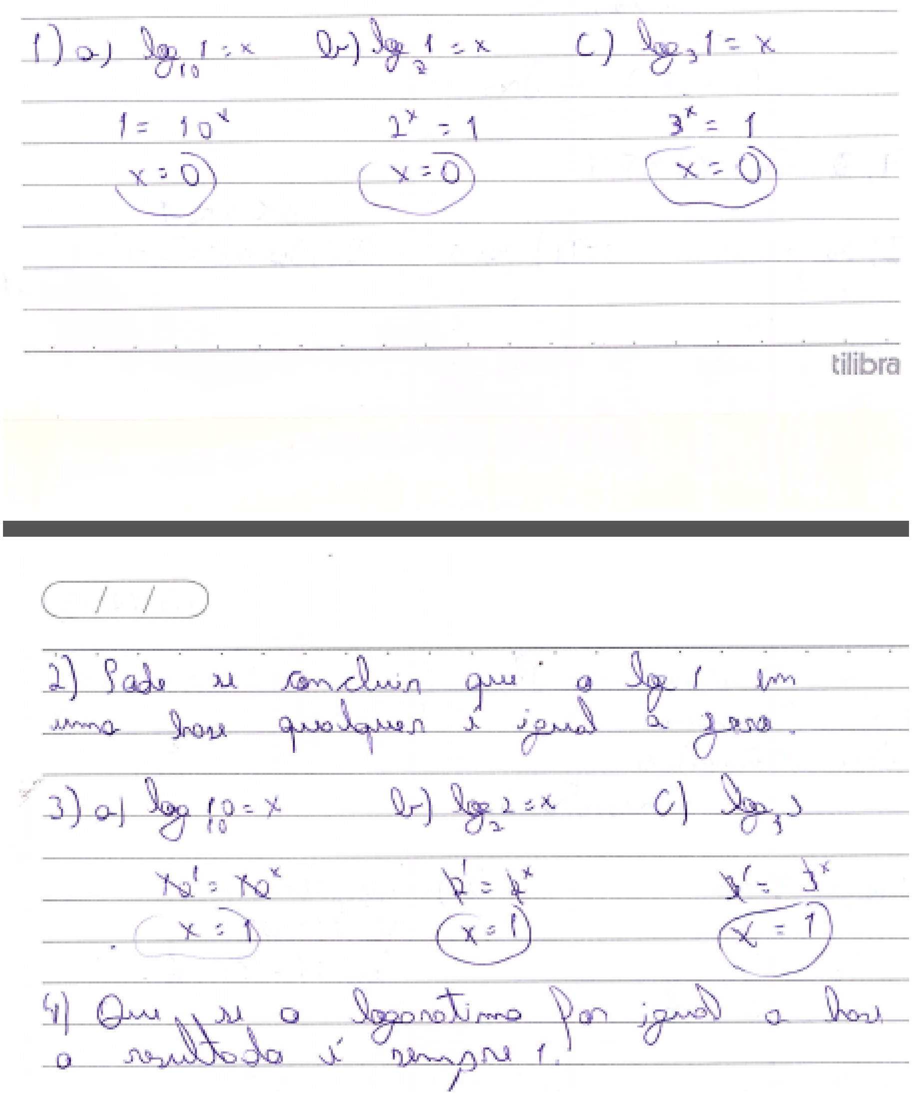
2) $\log_3 (x-1) = x$
$3^x = (x-1)$
Letra D

$x - 1 > 0$
$x > 1$

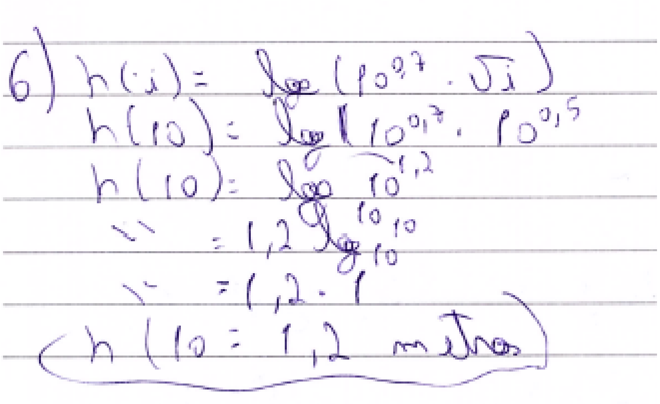
Os encontros 3 e 4 foram desenvolvidos juntamente, em duas aulas de 50 minutos, deixamos poucas atividades no 4º encontro, pois o 3º encontro exigiu mais de 50 minutos, além disso com apenas essas duas atividades foi possível cumprir com os objetivos do encontro.

5º Encontro:

Em grupo, os alunos resolveram as 4 primeiras atividades, e em seguida as soluções foram discutidas no quadro. Com isso os alunos perceberam que alguns logaritmos são imediatos, ou seja, existem caminhos mais curtos de se chegar ao resultado. Desta forma conseqüências da definição foram escritas em conjunto. Por fim, o encontro foi concluído com as outras atividades e novamente os alunos apresentaram dificuldade na interpretação dos problemas. Essas quatro primeiras atividades são chamadas exercícios de reconhecimento, pois tem como objetivo principal induzir o aluno a reconhecer as conseqüências da definição, ou seja, reconhecer os logaritmos imediatos. Segue algumas soluções:



Na fase de conclusão do encontro, apresentamos um exercício de complementação, a atividade 5, para fixar as ideias vistas nas 4 primeiras atividades e também atividade 7, com o mesmo objetivo. Para complementar os objetivos do encontro, os alunos resolveram a atividade 6, um problema de aplicação, como um pouco de dificuldade na interpretação, por parte de alguns alunos. A solução apresentada por este grupo mostra que a atividade se trata de um problema gerador, ou seja, apenas com o conhecimento e a habilidade de aplicação da definição de logaritmo, resolvendo as atividades em sequência os alunos concluíram que alguns logaritmos são imediatos, ou seja, que não precisarão utilizar tal definição sempre. O problema gerador foi elaborado pelo professor-pesquisador, com o intuito de orientar o aluno na formação do conceito apresentado em (2 e 4) (1ª fase), leitura e interpretação do enunciado (2ª e 3ª fases) resolução em grupo (4ª fase) a observação e incentivo do professor durante a resolução (5ª fase), o registro das soluções dos alunos (6ª fase), a plenária (7ª fase) o consenso, que gerou as respostas em (2 e 4) e a formalização do conceito apresentada pelo professor a posteriormente, o que levou os alunos a resolver a atividade seguinte com mais facilidade e amadurecimento das técnicas de resolução de problemas.



6º Encontro

O objetivo deste encontro era desenvolver e aplicar as propriedades dos logaritmos, citadas no item 3.3.7 do Capítulo 3, para resolver problemas mais elaborados. Os alunos resolveram, em grupo as atividades 1,2 e 3. Atividades que Dante (1988) classifica como exercícios de conhecimento, pois induz o aluno a enunciar as propriedades das potências. Com a realização da atividade 1, foi possível enunciar a propriedade do logaritmo do produto. A solução deste "problema gerador" apresentada pelo grupo mostra a construção da propriedade enunciada no item "c". Tal construção também se deu cumprindo todas as fases da resolução de problemas.

Depois disso, as propriedades da multiplicação, divisão e potência dos logaritmos foram apresentadas no quadro com a realização de, mais alguns exemplos, que foram passados no quadro, além das atividades 2 e 3, que também podem ser interpretados como problemas de complementação, para fixar a idéia. Em seguida os alunos resolveram as situações-problema restantes do encontro. Neste encontro tivemos um número grande de problemas para resolver, por isso os alunos concluíram a tarefa em casa e na aula seguinte foram retomadas as discussões. Vários alunos diziam não ter conseguido resolver sozinhos, alguns não conseguiram desenvolver os cálculos, mas a maioria não conseguiu interpretar o problema. Sendo assim, as soluções foram encontradas e discutidas em conjunto no quadro. Os exercícios 5, 7, 8, 10 e 11 são problemas de reconhecimento, pois para resolvê-los os alunos precisavam recordar diversas propriedades dos logaritmos e também de outros conteúdos como potências, PA e PG e até mesmo sistema de equações do 1º grau. Observamos algumas soluções apresentadas por um dos grupos:

07)

$b = \frac{a+c}{2} \to$ P.P.

$2+\log b = \frac{3+\log c + 1 + \log a}{2}$

$4 + 2\log b = 4 + \log c + \log a$

$2\log b = \log c.a$

$\log b^2 = \log c.a$

$b^2 = c.a \to$ PG

a, b, c

$n = 1 + \log_{10} \frac{b}{a}$

$q = \frac{b}{a} = 10^{n-1}$

$n = \log 10 + \log \frac{b}{a}$

$n = \log 10 . \frac{b}{a}$

Alternativa A.

$10^n = 10 . \frac{b}{a}$

$\frac{b}{a} = \frac{10^n}{10^1} = 10^{n-1}$

08)

$a - a.\log x^2 + b - 2(a.\log x + b) - b$

$2a\log x + b = 2a\log x + 2b - b$

$2a\log x + b = 2a\log x + b$ (V)

$b - f(x+y) = f(x).f(y)$

$a\log(x+y) + b = (a.\log x + b).(a.\log y + b)$

$a\log(x+y) + b = a^2\log x \log y + ab\log x + ab\log y + b^2$ (F)

c) $f(x) = a.\log_{10}(x) + b$

$f(1) = a.\log 1 + b$

$f(1) = b$ (V)

Os problemas 4, 6 e 9 são problemas de aplicação, estes problemas exigiram um pouco mais da ajuda do professor. Veja as soluções dos problemas 4 e 6, apresentadas por um dos grupos.

04)

$N(t) = 3.2^{-t}$

$0,6 = 3.2^{-t}$

$\log 0,6 = \log (3.2^{-t})$

$\log 0,6 = \log 3 + \log 2^{-t}$

$\log 0,6 = \log 3 - t.\log 2$

$\log \frac{0,6}{3} = -t.(0,3)$

$\log 0,2 = -0,3t$

$\log \frac{2}{10} = -0,3t$

$\log 2 - \log 10 = -0,3t$

$0,3 - 1 = -0,3t$

$0,3 + 0,3t = 1$

$0,3(1+t) = 1$

$1+t = \frac{1}{0,3}$

$t = 3,33 - 1$

$t = 2,33$ h $\rightarrow 2,20$ min

$2,33.60$ (min) $= 139,8$

$139,8 - 120$ (duas h) $=$

$19,8 \simeq 2,20$ min

06) $P(t) = 25.2^{t}$

$625 = 25.2^{t}$

$\frac{625}{25} = 2^{t}$

$25 = 2^{t}$

$\log_2 5^2 = \log_2 2^{t}$

$2.(2,32) = t.1$

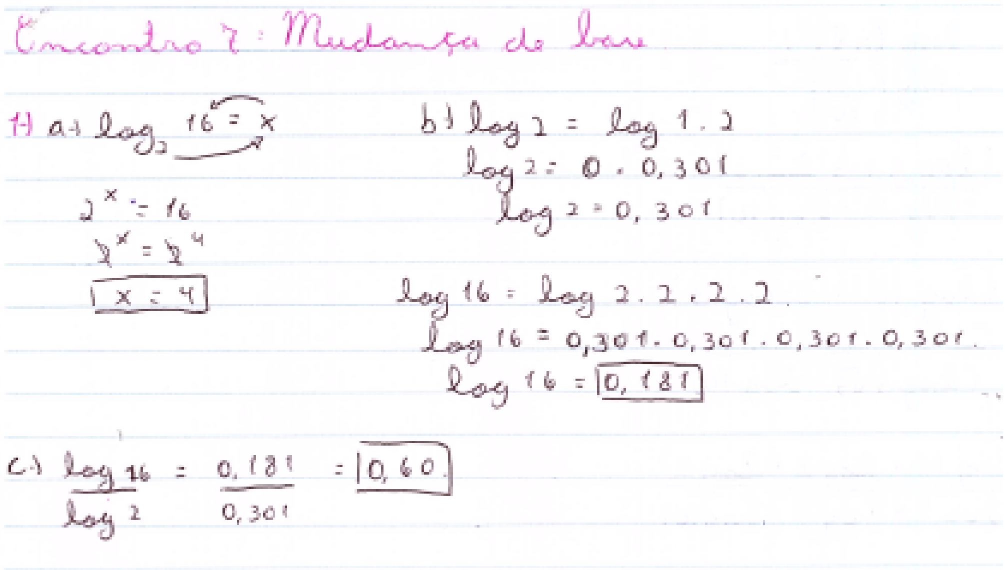
$t = 4,64$ h $.(60$ min$)$

$t = 4$ h, 38 min.

As soluções dos problemas apresentadas acima, considerados mais complexos, mostra o amadurecimento dos alunos, ou seja, o crescimento na aprendizagem. Consideramos que é na resolução deste tipo de problema que percebemos se o aluno realmente está aprendendo. Os problemas de aplicação não mostram o caminho da resolução, como muitos outros que já apresentamos, o aluno deve desenvolver um caminho sozinho, este é o objetivo.

7º Encontro

Neste encontro foi observada uma certa dificuldade para desenvolver nossa linha de trabalho, ou seja, buscando sempre deixar o aluno descobrir algumas coisas sozinho. Os alunos resolveram a atividade 1 e com isso a mudança de base foi definida, mesmo assim foi necessário resolver alguns exercícios como exemplo no quadro, pois os alunos não conseguiam perceber que a mudança de base era válida para qualquer base, além da base 10 e da base 2, as mais trabalhadas nos encontros anteriores. A resolução abaixo apresentada por uma aluna explicita bem essas dificuldades. O objetivo do problema era induzir o aluno a formar o conceito da mudança de base, mas como podemos notar o erro no log 16 não permitiu que a resposta do item c fosse 4, como era o esperado.



Acrescentamos também os problemas 2,3, 4 e 10, que Dante (1988) classifica como exercícios de algoritmo, para trabalhar e fixar a definição de Mudança de Base.

Em seguida os alunos resolveram os problemas restantes do encontro, apresentando dificuldade de interpretação e organização da resolução dos problemas 7 e 9. Por esta razão o problema 9 foi resolvido no quadro. Uma vez que o problema 11 era semelhante a este, ficou mais fácil de ser resolvido. Os problemas 5, 6, 7, 9 e 11, apesar de serem classificados como problemas de aplicação, também podem ser vistos como problemas-processo, principalmente os problemas 7,9 e 11 mencionados acima, pois requerem que o aluno pare para pensar e desenvolva uma estratégia. Podemos concluir até aqui que é neste tipo de problema que o aluno possui maior dificuldade, seja pelo pouco tempo que disponibilizamos, como já citamos, ou também pela pouca quantidade abordada nas séries anteriores desse tipo de problema. Observamos a solução do problema 11, apresentada pelo mesmo grupo da aluna que cometeu o erro na atividade 1, descrito acima, desta vez cometeram outro erro, ficou claro que eles ainda não sabiam manipular a mudança de base.

11) $X(t) = 100.(1,10)^t$

$200 = 100.(1,10)^t$

$1,10^t = 2$ aplicando log na base b

$t.\log_b 1,10 = \log_b 2$

$t = \dfrac{\log_b 2}{\log_b 1,10}$

$X(t) = 100.(1,10)^t$

$200(t) = 100.1,10^t$

$\dfrac{200(t)}{110} = 1\cancel{1}0^t$

$\boxed{t = 1,818}$

Observemos também que a resolução do problema 6, apresentada pelo mesmo grupo, está correta:

6) $m(t) = m(0).\ 0,8^t$

$m(t) = \dfrac{m(0)}{2}$

$\dfrac{m(0)}{2} = m(0).0,8^t$

$\dfrac{1}{2} = 0,8^t$

$-\log(2) = t.\log(0,8) = t.\log\left(\dfrac{8}{10}\right) = t(\log 8 - \log 10) = t(3\log 2 - 1)$

$t = \dfrac{-\log(2)}{3\log 2 - 1} = \dfrac{-0,30}{3.0,30-1} = -0,30.(-0,1) = \boxed{3 \text{ anos}}$

Resposta = e) 3 anos

No problema 11, tentaram resolver de duas formas, a segunda completamente errada, a primeira correta até certo ponto, onde não conseguiram perceber que a base b poderia ser trocada pela base 10 e aí terminariam a resolução inacabada. No problema 6, este mesmo grupo resolveu da mesma forma, porém desta vez conseguiram perceber que poderíam trocar a base b da propriedade pela base 10. O fato de uma resolução estar certa e a outra errada pode ser por falta de atenção, ou dificuldade de interpretação da linguagem matemática.

8º Encontro

O encontro foi iniciado ressaltando-se a importância da base 10 no estudo dos logaritmos. Neste encontro não foi trabalhada nenhuma nova técnica do estudo dos logaritmos, apenas foi usado tudo o que foi visto até o momento para os logaritmos de base 10 em especial. A aula toda foi de resolução de problemas. Apesar de apresentarem dificuldades de interpretação, os alunos tiveram um rendimento melhor do que nos encontros anteriores. Este foi o último encontro antes do primeiro teste. Devido a pouca disponibilidade de tempo o teste foi aplicado em horário diferenciado do regular e por isso não contamos como encontro, sendo que os resultados do mesmo serão apresentados em seguida.

Quanto a classificação dos problemas abordados neste encontro, segundo Dante (1988) os problemas 3, 4 e 5 são problemas que o aluno deve seguir um método pré-determinado, ou seja, são problemas de algoritmo. Vejamos as soluções apresentadas por um dos grupos:

3) $\log 18 = \log(3.3.2)$

$\log 18 = \log 3 + \log 3 + \log 2$

$\log 18 = 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}3$

$\boxed{\log 18 = 1{,}1}$

4) $\log 100 + \log 0{,}1 = \log(100 \cdot 0{,}1)$

$\log 100 + \log 0{,}1 = \log 10$

$\boxed{\log 100 + \log 0{,}1 = 1}$

5) a) $\log 120 = \log(4.3.10)$

$\log 120 = \log 4 + \log 3 + \log 10$

$\log 120 = 2.\log 2 + \log 3 + \log 10$

$\boxed{\log 120 = 2a + b + 1}$

b) $\log 72 = \log(3.3.2.2.2)$

$\log 72 = \log 3 + \log 3 + \log 2 + \log 2 + \log 2$

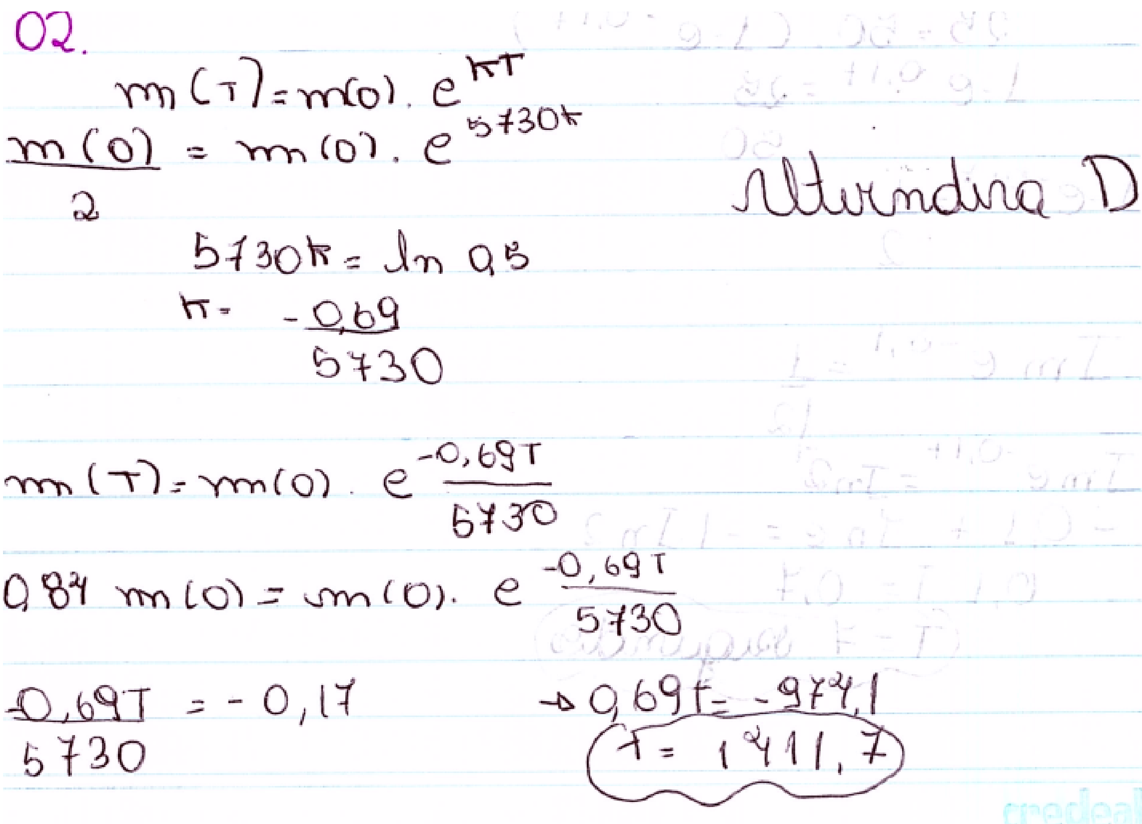
$\log 72 = b + b + a + a + a$

$\boxed{\log 72 = 2b + 3a}$

Tais soluções mostram que os alunos estão conseguindo manipular as propriedades dos logaritmos sem grandes problemas. Os demais são problemas de aplicação, ou situações-problemas.

9º Encontro

Este encontro trabalhamos com o logaritmo na base "e". Sem entrar muito no contexto histórico, pois não era o principal objetivo neste trabalho. A aula foi iniciada falando-se um pouco sobre a importância de tal número, principalmente no crescimento de uma população ou cultura. Em seguida foi tratado sobre a notação desses logaritmos, ou seja, o ln x. Desta forma, a resolução dos problemas ocorreu da mesma forma que em outros encontros, resolução por parte dos alunos e posterior correção e discussão juntamente com o professor. Estes problemas possuem um grau de dificuldade maior do que os outros resolvidos até o momento. Poucos alunos conseguiram resolver os problemas 2 e 3. São problemas que se encaixam nas definições que Dante (1988) classifica como situações-problema. Observamos as soluções dos problemas 2 e 3 apresentadas por um grupo que conseguiu resolver corretamente:


02.

$m(T) = m(0) \cdot e^{kT}$

$\frac{m(0)}{2} = m(0) \cdot e^{5730k}$

$5730k = \ln 0{,}5$

$k = \frac{-0{,}69}{5730}$

$m(T) = m(0) \cdot e^{\frac{-0{,}69T}{5730}}$

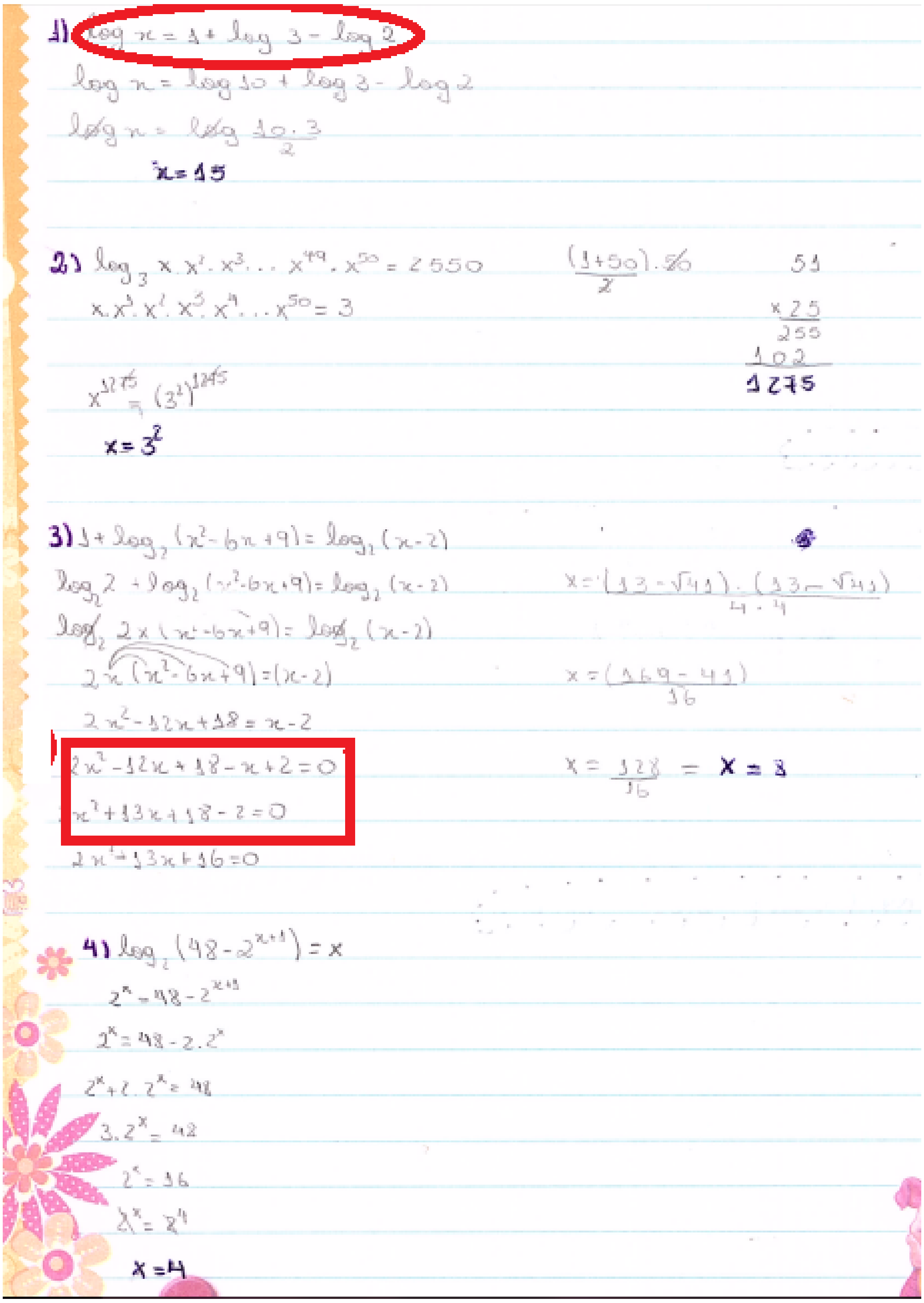
$0{,}84\, m(0) = m(0) \cdot e^{\frac{-0{,}69T}{5730}}$

$\frac{-0{,}69T}{5730} = -0{,}17 \rightarrow 0{,}69t = -974{,}1$

$T = 1411{,}7$

10º Encontro

Neste encontro o Professor-pesquisador resolveu previamente algumas das atividades no quadro, discutindo suas soluções e características com os alunos para eles em seguida resolverem os demais problemas. A maioria dos problemas apresentados neste encontro são problemas classificados como problemas de reconhecimento, segundo Dante (1988), ou seja, problemas que exigem conhecimento de propriedades e definições além da habilidade para manipulá-las para chegar à solução. Por isso ficam mais fáceis de resolver quando se observam alguns exemplos.Tratam-se das 4 primeiras atividades. Observamos abaixo as soluções apresentadas por um dos grupos. Note que os erros cometidos, foram por pura falta de atenção:



1) $\log x = 1 + \log 3 - \log 2$

$\log x = \log 10 + \log 3 - \log 2$

$\log x = \log \frac{10 \cdot 3}{2}$

$x = 15$

2) $\log_3 x \cdot x^2 \cdot x^3 \ldots x^{49} \cdot x^{50} = 2550$ $\quad \frac{(1+50) \cdot 50}{2}$ $\quad 51 \times 25 = 255,\ 102,\ 1275$

$x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \ldots x^{50} = 3$

$x^{1275} = (3^2)^{1275}$

$x = 3^2$

3) $1 + \log_2 (x^2 - 6x + 9) = \log_2 (x-2)$

$\log_2 2 + \log_2 (x^2 - 6x + 9) = \log_2 (x-2)$

$\log_2 2 \times (x^2 - 6x + 9) = \log_2 (x-2)$

$2x (x^2 - 6x + 9) = (x-2)$

$2x^2 - 12x + 18 = x - 2$

$2x^2 - 12x + 18 - x + 2 = 0$

$x^2 + 13x + 18 - 2 = 0$

$2x^2 + 13x + 16 = 0$

$x = \frac{(13 - \sqrt{41}) \cdot (13 - \sqrt{41})}{4 \cdot 4}$

$x = \frac{(169 - 41)}{16}$

$x = \frac{128}{16} = x = 8$

4) $\log_2 (48 - 2^{x+1}) = x$

$2^x = 48 - 2^{x+1}$

$2^x = 48 - 2 \cdot 2^x$

$2^x + 2 \cdot 2^x = 48$

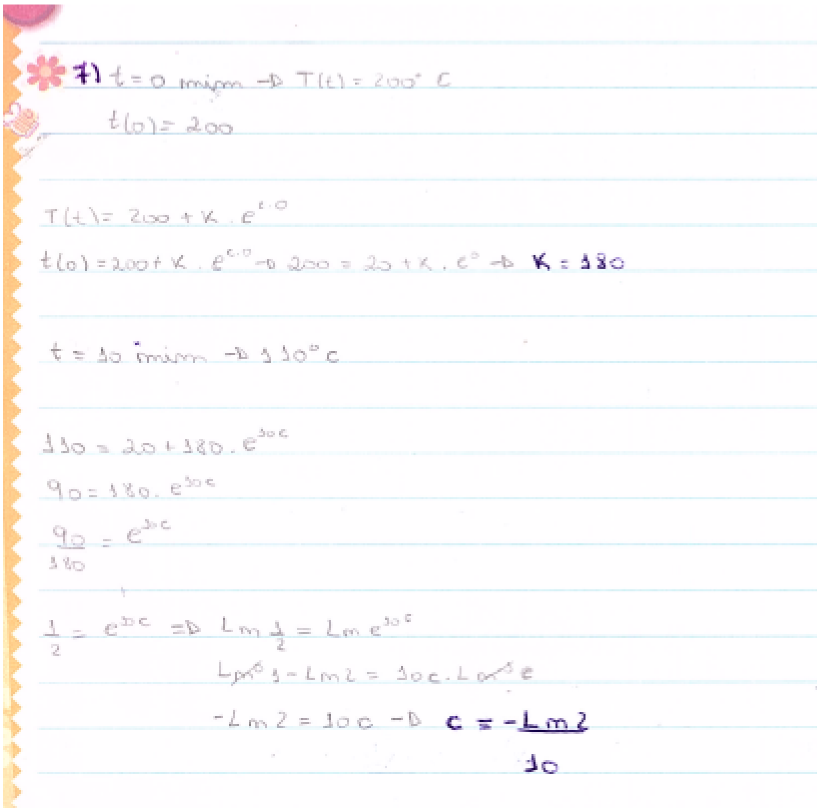
$3 \cdot 2^x = 48$

$2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$

Apesar disso os alunos apresentaram um bom domínio dos conceitos e propriedades dos logaritmos vistos até aqui. Neste encontro também foram abordados os problemas de aplicação, como o 7 e o 11. Seguem abaixo as soluções apresentadas pelo mesmo grupo.



7) $t = 0$ min $\to T(t) = 200°C$

$t(0) = 200$

$T(t) = 200 + K \cdot e^{c \cdot 0}$

$t(0) = 200 + K \cdot e^{c \cdot 0} \to 200 = 20 + K \cdot e^{0} \to K = 180$

$t = 10$ min $\to 110°C$

$110 = 20 + 180 \cdot e^{10c}$

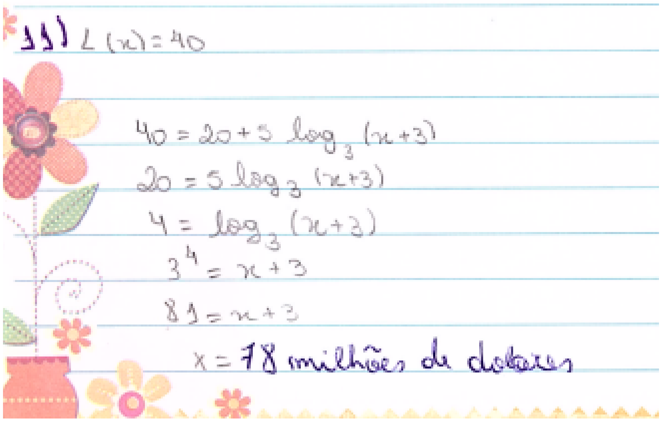
$90 = 180 \cdot e^{10c}$

$\frac{90}{180} = e^{10c}$

$\frac{1}{2} = e^{10c} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln e^{10c}$

$\ln 1 - \ln 2 = 10c \cdot \ln e$

$-\ln 2 = 10c \to c = -\frac{\ln 2}{10}$



11) $L(x) = 40$

$40 = 20 + 5 \log_3 (x+3)$

$20 = 5 \log_3 (x+3)$

$4 = \log_3 (x+3)$

$3^4 = x + 3$

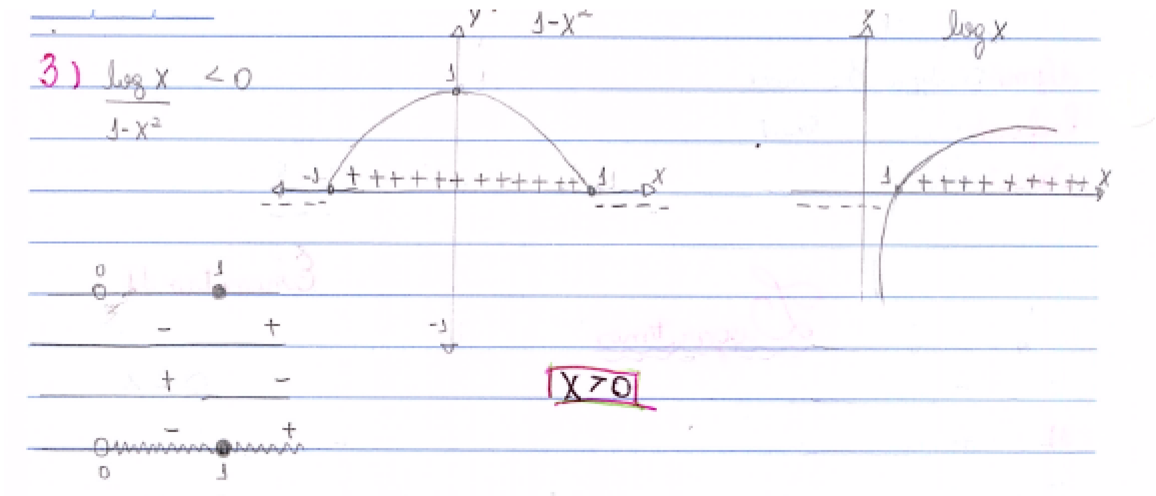
$81 = x + 3$

$x = 78$ milhões de dolares

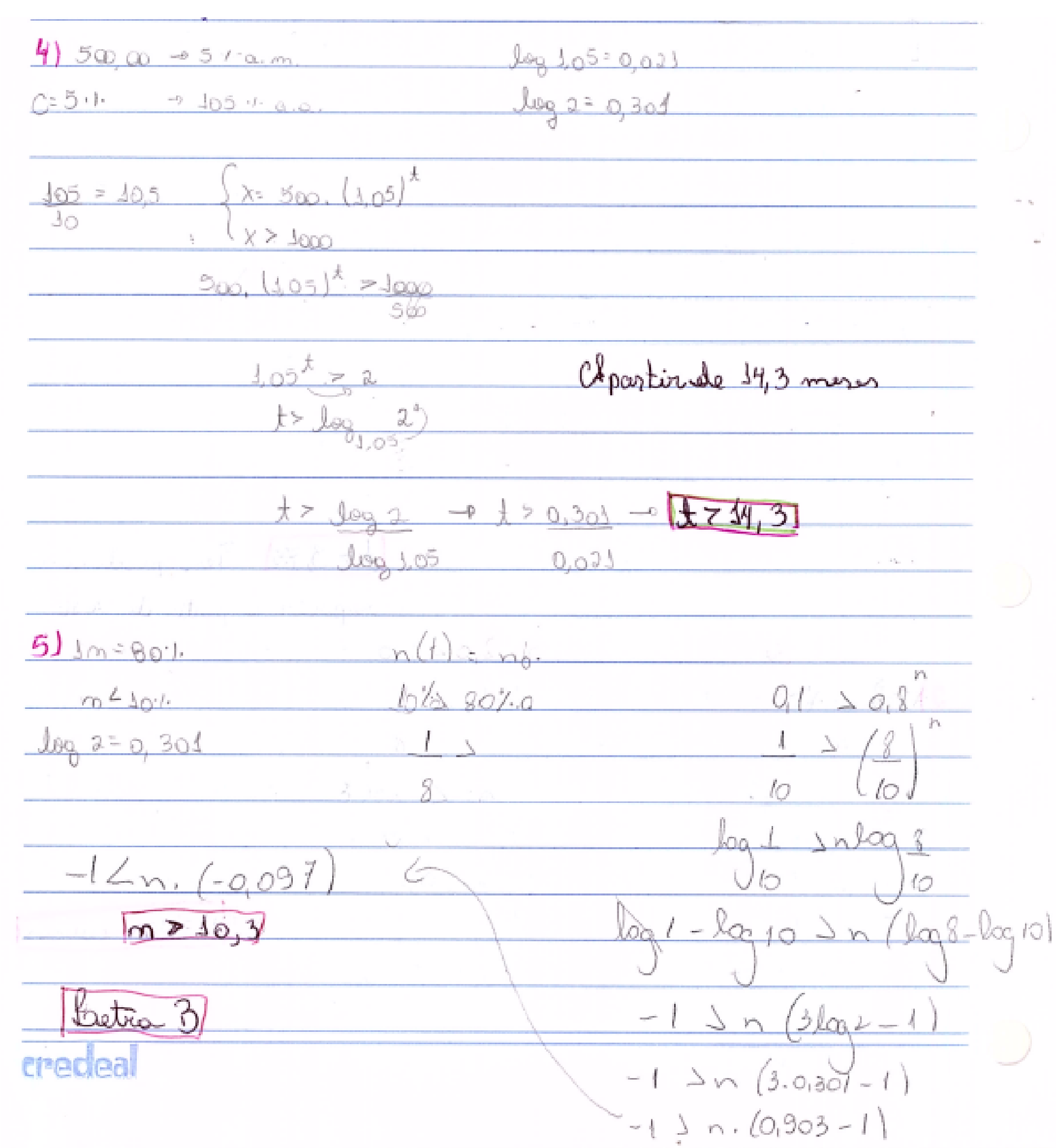
11º Encontro

Os alunos utilizaram os conceitos e propriedades referentes aos logaritmos para resolver inequações logarítmicas e exponenciais. Por se tratar de inequação, o encontro iniciou com comentários do professor-pesquisador sobre os sinais de maior e menor utilizados nas expressões. Como já era esperado houve muita confusão com as inversões destes sinais quando se faziam necessárias. Fora isso, o professor pode atuar apenas como mediador, já que os alunos apresentaram um bom domínio do conteúdo.

Com exceção do problema 3 que é um problema de algoritmo, todos os problemas são de aplicação. Abaixo segue uma solução do problema 3, apresentada incorretamente por um dos grupos, esta solução expressa bem a dificuldade inicial que tivemos para resgatar o conceito de inequação:



Agora observamos as soluções de alguns problemas de aplicação deste mesmo encontro apresentadas pelo mesmo grupo, após a retomada dos conceitos e propriedades feita pelo professor no quadro:



4) 500,00 → 5 % a.m.

C= 5 % → 105 % a.a.

$\log 1{,}05 = 0{,}021$

$\log 2 = 0{,}301$

$\frac{105}{10} = 10{,}5$

$\begin{cases} x = 500 \cdot (1{,}05)^t \\ x > 1000 \end{cases}$

$500 \cdot (1{,}05)^t > \frac{1000}{500}$

$1{,}05^t > 2$

$t > \log_{1{,}05} 2$

$t > \frac{\log 2}{\log 1{,}05} \rightarrow t > \frac{0{,}301}{0{,}021} \rightarrow \boxed{t > 14{,}3}$

A partir de 14,3 meses

5) 1m = 80 %

m < 10 %

$\log 2 = 0{,}301$

n(t) = n₀

10 % 80 % a

$\frac{1}{8}$

$0{,}1 > 0{,}8^n$

$\frac{1}{10} > \left(\frac{8}{10}\right)^n$

$\log \frac{1}{10} > n \log \frac{8}{10}$

$\log 1 - \log 10 > n (\log 8 - \log 10)$

$-1 > n (3\log 2 - 1)$

$-1 > n (3 \cdot 0{,}301 - 1)$

$-1 > n \cdot (0{,}903 - 1)$

$-1 < n \cdot (-0{,}097)$

$\boxed{n > 10{,}3}$

$\boxed{\text{Letra } 3}$

credeal

12º Encontro

Neste encontro, predominaram as situações problemas, e uma vez definida a função logarítmica, os alunos conseguiram resolver os problemas com mais facilidade, apesar de ainda permanecer a dificuldade de interpretação. Vale ressaltar que antes da realização das atividades deste encontro, foi feita ma breve revisão, de maneira expositiva, sobre Função.

Um dos grupos apresentou todas as soluções corretamente, ou seja, souberam interpretar o problema e utilizar de forma correta a definição e as propriedades dos logaritmos. Abaixo seguem tais resoluções:

01.

$H(T) = 1,5 + \log_3 (T+1)$

$3,5 = 1,5 + \log_3 (T+1)$

$3,5 - 1,5 = \log_3 (T+1)$

$2 = \log_3 (T+1)$

$3^2 = T+1$

$9 = T+1$

$T = 8$ anos.

02.

$f(x) = \log_{(4-x)} (x^2 - 4x - 21)$

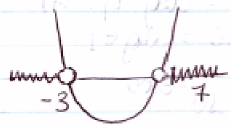
$0 < 4 - x < 1$ ou

$4 - x > 1$

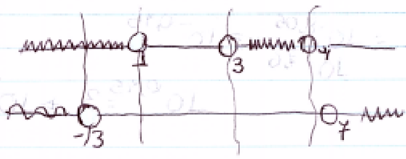
$-4 < -x < -3 \;.\; (-1)$

$4 > x > 3$

$x < 1$



$x^2 - 4x - 21 > 0$



$\{x \in R \; ; \; x < -3\}$

03.

$Mw = 7,3$

$-10,7 + \frac{2}{3} \log_{10} M_0 = 7,3$

$\frac{2}{3} \log_{10} M_0 = 18$

$\log_{10} M_0 = 27$

Alternativa: E

$M_0 = 10^{27}$

04.

$R = \log_{10} (32000\, I_0 / I_0)$

$\log_{10} 32000$

$\log_{10} 2^5 + \log_{10} 10^3$

$5 \,.\, 0,3 + 3 = 4,5$

Alternativa: D

05.

$PH = \log [H+]^{-1}$

$8{,}05 = -\log E_1 \quad (-1)$

$-8{,}05 = \log E_1$

$E_1 = 10^{-8{,}05}$

$7{,}6 = \log E_2 \quad (-1)$

$-7{,}6 = \log E_2$

$E_2 = 10^{-7{,}6}$

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{-8{,}05}}{10^{-7{,}6}} = 10^{-0{,}45}$

$10^{0{,}45} = 3 \rightarrow 10^{-0{,}45} \left(\frac{1}{3}\right)$

06.

$NIS = \log \left(\frac{IS}{IR}\right)^{10}$

$60 = 10 . \log \frac{I}{10^{-12}}$

$6 = \log \frac{I}{10^{-12}}$

$6 = \log I - \log 10^{-12}$

$6 = \log I + 12$

$\log I = 6$

$I = 10^{-6}$

$I = 5 . 10^{-6}$

$N = \log \frac{I}{I_0}$

$N = \log \frac{5 . 10^{-6}}{10^{-12}}$

$N = \log 5 + \log 10^{-6} - \log 10^{-12}$

$N = \log \frac{10}{2} + \log 10^{-6} - \log ^{-12}$

$N = \log 10 - \log 2 + 6 \log 10 - (12 \log 10)$

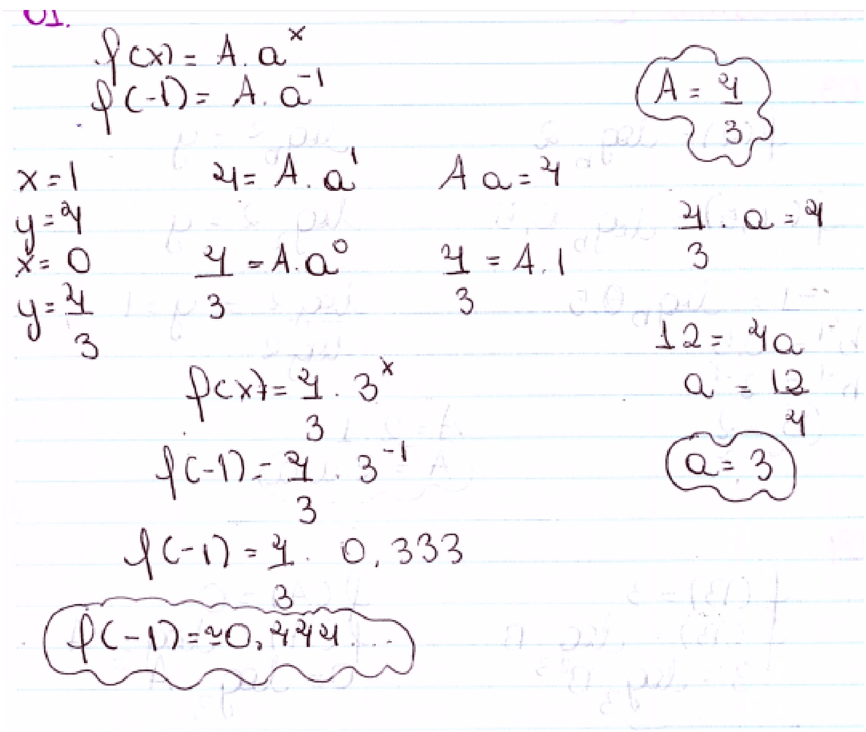
$N = 1 - 0{,}3 - 6 + 12$

$N = 6{,}7 B$

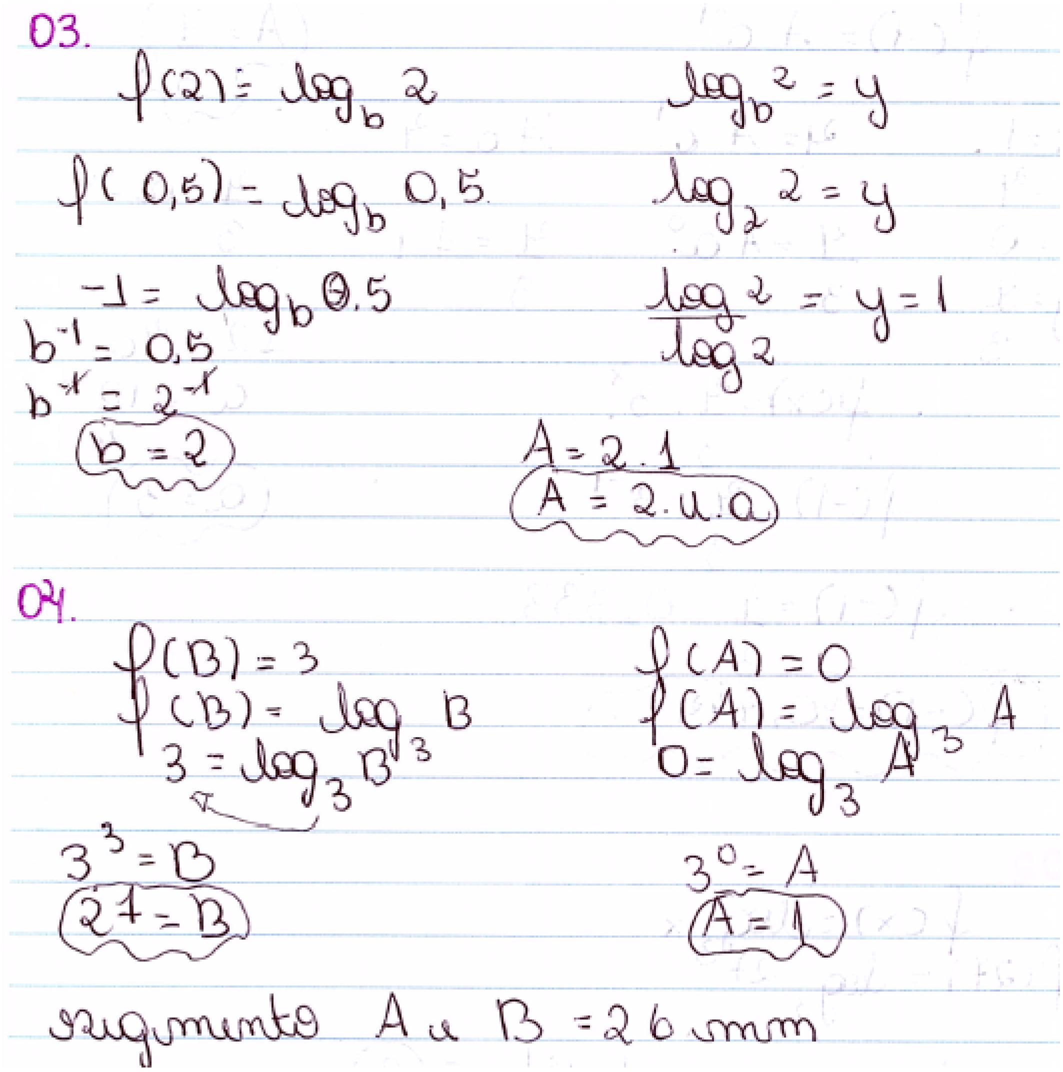
$\cancel{N}67 dB$

13º Encontro

O encontro iniciou com a construção de alguns gráficos de funções logarítmicas em sala de aula, utilizando o quadro. Em seguida os alunos seguiram as técnicas apresentadas para construir manualmente alguns gráficos de funções logarítmicas. E só depois disso os alunos resolveram as atividades propostas no encontro. Neste encontro, tivemos dificuldade para continuar desenvolvendo as atividades nos moldes que trabalhamos a maioria dos encontros, por isso resolvemos trabalhar desta forma. É importante ressaltar que não conseguimos outra maneira e que buscaremos em trabalhos futuros, estudar novas alternativas. Mas, o mais importante de tudo é que conseguimos atingir nossos objetivos. Observemos a solução da atividade 1, apresentada por um dos grupos:



As atividades 2,3 e 4 envolviam também conceitos de Geometria. São problemas de reconhecimento e que julgamos extremamente importante para que o logaritmo não seja visto isoladamente. Seguem as soluções dos problemas 3 e 4 apresentadas pelo mesmo grupo.



5.3 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

Apresentamos nesta seção a categorização e análise das respostas dos alunos ao questionário aplicado no último encontro da sequência de ensino (Apêndice 2).

Quando perguntados se o fato de termos trabalhado o conteúdo de logaritmos com um material diferente do usual, baseado na metodologia do ensino-aprendizagem através da Resolução de Problemas facilitou o aprendizado, todos os alunos, sem exceção responderam que sim. Baseado no que o professor-pesquisador está acostumado a vivenciar quando se trata de trabalhar o conteúdo de logaritmos com o material usual e também pelas observações do diário de campo, é possível dizer que não haveria resultados melhores, talvez o mesmo resultado.

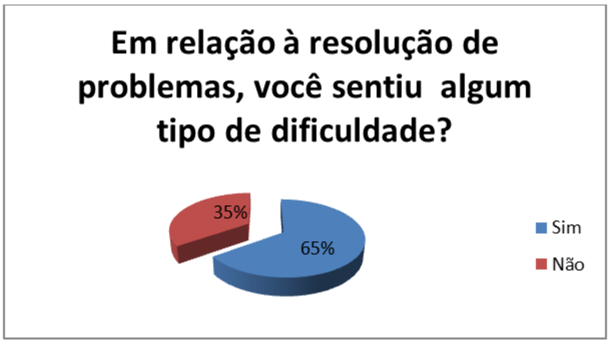
Abaixo, estão registradas as justificativas de alguns alunos, ou seja, porque eles acharam que a metodologia utilizada facilitou o aprendizado. Destacamos que alguns alunos não justificaram, apenas responderam que sim.

Respostas dos alunos: Categorias relativas a questão 3

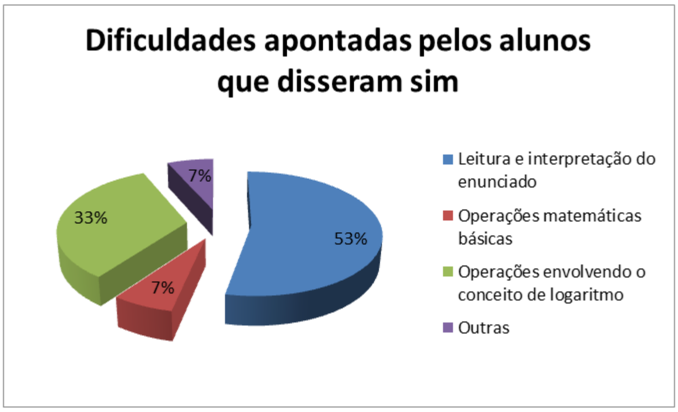
- **Ajudou a desenvolver o raciocínio**
  - Porque ajuda a desenvolver nosso raciocínio e a nos familiarizar com o material;
  - Esses problemas tornaram mais fácil a compreensão dos logaritmos e nos proporcionaram o raciocínio lógico;
- **A prática de exercícios contribui para o aprendizado**
  - Pois praticando mais exercícios, tirei minhas dúvidas;
  - Porque foram vários exercícios para praticar;
  - Pois treinei melhor o conteúdo e tirei minhas dúvidas;
- **Por ser um material atualizado e diferente do usual, motivou a aprendizagem**
  - Pois é diferente do que estamos acostumados;
  - Porque sendo diferente do usual nos motiva mais;
  - Pois fez com que entendêssemos mais facilmente, porque saímos do ritmo normal de aprendizado que seria a apostila;
  - O meio com que é ensinado é diferente do usual e percebi que por este método consegui aprender muito melhor o assunto;
  - A metodologia escolhida é melhor porque não é a mesma usada em livros que estão desatualizados e pouco compreensíveis pelos alunos atuais;
- **Por existirem problemas que mostram as aplicações do logaritmo no cotidiano**
  - Porque resolvemos problemas com a aplicação do logaritmo;
  - Porque através de situações cotidianas fez despertar o interesse em apreender logaritmos e facilitando assim o aprendizado;
  - Pois, através de situações cotidianas fez despertar o interesse em apreender logaritmos e facilitando assim o aprendizado;
  - Os problemas relacionados aos logaritmos deixaram suas aplicações mais próximo de situações cotidianas;
- **Simplesmente por ser um material bem elaborado e fácil de compreender**

- Possibilitou melhor compreensão do assunto;
- Devido melhor a abordagem dos conteúdos, posso dizer que acertou em cheio ao começar desde o início, com calma;
- Esse material esclareceu muito mais minhas dúvidas;
- Sim, sem dúvidas aprendi mais com o material utilizado, esclareceu muito mais minhas dúvidas;

Quando perguntados se sentiram algum tipo de dificuldade em relação à resolução de problemas a maioria dos alunos disseram que sim, apesar de um número significativo ter dito que não, como mostra o gráfico abaixo.



Esses dados mostram o que geralmente acontece nas aulas de matemática. De uma maneira geral, temos um grande número de alunos com pelo menos um tipo de dificuldade, neste caso o número foi até abaixo do esperado, se tratando do conteúdo de logaritmos, já pude vivenciar enquanto professor situações nas quais todos os alunos apresentaram algum tipo de dificuldade. Em relação ao tipo de dificuldade sentida pelos alunos que disseram "sim" temos o gráfico abaixo:

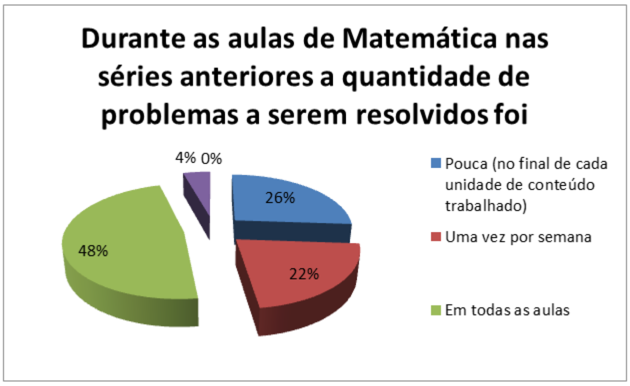


O resultado, com certeza não nos surpreende, pois ler e interpretar o enunciado dos problemas é uma grande dificuldade enfrentada pelos alunos, não só no conteúdo de logaritmos, mas de todos os conteúdos da Matemática e outras áreas exatas, como Física por exemplo.

Também é comum ouvirmos de professores de outras áreas, não exatas, que seus alunos têm muita dificuldade de interpretar. Além disso, uma boa parte dos alunos citou ter dificuldade nas operações envolvendo conceito de logaritmo, também é um número aceitável, uma vez que em outras oportunidades tínhamos alunos que nem se quer sabiam o que era o logaritmo ao término do conteúdo.

Segundo Dante (1988), a dificuldade Interpretação dos problemas pode ser superada se o aluno tiver desde cedo contato com os diferentes tipos de problema. A resolução de problemas deve fazer parte da vida do estudante desde criança. Cada tipo de problema que ele aborda em sua classificação tem papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio matemático e é por isso que todos devem fazer parte da formação do aluno, não se pode predominar os exercícios de algoritmo como vimos em muito livros escritos na década de 90 e inicio dos anos 2000, mas também nem tudo dever ser problemas de aplicação como muitos pregam atualmente. A dificuldade de interpretação pode ser também, reflexo da educação tradicional que tivemos e que sem perceber a reproduzimos.

Com o intuito de compararmos a quantidade de atividades propostas em nossa sequência didática com a quantidade de atividades realizadas habitualmente pedimos aos alunos para fazerem um comparativo, conforme ao gráfico abaixo.



Em seguida perguntamos se eles achavam importante a resolução de problemas durante as aulas de matemática, todos os alunos disseram que sim. No gráfico abaixo representamos os motivos pelos quais os alunos acham que é importante resolver problemas durante as aulas de matemática.

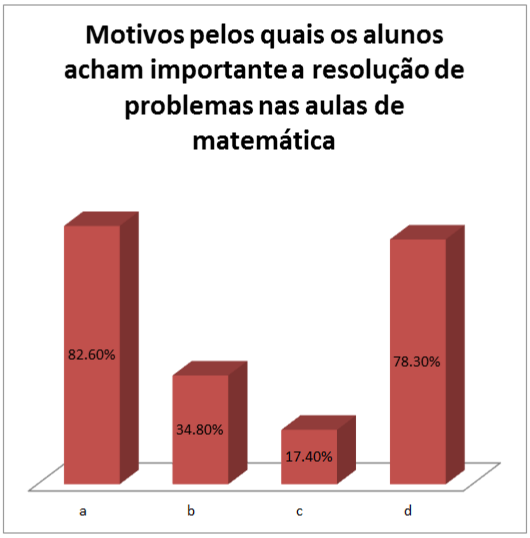
Motivos pelos quais é importante resolver problemas nas aulas de matemática:

a) desenvolvimento do raciocínio lógico e abstrato:

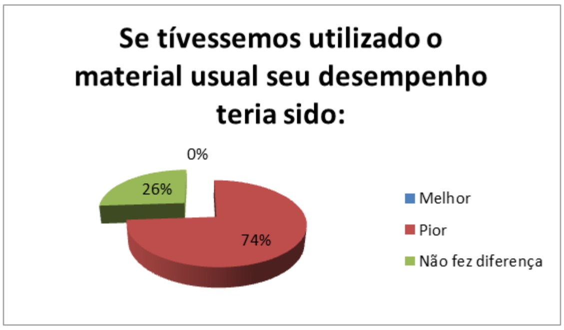
b) permite o contato com situações cotidianas:

c) contribui para o desenvolvimento da cidadania, colaborando para o crescimento intelectual e maturidade pessoal ao lidar com determinadas situações nas quais se tenha que apontar uma solução:

d) motiva a aula e desperta o interesse no conteúdo matemático:



Para finalizar o questionário, perguntamos aos alunos se eles achavam que o desempenho deles teria sido melhor se tivéssemos utilizado o material usual, ninguém disse que teria sido melhor e a grande maioria (74%) disse que teria sido pior, confirmando em partes, que a metodologia facilitou o aprendizado. Digo em partes, pois todos disseram que a metodologia facilitou o aprendizado, mas nesta indagação 26% disseram que não fez diferença. De qualquer maneira, essas informações vem de encontro ao que já foi dito acima, onde afirmei que não acreditava que o desempenho dos alunos que não se saíram tão bem teria sido melhor com o material usual.



5.4 ANÁLISE DOS TESTES

Para que tenhamos uma idéia mais clara dos resultados quantitativos, analisamos as notas obtidas pelos alunos nas duas avaliações, que se encontram no Apêndice 3 deste trabalho, bem como a média geral que cada aluno obteve neste conteúdo.

1ª Avaliação	2ª Avaliação	Média
8,6	7,4	8,0
7,8	6,3	7,1
6,9	4,0	5,5
3,3	5,1	4,2
8,0	4,0	6,0
2,5	7,4	5,0
5,0	6,2	5,6
5,8	5,0	5,4
3,9	6,0	5,0
4,6	6,4	5,5
5,8	7,5	6,7
6,4	7,5	7,0
4,3	6,0	5,2
5,3	5,5	5,4
8,0	7,7	7,9
9,7	9,2	9,5
6,4	7,5	7,0
6,0	7,0	6,5
6,2	6,8	6,5
5,8	6,3	6,1
7,8	6,3	7,1
4,8	6,2	5,5
4,8	7,5	6,7

Média da turma - 1ª Avaliação: 6,07

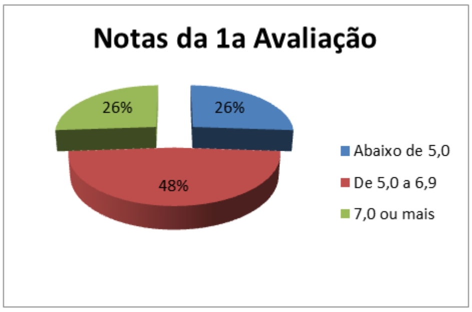
Média da turma - 2ª Avaliação: 6,47

Média geral da turma: 6,3

Comparando com a experiência empírica do professor-pesquisador sobre o conteúdo, é possível considerar a média da turma relativamente boa, apesar de estar abaixo de 7,0, que é a nota necessária para que o aluno seja aprovado sem prestar exame segundo o PPP (Projeto Político Pedagógico) do colégio Intelectus. Em relação às notas obtidas por estes mesmos alunos neste mesmo ano a média ficou acima de vários outros conteúdos, o que é um bom sinal, pois se trata de um conteúdo mais complexo e mais temido. Além disso, não podemos esquecer que nossos trabalhos foram realizados no término do ano e os alunos já apresentavam um cansaço natural, dificultando o andamento das atividades.

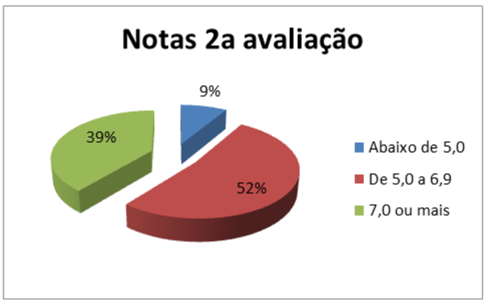
Para melhor representarmos e analisarmos, organizamos os dados em 3 classes, abaixo de 5,0, que consideramos um desempenho ruim, de 5,0 a 6,9 o que consideramos um desempenho mediano e aceitável, uma vez que o tempo para realização dos testes foi um grande vilão e acima de 7,0, que consideramos um bom desempenho.

Notas da 1ª avaliação

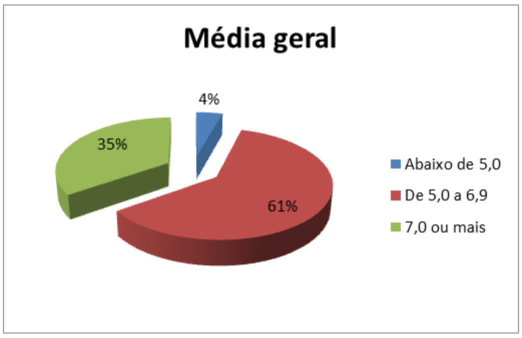


Analisando o gráfico podemos perceber que quase metade da turma teve um desempenho mediano e a mesma quantidade de alunos que tiveram um bom desempenho tiveram um desempenho ruim. Acreditamos que a quantidade de alunos com desempenho ruim foi alta, vários motivos podem explicar, o fato de ser a primeira avaliação pode ser um deles, o tempo da avaliação com certeza foi um motivo, lembrando que este primeiro teste foi composto de 10 questões e os alunos tinham apenas uma hora para responder, ressalta-se que nesse primeiro teste apareceram apenas problemas de algoritmo, ou seja, problemas que não exigiam uma interpretação mais ampla de uma determinada situação. Mas também é importante citar que apesar de não termos muito tempo, alguns alunos conseguiram responder toda a prova, dois deles com bastante êxito.

Na segunda avaliação, o desempenho melhorou, apesar de novamente praticamente metade da turma ter apresentado um desempenho mediano, podemos perceber um aumento significativo na quantidade de alunos com desempenho considerando bom, e apenas 9% obtiveram um desempenho ruim. Esse fato pode ser explicado porque na segunda avaliação os alunos já estavam mais familiarizados com o conteúdo e a metodologia. Observe o gráfico a seguir.



Em relação a primeira avaliação ficamos mais satisfeitos com o desempenho dos alunos nesta segunda avaliação. E analisando as notas das duas avaliações, ou seja, a média geral tivemos uma grande quantidade de alunos com o desempenho mediano, a grande maioria. O que vale ressaltar aqui é que o número de alunos com desempenho ruim ficou abaixo do esperado.



Neste capítulo fizemos uma análise geral da aplicação do nosso trabalho, citamos as observações feitas no diário de campo durante a aplicação da Sequência de Ensino proposta, bem como a análise dos resultados dos testes e do questionário respondido pelos alunos. No próximo capítulo apresentáramos apresentaremos considerações gerais sobre todo o trabalho.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo do presente trabalho era possibilitar aos estudantes do 1º ano do Ensino Médio um aprendizado significativo e motivador sobre o conteúdo Logaritmos através da elaboração, aplicação e análise de uma sequência de ensino baseada na metodologia da Resolução de Problemas. E com isso saber se os alunos envolvidos na pesquisa teriam desenvolvido a) um interesse maior pelo conteúdo e aulas de matemática, b) uma aprendizagem efetiva. Para tanto, a sequência de ensino proposta foi subdividida em 13 momentos, cada um, formado por objetivos diferentes, dentro do conteúdo dos Logaritmos, como definir e aplicar a definição de Logaritmo para resolver problemas, conhecer e aplicar as propriedades dos logaritmos e ainda, Ler, interpretar e resolver situações-problema envolvendo Logaritmos e Função Logarítmica, entre outros. Esses momentos foram constituídos por resolução, correção e discussão de folhas de atividades, as quais continham problemas que eram resolvidos pelos alunos e tinham seus resultados discutidos posteriormente juntamente com o professor, para que enfim fossem elaborados os conceitos e as propriedades do conteúdo em questão.

Em alguns encontros foi necessário utilizar uma adaptação ao processo que estávamos utilizando, com o intuito de verificar também se a metodologia da resolução de problemas promovendo o estudo autônomo. Com o desenvolvimento das atividades sempre buscamos orientar o aluno a elaborar os conceitos e aplicá-los em momentos futuros, ou seja, não os apresentamos de forma pronta e acabada. Mesmo assim, em alguns momentos não conseguimos fazer isso, e julgamos que para alguns conteúdos o melhor era realizar a explicação costumeira, ou seja, apresentado alguns problemas resolvidos como modelo, para que o aluno já tivesse uma ideia, ou um caminho para seguir. Isso foi feito nos seguintes tópicos do conteúdo: Equações e Inequações Logarítmicas, Função Logarítmica e Gráficos de uma Função Logarítmica. Acreditamos que a ansiedade do professor pesquisador pode ter sido uma das razões para que isso ocorresse, pois analisando com um pouco de distanciamento, era perfeitamente possível deixar os alunos discutirem e explorarem as atividades referentes aos conteúdos acima citados, para então realizarmos as discussões e formalização dos conceitos.

Para a aplicação e resolução das atividades os estudantes foram divididos ora em grupos de 3 ou 4 alunos, ora em duplas. Trabalhando dessa forma, percebemos que, ao utilizar a Resolução de Problemas, os estudantes se sentiram mais motivados e confiantes, pois puderam dialogar e trocar ideias para a resolução dos problemas propostos além de apresentarem um bom resultado nos testes aplicados.

No início da aplicação da Sequência de Ensino os alunos tiveram mais dificuldades para entender o processo das aulas, possivelmente por se tratar da primeira vez que estavam trabalhando com esta metodologia. No decorrer dos encontros, os alunos entenderam a ideia da Resolução de Problemas e o trabalho se desenrolou de forma mais tranqüila e dinâmica. Esta evolução ficou evidente quando analisamos e comparamos as notas do primeiro teste com as notas do segundo teste.

Consideramos que a aplicação de nossa Sequência de Ensino ocorreu dentro do previsto, sendo que tudo aconteceu da melhor forma possível e que nossos objetivos foram alcançados, apesar de termos seguido o caminho inverso em algumas situações que achamos necessário. Conforme já foi dito o ensino da matemática através da Resolução de Problemas realmente motiva o aluno a ser um sujeito ativo a fim de que ele possa desenvolver e organizar seu conhecimento, pois se trata de uma metodologia de ensino que coloca professor e aluno como sujeitos ativos no processo de ensino-aprendizagem. Além disso, foi possível observar que, através da resolução de problemas pode-se criar um ambiente de cooperação, de busca, de exploração e descoberta, ficando claro que o mais importante é o processo e não o tempo gasto para resolver o problema ou a resposta final obtida. Deste modo, percebemos que a Sequência de Ensino proposta contribuiu como efeito motivador e também na melhoria do desempenho dos alunos, o que pode ser comprovado pelos resultados nas avaliações, pelas respostas dos alunos ao questionário proposto e também pelas observações do Diário de Campo explicitadas no capítulo anterior.

Durante a elaboração, a aplicação e a análise desta Sequência de Ensino, percebemos que a pesquisa também contribuiu para nosso aprimoramento profissional. Na preparação das atividades foi necessário realizar uma pesquisa sobre a metodologia da Resolução de Problemas e como esta metodologia pode contribuir para a melhoria do ensino da Matemática, além disso, fizemos uma revisão teórica sobre Logaritmos.

Pelas observações do Diário de Campo, podemos perceber que a grande dificuldade apresentada pelos alunos está na interpretação dos enunciados, apesar de alguns alunos também apresentarem dificuldade nos cálculos dos logaritmos. Durante a seleção dos problemas, tomamos o cuidado de selecionar o maior número possível de situações-problemas, ou seja, problemas que mostravam a aplicação do Logaritmo no cotidiano. O intuito era fazer com que o aluno ficasse mais motivado para resolver tais problemas, e apesar das dificuldades citadas, os alunos buscaram resolver todos os problemas propostos, mesmo que com a ajuda do professor.

Como reflexão de nossa prática, concluímos ao final desta pesquisa que não importa o quanto tempo o professor tem de experiência em sala de aula, é sempre importante buscar novas metodologias de ensino, uma vez que a cada geração que muda, novas dificuldades de aprendizado se apresentam, mas ao mesmo tempo novas ferramentas e tecnologias surgem para que possamos ensinar a matemática sempre da melhor maneira possível. Para o professor pesquisador, especificamente, aprender e utilizar uma nova metodologia significou muito, não só por conseguir melhores resultados no trabalho de um conteúdo que o mesmo já trabalhava a um bom tempo, sempre da mesma forma, mas também por perceber que não existe uma única maneira de ensinar Matemática e que se o professor insistir muito tempo em uma determinada metodologia que não dá bons resultados e fechar os olhos para as novas formas de ensinar que estão surgindo, ele pode ficar desatualizado e não mais atender os requisitos de uma educação moderna e de qualidade. E é por tudo isso que sempre se faz necessária a formação continuada do professor e o compromisso de propor e criar sequencias de ensino para outros conteúdos de matemática do primeiro ano do Ensino Médio, verificando na prática de sala de aula que Logaritmos, quase sempre o último conteúdo do ano, possa ser gradativamente trabalhado com a proposta apresentada nesta pesquisa e com isso ser aperfeiçoada cada vez mais, com o intuito único de possibilitar melhorias no ensino e na aprendizagem da Matemática.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. [S.l.: s.n.], 70/2009.

BENCINI, R. **Falta fundamentação didática no ensino da Matemática**. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br>. Acesso em: 01 Jul. 2014.

BEZERRA, M. J. **A Matemática para o Ensino Médio**. [S.l.]: Scipione, 2001.

BICUDO, M. A. V.; KLUBER, T. E. **Pesquisa em Modelagem Matemática no Brasil: A caminho de uma Meta-Compreensão**. [S.l.]: Cadernos de Pesquisa (Fundação Carlos Chagas), 2012.

BURAK, D. **O movimento Educação Matemática e suas Tendências**. [S.l.]: UNICENTRO, 1998.

BURAK, D. I epmem-encontro paranaense da modelagem na educação matemática. In: **Modelagem matemática e a sala de aula**. [s.n.], 2004. Disponível em: <www.dionisioburak.com.br/>. Acesso em: 11 Jun. 2014.

COLOMBO JANECLER APARECIDA AMORIN; LAGOS, M. B. **Problemas, quem não tem?** [S.l.]: Imprepel, 2005.

DANTE, L. R. **Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática**. [S.l.]: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 1998.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 3. ed. [S.l.]: Ática, 2011.

DEFICIêNCIA em leitura prejudica ensino de matemática, afirma pesquisadora. Disponível em: <www.todospelaeducacao.org.br>. Acesso em: 01 Jul. 2014.

DEMO, P. **Educação e Qualidade**. [S.l.]: Papirus, 1996.

EDITOR de Provas. Disponível em: <www.portalpositivo.com.br>. Acesso em: 15 Ago. 2013.

EDUCAçãO, S. d. E. M. e. T. BRASIL. Ministério da. **PCN + Ensino Médio: Linguagens, códigos e suas tecnologias**. [S.l.]: SEMTEC, 2002.

FILHO BENIGNO; SILVA, C. X. B. **Matemática: aula por aula**. [S.l.]: FTD, 2000.

FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa Brasileira em Educação matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 1994.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 2. ed. [S.l.]: Autores Associados, 2009.

FUNDAMENTAL, B. S. de E. **Parâmetros curriculares Nacionais: Matemática e Artes**. [S.l.]: MEC/SEF, 1997.

FUNDAMENTAL, B. S. de E. **Parâmetros curriculares Nacionais: Matemática e Artes**. [S.l.]: MEC/SEF, 2006.

GARCÍA, L. S. **Fundamentos teórico-metodológicos da ciência. Tipos, metodologias e técnicas de pesquisadores**. [s.n.]. Disponível em: <www.inf.ufpr.br/laura/MC-2014-1/MC-Aula-18-03.pdf>. Acesso em: 22 jun. 2014.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; JUNIOR, J. R. G. **Matemática fundamental: 2º grau**. [S.l.]: FTD, 1994.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; JUNIOR, J. R. G. **Matemática fundamental: uma nova abordagem: Ensino Médio**. 2. ed. [S.l.]: FTD, 2011.

GÁLVEZ, C. **A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária**. 2. ed. [S.l.]: Autores Associados, 2009.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**, v. 35, p. 57–63, 1995.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**. 4. ed. [S.l.]: IMPA, 2010.

HEFEZ ABRAMO; FERNANDEZ, C. d. S. **Álgebra Linear**. [S.l.]: SBM, 2012.

KRULIK STEPHEN; REYS, R. E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. [S.l.]: Saraiva, 2005.

LAUREANO ERIVAM LIMA; MEDEIROS, K. M. **Introduzindo o Conceito de Logaritmo com a Calculadora Científica**. Disponível em: <http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2008/2008_10_ELLaureano.pdf>. Acesso em: 20 set. 2013.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 11. ed. [S.l.]: IMPA, 2004.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. [S.l.]: SBM, 2006.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. [S.l.]: SBM, 2006.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 10. ed. [S.l.]: SBM, 2012.

LOPES, C. E. **A Educação Matemática no Ensino Médio**. [S.l.]: UNICSUL, 2011.

LOURENÇO, E. G. **O Geogebra como Ferramenta de Auxílio no Ensino de Logaritmo**. 2013.

MAIOR LUDOVICO; TROBIA, J. **Tendências Metodológicas de Ensino-Aprendizagem em Educação Matemática. Resolução de problemas: Um Caminho**. [S.l.]: Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE, Governo do Paraná, 2010.

NETO, P. L. d. O. C. **Estatística**. 2. ed. [S.l.]: Edgard Blucher, 2002.

NEVES, J. L. **Pesquisa qualitativa: características, usos e possibilidades**. [S.l.]: Caderno de pesquisas em administração, 1996.

OLIVEIRA, A. J. d. **O Estudo dos Logaritmos Através de uma Perspectiva Histórica**. 2005.

ONUCHIC LOURDES DE LA ROSA; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. Educação matemática: pesquisa em movimento**. [S.l.]: Cortez, 2005.

ONUCHIC LOURDES DE LA ROSA; ALLEVATO, N. S. G. **Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas**. [S.l.]: Boletim GEPEM, 2009.

P., P. J. L. e E. M. P. **Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender**. [S.l.]: Artes Médicas, 1988.

PARRA CECILIA; SAIZ, I. **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. [S.l.]: Artmed, 1996.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. [S.l.]: Interciência, 1995.

RIBEIRO, A. et al. **Uma Razão para Logaritmos**. [S.l.: s.n.], 2009.

RODRIGUES, C. **Total que aprende o mínimo de matemática no ensino médio cai para 10%**. Disponível em: <http://ultimosegundo.ig.com.br/educacao/2013-03-06/total-que-aprende-o-minimo-de-matematica-no-ensino-medio-cai-para-10.html>. Acesso em: 01 Jul. 2014.

SCHREINER, I. V. **Função Logaritmica: uma Abordagem a partir da História da Matemática**. [S.l.: s.n.], 2009.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 21. ed. [S.l.]: Cortez, 2000.

SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. Reunião anped, 24. In: **Metodologia da resolução de problemas**. [s.n.], 2001. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/24/tp1.htm#gt19>. Acesso em: 20 jun. 2014.

SOUZA, A. B. **A Resolução de Problemas como Estratégia Didática para o Ensino da Matemática**. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf>. Acesso em: 21 Set. 2013.

TOLEDO, M. **Didática da Matemática: como dois e dois. A construção da matemática**. [S.l.]: FTD, 1997.

APÊNDICE A – RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

Encontro 1

1) a)O aluno deverá perceber que a coluna 2 são os expoentes aos quais devemos elevar o número 2 (base) para

b)$256 = 2^8$ e $512 = 2^9$

c) i)$32 \times 256 = 2^5 \times 2^8 = 2^{13} = 8192$

ii)$128 \times 1024 = 2^7 \times 2^{10} = 2^{17} = 131072$

iii)$131072 \div 16384 = 2^{17} \div 2^{14} = 2^3 = 8$

iv)$65536 \div 4096 = 2^{16} \div 2^{12} = 2^4 = 16$

d)A resposta esperada é que os números da coluna 2 chamam-se logaritmos de base 2 dos números da coluna 1 e representamos da segunte forma:

$$\log_2 1 = 0 \log_2 2 = 1, \log_2 4 = 2, \dots$$

e) i)$\log_2 128 = 7$

ii)9

iii)17

iv)-11

Uma solução

2)$1 = 2^{0\times 2}$

$2 = 2^{0,5\times 2}$

$4 = 2^{1\times 2}$

$8 = 2^{1,5\times 2}$

$\vdots$

$x = 2^{6\times 2} = 2^{12} \therefore x = 4096$

3)Primeiramente o aluno deverá perceber que $10^{0,3} \cong 1,99$; $10^{0,4} \cong 2,51 \ldots$ Daí,

$$\sqrt[5]{1000} = 10^{\frac{3}{5}} = 10^{0,6} = 3,98$$

Encontro 2

1) a) i)$10^{0,301} \cong 2$

ii)$10^{0,477} \cong 3$

iii)$10^{0,699} \cong 5$

iv)$10^{2,699} \cong 500$

b)Os elementos da coluna 2 são expoente aos quais devemos elevar a base 10 para obter os elementos da coluna 1.

c) $*2 \cong 10^{0,301} \Rightarrow 2^3 \cong \left(10^{0,301}\right)^3 \cong 10^{0,903}$

$*2 \cong 10^{0,301} \Rightarrow 2^2 \cong 10^{0,602} \Rightarrow 4 \times 100 \cong 10^{0,602} \times 10^2 \Rightarrow 400 \cong 10^{2,602}$

d) i)$5 \times 5 \times 20 = 10^{0,699} \times 10^{0,699} \times 10^{1,301} = 10^{2,699} = 500$

ii)$20 \times 50 = 10^{1,301} \times 10^{1,699} = 10^3 = 1000$

iii)$200 \div 50 = 10^{2,301} \div 10^{1,699} = 10^{0,602} = 4$

iv)$16 \times 25 = \left(10^{0,301}\right)^4 \times \left(10^{0,699}\right)^2 = 10^{2,602} = 400$

v)$500 \div 25 = 10^{2,699} \div \left(10^{0,699}\right)^2 = 10^{1,301} = 20$

e)Aresposta esperada é que os números da coluna 2 chama-se logaritmos de base 10 doa números da coluna 1 e representamos da seguinte forma:

$$\log 1 = 0, \log 2 \cong 0,301, \log 3 \cong 0,477, \ldots$$

f) i)$\log 30 = 1,477$

ii)$\log 500 = 2,699$

iii)$\log 1 = 0$

iv)$\log \frac{1}{20} = -1,301$

v)$\log 0,001 = \log \frac{1}{1000} = -3$

2)Segunda a tabela, temos:

$0,99998 \times 0,99994 = 0,99999^2 \times 0,99999^6 = 0,99999^8 = 0,99992.$

Resposta :B.

Encontro 3

1) (a)$\log_2 64 = 6$, pois $2^6 = 64$

(b)$\log 0,001 = -3$, pois $10^{-3} = 0,001$

(c)$\log_5 5\sqrt{5} = \log_5 5^{1+\frac{1}{2}} = \log_5 5^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

(d)$\log_4 \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \log_4 2^{\frac{1}{3}-1} = \log_4 2^{-\frac{2}{3}} = x \Rightarrow 4^x = 2^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

(e)$\log_{0,2} 0,04 = 2$, pois $0,2^2 = 0,04$

(f)$\log_{0,04} 0,2 = x \Rightarrow 0,04^x = 0,2 \Rightarrow \left[\left(\frac{4}{100}\right)^x\right] = \left[\frac{2}{10}\right]^2 \Rightarrow \left(\frac{4}{100}\right)^{2x} = \left(\frac{4}{100}\right)^1 = x = \frac{1}{2}$

(g)$\log_9 3\sqrt{27} = x \Rightarrow 9^x = 3 \times 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

(h)$\log_8 \sqrt[3]{16} = x \Rightarrow 8^x = 2^{\frac{4}{3}} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = \frac{4}{9}$

(02)

$$N(t) = x_0 \times \left(-1 + 2^{0,1t}\right)$$

$$63x_0 = x_0\left(-1 + 2^{0,1t}\right)$$

$$63 + 1 = 2^{0,1t}$$

$$64 = 2^{0,1t}$$

$$2^6 = 2^{0,1t} \Rightarrow t = 60$$

Resposta: 60 meses.

(03)Quando o $pH = 1$, temos:

$pH = -\log_{10}[H^+] \Rightarrow 1 = -\log_{10}[H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-1}$

Quando o $pH = 3$, temos:

$pH = -\log_{10}[H^+] \Rightarrow 3 = -\log_{10}[H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-3}$

Resposta: Diminui 100 vezes.

(04)

$$y = \log 1000 - \log_2 4$$

$$y = 3 - 2$$

$$y = 1$$

Resposta: A.

(05)

$$E = \log_2 16 + \log 0,0001 - \log_4 8$$

$$E = 4 + (-4) - \frac{3}{2} \Rightarrow E = -\frac{3}{2}$$

(06)

$$P(t) = 10^5 \times \log_3(t+1)$$

$$P(8) = 10^5 \times \log_3(8+1)$$

$$P(8) = 10^5 \times \log_3 9$$

$$P(8) = 2 \times 10^5$$

(07)$10^x = 16^{10} \Rightarrow 10^{\frac{x}{10}} = 16 \Rightarrow \frac{x}{10} = \log 16 \Rightarrow \frac{x}{10} = 0,301 \times 4 \Rightarrow \frac{x}{10} = 1,204 \Rightarrow x = 12,04$

Resposta: D.

(08)$N(n) = 2 \times N(2) \Rightarrow 300 \times \log_3(1+n) = 2 \times 300 \times \log_3(1+2) \Rightarrow \log_3(1+n) = 2 \Rightarrow 1+n = 9 \Rightarrow n = 8$

Resposta: B.

(09)

$$A = \frac{2 \times \log_4 8 + 3 \times \log_2 4 - 5 \times \log_{\frac{1}{2}} 16}{\log_9 \sqrt{3}}$$

$$A = \frac{2 \times \frac{3}{2} + 3 \times 2 - 5 \times (-4)}{\frac{1}{4}}$$

$$A = (3+6+20) \times 4$$

$$\therefore A = 116$$

Encontro 4

01) (a)$\log_{-2} 32 = x \Rightarrow (-2)^x = 32 \Rightarrow \nexists x$

(b)$\log_0 11 = x \Rightarrow 0^x = 11 \Rightarrow \nexists x$

(c)$\log_1 5 = x \Rightarrow 1^x = 5 \Rightarrow \nexists x$

(d)$\log_3(-9) = x \Rightarrow 3^x = -9 \Rightarrow \nexists$

(e)$\log_7 0 = x \Rightarrow 7^x = 0 \Rightarrow \nexists x$

(2)$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Responta: C.

Encontro 5

(01) (a)$\log 1 = 0$

(b)$\log_2 1 - 0$

(c)$\log_3 1 = 0$

(02)O logaritmo é zero.

(03) (a)1

(b)1

(c)1

(04)O logaritmo é sempre 1.

(05) (a)V

(b)V

(c)V

(d)(F) É um.

(e)(F) É o oposto.

(06)

$$h(i) = \log\left(10^{0,7} \times \sqrt{i}\right)$$
$$h(10) = \log\left(10^{0,7} \times 10^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$h(10) = \log\left(10^{1,2}\right) = 1,2m$$

Resposta: C.

(07) I-$\log_5 70$ é maior que $\log_5 25 = 2$. Logo, a afirmação é falsa.

II-$\log_5 5 = 1$. Falso, a resposta seria $\sqrt[5]{5}$.

III-Verdadeira.

Resposta: C.

Encontro 6:

(01) (a)$\log_2 128 \times 256 = \log_2 2^7 \times 2^8 = \log_2 2^15 = 15$

(b)$\log_2 128 + \log_2 56 = 7 + 8 = 15$

(c)Que $\log_2 128 \times 256 = \log_2 128 + \log_2 256$

(02) I$\rightarrow$ Falsa. O correto seria $\log_a y + \log_a k = \log_a (yk)$.

II$\rightarrow$ Falsa. O correto seria $\log_a y - \log_a k = \log_a ()$.

III$\rightarrow$ Verdadeira.

(03)$a = \begin{cases} 4\log x + \log y = 3 & \text{(I)} \\ \log x - 3\log y = 4 & \text{(II)} \end{cases}$

de(I) : $\log x - 3\log y = 4 \Rightarrow \log x - \log y^3 = 4 \Rightarrow \log \frac{x}{y^3} = 4 \Rightarrow \frac{x}{y^3} = 10^4$
de(II) : $4\log x + \log y = 3 \Rightarrow \log x^4 y = 3 \Rightarrow x^4 y = 10^3$
de(I) e (II) : $x = 10^4 y^3 \Rightarrow \left(10^4 y^3\right) y = 10^3 \Rightarrow 10^{16} y^{12} y = 10^3 \Rightarrow y^{13} = 10^{-13} \Rightarrow y = 10^{-1}$
e $x^4 = 10^4 \Rightarrow x = 10$
$\therefore \frac{x}{y} = \frac{10}{10^{-1}} = 10 \times 10 = 100$

(04)$N(t) = 3 \times 2^{-t} \Rightarrow 0,2 = 2^{-t} \Rightarrow -t = \log_2 0,2 \Rightarrow -t = \log_2 2 - \log_2 10 \Rightarrow -t = 1 - \frac{\log 10}{\log 2} \Rightarrow -t = 1 - \frac{1}{0,3} \Rightarrow -t = 1 - 3,33 \Rightarrow t = 3,33 - 1 \Rightarrow t = 2,33$

Resposta: 2 horas e 20 min.

(05) (a)$(F) \log_b n = b^n$

(b)$(F) \log_b M + N = \log_b M \times \log_b N$

(c)$(V) \log_b M \times N = \log_b M + \log_b N$

(d)$(F) \log_b \frac{M}{N} = \frac{\log_b M}{\log_b N}$

(e)$(F) \log_b (M - N) = \frac{\log_b M}{\log_b N}$

(06)$P(t) = 25 \times 2^t \Rightarrow 625 = 25 \times 2^t \Rightarrow 25 = 2^t \Rightarrow t = \log_2 25 \Rightarrow t = \log_2 5^2 \Rightarrow t = 2 \times \log_2 5 \Rightarrow t = 2 \times 2,32 \Rightarrow t = 4,64$horas

(07)PA: $1 + \log a$; $2 + \log b$, $3 + \log c$

$$2 + \log b - 1 - \log a = 3 + \log c - 2 - \log b$$

$$1 + \log \frac{b}{a} = 1 + \log \frac{c}{b}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = a \times c$$

Logo a, bec formam uma PG

(I)$r = 2 + \log b - 1 - \log a \Rightarrow r = 1 + \log \frac{b}{a}$

(II)$r = 3 + \log c - 2 - \log b \Rightarrow r = 1 + \log \frac{c}{b}$

De I: $r - 1 = \log \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = 10^{r-1}$

De II: $r - 1 = \log \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{c}{b} = 10^{r-1}$

$\therefore$ A razão da PG é 10^{r-1}

Resposta: A.

(08)$f(x) = a \times \log_1 0(x) + b$

(a)$f\left(x^2\right) = a \times \log x^2 + b = 2a \times \log x + b = 2 \times f(x) - b = 2a \times \log(x) + 2b - b = 2a \times \log(x) + b$

Resposta: A.

(09)$h(t) = 50 \times \left(1 - 10^{-kt}\right)$

$h(2) = 10 \Rightarrow 10 = 50 \times \left(1 - 10^{-2k}\right) \Rightarrow 0,2 = 1 - 10^{-2k} \Rightarrow 10^{-2k} = 0,8 \Rightarrow 10^{-2k} = \frac{2^3}{10} \Rightarrow -2k = \log 2^3 - \log 10 \Rightarrow -2k = 3 \times \log 2 - 1 \Rightarrow -2k = 0,90 - 1 \Rightarrow 2k = 0,1 \Rightarrow k = 0,05$

$h(8) = 50 \times \left(1 - 10^{-0,05\times 8}\right) \Rightarrow h(8) = 50 \times \left(1 - 10^{-0,4}\right) \Rightarrow h(8) = 50 \times (1 - 0,398) \Rightarrow h(8) \cong 30m$

(10)$5 = 10^x \Rightarrow x = \log 5 \Rightarrow x = \log 10 - \log 2 \Rightarrow x = 1 - 0,30 \Rightarrow x - 0,7$

(11)

$$\begin{cases} x + y = 502 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 502 \\ \log xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 502 \\ xy = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \qquad x = 500 \\ \quad \text{ou} \\ y = 500 \qquad y = 2 \end{cases}$$

Encontro 7:

(01) (a)$\log_2 16 = 4$

(b)$\log = 0,301$ e $\log 16 = 1,204$

(c)$\frac{1,204}{0,301} = 4$

(d)$\log_2 16 = \frac{\log 16}{\log 2}$

(2)$\log 57 = \frac{\log 7}{\log 5} = \frac{0,84}{0,7} = 1,2$

(3)$\log_{1,5} 135 = \frac{\log 135}{\log \frac{3}{2}} = \frac{\log\left(3^3 \times 5\right)}{\log 3 - \log 2} = \frac{3 \times \log 3 + \log 5}{\log 3 - \log 2} = \frac{3b + 1 - a}{b - a} = \frac{3b - a + 1}{b - a}$

(4)$M = \log_6 16 = \frac{\log 2^4}{\log 6} = \frac{4 \times \log 2}{\log 2 + \log 3} = \frac{4a}{a + b}$

(5)$N(t) = 20 \times A^t$

$6400 = 20 \times 100^t \Rightarrow 320 = 100^t \Rightarrow t = \log_{100} 320 \Rightarrow t = \frac{\log 320}{\log 100} \Rightarrow t = \frac{\log\left(2^5 \times 10\right)}{\log 100} = \frac{5 \times \log 2 + \log 10}{\log 100} \Rightarrow t = \frac{5 \times 0,3 + 1}{2} = 1,25\text{anos}$

(6)$n(t) = n(0) \times (0,8)^t$

$\frac{n(0)}{2} = n(0) \times 0,8^t \Rightarrow t = \log_{0,8} \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{8}{10}} \Rightarrow t = \frac{\log 1 - \log 2}{3 \times \log 2 - \log 10} \Rightarrow t \cong \frac{0-0,3}{0,9-1} \Rightarrow t \cong \frac{-0,3}{-0,1} \Rightarrow t \cong 3anos.$

Resposta: E.

(7)$P(t) = P(0) \times 2^t$, com t em anos. Logo, $20P(0) = P(0) \times 2^t \Rightarrow 20 = 2^t \Rightarrow t = \log_2 20 \Rightarrow t = \frac{\log 20}{\log 2} \Rightarrow t = \frac{\log 10 + \log 2}{\log 2} = \frac{1+0,3}{0,3}$
$\therefore t = 4,333\ldots$ ou $t = 4$ anos e 4 meses.

(8)$f(t) = f(0) = 1500$ e $f(10) = 750 \Rightarrow 1500 = k \times a^0$ e $750 = k \times a^1 0$. Agora, $1500 = k \times a^0 \Rightarrow k = 1500$, daí $750 = k \times a^1 0 \Rightarrow 750 = 1500 \times a^1 0 \Rightarrow a^1 0 = 0,5 \Rightarrow a = 0,5^{\frac{1}{10}}$.

Logo, para chegar a 100 indivíduos:
$f(t) = 100 \Rightarrow k \times a^t = 100 \Rightarrow 1500 \times 0,5^{\frac{t}{100}} = 100 \Rightarrow \frac{t}{100} = \log_{0,5} \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{t}{100} = \frac{\log \frac{1}{15}}{\log 0,5} \Rightarrow \frac{t}{100} = \frac{\log 1 - \log 15}{\log 1 - \log 2} \Rightarrow \frac{t}{100} = \frac{\log 1 - \log 3 - \log 5}{\log 1 - \log 2} \Rightarrow \frac{t}{100} = \frac{0-0,47-0,70}{0-0,30}$
$\therefore t = 390$anos.

(9)A produção é dada por $P(t) = P(0) \times 1,08^t$ com $t = 0$ representando 1987. Logo, $4P(0) = P(0) \times 1,08^t \Rightarrow t = \log_{1,08} 4 \Rightarrow t = \frac{\log 4}{\log 1,08} \Rightarrow t = \frac{2 \times \log 2}{\log 108 - \log 100} \Rightarrow t = \frac{2 \times \log 2}{2 \times \log 2 + 3 \times \log 3 - \log 100} \Rightarrow t = \frac{2 \times 0,30}{2 \times 0,30 + 3 \times 0,48 - 2} \Rightarrow t = \frac{0,60}{0,60 + 1,44 - 2} \Rightarrow t = \frac{0,60}{0,04} \Rightarrow t = 15$anos.

$\therefore$ O ano é 2002.

(10)$\log 28 = \log(4 \times 7) = 2 \times \log 2 + \log 7$. Logo, $\log 28 = 2 \times 0,301 + 0,845 = 1,447$

(11)$X(t) = 100 \times (1,10)^t \Rightarrow 200 = 100 \times (1,10)^t \Rightarrow 2 = (1,10)^t \Rightarrow t = \log_{1,10} 2 \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,10} \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 11 - \log 10} \Rightarrow t = \frac{0,3010}{1,0414-1} \Rightarrow t = \frac{0,3010}{0,0414} \Rightarrow t \cong 7,3meses$

Encontro 8:

(1)A função número de bactérias é dada por: $N(t) = 1000 + 1000 \times 2^{\frac{t-48}{8}}$. Assim,

(a)$t = 6\text{dias} \Rightarrow t = 6 \times 24 = 144$
$N(144) = 100 + 1000 \times 2^{\frac{144-48}{8}} = 4097000$ bactérias.

(b)$P = 1000 + 1000 \times 2^{\frac{t-48}{8}}$

(c)$30000 = 1000 + 1000 \times 2^{\frac{t-48}{8}} \Rightarrow 29000 = 1000 \times 2^{\frac{t-48}{8}} \Rightarrow 29 = 2^{\frac{t-48}{8}} \Rightarrow \frac{t-48}{8} = \log_2 29 \Rightarrow \frac{t-48}{8} = \frac{log29}{log2} \Rightarrow \frac{t-48}{8} \cong 4,86$
$\therefore t \cong 87$ horas.

(2)$2^x = 1,6 \Rightarrow x = \log 21,6 \Rightarrow x = \frac{\log\frac{16}{10}}{\log 2} \Rightarrow x = \frac{\log 16 - \log 10}{\log 2} \Rightarrow x = \frac{4\times\log 2 - 1}{\log 2} \Rightarrow x = \frac{4\times 0{,}30-1}{0{,}30} \Rightarrow$
$x = \frac{0{,}20}{0{,}30} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$
$\therefore$ A nota corresponde a $2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{8}{12}}$, ou seja, a nota SOL #.

(3)$\log 18 = \log 2\times 3^2 = \log 2 + 3\log 3 = 0,3 + 1,4 = 1,5$

(4)$\log 100 + \log 0,1 = 2 - 1 = 1$
Respota: B.

(5)

(a)$\log 120 = \log(2^3\times 3\times 5) = \log 2^3 + \log 3 + \log 5 = 3\times\log 2 + \log 3 + \log 10 - \log 2 =$
$3a + b + 1 - a = 2a + b + 1$

(b)$\log 72 = \log(2^3\times 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 = 3\times\log 2 + 2\times\log 3 = 3a + 2b$

(6)$8^x = 9 \Rightarrow x = \log 89 \Rightarrow x = \frac{\log 9}{\log 8} \Rightarrow x = \frac{\log 3^2}{\log 2^3} \Rightarrow x = \frac{2\log 3}{3\log 2} \Rightarrow x = \frac{2b}{3a}$

(7)$Q(t) = Q_0\times(0,64)^t$

(a)$Q(1) = Q_0(0,64)^1 \Rightarrow Q(1) = 0,64Q_0$.
Após 1 hora são eliminados 36% da droga.

(b)$\frac{Q(0)}{2} = Q_0(0,64)^t \Rightarrow t = \log_{0,64} 0,5 \Rightarrow t = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}64} \Rightarrow t = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 64 - \log 100} \Rightarrow t = \frac{0-0{,}30}{1{,}80-2} \Rightarrow$
$1,5$horas.

9)Sendo $10^{0,3} = 2$ e $10^0,48 = 3$ devemos encontrar x, tal que $3^x = 12$. Logo,
$x = \log_3 12 \Rightarrow x = \frac{\log 12}{\log 3} \Rightarrow x = \frac{\log(2^2\times 3)}{\log 3} \Rightarrow x = \frac{2\log 2 + \log 3}{\log 3} \Rightarrow x = \frac{0{,}60+0{,}48}{0{,}48}$
$\therefore x = 2,25$

(10)$N(T) = 1000\times(10^{0,159T}) \Rightarrow 3000 = 1000\times(10^{0,159T}) \Rightarrow 3 = 10^{0,159T} \Rightarrow 0,159T =$
$\log 3 \Rightarrow 0,159T = 0,477 \Rightarrow T = 3$horas.

Encontro 9:

(1)$Q(t) = A\times(0,975)^t \Rightarrow \frac{A}{2} = A\times(0,975)^t \Rightarrow t = \log_{0,975} 0,5 \Rightarrow t = \frac{\log e 0{,}5}{\log e 0{,}975} \Rightarrow t = \frac{\ln 1 - \ln 2}{\ln 0{,}975} \Rightarrow$
$t = \frac{0-0{,}693}{-0{,}025} \Rightarrow t = 27,72$anos.

(2)$Q(t) = 0,84Q_0$
$Q(t) = Q_0\times e^{kt}$ com $Q(5730) = \frac{Q_0}{2}\frac{Q_0}{2} = Q_0\times e^{5730k} \Rightarrow 0,5 = e^{5730k} \Rightarrow k = \frac{\log_e 0{,}5}{5730} \Rightarrow k =$
$\frac{\ln 0{,}5}{5730} \Rightarrow k = \frac{-0{,}69}{5730}$
$0,84Q_0 = Q_0 e^{\frac{-0{,}69t}{5730}} \Rightarrow \frac{-0{,}69t}{5730} = \ln 0,84 \Rightarrow \frac{-0{,}69t}{5730} = -0,17 \Rightarrow t = \frac{0{,}17\times 5730}{0{,}69}$
$\therefore t \cong 1412$ anos.
Resposta: D.

(3)$A(t) = 25e^{ct} \Rightarrow A(3) = 10 \Rightarrow 10 = 25e^{3c} \Rightarrow \frac{10}{25} = e^{3c} \Rightarrow 3c = \ln(\frac{10}{25}) \Rightarrow 3c = \ln(\frac{2}{5}) \Rightarrow$
$3c = \ln 2 - \ln 5 \Rightarrow c = \frac{\ln 2 - \ln 5}{3}(1)$
$5 = 25e^{ct} = \frac{1}{5} = e^{ct} \Rightarrow ct = \ln 0,2 \Rightarrow \ln 2 - \ln 10$ substituindo (1) $\Rightarrow t = \frac{\ln 2 - \ln 10}{\ln 2 - \ln 5} \times 3 \Rightarrow$
$t = 3 \times \frac{\ln 2 - \ln 2 - \ln 5}{\ln 2 - \ln 5} \Rightarrow t = \frac{3 - 1,61}{0,69 - 1,61} \Rightarrow t = \frac{-4,83}{-0,92} \Rightarrow t = 5,25$

(4)$d(t) = 50 \times (1 - e^{-0,1t}) \Rightarrow 25 = 50 \times (1 - e^{-0,1t}) \Rightarrow 0,5 = 1 - e^{-0,1t}) \Rightarrow e^{-0,1t} = 0,5 \Rightarrow$
$-0,1t = \ln 0,5 \Rightarrow 0,1t = \ln 1 - \ln 2 \Rightarrow \frac{-t}{10} = 0 - 0,7 \Rightarrow \frac{-t}{10} = -0,7 \Rightarrow t = 7s$
Resposta: C

(5)$P(t) = 40e^{0,02t} \Rightarrow 200 = 40e^{0,02t} \Rightarrow 5 = e^{0,02t} \Rightarrow 0,02t = \ln 5 \Rightarrow 0,02t = 1,6 \Rightarrow t = \frac{1,60}{0,02} \Rightarrow$
$t = 80$
$\therefore$ Irá ultrapassar 200 milhões de habitantes em 2020.

(6)$P(t) = P_0 e^{0,013t} \Rightarrow 2P_0 = P_0 e^{0,013t} \Rightarrow 0,013t = \ln 2 \Rightarrow 0,013t = 0,693 \Rightarrow t = \frac{0,693}{0,013}$
$\therefore t = 53,3$ anos.

Encontro 10:

(1)$\log x = 3 + \log 3 - \log 2 - 2 \times \log 5$
$\log x = \log 10^3 + \log 3 - \log 2 - \log 5^2$
$\log x = \log \frac{(10^3 \times 3)}{(2 \times 5^2)}$
$\log x = \log(\frac{3000}{50})$
$x = 60$

(2)$\log_3 x + \log_3 x^2 + \ldots + \log_3 x49 + \log_3 x^5 0 = 2550$
$\Rightarrow \log_3(x \times x^2 \times \ldots x^4 9 \times x^5 0) = 2550$
$\Rightarrow x^{(\frac{1+50}{2}) \times 50} = 3^{2550}$
$x^{1275} = (3^2)^{1275}$
$\Rightarrow x = 9$

(3)$1 + \log_2(x^2 - 6x + 9) = \log_2(x - 2)$
$\Rightarrow \log_2 2 + \log_2(x^2 - 6x + 9) = \log_2(x - 2)$
$\Rightarrow 2 \times (x^2 - 6x + 9) = x - 2$
$\Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = x - 2$
$\Rightarrow 2x^2 - 13x + 20 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 169 - 4 \times 2 \times 20 \Rightarrow \Delta = 9$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{13 \pm 3}{4} \Rightarrow x' = 4x'' = \frac{5}{2}$

(4)$\log_2(48 - 2^{x+1}) = x$
$\Rightarrow 2^x = 48 - 2^{x+1} \Rightarrow 2^x + 2 \times 2^x = 48$

$\Rightarrow 3\times 2^x = 48 \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow x = 4$

(5)Dados:

$$\begin{cases} m(t) = m_0 \times a^t \\ m(14000) = 0,2m_0 \end{cases}$$

$m(14000) = 0,2m_0 \Rightarrow 0,2m_0 = m_0a^{14000} \Rightarrow 0,2 = a^{14000} \Rightarrow a = 0,2^{\frac{1}{14000}}$

(a)$m(t) = 0,5m_0 \Rightarrow 0,5m_0 = m_0 \times a^t \Rightarrow 0,5 = 0,2^{\frac{t}{14000}} \Rightarrow \frac{t}{14000} = \log_{0,2} 0,5 \Rightarrow \frac{t}{14000} = \frac{\log 0,5}{\log 0,2} \Rightarrow \frac{t}{14000} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 2 - \log 10} \Rightarrow \frac{t}{14000} = \frac{-0,3}{-0,7} \Rightarrow t = \frac{0,3\times 14000}{7} \Rightarrow t = 6000$anos.

(b)$m(t) = m_0 \times 0,2^{\frac{t}{14000}} \Rightarrow m(100000) = m_0 \times 0,2^{\frac{100000}{14000}} \cong 0,00001m_0$ Portanto, $0,0001\%$ de m_0

(6)$\log_4(x-2) + \log_4(x+3) = \log_4 50$

(*)Condição inicial: $x > 2$

$\log_4(x-2)(x+3) = \log_4 50 \Rightarrow x^2+x-6 = 50 \Rightarrow x^2+x-56 = 0 \Rightarrow x' = 7x'' = -8$, mas $x = -8$ não satisfaz (*).

(7)$T(t) = 20 + ke^{ct}$

$T(0) = 20 + ke^{c\times 0} \Rightarrow 200 = 20 + k \Rightarrow k = 180$

$T(t) = 20 + 180e^{ct} \Rightarrow 110 = 20 + 180e^{10c} \Rightarrow 90 = 180e^{10c} \Rightarrow 0,5 = e^{10c} \Rightarrow 10c = \log_e 0,5 \Rightarrow 10c = -0,693 \Rightarrow c = -0,0693$

(8)Sejam $2 - \log_x 2 - \log_2 x = 0$ e $k = \log_2 x$, temos:

$2 - \frac{1}{k} - k = 0 \Rightarrow 2 = \frac{1}{k} + k \Rightarrow 2k = 1 + k^2 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$

Assim, $\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^1 \Rightarrow x = 2$

(9)$\log(x-1) + \log(x+2) = 0$

Condição de existência: $x > 1$ e $\log(x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x' = 1$ou $x'' = -2$, logo a equação não possui solução,pois x' e x'' não satisfazzem a condição inicial.

Resposta: D.

(10)$\log x + \log(x+1) - \log 6 = 0$

Condição inicial: $x > 0e \log(\frac{x\times(x+1)}{6}) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+x}{6} = 1 \Rightarrow x^2+x-6 = 0 \Rightarrow x' = -3x'' = 2$

$\therefore S = 2$

(11)$L(t) = 20 + 5\log_3(x+3) \Rightarrow 40 = 20 + 5\log_3(x+3) \Rightarrow 20 = 5\log_3(x+3) \Rightarrow 4 = \log_3(x+3) \Rightarrow 81 = x+3 \Rightarrow x = 78$ milhões de dólares.

(12)$\log 3^x + \log(1+3^x) = \log 12 \Rightarrow \log 3^x \times (1+3^x) = \log 12 \Rightarrow 3^x + (3^x)^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3^x = -4$ o que é impossível e $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$\therefore S = 1$

Encontro 11

(1)$250000 \times 1,2^t > 500000, t \in \mathbb{N} \Rightarrow 1,2^t > 2 \Rightarrow t > \log_{1,2} 2 \Rightarrow t > \frac{log2}{\log 12 - \log 10} \Rightarrow$
$t > \frac{0,30}{\log 2 + \log 2 + \log 3 - 1} \Rightarrow t > \frac{0,30}{0,08} \Rightarrow t > 3,75$
$\therefore t = 4$ anos ou em 2017.

(2)$R = 120 + 10\log I_s \Rightarrow 120 + 10\log I_s < 115 \Rightarrow 10\log I_s < -5 \Rightarrow \log I_s < -0,5 \Rightarrow I_s < 10^{-0,5}(i)$

$95 = 120 + 10\log I_s \Rightarrow -25 = 10\log I_s \Rightarrow -2,5 = \log I_s \Rightarrow I_s = 10^{-2,5} \Rightarrow 10^{-0,5} \div 10^{-2,5} = 10^2 = 100$caixas.

(3)$\frac{\log x}{1-x^2} < 0$

Condição inicial: $x > 0$ e $\log x < 0$

$\Rightarrow x < 10^0 \Rightarrow x < 1$

$\therefore S = x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1$

(4)$500 \times 1,05 > 1000, t \in \mathbb{N} \Rightarrow 1,05^t > 2 \Rightarrow t > \log_{1,05} 2 \Rightarrow t > \frac{\log 2}{\log 1,05} \Rightarrow t > \frac{0,301}{0,021} \Rightarrow t > 14,333\ldots$

$\therefore t = 15$meses.

(5)$I = I_0 \times 0,8^n, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow I_0 \times 0,8^n < 0,1I_0 \Rightarrow 0,8^n < 0,1 \Rightarrow n < \log_{0,8} 0,1 \Rightarrow n > \frac{\log 0,1}{\log 0,8} \Rightarrow n > \frac{\log 1 - \log 10}{3\log 2 - \log 10} \Rightarrow$
$n > \frac{0-1}{0,903-1} \Rightarrow n > 10,3$
$\therefore n = 11$ no mínimo.

Resposta: C.

(6)$q(t) = 250 \times 0,6^t \Rightarrow 250 \times 0,6^t < 50 \Rightarrow 0,6^t < 0,2 \Rightarrow t > \log_{0,6} 0,2 \Rightarrow t = \frac{\ln 1 - \ln 5}{\ln 3 - \ln 5} \Rightarrow t > \frac{0-1,6}{1,1-1,6} \Rightarrow t > \frac{1,6}{0,5} \Rightarrow t > 3,2$ horas.

Encontro 12

(1)$h(t) = 1,5 + \log_3(t+1) \Rightarrow 3,5 = 1,5 + \log_3(t+1) \Rightarrow 2 = \log_3(t+1) \Rightarrow 3^2 = t+1 \Rightarrow t = 8$anos.

(2)$f(x) = \log_{(4-x)}(x^2 - 4x - 21)$

Pelas condições de existência, temos:

(i)$4 - x > 1 \Rightarrow -x > 3 \Rightarrow x < 3$ ou $0 < 4 - x < 1 \Rightarrow -4 < -x < -3 \Rightarrow 3 < x < 4$. Logo,

$x \in \mathbb{R}; 3 < x < 4 ou x < 3$

(ii)$x^2 - 4x - 21 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}; x < -3 ou x > 7$

Fazendo a interseção de (i) e (ii):

$\therefore D = x \in \mathbb{R}; x < -3$

(3)$M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log M_0 \Rightarrow 7,3 = -10,7 + \frac{2}{3}\log M_0 \Rightarrow 18 = \frac{2}{3}\log M_0 \Rightarrow 54 = 2\log M_0 \Rightarrow 27 = \log M_0 \Rightarrow M_0 = 10^{27}$

Resposta: E.

(4)$R = \log(\frac{I}{I_0}) \Rightarrow R = \log\frac{32000I_0}{I_0} \Rightarrow R = \log 32000 \Rightarrow R = \log(2^5 \times 1000 \Rightarrow R = \log 2^5 + \log 1000) \Rightarrow 5 \times 0,30 + 3 \Rightarrow 4,5$

Resposta: D.

(5)$P_H = -\log[H^+] \Rightarrow 8,05 = -\log E_1$ e $7,6 = -\log E_2 \Rightarrow E_1 = 10^{-8,05}$ e $E_2 = 10^{-7,6} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{-8,05}}{10^{-7,6}} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{-0,45} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{10^{0,45}} = \frac{1}{3}$

Resposta: A.

(6)$NIS = \log(\frac{IS}{IR})^{10} \Rightarrow 60 = \log(\frac{IS}{IR})^{10} \Rightarrow 60 = 10 \times \log(\frac{IS}{IR}) \Rightarrow 6 = \log IS - \log IR(*)$

Com mais quatro aparelhos:

$NIS = \log(\frac{5IS}{IR})^{10} \Rightarrow \frac{NIS}{10} = \log 5IS - \log IR \Rightarrow \frac{NIS}{10} = \log 5 + \log IS - \log IR \Rightarrow \frac{NIS}{10} = 0,699 + 6 \Rightarrow NIS \cong 67dB$

Resposta: E.

Encontro 13

(1)Dados:

$$\begin{cases} f(x) = A \times a^x f(0) = \frac{4}{3} f(1) = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{4}{3} = A 4 = A \times a \end{cases}$$

$\Rightarrow 4 = \frac{4}{3} \times a \Rightarrow a = 3$

Logo $f(x) = \frac{4}{3} \times 3^x \Rightarrow f(-1) = \frac{4}{3} \times 3^{-1} \Rightarrow f(-1) = \frac{4}{9}$

$(2) f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3) = \log_3 3 \Rightarrow f(3) = 1 \Rightarrow f(27) = \log_3 27 \Rightarrow f(27 = 3)$

$A = \frac{b \times h}{2} \Rightarrow A = \frac{(27-3)\times(f(27)-f(3))}{2} \Rightarrow A = \frac{24\times 2}{2} \Rightarrow A = 24u.a.$

$(3) f(0,5) = -1 \Rightarrow -1 = \log_b 0,5 \Rightarrow b^{-1} = 2^{-1} \Rightarrow b = 2$ e $f(2) = \log_b 2 = 1$

$\therefore A = 2 \times 1 \Rightarrow A = 2u.a.$

(4)(i) $f(A) = 0 \Rightarrow 0 = \log_3 A \Rightarrow A = 1$

(ii)$f(B) = 3 \Rightarrow 3 = \log_3 B \Rightarrow B = 27$

$\therefore |AB| = 27 - 1 = 26$

$(5) A = (3-2) \times (f(3) - f(2)) + (4-3) \times (f(4) - f(3)) \Rightarrow A = 1 \times (\log 3 - \log 2) + 1 \times (\log 4 - \log 3) \Rightarrow A = \log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 \Rightarrow A = 2\log 2 - \log 2 \Rightarrow \log 2 \cong 0,301$

$(6) f(x) = c \times \log_b x; f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(3) = 3 \Rightarrow 3 = c \times \log_b 3 \Rightarrow 3 = \log_b 3^c \Rightarrow 3^c = b^3$

$f(\sqrt{3}x) = c \times \log_b x^{\frac{1}{3}} = \frac{c}{3} \times \log_b x = \frac{1}{\log_b 3} \times \log_b x = \log_3 x$

Resposta: D.

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Pró-Reitoria de Graduação e Educação Profissional
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós Graduação
Mestrado Profissional em Matemática

Curso: Mestrado Profissional em Matemática

Projeto de Pesquisa: Logaritmos para o Ensino Médio: O Ensino dos Logaritmos através da Resolução de Problemas

Pesquisador: Marciano Forest

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Estamos executando uma pesquisa vinculada ao Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da UTFPR, que tem por objetivo analisar se as Sequência Didêtica elaborada e proposta pelo pesquisador, afetou de alguma maneira o ensino de Logaritmos.

Sua colaboração na pesquisa será muito importante. Por isso, pedimos a sua participação na mesma através do fornecimento de informações através do questionário. As informações que você prestar serão utilizadas apenas para as finalidades da pesquisa e não serão objeto de avaliação pessoal no sentido de verificação de acerto ou erro.

A participação na pesquisa não envolve risco físico, tampouco constrangimento de qualquer natureza. A sua identidade será preservada em todas as fases do projeto e você terá pleno direito de censura sobre os conteúdos que fornecer.

TERMO DE CONSENTIMENTO

Eu, , declaro que fui devidamente esclarecido/a sobre o projeto de pesquisa e concordo em participar da mesma fornecendo informações através do questionário e da participação nos encontros da Sequência de ensino.

Local, data e assinatura:

1- Sexo:
( ) Masculino ( ) Feminino

2 - Idade:

3 - O conteúdo de logaritmos foi trabalhado com um material diferente do usual, baseado na metodologia do ensino-aprendizagem através da Resolução de Problemas. Em sua opinião a utilização dessa metodologia facilitou seu aprendizado?
( ) sim
( ) não
( ) parcialmente
Justifique a opção escolhida:

4 - Em relação à resolução de problemas, você sentiu algum tipo de dificuldade? ( ) sim ( ) não

5 - Caso tenha respondido sim na questão anterior, aponte quais pontos foram considerados de dificuldade:
a) ( ) leitura e interpretação do enunciado;
b) ( ) operações matemáticas básicas;
c) ( ) operações envolvendo o conceito de logaritmo;
d) ( ) Outras

6 - Durante as aulas de Matemática nas séries anteriores a quantidade de problemas a serem resolvidos foi:
a) ( ) Pouca (no final de cada unidade de conteúdo trabalhado);
b) ( ) Uma vez por semana;
c) ( ) Em todas as aulas;
d) ( ) raramente
e) ( ) nunca

7 - Você acha que resolver problemas nas aulas de matemática é importante?
a) ( ) sim b) ( ) não

8 - Se sim, aponte os motivos:
a) ( ) desenvolvimento do raciocínio lógico e abstrato;
b) ( ) permite o contato com situações cotidianas;
c) ( )contribui para o desenvolvimento da cidadania, colaborando para o crescimento intelectual e maturidade pessoal ao lidar com determinadas situações nas quais se tenha que apontar uma solução;

d) ( ) motiva a aula e desperta o interesse no conteúdo matemático;

e) outros:

9 - Você acha que se tivéssemos utilizado o material usual, seu desempenho teria sido?

a) ( ) melhor

b) ( ) pior

c) ( ) não fez diferença

APÊNDICE C – TESTES

Colégio Intelectus	Data: 26/11/2013	4º Bimestre	Série: 1ª série
DISCIPLINA: Matemática (Logaritmos)		PROFESSOR: Marciano Forest	
Todos os cálculos devem estar contidos na prova; Não é permitido o uso de calculadoras;		Aluno (a):	Nota:

01)Calcule o valor dos seguintes logaritmos:

a)$\log_{16} 64 =$

b)$\log_3 81 =$

c)$\log_5 \frac{1}{125} =$

d)$\log_2 512 =$

02)Calcule o valor da incógnita "N"em cada exercício, aplicando a definição de logaritmo:

a)$\log_5 N = 3$

b)$\log_2 N = 8$

c)$\log_2 N = -9$

d)$\log_{\sqrt{3}} N = 2$

03)Utilizando as propriedades dos logaritmos, simplifique:
$\log_a b \times \log_b a^2$

04)Dados $\log 2 = 0,3$, $\log 3 = 0,48$ e $\log 5 = 0,7$. Resolva as equações.

a)$3^x = 5$

b)$2^x = 3$

05)PUC-SP- Se $x + y = 20$ e $x - y = 5$, então $\log(x^2 - y^2)$ é igual a:

a)100

b)2

c)25

d)12,5

e)1000

06)Sejam a, b e c números reais positivos. Sabendo-se que o valor de b é 243, é correto afirmar que $\log_3\left(\frac{ab}{c}\right) + \log_3\left(\frac{bc}{a}\right)$ é igual a

( ) A 20

( ) B 15

( ) C 12

( ) D 10

07)Determine o valor da expressão
$E = \log_2 16 + \log 0,0001 - \log_2 8$

08)Considerando $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, determine os logaritmos a seguir em função de a e b:

a)$\log 72$:

b)$\log 120$:

09)Considerando que $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$. Calcule o valor de:

a)$\log 144$:

b)$\log 50$:

10)Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, então o valor de x em $8^x = 9$ é:

( ) A $\frac{2b}{3a}$

( ) B $\frac{2a}{3b}$

( ) C $\frac{b}{a}$

( ) D $\frac{a}{b}$

( ) E $\frac{3b}{2a}$

Colégio Intelectus	Data: 05/12/2013	4º Bimestre	Série: 1ª série
DISCIPLINA: Matemática (Logaritmos)		PROFESSOR: Marciano Forest	
Todos os cálculos devem estar contidos na prova; Cada questão vale 1,25 pontos;		Aluno (a):	Nota:

01)Ao analisar a deterioração causada por certo tipo de bactéria em determinado alimento, um laboratorista constatou que a população dessa bactéria quadruplicava a cada hora. Se, no momento em que ele iniciou a análise, havia 24 bactérias na amostra, então, até que o número de bactérias chegasse a 1440 unidades foram decorridos, no mínimo,

A( ) 2 horas e 58 minutos.

B( ) 2 horas e 52 minutos.

C( ) 2 horas e 48 minutos.

D( ) 2 horas e 29 minutos.

E( ) 2 horas e 26 minutos.

02)O número N de bactérias em uma cultura, após T horas, é dado por $N = 2000 \times \left(10^{0,159T}\right)$. Determine a quantidade de horas necessárias para que o número de bactérias seja igual a 6000. (Use logaritmo decimal de 3 igual a 0,477).
Resposta:

03)Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma? Sugestão: Utilize a relação $P(t) = P(0) \times 1,03^t$, t em anos.

04)Uma empresa de derivados químicos considera que, quando x milhões de dólares são investidos em pesquisas, o lucro anual, em milhões de dólares, passa a ser
$L(t) = 20 + 5 \times \log_3(x+3)$

De quanto deveria ser o investimento em pesquisa para que o lucro anual fosse de 60 milhões de dólares?

05)Determine o tempo que leva para que 1000 g de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, se reduza a $200g$. Utilize a seguinte expressão: $Q = Q_0 \times e^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

06)(Vunesp – SP) O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22h. Às 22h 30min o médico da polícia chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 32,5 ºC. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5 ºC. A temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5 ºC. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja de 36,5 ºC e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo é dada por $D(t) = D_0 \times 2^{(-2\alpha t)}$, em que t é o tempo em horas, D_0 é a diferença de temperatura do cadáver com o meio no instante $t = 0$, $D(t)$ é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente num instante t qualquer e α é uma constante positiva. Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela seguinte:

	Hora	Temperatura do corpo (ºC)	Temperatura do quarto (ºC)	Diferença de temperatura(ºC)
t=?	Morte	36,5	16,5	$D(t) = 20$
t=0	22h30min	32,5	16,5	$D(0) = D_0 = 16$
t=1	23h30min	31,5	16,5	$D(1) = 15$

Considerando os valores aproximados $\log_2 5 = 2,3$ e $\log_2 3 = 1,6$, determine:

a)a constante α.

b)a hora em que a pessoa morreu.

07)Um líquido volátil diminui seu volume na ordem de 20% por hora. O seu volume se reduzirá à metade durante um tempo t. Considerando essas condições, determine aproximadamente o tempo t. (Dado $\log 2 = 0,3$)

08)(FUVEST 2010) A magnitude de um terremoto na escala Richter é proporcional ao logaritmo, na base 10, da energia liberada pelo abalo sísmico. Analogamente, o pH de uma solução aquosa é dado pelo logaritmo, na base 10, do inverso da concentração de íons H^+. Considere as seguintes afirmações:

I O uso do logaritmo nas escalas mencionadas justificase pelas variações exponenciais das grandezas envolvidas.

II A concentração de íons H^+ de uma solução ácida com pH 4 é 10 mil vezes maior que a de uma solução alcalina com pH 8.

III Um abalo sísmico de magnitude 6 na escala Richter libera duas vezes mais energia que outro, de magnitude 3.

Está correto o que se afirma somente em:

a)I

b)II

c)III

d)I e II

e)I III