UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Cônicas: lugares geométricos e construções dinâmicas

Cláudio Barros Vitor

MANAUS
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Cláudio Barros Vitor

CÔNICAS: LUGARES GEOMÉTRICOS E CONSTRUÇÕES DINÂMICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira

MANAUS
2013

CLÁUDIO BARROS VITOR

CÔNICAS: LUGARES GEOMÉTRICOS E CONSTRUÇÕES DINÂMICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 22 de Agosto de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
Presidente

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo
Membro

Prof. Dr. Mário Salvatierra Júnior
Membro

AGRADECIMENTOS

A Deus, ao meu orientador, aos meus pais, aos meus amigos, aos meus alunos e as maiores razões de meu esforço e dedicação: Adriana, minha esposa, e meus filhos Cláudio, Gabriel e Matheus. Agradeço a paciência e compreensão de minhas falhas e ausências.

RESUMO

Faço aqui uma abordagem pouco trabalhada na maior parte dos livros da educação básica, ***lugares geométricos*** com uma perspectiva de construção tradicional (régua e compasso) e geometria dinâmica (*software* de matemática). No primeiro capítulo estudaremos os lugares geométricos elementares com as devidas propostas de construção com régua e compasso. No segundo e terceiro capítulos nos deparamos com uma abordagem histórica do estudo das cônicas bem como suas construções, com o intuito de mostrar que essa abordagem não deve ser feita apenas no encerramento do ensino médio. Para o quarto capítulo reservei um aprofundamento para as equações das cônicas após rotação e finalizando este trabalho, algumas atividades no *Geogebra* com a possibilidade de visualização na internet.

Palavras-chave: Construções, lugares geométricos, cônicas.

ABSTRACT

In the present study I make an approach that is not much worked in most books of basic education, geometric places with a traditional construction perspective (a ruler and a pair of compasses) and dynamic geometry (math software). In the first chapter, we will study the elementary geometric places with the adequate proposals of construction with a ruler and a pair of compasses. In the second and third chapters, we will deal with a historical approach to the study of conics as well as with its constructions in order to show that this approach should not be taken only at the end of high school. In the fourth chapter, I dedicated to a further study of the equations of conics after rotation and, at the end of this work, some activities in Geogebra with the possibility of visualization on the Internet. Keywords: Construction geometry places, Conics.

Keywords: Construction geometry places, Conics.

Apresentação

Este trabalho tem o intuito de contribuir com os docentes da educação básica no ensino da matemática buscando sua essência primitiva, as construções geométricas. Sendo professor de matemática dos diversos níveis da educação há dezesseis anos, ainda me pergunto o motivo de tamanho desânimo por muitos alunos e também dos professores no ensino de matemática. Acredito que não há uma fórmula mágica para essa mudança, mas sei da importância de cada indivíduo no processo de aprendizagem. Tento aqui resgatar a beleza das construções geométricas para justificar conceitos e propriedades que a álgebra, tão elegantemente, demonstra.

Minha angustia na forma de abordar o estudo das cônicas e de como os meus alunos do ensino médio podem ter uma melhor compreensão, não exclusivamente pela geometria analítica, foi o fator motivador deste trabalho.

As tecnologias em educação não são uma realidade recente, lidamos com ferramentas educacionais há muito, o *ábaco* (pt.wikipedia.org/wiki/Ábaco) é um grande exemplo.

Para o estudo das cônicas, vislumbro uma abordagem mais precoce de suas definições, ainda no ensino fundamental, dando atenção às construções com régua e compasso. Acredito que o aluno ao construir, a partir da definição, tem a possibilidade de constatar, pelas medidas, algo que futuramente e com a devida maturidade demonstrará algebricamente, evitando assim que a geometria analítica fique fadada às suas equações.

Não é difícil observar esse distanciamento da construção para álgebra nos dias de hoje, basta perguntar a um aluno que está concluindo o ensino médio o que é uma cônica, dificilmente ele a definirá como um lugar geométrico, possivelmente esboçará uma curva correspondente à uma delas ou, espantosamente, enunciará uma equação que memorizou; levando o discente a um conceito equivocado de que a geometria analítica é a geometria das equações.

Aliada à construção sintética podemos inserir uma ferramenta didática poderosa que é um *software* de matemática, dando movimento às construções o que chamamos de *geometria dinâmica*. Existe uma série de *softwares* que possibilitam as construções geométricas, optamos aqui pela utilização do *Geogebra*.

O *Geogebra* é um *software* livre e gratuito, ou seja, não pago à disposição para *download* no site www.geogebra.org, podendo ser usado, inclusive, na própria plataforma do servidor; além disso é colaborativo, ou seja, o usuário tem acesso às ferramentas de criação, tornando possível adaptações de programação para atender o usuário. Outras vantagens que podemos destacar são: as ferramentas de publicação, onde as construções podem ser disponibilizadas na internet e acessada por qualquer usuário; diversos campos da matemática são contemplados ao mesmo tempo (geometria, álgebra, estatística e cálculo); transformar as construções em vídeo-aula, entre outras. A geometria dinâmica, sem dúvida, é uma ferramenta didática poderosa. O simples fato de mobilidade que se ganha com o ponto, por exemplo, liberta o docente da amarração estática que um quadro convencional impõe. Podemos citar como exemplo o estudo da excentricidade. Muitas das vezes em sala de aula me esforcei para que meus alunos visualizassem naturalmente o sentido da excentricidade para uma cônica. Quando comecei a usar a geometria dinâmica ficou evidente que o interesse foi imediato, a atenção e curiosidade foram acordadas e as indagações eram mais específicas e claras.

As possibilidades são inestimáveis, basta que se tenha interesse em começar, espero que este estudo possibilite um melhor aproveitamento no ensino destas curvas e que a utilização da geometria dinâmica seja algo frequente. Àqueles que tiverem interesse o site www.geogebratube.org/, tem um grande número de aplicações possíveis em sala de aula. Não pretendo aqui discorrer sobre recursos tecnológicos, e sim incentivar àqueles que gostam das construções geométricas, buscar recursos que atendam suas inspirações.

Sumário

1 Lugares Geométricos **1**
1.1 Introdução 1
1.2 Lugar Geométrico 3
1.3 Circunferência 3
1.4 Mediatriz 4
1.5 Retas paralelas 6
1.6 Bissetriz 8
1.7 Arco capaz 10

2 Cônicas: De *Menaechmus a Fermat.* **12**
2.1 Introdução 12
2.2 Os três problemas clássicos de construção 12
2.3 Menaechmus 14
2.4 Arquimedes 14
2.5 Apolônio de Perga 15
2.6 Pierre Fermat 15

3 Cônicas: Construções **17**
3.1 Introdução 17
3.2 Elipse 17
3.3 Circunferência diretora da elipse 19
3.4 Hipérbole 21
3.5 Circunferência diretora da hipérbole 23
3.6 Parábola 24

4 Cônicas: Rotações e translações **27**
4.1 Translação 27
4.2 Rotação 30

5 Atividades com *GeoGebra* **34**
5.1 Divisão de segmento 35

5.2 Pontos na mediatriz . . . 36
5.3 Pontos na bissetriz . . . 37
5.4 Ponto no arco capaz . . . 38
5.5 Elipse por pontos . . . 39
5.6 Excentricidade . . . 40
5.7 Elipse por circunferências . . . 41
5.8 Translação da elipse . . . 42
5.9 Rotação da elipse . . . 43
5.10 Hipérbole por pontos . . . 44
5.11 Excentricidade . . . 45
5.12 Hipérbole por circunferências. . . . 46
5.13 Translação da hipérbole . . . 47
5.14 Rotação da hipérbole . . . 48
5.15 Parábola por pontos . . . 49
5.16 Parábola por circunferências . . . 50
5.17 Translação da parábola . . . 51
5.18 Rotação da parábola . . . 52

6 Considerações Finais **53**

Referências Bibliográficas **54**

LISTA DE SÍMBOLOS

$\overleftrightarrow{AB}$	Reta AB.
$\overrightarrow{OP}$	Semirreta OP.
$\overline{AB}$	Segmento AB.
AB	Medida do segmento AB.
$(A\widehat{B}C)$	Medida do ângulo ABC.
sen θ	Seno do ângulo θ.
cos θ	Cosseno do ângulo θ.
ΔABC	Triângulo ABC.
S_{ABC}	Área do triângulo ABC.
$\overline{AB} \perp \overline{CD}$	Segmento AB perpendicular ao segmento CD.
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	Reta AB paralela a reta CD.
$AB \equiv CD$	Segmento AB congruente ao segmento CD.
$\Delta ABC \equiv \Delta DEF$	Triângulo ABC congruente ao triângulo DEF.
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$	Triângulo ABC semelhante ao triângulo DEF.
$S = C(O, r)$	Círculo ou circunferência de centro no ponto O e raio r.

Capítulo 1

Lugares Geométricos

1.1 Introdução

As construções geométricas são as formas mais primitivas e puras de apresentação de ideias matemáticas. Desde os primórdios o homem tenta expressar seus pensamentos e emoções usando diferentes linguagem de comunicação. Eis aí um grande problema, cada grupo com sua linguagem. O desenho surge como uma ferramenta de linguagem universal.

Não se tem informação precisa sobre os primeiros desenhos como forma de abordagem lógica para a resolução de um problema. Inspirando-nos na cultura babilônica ou dos egípcios, podemos reportar o desenho como o prelúdio às construções grandiosas e que até hoje ainda são enigmáticas.

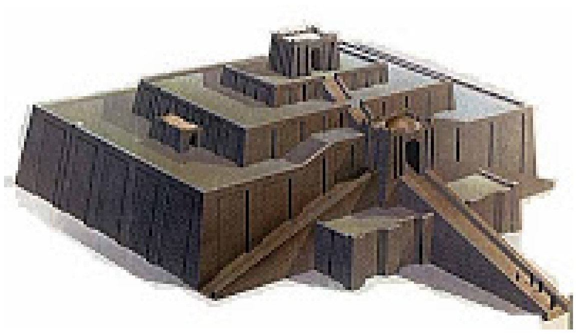

Figura 1.1: Zigurate.

No inicio os desenhos eram feitos à mão, sem qualquer noção de perfeição ou de medidas com exatidão, pois não possuíam recursos apropriados. As construções com régua e compasso somente apareceram por volta do século V a.C., tais construções tiveram enorme importância no desenvolvimento da matemática grega, era áurea da geometria, e foi com o matemático grego Euclides que a geometria se desenvolveu, fazendo da cidade egípcia de Alexandria o centro mundial da Geometria por volta de 300 a.C..

Neste capítulo as construções geométricas são destacadas como importante instrumento de concretização das definições geométricas elementares. As ideias de distâncias e simetria recebem o auxílio das ferramentas mais antigas de construções geométricas, a régua e o compasso. Embora o material físico seja imprescindível no aprendizado, todas as construções podem ser apresentadas em mídias tecnológicas usando-se softwares adequados.
As construções geométricas possibilitam aos estudantes uma integração entre conceito e aplicação, fazendo com que as definições estejam mais próximas e integradas à sua realidade. Destaco aqui também o prazer de se fazer as construções e observar na prática as definições serem concretizadas.
Não há construção sem justificativa geométrica que demonstre sua veracidade, a ideia aqui não é dissociar as construções geométricas da geometria e álgebra, mas apresentá-la como uma ferramenta dinâmica para a construção do aprendizado.

1.2 Lugar Geométrico

Quando se aborda as funções elementares na educação básica é quase que instantânea a apresentação do gráfico correspondente à função estudada como sendo o "desenho"que a mesma descreve no plano cartesiano, isso acarreta a correlação imediata, no aluno, de que a lei que define a função é uma curva. Perguntado a um aluno "qual o gráfico da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ em que $f(x) = x^2$?, possivelmente responderá "uma parábola!". Isso acontece porque o aluno não enxerga o gráfico como um conjunto de pontos do plano que satisfazem determinada condição.
Usar lugar geométrico nas definições nem sempre é uma tarefa simples: devemos imaginar o ponto em movimento satisfazendo as devidas condições e além disso descrever mentalmente esta trajetória.

A utilização de um *software* adequado facilita e motiva a descoberta desses lugares.
Uma figura (conjunto não vazio de pontos) é denominada **lugar geométrico** (LG) dos pontos que gozam de uma propriedade ϕ quando, e somente quando:

- todos os pontos dessa figura gozam da propriedade ϕ;
- somente os pontos dessa figura gozam da propriedade ϕ.

1.3 Circunferência

LG 1. *O LG dos pontos situados a uma distância r de um ponto P dado é a* ***circunferência*** *que tem como centro o ponto dado e por raio a distância r.*

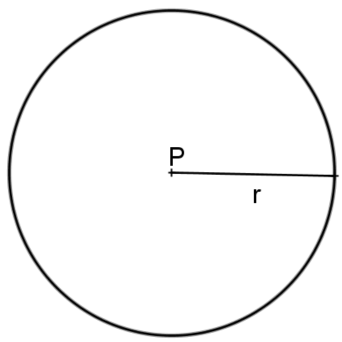

Figura 1.2: Circunferência.

1.4 Mediatriz

Definição 1.4.1. *Dados os pontos A e B no plano, mediatriz é a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ em seu ponto médio M.*

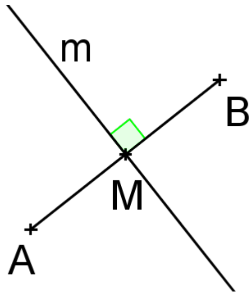

Figura 1.3: Mediatriz.

Construção 1. *Centro em A e um raio maior que a metade de $\overline{AB}$ traçamos o arco A_1, depois com centro em B e mesmo raio, traçamos o arco A_2. Os arcos se intersectam em dois pontos P e Q, a reta que passa por estes pontos é a mediatriz de $\overline{AB}$.*

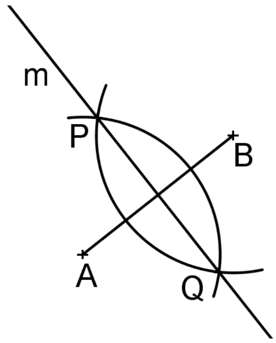

Figura 1.4: Mediatriz.

Justificativa 1. *Como os arcos traçados tem mesmo raio, o quadrilátero $APBQ$ é um losango de diagonais $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$ que são perpendiculares e se intersectam no ponto médio.*

Teorema 1.

LG 2. *Mediatriz é o LG dos pontos que equidistam dos extremos de um segmento dado.*

Prova. Tomemos um ponto P da reta $m \perp \overline{AB}$ em M, os triângulos ΔAMP e ΔBMP são congruentes pelo caso $L.A.L.$, assim $\overline{AP} \equiv \overline{PB}$.

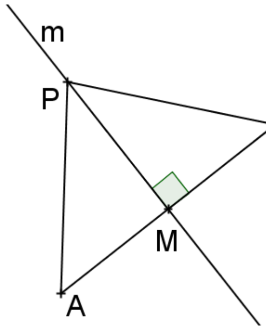

Figura 1.5: Mediatriz.

Teorema 2.

LG 3. *Mediatriz é o LG dos centros das circunferências que passam pelas extremidades de um segmento dado.*

Prova. Como vimos no **LG2**, tomando-se um ponto P qualquer da mediatriz m de $\overline{AB}$, temos $\overline{AP} \equiv \overline{PB}$, assim P determina sobre m os possíveis centros das circunferências que passam por A e B.

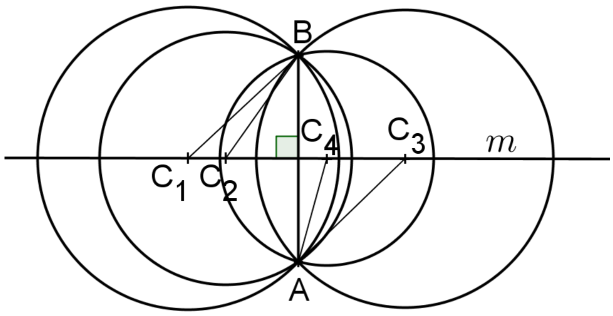

Figura 1.6: Mediatriz.

1.5 Retas paralelas

Definição 1.5.1. *Duas retas r e s são paralelas ($r//s$)se e somente se, são coincidentes ou são coplanares e não tem nenhum ponto em comum.*

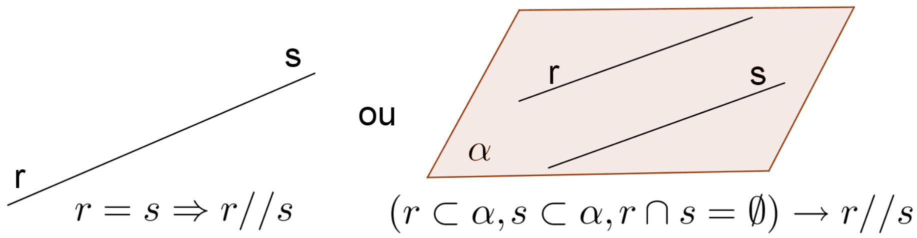

Figura 1.7: Paralelas

Construção 2. *Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, conduzir por P uma reta s paralela à r.*

- *ponta seca em P e uma abertura maior que a distancia a r traçamos um arco intersectando-a em A;*
- *ponta seca em A e abertura em P traçamos um arco determinando em r o ponto B;*
- *ponta seca em A e raio $\overline{BP}$ traçamos um arco intersectando o primeiro construído em C;*
- *a reta s é determinada pelos pontos P e C. (Fig. 1.8)*

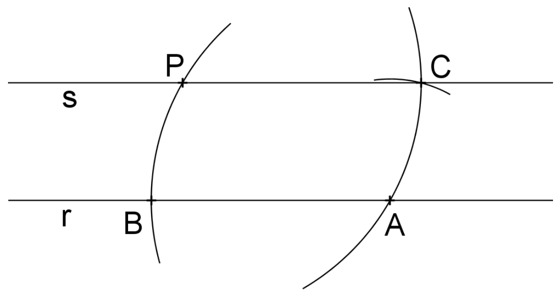

Figura 1.8: Paralelas.

Justificativa 2. *Por construção, o quadrilátero $ABCD$ tem os lados opostos congruentes, assim, $ABCD$ é um paralelogramo e $r//s$.*

LG 4. *o LG dos pontos que distam ℓ de r são às retas paralelas s e t, a uma distância ℓ de r.*

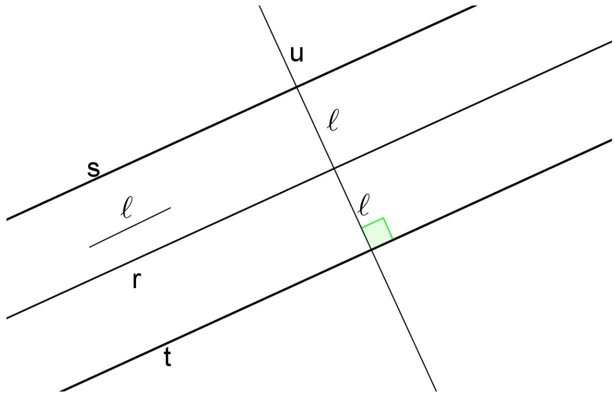

Figura 1.9: Paralela.

LG 5. *Sejam A e B pontos distintos de r, as retas paralelas s e t determinam o LG dos triângulos de base $\overline{AB}$ e altura ℓ, ou seja, o LG dos ΔABC equivalentes, onde $\overline{AB} \subset r$ e $C \in s$ ou $C \in t$. (Fig. 1.10)*

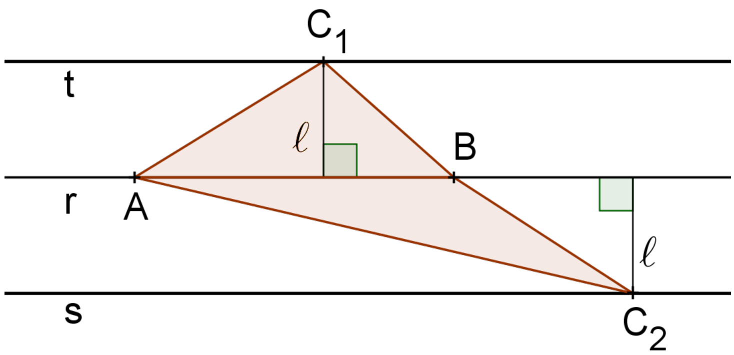

Figura 1.10: Paralela.

1.6 Bissetriz

Definição 1.6.1. *Bissetriz é a semirreta de origem no vértice do ângulo e que o divide em outros dois ângulos congruentes.*

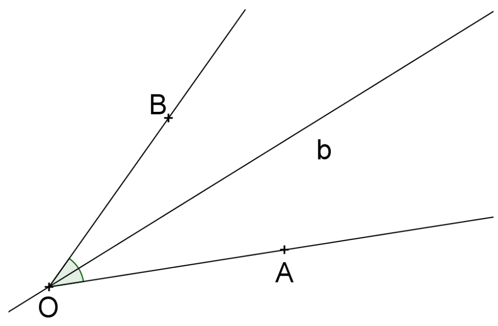

Figura 1.11: Bissetriz.

Construção 3. *Dado um ângulo, construir uma bissetriz.*

- *Ponta seca no vértice O e raio qualquer traçamos um arco que intersecta os lados de $A\widehat{O}B$ em C e D;*
- *Ponta seca em C e raio maior que a metade da distância à D traçamos um arco;*
- *Ponta seca em D e raio anterior traçamos outro arco encontrando o ponto P;*
- *a semirreta $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz de $A\widehat{O}B$. (Fig. 1.12)*

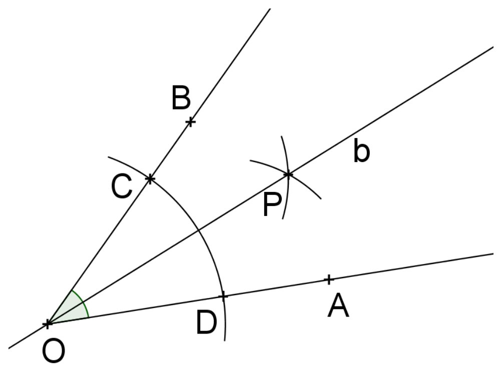

Figura 1.12: Bissetriz.

Justificativa 3. *O triângulo OCD é isósceles e b é mediatriz de $\overline{CD}$, logo é bissetriz de $C\widehat{O}D$.*

Teorema 3.

LG 6. *A bissetriz é o LG dos pontos que equidistam dos lados do ângulo dado.*

Prova. Sejam P um ponto da bissetriz b e suas projeções ortogonais C e D sobre os lados do ângulo $A\widehat{O}B$, os triângulos ΔOPC e ΔOPD são congruentes (caso **lado** ($\overline{OP}$), **ângulo** ($D\widehat{O}P \equiv P\widehat{O}C$) e **ângulo oposto** ($O\widehat{D}P \equiv O\widehat{C}P$)), assim os segmentos $\overline{PC}$ e $\overline{PD}$ são congruentes.

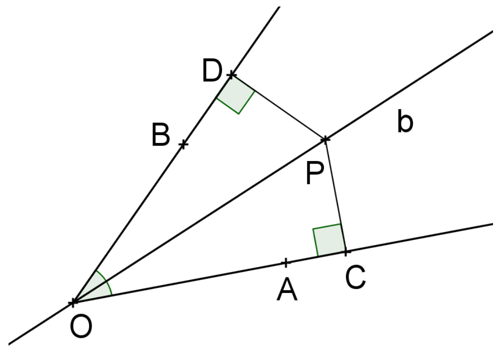

Figura 1.13: Bissetriz.

Teorema 4.

LG 7. *Bissetriz é o* ***LG*** *dos centros das circunferências tangentes às retas r e s dadas. (Fig. 1.14)*

Prova. Tomando-se um ponto P de uma bissetriz de res, pelo **LG6**, P equidista de res, assim, P é centro da circunferência que tangência as retas dadas.

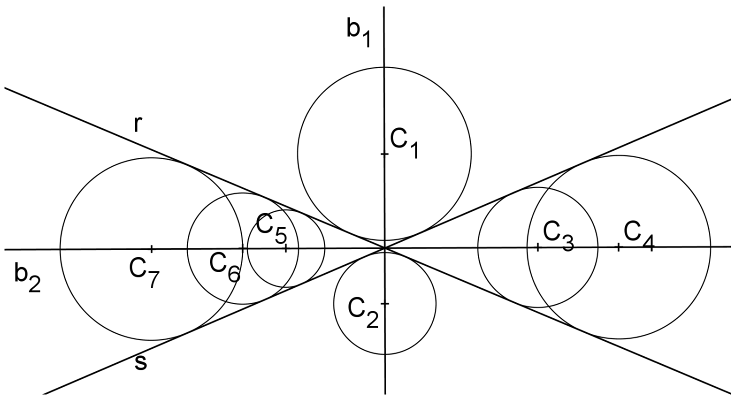

Figura 1.14: Bissetriz.

1.7 Arco capaz

Teorema 5. *Tomando-se dois pontos A e B de um circunferência Γ. Para todo ponto P sobre um dos arcos de Γ, o ângulo $A\widehat{P}B = \gamma$ é constante.*

Prova. Para todo $P \in \Gamma$ o ângulo $A\widehat{P}B = \gamma$ é inscrito ao arco $\widehat{\mathrm{AB}}$, sendo assim, quando P percorre Γ, o ângulo tem mesma medida.

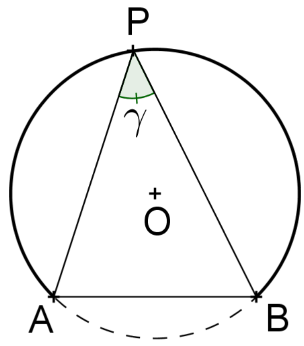

Figura 1.15: Arco capaz.

Este é o ***arco capaz*** do ângulo γ sobre $\overline{AB}$.

Construção 4. *Determinar o arco capaz do ângulo agudo γ sobre o segmento AB dado:*

- *usando o segmento AB como um dos lados e vértice em A, determinamos o ângulo $B\widehat{A}C = \gamma$;*
- *levanta-se em A uma perpendicular a $\overline{AC}$;*
- *traça-se a mediatriz de $\overline{AB}$;*

- *a interseção da mediatriz com a perpendicular é o centro do arco de raio* $\overline{OA}$.

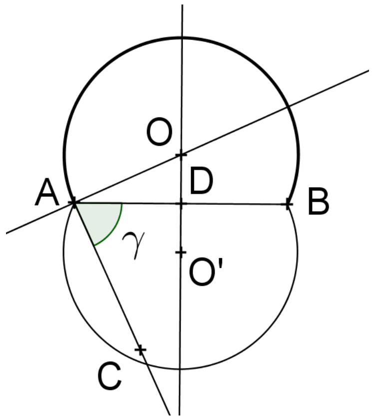

Figura 1.16: Arco capaz.

Justificativa 4. *O triângulo* ΔAOB *é isósceles, seja* $B\widehat{A}O = \delta$, *o ângulo central* $A\widehat{O}B = 180^o - 2\delta$, *assim qualquer ângulo inscrito relativo ao* $A\widehat{O}B$ *será igual a* $90^o - \delta$, *ora,* $\gamma = 90^o - \delta$.

Capítulo 2

Cônicas: De *Menaechmus a Fermat.*

2.1 Introdução

Aqui há uma preocupação de se destacar as motivações que conduziram a um estudo mais específico sobre as cônicas. Longe de ser uma pesquisa histórica, a ideia cronológica do estudo das cônicas é mostrar as diferentes visões dos trabalhos relacionados a essas figuras e que sua evolução ocorre com as mudanças de interpretações e ferramentas matemáticas disponíveis no passar dos tempos.

2.2 Os três problemas clássicos de construção

Com os recursos da construção, a mente do homem podia alçar voos tão longínquos quanto sua criatividade permitisse, assim, vários problemas eram lançados e ocupavam aquelas mentes extraordinárias com as soluções mais inesperadas possíveis. No entanto, três problemas atormentaram os gregos e seus sucessores por muitos séculos. Eram sobre como realizar uma construção geométrica usando somente régua e compasso, ei-los:

- **Duplicação do cubo:** Dado um cubo, construir outro cubo com o dobro do volume do anterior.
  Há uma lenda sobre o nascimento desse problema:
  Por volta de 400 a.E.C uma peste dizimou cerca de um quarto da população de Atenas. Prostrados com a tragédia, os atenienses consultaram o oráculo de Apolo, em Delos, para receber uma orientação sobre oque fazer para acalmar os Deuses enfurecidos. O oráculo respondeu que o altar de Apolo, que era cubico, deveria ser dobrado. Assim, prontamente foram dobradas as arestas do cubo. O problema é que a peste não cessou, então perceberam que octuplicaram o altar. Surge aí o problema ***deliano***
  .

- **Quadratura do círculo:** Dado um círculo, construir um quadrado com a mesma área.
  O problema da quadratura do círculo foi proposto por Anaxágoras (499-428 a.C.), que foi aprisionado em Atenas por ter ideias muito avançadas para sua época. Ele postulava a existência de uma mente onisciente, que concederia ordem e constância ao Universo; o Sol possuiria luz própria e iluminaria a Lua. Anaxágoras foi professor de Péricles (490-429 a.C.), que o libertou da prisão. Ademais, exerceu forte influência no primeiro destes três grandes filósofos: Sócrates, Platão e Aristóteles.

- **Trissecção do ângulo:** Dado um ângulo, construir um ângulo com um terço de sua amplitude.
  Diferente dos problemas anteriores, a trissecção de um ângulo, não tem registros de origem histórica e é provável que seja o problema com o maior número de falsas soluções, o que por sua vez já determina um novo desafio, encontrar o erro da falsa solução dada a sutileza de suas demonstrações. Outro atrativo no problema é o fato de apresentar soluções particulares, oque não ocorre nos problemas anteriores. Podemos, por exemplo, trissecar facilmente um ângulo raso.

Esses três problemas, embora de natureza tão simples, caminharam nas trevas da resolução (usando-se os instrumentos básicos da construção) por mais de 2000 anos. Foi quando *Pierre Laurent Wantzel*, em 1837, publicou no *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées : Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géometrie peut se résoudre avec lá règle et la compass* (Pesquisas sobre os meios de reconhecer se um problema pode ser resolvido por meio de régua e compasso).

A inquietação na era áurea da geometria para resolver tais problemas motivou o estudo das cônicas que trataremos aqui.

2.3 Menaechmus

Nascido por volta de 380 a.C. em Alopeconnesus, Ásia Menor (atualmente Turquia) viveu até meados de 320 a.C.. Aluno de Eudoxus, colega de Platão e grande geômetra. É atribuída a ele a descoberta das cônicas como a seção de um plano não paralelo à base de um cone. A motivação de Menaechmus se deu por meio de exaustivos estudos no problema da duplicação do cubo: Este problema consistia em, a partir de um cubo de aresta unitária, construir um segmento de reta de comprimento x_1 tal que $x^3 = 2$. Na solução que obteve, utilizou duas curvas criadas por ele: uma parábola e uma hipérbole. Uma terceira curva, a elipse, surgiu como subproduto de sua invenção. Até hoje essas três curvas são chamadas de secções cônicas, pois o grande matemático grego as imaginou secionando três superfícies cônicas por meio de um plano perpendicular à geratriz da superfície.

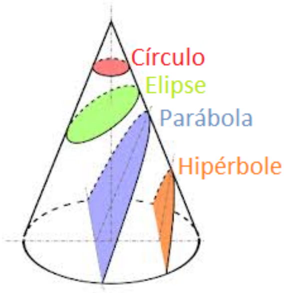

Figura 2.1: Cônicas.

2.4 Arquimedes

Nascido na ilha grega da Sicília, em Siracusa, cerca de 287 a.C.. Ainda jovem estudou em Alexandria tendo acesso aos conhecimentos de *Euclides*. Dentre as grandes contribuições de Arquimedes, destacamos aqui seu tratado sobre a quadratura da parábola, onde ele demonstra que a área da região da curva seccionada por uma reta é 4/3 da área do triângulo com vértices na interseção das curvas e no ponto de tangencia em relação à reta dada.

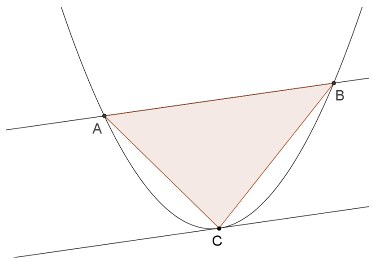

Figura 2.2: Seção parabólica

Destaca-se também seus tratados sobre sólidos, como a inscrição da esfera em um cilindro equilátero, bem como seu trabalho sobre conóides e parabolóides dados pela revolução de parábolas, elipses e hipérboles em torno de seus eixos. Arquimedes também era um grande inventor, para coisas práticas que facilitavam a vida e na elaboração de projetos para máquinas bélicas.
Até onde se sabe foi o primeiro a provar que a área da esfera é dada por $4\pi R^2$, em notação atual, pois, π ainda era um número desconhecido, mas Arquimedes fez uma notável aproximação descrevendo $3\frac{30}{71} < \pi < 3\frac{30}{70}$.

2.5 Apolônio de Perga

É atribuído *Arquimedes* a notável determinação da área de um segmento parabólico. O primeiro estudo sistemático sobre as cônicas em geral deve-se ao Astrônomo e Matemático grego *Apolônio de Perga* (260 a.c - 200 a.c). Pouco se sabe sobre a vida de Apolônio, no entanto o seu trabalho teve uma grande influência no desenvolvimento da Matemática em particular pela sua mais notável obra "As Cônicas", composta por oito volumes. Em seu estudo, fundamentado na geometria de *Euclides*, Apolônio trata as seções cônicas como curvas obtidas pela interseção de um plano com um cone circular reto de duas folhas.

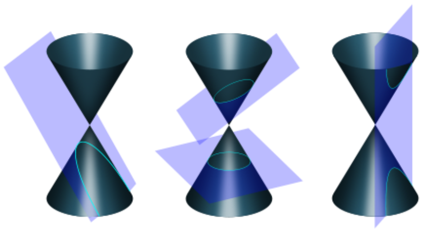

Figura 2.3: Cônicas.

A visão que Apolônio de Perga tinha sobre as cônicas não é distante da forma como tratamos hoje. Ele classificou as cônicas segundo a posição de um plano secante à base com retas perpendiculares ao triângulo axial (formado pelas interseção de um plano perpendicular à base contendo vértice do cone). Apolônio escreve uma coleção de oito volumes, dos quais sete conseguiram sobreviver e serem traduzidos. Para se ter uma ideia da magnificência da obra, algo novo sobre cônicas só vem a ser escrito no século XVII.

2.6 Pierre Fermat

Francês da cidade Beaumont-de-Lomages, nasceu em 17 de agosto de 1601. Filho de família abastada, formou-se advogado, mas sua grande paixão era a matemática. Deleitou-se na obra de Apolônio e estudou intensamente as cônicas.
São atribuídos a Fermat os fundamentos da geometria analítica, onde as construções

geométricas e seus conhecimentos no plano não são mais as fontes exclusivas das afirmações teóricas, a geometria toma uma conotação mais rigorosa em termos algébricos e as curvas passam a ser estudadas com as equações que hoje conhecemos.

Capítulo 3

Cônicas: Construções

3.1 Introdução

Neste capítulo, usaremos a régua e o compasso na construção das cônicas a partir de sua definição como lugar geométrico. Um grave problema no estudo das cônicas na educação básica é o fato de serem mencionadas efetivamente como um objeto de estudo matemático depois que se inicia o aprendizado de geometria analítica. A consequência é que boa parte dos alunos que finalizam o ensino médio, quando carregam alguma informação sobre cônicas, está relacionada apenas às suas equações.
Ao aprender as construções geométricas destas curvas, o aluno é capaz de associar a informação das distâncias com as equações correspondentes.

3.2 Elipse

Definição 3.2.1. *Dados dois pontos F_1 e F_2, tais que $F_1F_2 = 2c$, e seja $2a$ uma medida de modo que $2a > 2c$. Chamamos elipse ao lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a $2a$.*

Da definição, tem-se a condição para que um ponto P pertença à elipse: $PF_1 + PF_2 = 2a$, assim conhecidos os pontos F_1 e F_2 e a distância $2a$, podemos encontrar pontos da elipse (tantos quanto desejarmos) e efetuarmos sua construção.

Construção 5. *Sejam dados F_1 e F_2 e a distância $2a$.*

- *toma-se a reta r passando por F_1 e F_2;*
- *determina-se o ponto médio O de $\overline{F_1F_2}$;*

- *centro em O e raio a determinamos, em r, os pontos A_1 e A_2;*

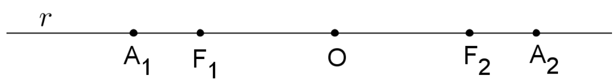

Figura 3.1: elipse: construção

- *toma-se um ponto P_1 entre F_1 e F_2;*
- *centro em F_1 e depois em F_2 e raio $\overline{A_1P_1}$, traçam-se 4 arcos;*

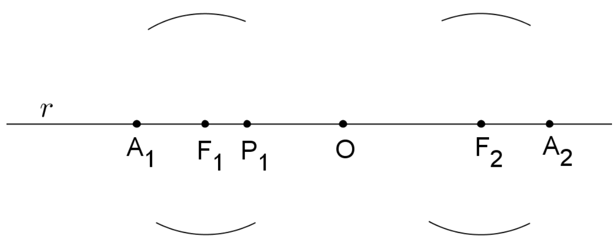

Figura 3.2: elipse: construção

- *centro em F_1 e depois em F_2 e raio $\overline{P_1A_2}$, traçam-se 4 arcos, intersectando os arcos anteriores em 4 pontos $(E_1, E_2, E_3 e E_4)$ da elipse;*

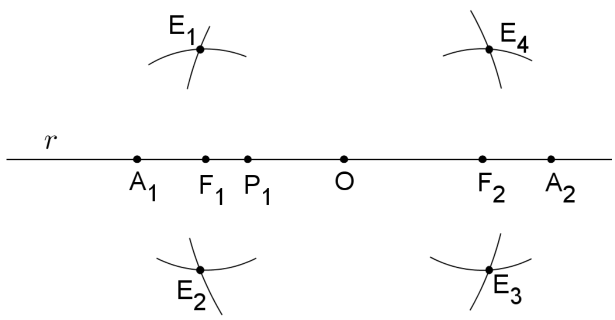

Figura 3.3: elipse: construção

- *tomam-se tantos pontos quantos se queira, nas condições de P_1, esboçando-se a elipse.*

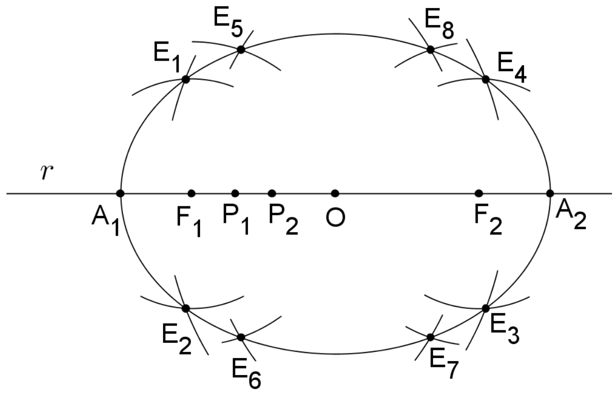

Figura 3.4: elipse: construção

3.3 Circunferência diretora da elipse

Definição 3.3.1. *Chama-se circunferência diretora àquela com centro em um dos focos da elipse e raio $2a$.*

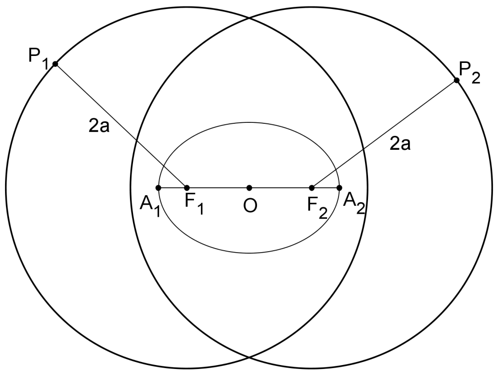

Figura 3.5: elipse: circunferência diretora

Teorema 6. *Seja γ uma circunferência de centro F_1 e F_2 um ponto interior a γ, o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por F_2 e tangenciam internamente γ é a elipse λ.*

Prova. Seja P o ponto de interseção do raio da circunferência diretora, $\overline{F_1Q}$, com a elipse λ, que a define. É fácil mostrar que $\overline{F_2P} \equiv \overline{PQ}$.

De fato, $\overline{F_1Q} = 2a \rightarrow \overline{F_1P} + \overline{PQ} = 2a$.
Como $P \in \lambda$, temos: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.
Comparando as duas equações, temos: $\overline{F_2P} \equiv \overline{PQ}$.

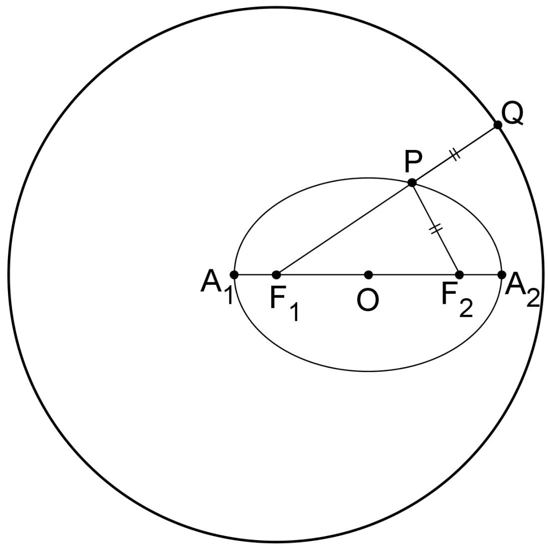

Figura 3.6: elipse: circunferência diretora

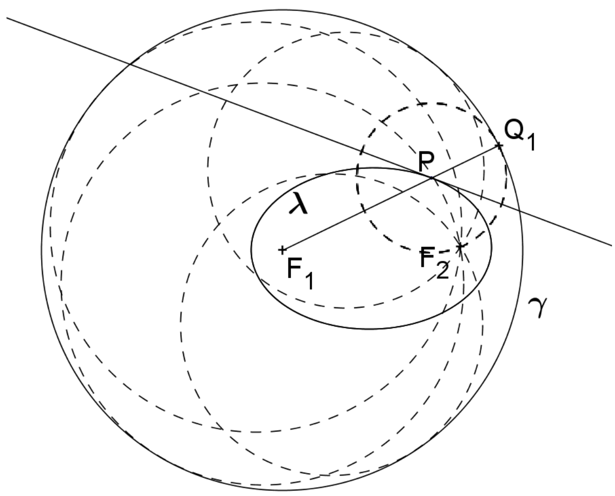

Figura 3.7: elipse: circunferência diretora

3.4 Hipérbole

Definição 3.4.1. *Dados dois pontos F_1 e F_2, tais que $F_1F_2 = 2c$, e seja $2a$ uma medida de modo que $2a < 2c$. Chamamos hipérbole ao lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto das diferenças das distâncias a F_1 e F_2 é igual a $2a$.*

Seja ω uma hipérbole e $P \in \omega$, da definição tem-se: $|PF_1 - PF_2| = 2a$, a construção por pontos assemelha-se à da elipse.

Construção 6. *Sejam dados F_1 e F_2 e a distância $2a$.*

- *toma-se a reta r passando por F_1 e F_2;*
- *determina-se o ponto médio O de $\overline{F_1F_2}$;*
- *centro em O e raio a determinamos, em r, os pontos A_1 e A_2;*

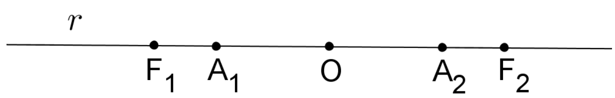

Figura 3.8: hipérbole: construção

- *toma-se um ponto $P_1 \in r$ tal que $P_1 \notin \overline{F_1F_2}$;*
- *centro em F_1 e depois em F_2 e raio $\overline{A_1P_1}$, traçam-se 4 arcos;*

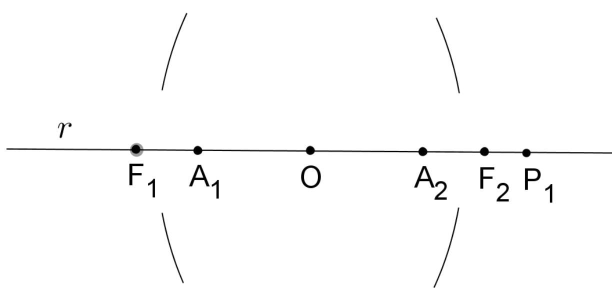

Figura 3.9: hipérbole: construção

- *centro em F_1 e depois em F_2 e raio $\overline{A_2P_1}$, traçam-se 4 arcos, intersectando os arcos anteriores em 4 pontos $(H_1, H_2, H_3 e H_4)$ da hipérbole;*

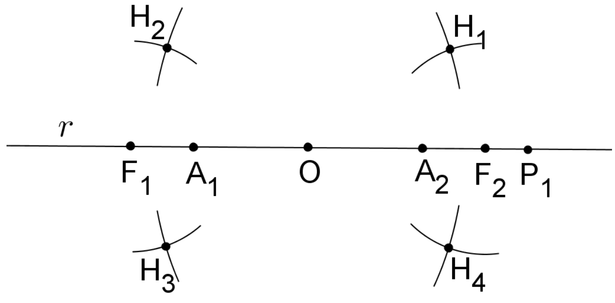

Figura 3.10: hipérbole: construção

- *tomam-se tantos pontos quantos se queira, nas condições de P_1, esboçando-se a hipérbole.*

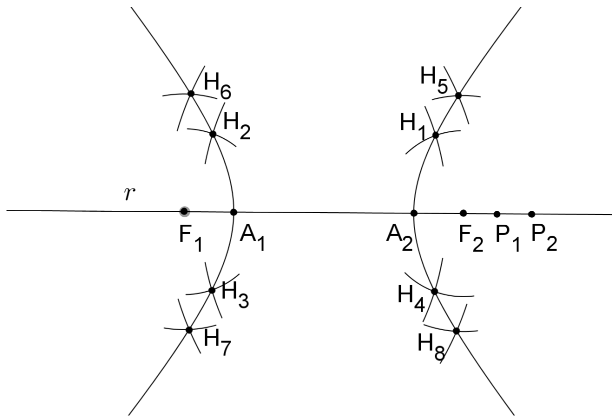

Figura 3.11: hipérbole: construção

3.5 Circunferência diretora da hipérbole

Definição 3.5.1. *Chama-se circunferência diretora àquela com centro em um dos focos da hipérbole e raio* $2a$*.*

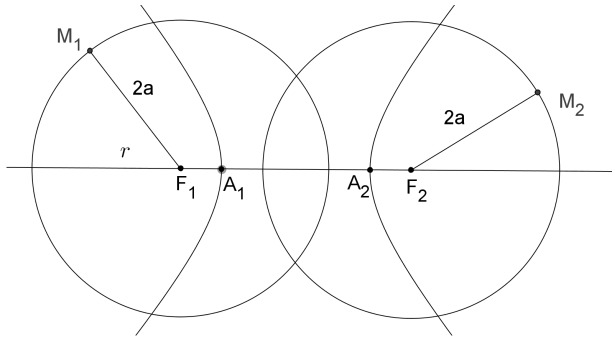

Figura 3.12: hipérbole: circunferência diretora

Teorema 7. *Seja* λ *uma circunferência de centro* F_1 *e* F_2 *um ponto exterior a* λ*, o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por* F_2 *e tangenciam* λ *é a hipérbole* ω*.*

Prova. Tomando-se um ponto Q em um dos ramos da hipérbole, de foco F_2 por exemplo, a interseção do segmento $\overline{QF_1}$ com a circunferência diretora de centro F_1 é um ponto P tal que $\overline{QP} \equiv \overline{QF_2}$.

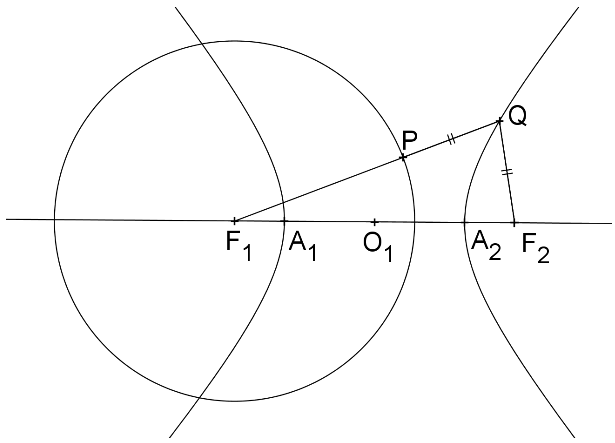

Figura 3.13: hipérbole: circunferência diretora

Como Q pertence a hipérbole, temos $\overline{QF_1} - \overline{QF_2} = 2a$ e, por construção, $\overline{QF_1} - \overline{QP} = 2a$, assim, $\overline{QP} \equiv \overline{QF_2}$.

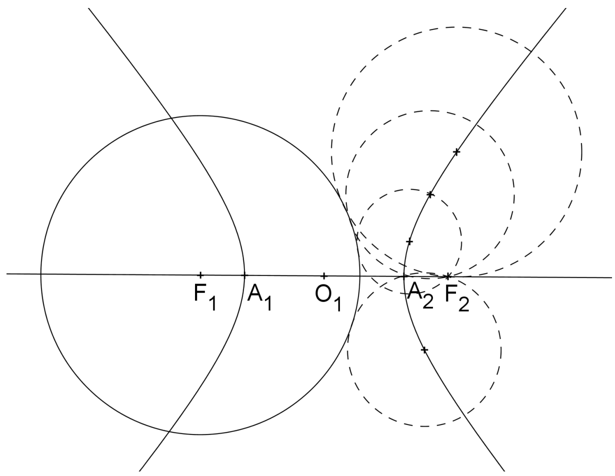

Figura 3.14: hipérbole: circunferência diretora

3.6 Parábola

Definição 3.6.1. *Sejam uma reta δ e um ponto $F \notin \delta$, parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de δ e F.*

Construção 7. *Sejam dados F_1 e F_2 e a distância $2a$.*

- *traça-se uma reta r perpendicular a δ passando por F;*
- *determina-se o ponto P, tal que $P = r \cap \delta$;*
- *encontra-se V, ponto médio de $\overline{FP}$.*

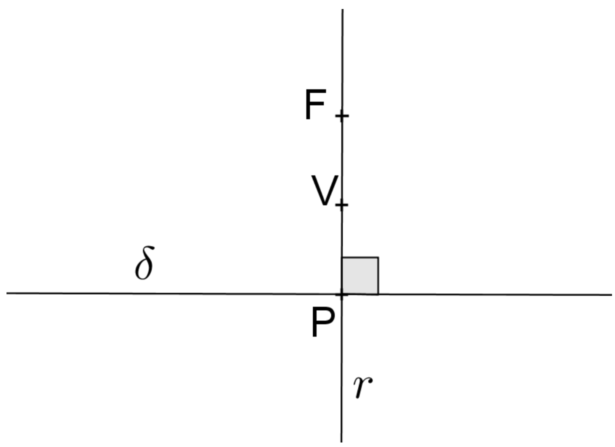

Figura 3.15: parábola: construção

- *toma-se uma reta s_1 paralela a δ a uma distância maior que ou igual a $\overline{VP}$;*
- *marca-se $Q_1 = s_1 \cap r$.*

- *centro em F e raio $\overline{Q_1P}$,marca-se em s_1 dois pontos P_1 e P_2 da parábola.*

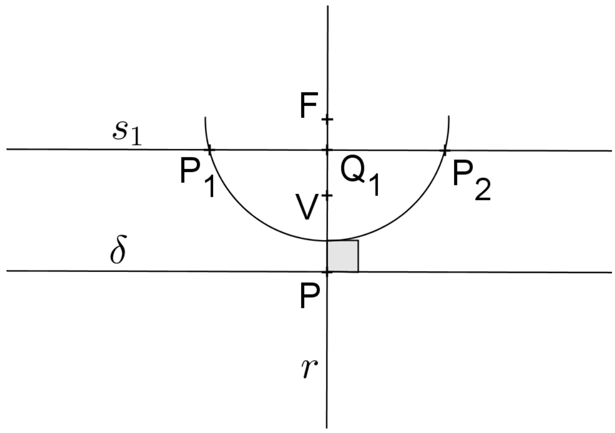

Figura 3.16: parábola: construção

- *toma-se outras retas, nas condições de s_1, determinando-se tantos pontos quantos se queiram da parábola.*

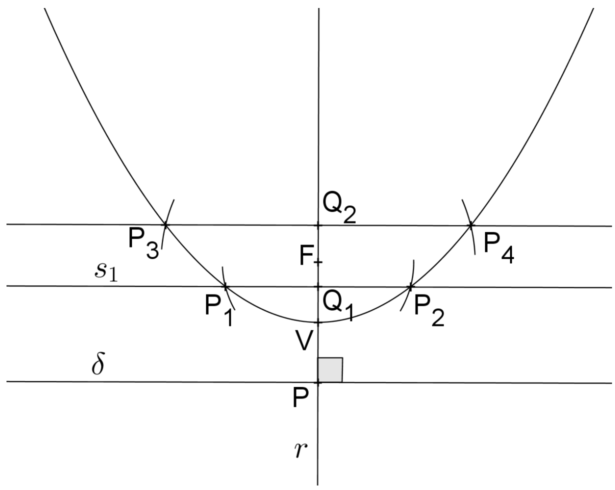

Figura 3.17: parábola: construção

Teorema 8. *Sejam uma reta* δ *e um ponto* $F \notin \delta$*, parábola é o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por* F *e tangenciam* δ*. A demonstração é imediata, a distância do centro ao ponto de tangência é o raio da circunferência.*

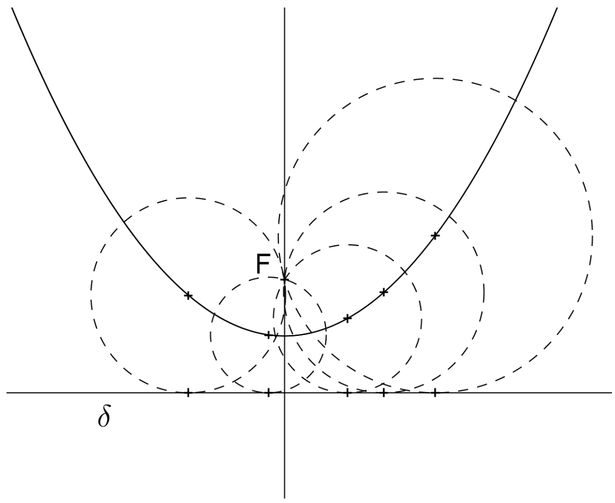

Figura 3.18: parábola: construção

Capítulo 4

Cônicas: Rotações e translações

Quando trabalhamos com a geometria dinâmica temos a liberdade do movimento sobre as figuras estudadas, conhecidas as coordenadas do ponto e/ou a equação de uma curva, podemos movê-los no plano por meio da rotação e/ou translação, **sem alterar suas características originais**. O problema destes movimentos estão na referência do plano, inicialmente partimos do plano cartesiano com os eixos bem definidos, após uma translação mudamos o centro do plano de posição, na rotação efetuamos um giro no plano em relação ao seu centro. Assim as coordenadas dos pontos e consequentemente a equação de uma curva devem ser adaptadas ao novo plano. Deste modo, a curva que era da forma f(x,y)=0 no sistema cartesiano XOY passa a ser F(x',y')=0 no plano X'O'Y'.
O Geogebra é uma ferramenta poderosa para o aprendizado desses movimentos, pois, a interação entre a álgebra e a representação gráfica é feita em tempo real, proporcionando uma visualização instantânea das mudanças de posição e consequentemente as adaptações algébricas relativas às curvas modificadas.

4.1 Translação

Consideremos um ponto $O' = (x_0, y_0)$ do plano cartesiano, tomemos dois eixos $O'x'$ e $O'y'$ de mesma direção e sentido dos eixos Ox e Oy, respectivamente, que se intersectam em O', determinando ali suas origens. O novo plano cartesiano definido pelos eixos $O'x'$ e $O'y'$ é uma ***translação*** do plano XOY.

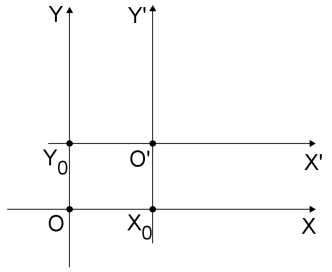

Figura 4.1: Translação

Seja $P = (x_P, y_P)$ um ponto do plano. Determinaremos suas coordenadas no sistema $X'O'Y'$. É fácil ver a relação entre as coordenadas:

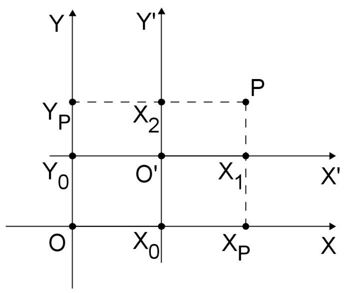

Figura 4.2: Translação

$P = (x_1, x_2) = (x_P - x_0, y_P - y_0)$, deste modo podemos transformar as coordenadas de P do sistema XOY para $X'O'Y'$ usando a conversão:

$$\begin{cases} x_1 = x_P - x_0 \\ y_1 = y_P - y_0 \end{cases}$$

Exemplo 1. *Determinar as coordenadas do ponto $A = (-1, 2)$ do sistema XOY para o sistema $X'O'Y'$ de origem $O' = (2, 1)$.*

Usando a fórmula de translação, temos $A = (-1-2, 2-1) = (-3, 1)$, no plano $X'O'Y'$.

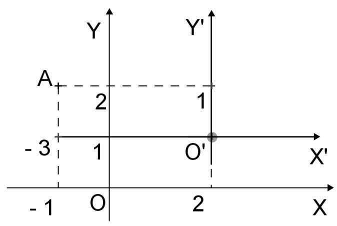

Figura 4.3: Translação

Exemplo 2. *Escrever uma equação da reta* $x + y = 1$ *no sistema* $X'O'Y'$ *de centro* $O' = (1, 2)$.

Tomando $x_P = x_1 + x_0$ e $y_P = y_1 + y_0$, temos:
$(x_1 + 1) + (y_1 + 2) = 1 \rightarrow x_1 + y_1 = -2$

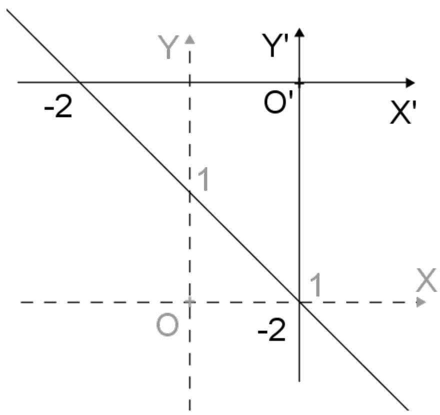

Figura 4.4: Translação

Exemplo 3. *Escrever uma equação da circunferência* $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$, *no sistema* $X'O'Y'$ *de centro* $O' = (2, -3)$.

A forma canônica da equação dada é $(x-2)^2+(y+3)^2 = 16$, o que nos dá no plano XOY uma circunferência de centro $O = (2, -3)$ e raio $r = 4$. Cada ponto da circunferência será transladado usando a conversão

$$\begin{cases} x_P = x_1 + 2 \\ y_P = y_1 - 3 \end{cases}$$

temos:
$(x_1 + 2 - 2)^2 + (y_1 - 3 + 3)^2 = 16 \rightarrow x_1^2 + y_2^2 = 16$

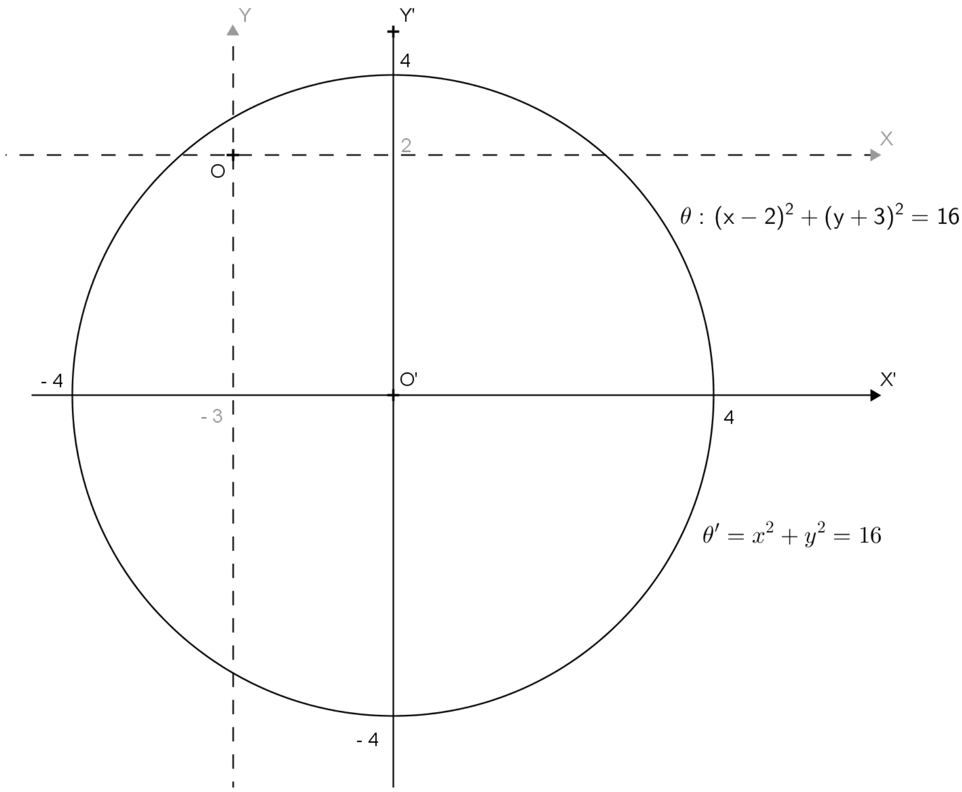

Figura 4.5: Translação

4.2 Rotação

Efetuar uma rotação no sistema XOY é determinar o sistema $X'O'Y'$ por meio de um giro do plano segundo um ângulo θ no sentido trigonométrico, fixando-se sua origem. Com o mesmo objetivo da translação, determinaremos as coordenadas do ponto dado no eixo rotacionado. Seja $P = (x_P, y_P)$ um ponto do plano XOY e θ sua rotação temos, da figura:

$$\begin{cases} x_P = \overline{OM} - \overline{NM} \\ y_P = \overline{NQ} + \overline{QP} \end{cases}$$

Do triângulo OMR:

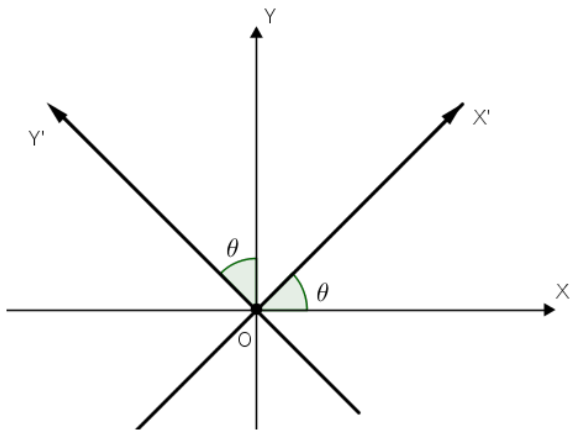

Figura 4.6: Rotação

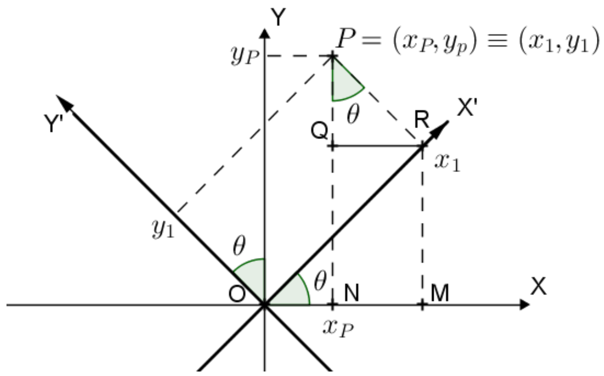

Figura 4.7: Rotação

$\cos\theta = \frac{\overline{OM}}{\overline{OR}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\overline{OM}}{x_1} \Rightarrow \overline{OM} = x_1 \cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{MR}}{\overline{OR}} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{MR}}{x_1} \Rightarrow \overline{MR} = x_1 \operatorname{sen}\theta$, como $\overline{MR} \equiv \overline{NQ}$, tem-se $\overline{NQ} = x_1 \operatorname{sen}\theta$.

Do triângulo PQR:
$\cos\theta = \frac{\overline{QP}}{\overline{PR}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\overline{QP}}{y_1} \Rightarrow \overline{QP} = y_1 \cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{QR}}{y_1} \Rightarrow \overline{QR} = y_1 \operatorname{sen}\theta$ como $\overline{QR} \equiv \overline{NM}$, tem-se $\overline{NM} = y_1 \operatorname{sen}\theta$. Substituindo as relações encontradas em

$$\begin{cases} x_P = \overline{OM} - \overline{NM} \\ y_P = \overline{NQ} + \overline{QP} \end{cases}$$

encontramos:

$$\begin{cases} x_P = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta \\ y_P = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta \end{cases}$$

Essas são as fórmulas de rotação para o ponto P. Essas equações podem ser escritas na

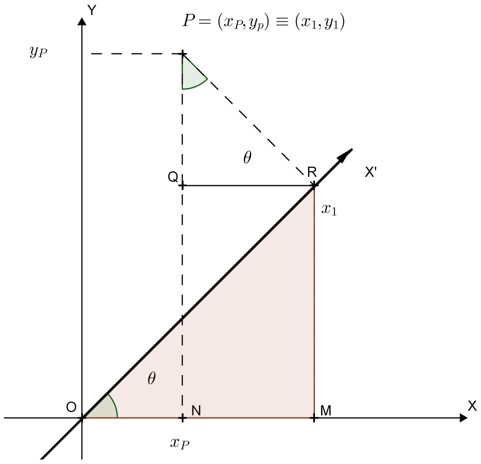

Figura 4.8: Rotação

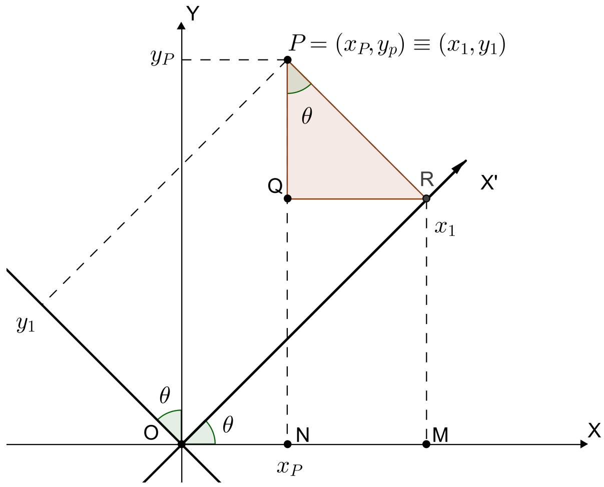

Figura 4.9: Rotação

forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

A matriz $\begin{bmatrix} M \end{bmatrix}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ é a matriz de rotação de um ângulo θ. Essa matriz efetua a mudança de coordenadas dos pontos no plano cartesiano segundo uma rotação θ.

Para encontrarmos as coordenadas dos pontos de um sistemas de eixos, já rotacionado, para o sistema XOY, usamos a matriz:
$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & cos\theta \end{bmatrix}$, assim:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$$

Exemplo 4. *Determinar as coordenadas do ponto $P = (-1, 3)$, no sistema XOY, para o eixo $X'OY'$ em uma rotação de 30^o.*

Usando a matriz de rotação, temos:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^o & -\operatorname{sen} 30^o \\ \operatorname{sen} 30^o & \cos 30^o \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

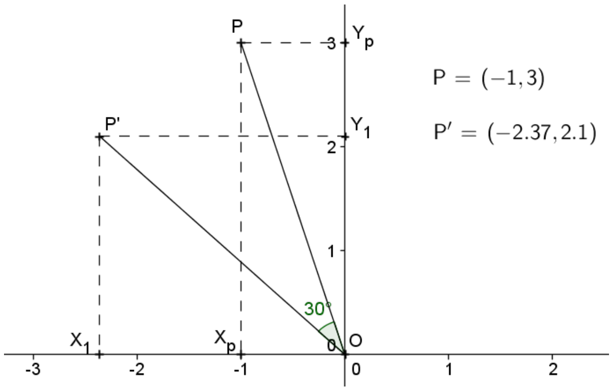

Figura 4.10: Rotação

Capítulo 5

Atividades com *GeoGebra*

O Geogebra é um software livre e colaborativo de matemática dinâmica, criado em 2001 por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg, Áustria, como tese de seu Doutorado em educação matemática. Esse programa foi traduzido em mais de 50 idiomas e é usado em mais de 190 países. Desde seu lançamento já houve várias atualizações propostas por usuários em todo o mundo. O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Portanto, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos e vetores, bem como derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. Nesse capítulo procuramos destacar sua utilização como uma ferramenta didática para construções geométricas, auxiliando de modo dinâmico, as construções que estamos familiarizados com régua e compasso.

5.1 Divisão de segmento

Atividade 1. *Avaliar a razão em que um ponto divide um segmento e definir ponto médio.*

- *Toma-se um segmento qualquer definido por dois pontos;*
- *Sobre o segmento $\overline{AB}$ marca-se um ponto C;*
- *Usando a ferramenta,* ***Segmento definido por Dois Pontos****, destacamos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, mostrando na* ***janela álgebra*** *c e d, correspondendo às medidas respectivas dos segmentos.*
- *Na caixa* ***entrada*** *digitamos c/d, determinando a razão entre os segmento;*
- *Agora é só mover o ponto C e observar o comportamento da razão entre os segmentos.*

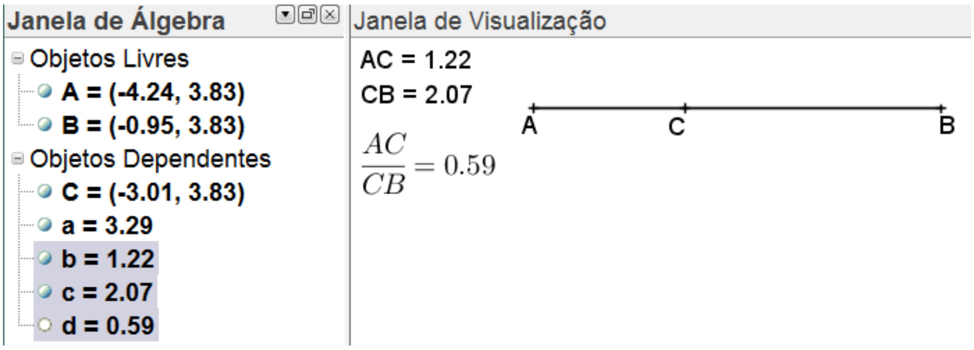

Figura 5.1: Divisão de segmento

Sugestões de conteúdos a explorar:

- *Adição e subtração de segmentos;*
- *Distância entre dois pontos;*
- *Razão e proporção;*
- *Ponto médio;*
- *média aritmética.*

***Link* 1.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade$_1$.html*

***Download* 1.** *http://www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade$_1$.ggb*

5.2 Pontos na mediatriz

Atividade 2. *Observar a equidistância dos extremos de um ponto tomado na mediatriz de um segmento.*

- *Toma-se um segmento qualquer definido por dois pontos;*
- *Usa-se a ferramenta* ***Mediatriz*** *selecionando os extremos do segmento tomado;*
- *Escolhe-se um ponto C sobre a mediatriz, e cria-se os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$;*
- *Move-se o ponto C sobre a mediatriz verificando as medidas dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ mantem-se iguais para qualquer posição de C.*

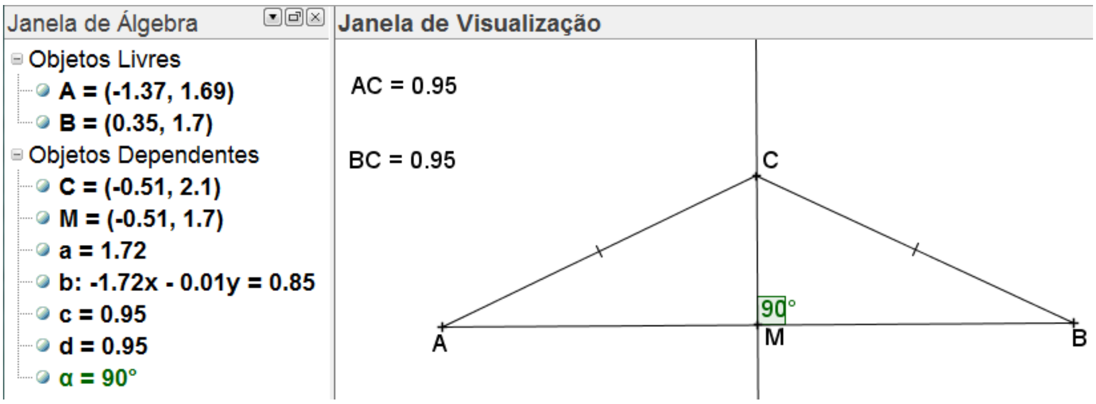

Figura 5.2: Pontos na mediatriz

Sugestões de conteúdos a explorar:

- *Retas perpendiculares;*
- *Triângulo isósceles;*
- *Área de triângulo;*
- *Distância entre ponto e reta;*
- *Média aritmética de segmentos;*
- *Teorema de Pitágoras.*

Construção*1.4*

***Link* 2.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade$_2$.html*

***Download* 2.** *http://www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade$_2$.ggb*

5.3 Pontos na bissetriz

Atividade 3. *Usando a ferramenta **bissetriz** para verificar a equidistância dos seus pontos aos lados de um ângulo dado.*

- *Escolhe-se três pontos A, B e C não colineares e com eles traçamos duas semirretas de mesma origem B;*

- *Usa-se a ferramenta **bissetriz**, e selecionamos os pontos A, B e C;*

- *Toma-se um ponto D sobre ela;*

- *Usando-se a ferramenta **Reta Perpendicular** encontra-se as projeções de D sobre os lados do ângulo. Movimentando-se D, verificamos que as medidas de sua distância aos lados é a mesma.*

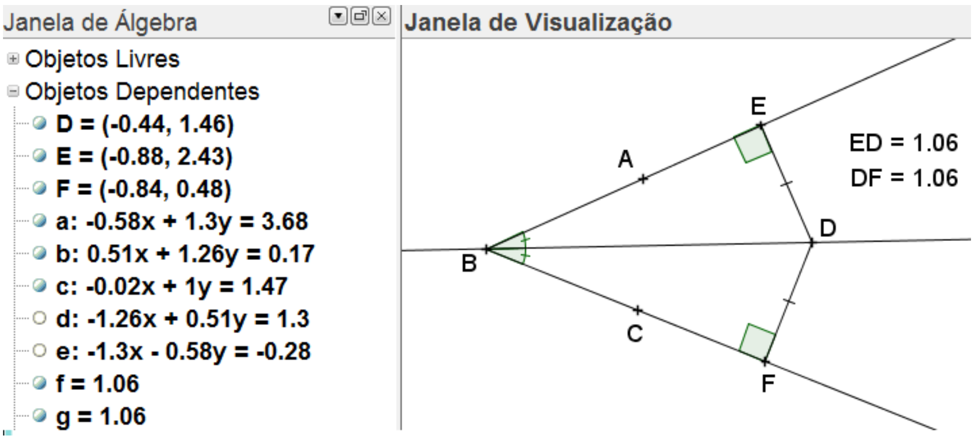

Figura 5.3: Pontos na bissetriz

Sugestões de conteúdos a explorar:

- *Congruência de triângulos;*

- *Simetria;*

- *Equivalência de ângulos;*

- *Razões trigonométricas;*

- *Divisão reiterada de ângulo.*
  Construção:1.6.

***Link* 3.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade3.html*

***Download* 3.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade3.ggb*

5.4 Ponto no arco capaz

Atividade 4. *Mover um ponto no arco capaz e observar a equivalência dos ângulos internos.*

- *Constrói-se o arco capaz, como mostrado na Construção 4 do Capitulo 1;*
- *Toma-se um ponto P no arco $\widehat{AB}$;*
- *Usando a ferramenta **ângulo**, e selecionando os pontos A, B e P, nesta ordem, cria-se o ângulo γ;*
- *O ponto P pode ser movido sobre o $\widehat{AB}$, mostrando que o ângulo γ mantem-se constante.* ***Sugestões de conteúdos a explorar:***

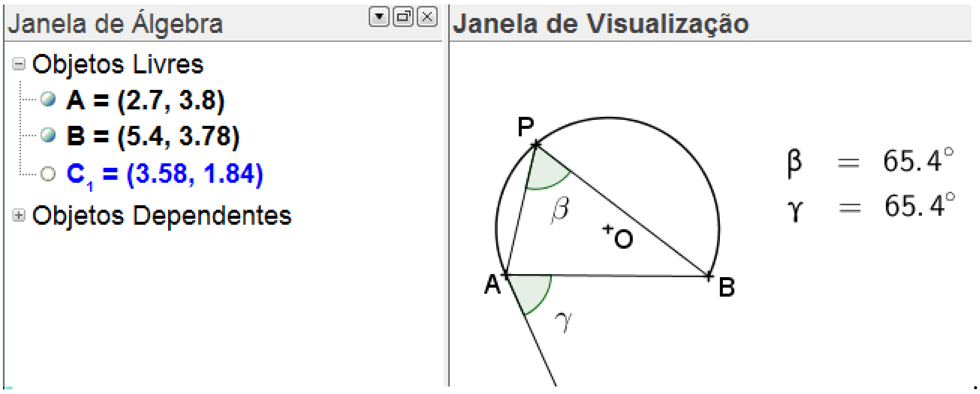

Figura 5.4: Pontos no arco capaz

- *Ângulo central;*
- *Ângulo inscrito;*
- *Ângulo de segmento.*

Construção:1.7.

***Link* 4.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade$_4$.html*

***Download* 4.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade$_4$.ggb*

5.5 Elipse por pontos

Atividade 5. *Trabalhando a elipse, com centro na origem e* $\overline{A_1A_2}$ *pertencente ao eixo* OX, *verificando a definição.*

- *Toma-se dois pontos* F_1 *e* F_2, *por exemplo:* $F_1 = (-4, 0)$ *e* $F_2 = (4, 0)$*;*
- *Indica-se um ponto* P, *qualquer do plano, por exemplo* $P = (0, 3)$*;*
- *Usa-se a ferramenta* ***elipse***, *selecionando-se* F_1 *e* F_2 *(os focos) e por último o ponto* P*;*
- *Na janela de álgebra aparecerá a equação da elipse, pode-se configurar a forma da equação em suas propriedades, optamos pela forma reduzida.*
- *Toma-se um ponto* Q *na elipse e determina-se os segmentos* $\overline{QF_1} = d_1$ *e* $\overline{QF_2} = d_2$*;*
- *Move-se* Q *na elipse verificando que* $d_1 + d_2 = 10$, *no exemplo, para qualquer posição do ponto* Q.

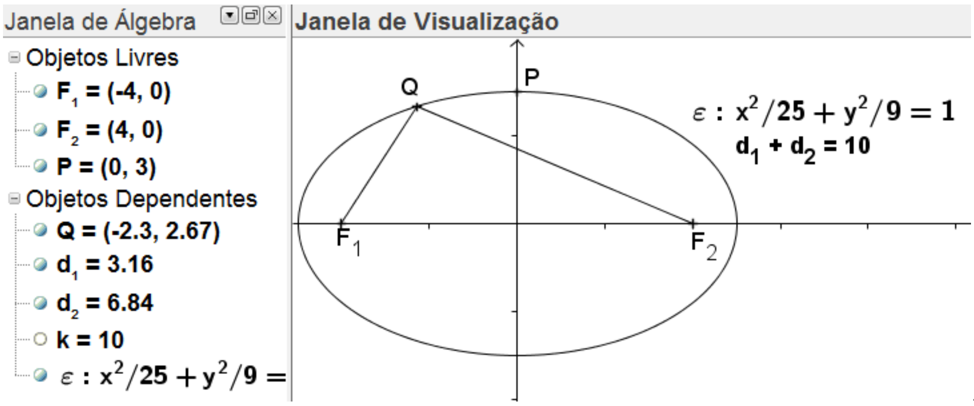

Figura 5.5: Elipse por pontos

Sugestões de conteúdos a explorar:

- *Distância entre dois pontos;*
- *Teorema de Pitágoras;*
- *Equação do 2º grau;*
- *Geometria espacial;*

Construção:*5.*

***Link* 5.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade5.html*

***Download* 5.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade5.ggb*

5.6 Excentricidade

Atividade 6. *Conhecida a elipse, movimentaremos seus focos para observar a sua excentricidade.*

- *Toma-se uma reta r, e nela, escolhe-se um ponto O (centro da elipse);*
- *Toma-se um ponto F_1 (um dos focos), em r;*
- *Usando-se a ferramenta* ***Reflexão em Relação a um Ponto****, encontra-se F_2, simétrico de F_1 em relação a O;*
- *Escolhe-se $A_1 \in r$ tal que $A_1 \notin \overline{F_1F_2}$;*
- *Determinam-se os segmentos $a = \overline{A_1O}$ e $c = \overline{F_1O}$;*
- *Usa-se a ferramenta* ***Elipse****, selecionando-se os pontos F_1, F_2 e A_1;*
- *Na janela* ***entrada****, digita-se $e = c/a$;*
- *Movimenta-se F_1 ou A_1, verificando a relação entre a excentricidade e a forma da elipse.*

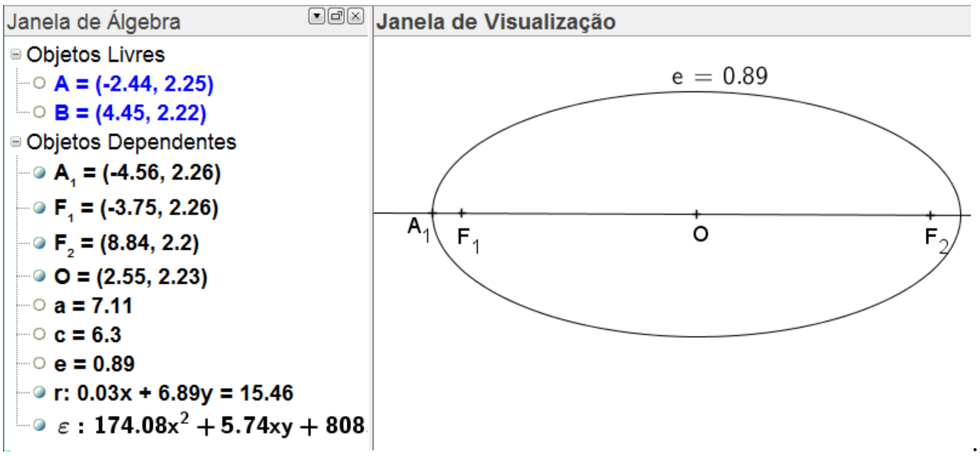

Figura 5.6: Excentricidade da elipse

***Link* 6.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade$_6$.html*

***Download* 6.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade$_6$.ggb*

5.7 Elipse por circunferências

Atividade 7. *Usar uma circunferência de centro definido e ponto interno para criar uma elipse.*

- *Determina-se uma circunferência* λ *de centro* F_1 *e raio qualquer;*
- *Escolhe-se um ponto* F_2 *interior à* λ*;*
- *Toma-se um ponto* $P \in \lambda$*;*
- *Define-se a mediatriz de* $\overline{F_2P}$*;*
- *Determina-se o segmento* $\overline{F_1P}$*, localizando sua interseção* Q *com a mediatriz traçada;*
- *Usando-se a ferramenta* ***Lugar Geométrico****, escolhe-se* Q *e em seguida* P*, a elipse será gerada;*
- *Move-se o ponto* P*, observando* Q *percorrer a elipse.*

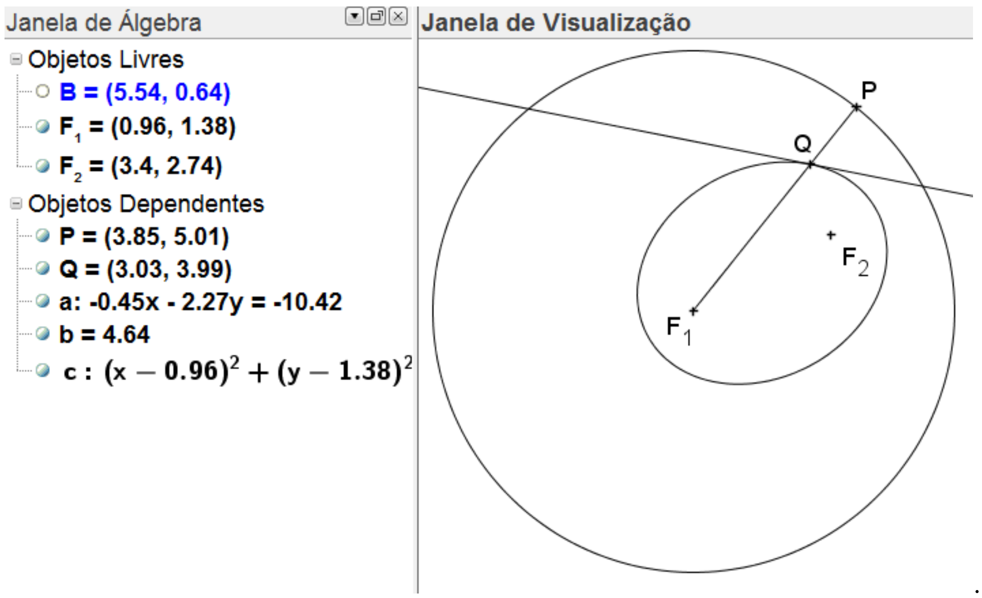

Figura 5.7: Elipse por circunferências

Construção:3.3.1.

Link 7. *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade*$_7$*.html*

Download 7. *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade*$_7$*.ggb*

5.8 Translação da elipse

Atividade 8. *Dada uma elipse, iremos movê-la no plano por translação, mudando seu centro e mantendo suas características originais.*

- *Determina-se o centro* $O = (0, 0)$*;*
- *Na janela* ***entrada*** *inserimos a equação reduzida de uma elipse, usando as coordenadas de* O*, no exemplo tomamos:* $(x - x(O))^2/9 + (y - y(O))^2/4 = 1$*;*
- *Ao garantirmos que o centro da elipse é o ponto* O*, basta transladarmos esse ponto para que a elipse modifique sua equação para o novo centro.*
- *No exemplo temos a elipse* c_1 *como a translação de* c *para o centro* $O_1 = (8, 2)$*.*

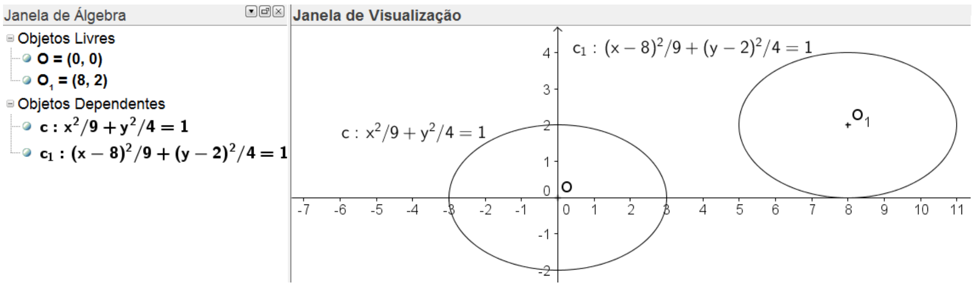

Figura 5.8: Translação da elipse

***Link* 8.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade*$_8$*.html*

***Download* 8.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade*$_8$*.ggb*

5.9 Rotação da elipse

Atividade 9. *Efetuar a rotação de uma elipse e verificar sua equação depois de rotacionada.*

- *Usaremos a elipse da atividade anterior;*
- *Usando-se a ferramenta **Rotação em Torno de um Ponto por um Ângulo**, seleciona-se a elipse e depois seu centro;*
- *Determina-se o ângulo de rotação e o sentido, no exemplo 45^o e anti-horário;*
- *c' e a elipse c rotacionada.*

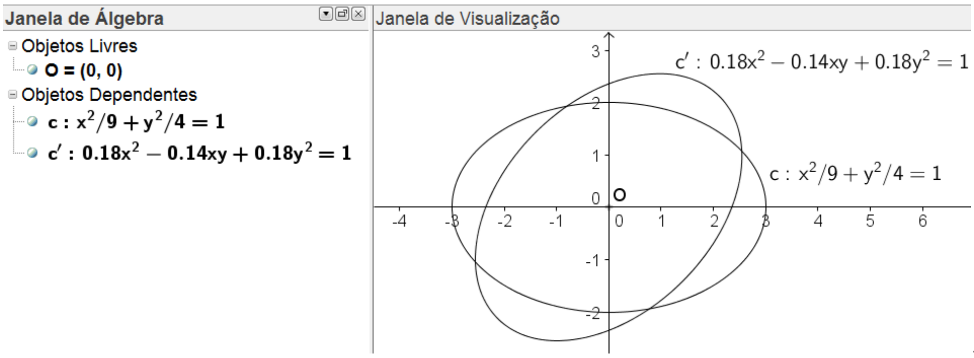

Figura 5.9: Rotação da elipse

***Link* 9.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade$_9$.html*

***Download* 9.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade$_9$.ggb*

5.10 Hipérbole por pontos

Atividade 10. *Verificar a definição da hipérbole, tomando-se seus focos e um ponto qualquer.*

- *Tomam-se* F_1 *e* F_2*, focos da hipérbole, arbitrários e escolhe-se um ponto* P*;*
- *Usa-se a ferramenta* ***Hipérbole****, selecionando-se os focos e depois o ponto* P*;*
- *Toma-se um ponto* Q*, em um dos ramos da hipérbole;*
- *Determina-se os segmentos* $d_1 = \overline{QF_1} e d_2 = \overline{QF_2}$*;*
- *Na caixa* ***entrada*** *digite:* $k = abs(d_1 - d_2)$*, está determinado o módulo da diferença das distâncias;*
- *Move-se* Q *sobre o ramo observando que a distância* k *mantêm-se constante.*

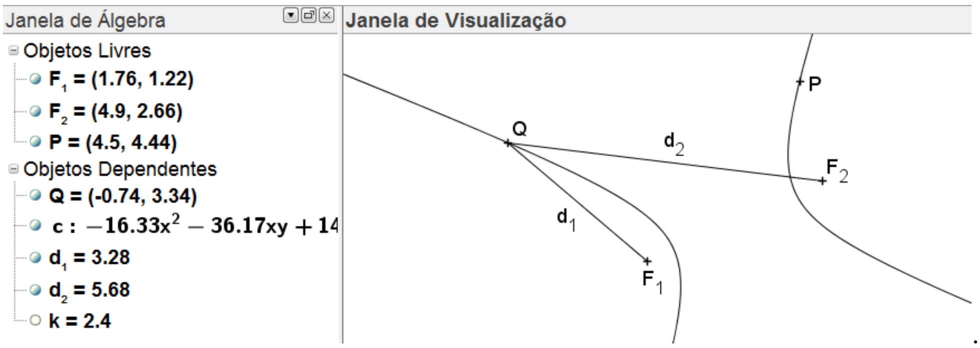

Figura 5.10: Hipérbole por pontos

Link **10.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade*$_1$*0.html*

Download **10.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade*$_1$*0.ggb*

5.11 Excentricidade

Atividade 11. *Conhecida a hipérbole, movimentaremos seus focos para observar a sua excentricidade.*

- *Toma-se uma reta r, e nela, escolhe-se um ponto O (centro da hipérbole);*
- *Toma-se um ponto F_1 (um dos focos), em r;*
- *Usando-se a ferramenta* ***Reflexão em Relação a um Ponto****, encontra-se F_2, simétrico de F_1 em relação a O;*
- *Escolhe-se $A_1 \in r$ tal que $A_1 \in \overline{F_1F_2}$;*
- *Usa-se a ferramenta* ***Hipérbole****, selecionando-se os focos e por último o ponto A_1,*
- *Determinam-se os segmentos $a = \overline{A_1O}$ e $c = \overline{F_1O}$;*
- *Na janela* ***entrada****, digita-se $e = c/a$;*
- *Movimenta-se F_1 verificando a relação entre e e a forma da hipérbole.*

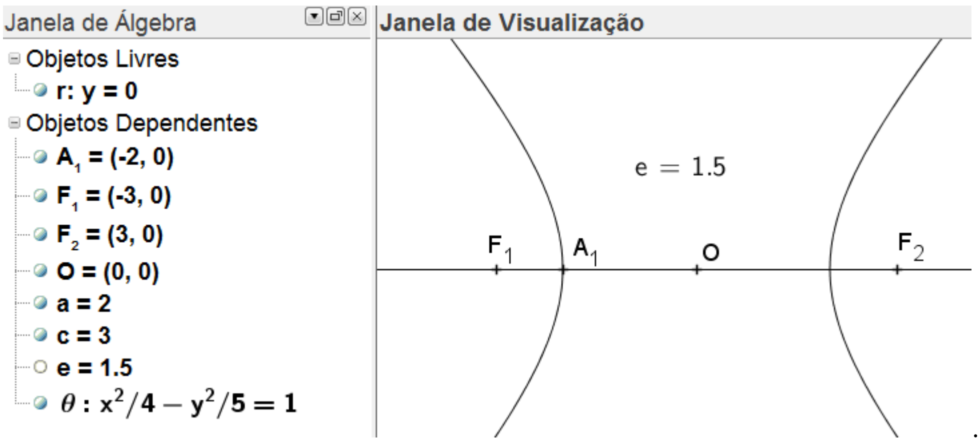

Figura 5.11: Excentricidade da hipérbole

Link **11.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade$_1$1.html*

Download **11.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade$_1$1.ggb*

5.12 Hipérbole por circunferências.

Atividade 12. *Usar uma circunferência de centro definido e ponto externo para criar um ramo da hipérbole.*

- *Determina-se uma circunferência* λ *de centro* F_1 *e raio qualquer;*
- *Escolhe-se um ponto* F_2 *exterior à* λ*;*
- *Toma-se um ponto* $P \in \lambda$*;*
- *Define-se a mediatriz de* $\overline{F_2P}$*;*
- *Determina-se a semirreta de origem* F_1 *passando por* P*, localizando sua interseção* Q *com a mediatriz traçada;*
- *Usando-se a ferramenta* ***Lugar Geométrico****, escolhe-se* Q *e em seguida* P*, a hipérbole será gerada;*
- *Move-se o ponto* P*, observando* Q *percorrer a hipérbole.*

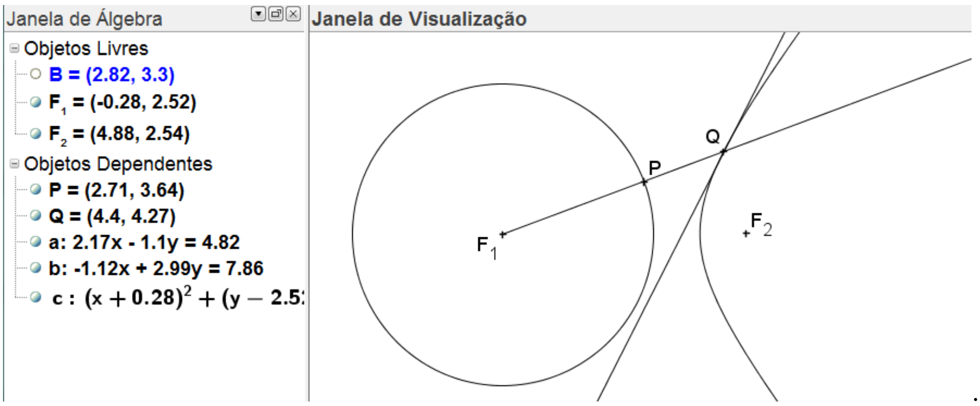

Figura 5.12: Hipérbole por circunferências

***Link* 12.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade*$_1$*2.html*

***Download* 12.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade*$_1$*2.ggb*

5.13 Translação da hipérbole

Atividade 13. *Dada uma hipérbole, iremos movê-la no plano por translação, verificando as mudanças em sua equação.*

- *Determina-se o centro* $O = (0, 0)$*;*
- *Na janela* ***entrada*** *inserimos a equação reduzida de uma hipérbole, usando as coordenadas de* O*, no exemplo tomamos:* $(x - x(O))^2/9 - (y - y(O))^2/16 = 1$*;*
- *Como o centro da hipérbole é o ponto* O*, ao transladarmos esse ponto determinamos uma nova hipérbole com as mesmas características da primeira.*
- *No exemplo temos a hipérbole* c_1 *como a translação de* c *para o centro* $O_1 = (8, 2)$*.*

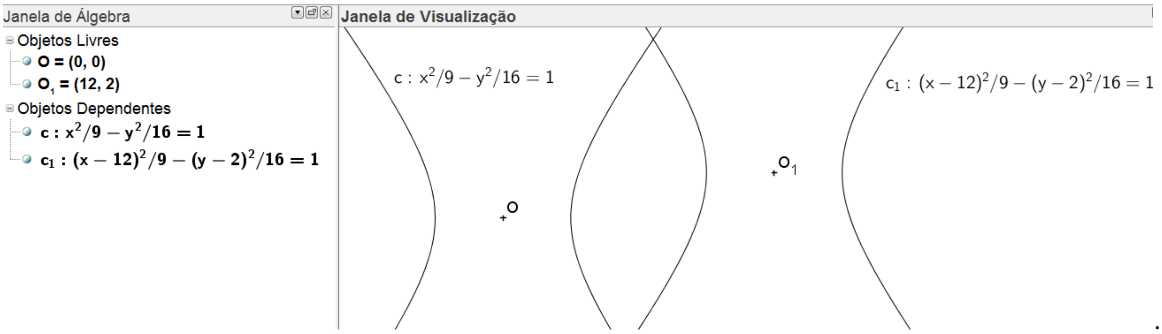

Figura 5.13: Translação da hipérbole

Link **13.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade*$_1$*3.html*

Download **13.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade*$_1$*3.ggb*

5.14 Rotação da hipérbole

Atividade 14. *Efetuar a rotação de uma hipérbole e verificar sua equação depois de rotacionada.*

- *Usaremos a hipérbole da atividade anterior;*
- *Usando-se a ferramenta **Rotação em Torno de um Ponto por um Ângulo**, seleciona-se a hipérbole e depois seu centro;*
- *Determina-se o ângulo de rotação e o sentido, no exemplo* 30^o *e anti-horário;*
- c' *é a hipérbole* c *rotacionada de* 30^o.

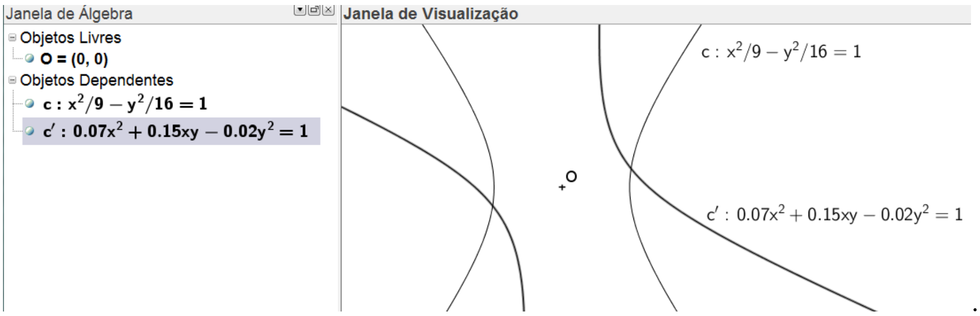

Figura 5.14: Rotação da hipérbole

***Link* 14.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade*$_1$*4.html*

***Download* 14.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade*$_1$*4.ggb*

5.15 Parábola por pontos

Atividade 15. *Construir uma parábola e reconhecer a definição movimentando-se um ponto na curva.*

- *Determina-se uma reta r no plano;*
- *Toma-se um ponto $F \notin r$;*
- *Usa-se a ferramenta **Parábola** selecionando-se r e F;*
- *Na parábola, toma-se um ponto P;*
- *Determina-se a projeção ortogonal P' de P em r;*
- *Usa-se a ferramenta **distância** e definem-se os segmentos $d_1 = \overline{PP'}$ e $d_2 = \overline{PF}$;*
- *Na caixa **entrada**, defini-se $k = d_1 + d_2$;*
- *Move-se o ponto P e observa-se que k é constante.*

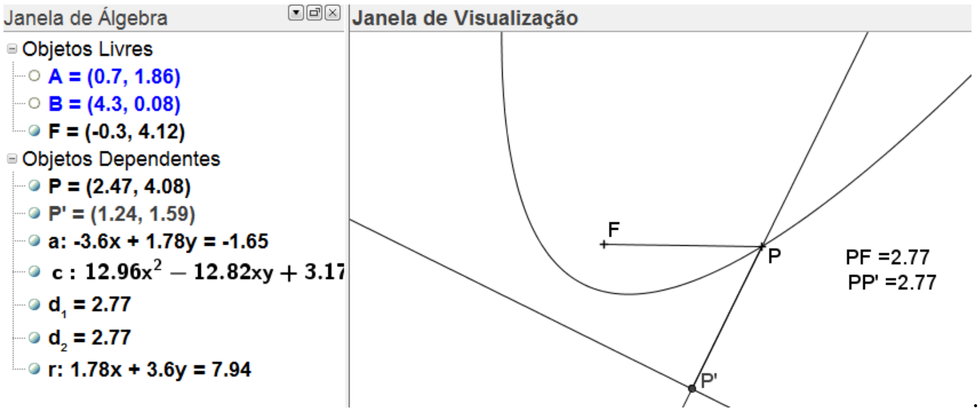

Figura 5.15: Parábola por pontos

***Link* 15.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade$_1$5.html*

***Download* 15.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade$_1$5.ggb*

5.16 Parábola por circunferências

Atividade 16. *Construir uma parábola como o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam pelo foco e tangenciam a diretriz.*

- *Determina-se uma reta r no plano;*
- *Toma-se um ponto $F \notin r$;*
- *Toma-se um ponto $P \in r$;*
- *Usa-se a ferramenta* ***Mediatriz*** *selecionando-se os pontos F e P;*
- *Levanta-se uma perpendicular por P e determina-se sua interseção O com a mediatriz tomada;*
- *Usa-se a ferramenta* ***Parábola****, escolhendo-se r e depois F;*
- *Movimenta-se P e verifica-se os centros percorrendo a parábola.*

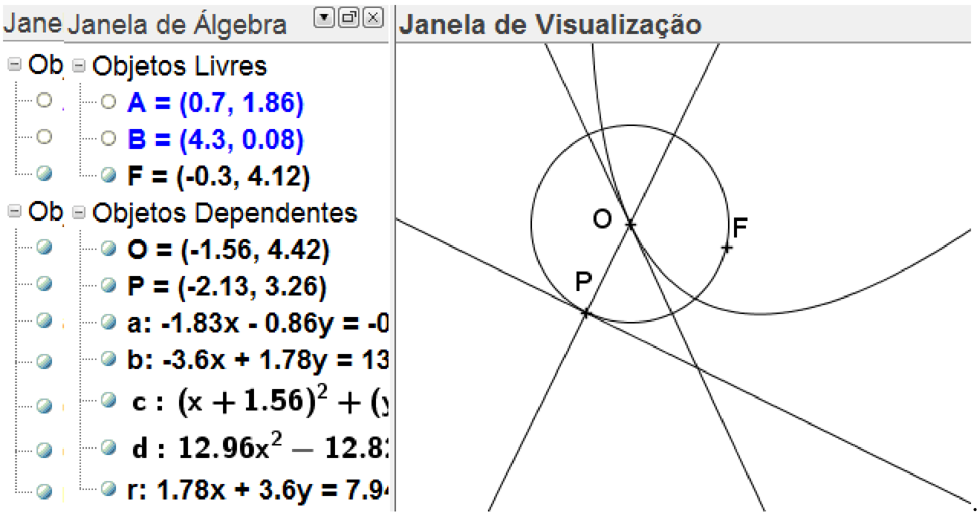

Figura 5.16: Parábola por circunferências

Link **16.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade$_1$6.html*

Download **16.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade$_1$6.ggb*

5.17 Translação da parábola

Atividade 17. *Conhecida a parábola, transladaremos seu centro e verificaremos o comportamento de sua equação.*

- *Determina-se o centro* $O = (0, 0)$*;*
- *Na janela* ***entrada*** *inserimos a equação reduzida de uma parábola, usando as coordenadas de* O*, no exemplo tomamos:* $(y - y(O)) = 2(x - x(O))^2$*;*
- *Ao garantirmos que o centro da parábola é o ponto* O*, basta transladarmos esse ponto para que a parábola modifique sua equação para o novo centro.*
- *No exemplo temos a parábola* d *como a translação de* b *para o centro* $O' = (7, 2)$.

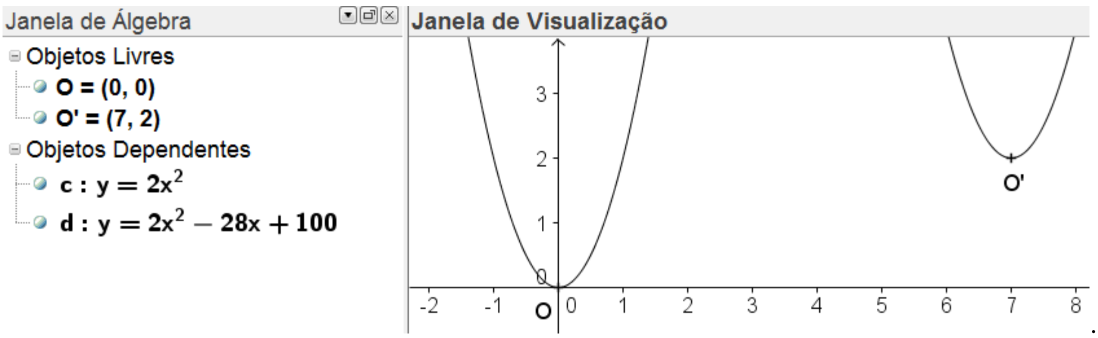

Figura 5.17: Translação da parábola

***Link* 17.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade*$_1$*7.html*

***Download* 17.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade*$_1$*7.ggb*

5.18 Rotação da parábola

Atividade 18. *Efetuar a rotação de uma parábola e verificar sua equação depois de rotacionada.*

- *Usaremos a parábola da atividade anterior;*
- *Usando-se a ferramenta* ***Rotação em Torno de um Ponto por um Ângulo****, seleciona-se a parábola e depois seu centro;*
- *Determina-se o ângulo de rotação e o sentido, no exemplo* 60^o *e anti-horário;*
- c' *é a parábola c rotacionada.*

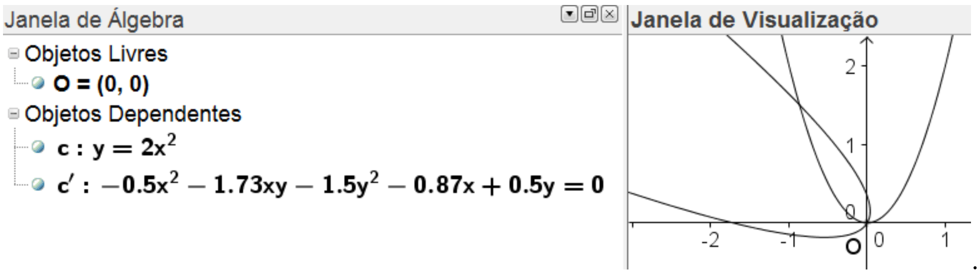

Figura 5.18: Rotação da parábola

Link **18.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/html/atividade*$_1$*8.html*

Download **18.** *www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra/atividade*$_1$*8.ggb*

Capítulo 6

Considerações Finais

O propósito deste trabalho é de incentivar os professores da educação básica a usar recursos tecnológicos que favoreçam o aprendizado. Concentrei minha atenção no GeoGebra em virtude das facilidades, gratuidade, atualizações e interações que ele proporciona.

Não tenho dúvida de que uma ferramenta tecnológica, quando empregada adequadamente, favorece consideravelmente o nível da explicação de conteúdos em que o grau de dificuldade no aprendizado é historicamente ruim. A geometria analítica é, sem dúvida, um assunto pouco discutido no ensino médio e mais crítica ainda a situação das cônicas.

Espero que esse material seja um motivador ao uso de novas ferramentas em sala de aula. Hoje já realidade na maioria das escolas públicas, um laboratório de informática, um projetor, um computador à disposição, em fim os meios estão disponíveis.

O trabalho apenas começou, todas atividades aqui mencionadas estão à disposição para utilização no site: www.mat.ufam.edu.br/profmat/geogebra. As discussões serão levadas a outros tópicos da educação básica. No site acima, alimentaremos um banco de atividades para que os docentes e discentes interessados, possam expor suas experiências e levantarmos questionamentos para novas abordagens.

Referências Bibliográficas

[1] PUTNOKI, José Carlos. Desenho Geométrico. Scipione: São Paulo, 1993.

[2] ROQUE, Tatiana. História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Zahar: Rio de janeiro, 2012.

[3] BALDIN, Y.Y., FURUYA, Y.K.S. Geometria analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra. EduFSCar: São Carlos, 2011,

[4] BARBOSA, J.L.M. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática. BBM: Rio de Janeiro, 1994.

[5] BASTOS, R. Notas sobre o ensino de Geometria: Transformações Geométricas. Educação e Matemática. Revista da APM, Lisboa, n.94, 2007.

[6] BOYER, C.B. História da Matemática. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

[7] HOHENWARTER, Marcus. GeoGebra Quickstart. Disponível em: <www.geogebra.org>. Acesso em: 05 mar. 2013.

[8] MENTRARD, Daniel. GeoGebra Quickstart. Disponível em: <www.geogebratube.org>. Acesso em: 18 mai. 2013.

[9] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 9: Geometria Plana. 7ª ed. São Paulo: Atual, 1985.

[10] EVES, H. Tópicos de História da Matemática - Geometria. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

[11] SATO, Jocelino. As cônicas e suas aplicações. Disponível em <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node1.html>. Acesso em: 02 mar. 2013.

[12] FEITOSA, Miguel O. Cálculo vetorial e geometria analítica: exercícios propostos e resolvidos. São Paulo: Atlas, 1996.

[13] MORGADO, A.C., WAGNER, E., JORGE, M. Geometria II. Fortaleza, VestSeller, 2008.

[14] VENTURI, Jacir J. Conicas e quadricas. Disponível em <www.geometriaanalitica.com.br>. Acesso em: 06 mar. 2013.