

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

*NÚMEROS COMPLEXOS E CÔNICAS*

Tacildo de Souza Araújo

MANAUS

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Tacildo de Souza Araújo

*NÚMEROS COMPLEXOS E CÔNICAS*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto

MANAUS

2014

Ficha Catalográfica  
(Catalogação realizada pela Biblioteca Central da UFAM)

A663n Araújo, Tacildo de Souza.  
Números complexos e cônicas / Tacildo de Souza Araújo. - 2014.  
79 f. : il.  
Dissertação (mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Amazonas.  
Orientador: Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto.

1. Números complexos 2. Geometria 3. Ensino-aprendizagem I. Pinto, Alfredo Wagner Martins, orientador II. Universidade Federal do Amazonas  
III. Título

CDU (1997): 511.11 (043.3)

TACILDO DE SOUZA ARAÚJO

NÚMEROS COMPLEXOS E CÔNICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em Maio de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto  
Presidente

Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto  
Membro

Prof. Dr. Sandro Dimy Barbosa Bitar  
Membro

# AGRADECIMENTOS

Para começar, gostaria de agradecer primeiramente a Deus, por tudo que me concedeu até o presente momento.

Em segundo lugar, agradeço à minha mãe, Francisca, pelo exemplo que desde sempre me transmitiu, de serenidade, dedicação e empenho e principalmente o gosto pelo estudo e pela descoberta... eternamente grato por tudo que me ensinou e que continua me ensinando.

À minha esposa, Naira, que sempre me incentivou durante a realização deste trabalho.

À SBM pelo excelente projeto e, acima de tudo, por acreditar na educação brasileira.

Ao meu orientador, professor Doutor Alfredo Wagner Martins Pinto, por sua indiscutível competência, empenho e disponibilidade sempre que necessitei.

Aos professores do PROFMAT pelo excelente trabalho, contribuição para minha formação e realização deste trabalho.

Não poderia deixar de agradecer aos meus colegas de sala pelo companheirismo, paciência, união e força para superar todos os obstáculos encontrados durante a realização do mestrado.

## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo utilizar a estrutura geométrica dos números complexos para classificar as cônicas, mesmo quando estas não têm seus eixos paralelos aos eixos coordenados do plano, e determinar seus elementos através de uma equação envolvendo termos quadráticos e lineares da variável complexa  $z$ . Com a finalidade de cumprir o objetivo proposto, elaborou-se uma sequência didática que aborda todos os recursos necessários para esse fim. Desse modo, espera-se que este trabalho contribua para a melhoria do ensino-aprendizagem de cônicas, por meio de números complexos, e possivelmente servir de elemento motivador para alunos e professores que busquem aprimorar seus conhecimentos nos respectivos assuntos.

Palavras-chave: Números Complexos, Cônicas, Ensino-Aprendizagem e Representação Geométrica.

# ABSTRACT

This paper has the objective use the geometric structure of the complex numbers to classify the conics, yet latter their axes not to have parallel to the axes coordinates of the plane , and determine its elements through an equation involving quadratic and linear terms of the complex variable  $z$  . With the aim to fulfill the proposed objective, was elaborated a didactic sequence that approach all the necessary resources for this purpose. Thus, it is expected that this work will contribute to the improvement of teaching and learning conics through complex numbers, and possibly serve as a motivator element for students and teachers that seek to enhance their knowledge in their respective subjects..

Keywords: Complex Numbers, Conics, Teaching-Learning and Geometric Representation

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Um Breve Histórico dos Números Complexos</b>	<b>4</b>
1.1 O surgimento dos números complexos . . . . .	4
1.2 As primeiras interpretações geométricas . . . . .	7
<b>2 Números Complexos</b>	<b>8</b>
2.1 Corpo . . . . .	8
2.2 O Corpo dos Números Complexos . . . . .	8
2.3 A Forma Algébrica . . . . .	9
2.3.1 Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ . . . . .	9
2.3.2 A Unidade Imaginária . . . . .	10
2.4 Os Números Complexos como Pontos do Plano . . . . .	10
2.5 Os Números Complexos como Vetores do Plano . . . . .	12
2.5.1 Interpretação Geométrica para a Soma e a Subtração de dois Números Complexos . . . . .	15
2.5.2 Ângulo entre dois Números Complexos . . . . .	16
2.5.3 Interpretação Geométrica para a Multiplicação e a Divisão de dois Números Complexos . . . . .	17
2.5.4 Interpretação Geométrica para $\bar{z}$ , $-z$ e $z \cdot i$ . . . . .	18
2.5.5 Interpretação Geométrica para outras operações envolvendo números complexos . . . . .	19
2.5.6 Uma Fórmula para o Cálculo da Raiz Quadrada de um Número Complexo . . . . .	20
2.6 Isometrias no Plano Complexo . . . . .	21
<b>3 Lugares Geométricos e as Cônicas</b>	<b>24</b>
3.1 Elipse . . . . .	24
3.2 Hipérbole . . . . .	30
3.3 Parábola . . . . .	36



<b>4</b>	<b>Números Complexos e Cônicas</b>	<b>39</b>
4.1	Considerações Iniciais . . . . .	39
4.2	A equação $\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$ com B e D Reais, em Coordenadas Cartesianas . . . . .	42
4.3	Análise da equação $\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$ com B e D Reais.	43
4.4	Resumo da Equação na Forma Canônica . . . . .	46
4.5	Cônicas em Coordenadas Cartesianas . . . . .	47
4.6	Algoritmo . . . . .	48
4.7	Aplicações . . . . .	49
<b>A</b>	<b>Outra Demonstração para Elipses e Hipérboles</b>	<b>61</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>69</b>

## Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^*$	Conjunto dos números reais não nulos.
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números imaginários puros.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
$Arg(z)$	Argumento do complexo $z$ .
$arg(z)$	Conjunto dos argumentos do complexo $z$ .
$Re(z)$	Parte real do número complexo $z$ .
$Im(z)$	Parte imaginária do número complexo $z$ .
$sig(x)$	Sinal do número real $x$ .
$\bar{z}$	Conjugado do número complexo $z$ .
$ z $	Módulo do número complexo $z$ .
$d(z, w)$	Distância entre os números complexos $z$ e $w$ .
$d(P, r)$	Distância entre o ponto $P$ e a reta $r$ .
$\theta(z_1, z_2)$	Ângulo orientado entre os complexos $z_1$ e $z_2$ .
■	Indica o fim de uma demonstração.

# Introdução

O primeiro contato dos estudantes com os números complexos ocorre sem dúvida no 3º ano do Ensino Médio. É a partir deste ponto que o professor e muitos livros didáticos brasileiros tornam-se contribuintes potenciais para a posição singular dada a esses números, que segundo [17], muitas vezes são taxados de estranhos, de compreensão difícil e, sobretudo, inúteis.

A motivação para o estudo dos números complexos no Ensino Médio está relacionada, na maioria das vezes, ao estudo dos polinômios, cujos primeiros desempenham um papel de grande importância, além de contribuir para a demonstração de um dos mais belos teoremas da matemática: o *Teorema Fundamental da Álgebra*. Todavia, tal motivação não é, sem dúvidas, a razão para tratamento menos prestimoso dado a tais números. O fato é que na maioria das escolas, os números complexos recebem um tratamento puramente algébrico, desprovido de significado e cujo surgimento se deu pela necessidade de fornecer uma solução "imaginária" para equações quadráticas com discriminante negativo.

Contrariamente ao que muitos afirmam, os números complexos têm sua origem muito bem documentada. Este fato pode ser comprovado em vários livros de História da Matemática, ao leitor interessado recomendamos [6] e [7]. A verdade é que esses números surgiram quando um grupo de matemáticos procurava uma fórmula que fornecesse as raízes para equações do 3º grau em função de seus coeficientes.

Segundo [17], a maioria dos livros de matemática define números complexos da seguinte forma: "Um número complexo é um número da forma  $a + bi$ , com  $a$  e  $b$  reais e  $i = \sqrt{-1}$ ". Em seguida, são dados alguns exemplos desses números, acompanhados de vários exercícios envolvendo as operações de adição e multiplicação. "Embora a definição acima não contenha nada de errado, a equação  $i = \sqrt{-1}$  causa certo desconforto aos alunos, pois durante anos foram convencidos de que o quadrado de um número não pode ser negativo e agora existe um número novo cujo quadrado é igual a  $-1$ ".

A relação entre a geometria e os números complexos iniciada John Wallis<sup>1</sup> (1616-1703) e explorada posteriormente por Gauss (1777 - 1855) na demonstração de diversos resultados em Geometria Plana, empresta mais significado aos números complexos. Assim, em vez

---

<sup>1</sup>Apesar de alguns autores atribuírem a primeira tentativa de associação dos números complexos a objetos do plano ao matemático norueguês Caspar Wessel (1745 - 1818), segundo [6] a ideia, porém, está latente na sugestão feita por John Wallis já em 1673, de que os números imaginários puros eram suscetíveis de ser representados numa reta perpendicular ao eixo real.

de representar um número complexo unicamente pela sua forma algébrica  $a + bi$ , pode-se introduzir sua representação pelo par ordenado  $(a, b)$  indicando que esses números nada mais são do que pontos ou vetores no plano e cujas operações de soma e de multiplicação representam movimentos no mesmo.

A representação de um número complexo através de pares ordenados já introduz um significado inicial ao  $i$ , uma vez que este passa a ser o ponto  $(0, 1)$  ou o vetor de origem  $(0, 0)$  e extremidade no ponto  $(0, 1)$ . Com poucos exemplos e sem muito rigor matemático é possível mostrar aos alunos que multiplicar um complexo  $z$  por  $i$  significa rotacionar o vetor representante de  $z$  de um ângulo  $\frac{\pi}{2}$  em torno da origem no sentido anti-horário, além disso, multiplicar um complexo  $z$  por  $i^2 = i \cdot i$  significa aplicar duas rotações de  $90^\circ$  ao vetor representante de  $z$ , isto é, uma simetria de  $z$  em relação a origem.

No desenvolvimento deste trabalho, serão apresentados e demonstrados alguns dos resultados mais importantes envolvendo números complexos. Indicaremos, sempre que possível, a interpretação geométrica para tais resultados e, além disso, no último capítulo apresentamos um estudo das cônicas através dos números complexos que possibilitará a qualquer aluno do 3º Ano do Ensino Médio determinar os elementos das cônicas quando os eixos das mesmas não forem paralelos aos eixos coordenados do plano.

Assim, a motivação para criação deste trabalho consiste na atribuição de significados essencialmente geométricos, ressaltando a eficácia desses números na representação e movimentação de diversos objetos geométricos no plano.

## Estrutura do Trabalho

Começamos este trabalho exibindo um histórico sobre os números complexos, mostrando como se deu o desenvolvimento deste conjunto ao longo do tempo.

No capítulo 2 introduzimos interpretações geométricas para as principais operações envolvendo números complexos, tais como soma, multiplicação, divisão, potências de  $i$ , raízes de números complexos. Além destas, são apresentadas outras propriedades importantes como o transporte paralelo, rotação em torno de um ponto arbitrário e em torno de uma reta arbitrária, produto escalar entre dois números complexos.

No capítulo 3 iniciamos o estudo das cônicas baseado nos conceitos tradicionais de elipse, hipérbole e parábola. Em seguida, mostramos que acrescentando uma variante na definição de parábola é possível obter elipses e hipérbolas, ou seja, mostramos que assim como a parábola, as elipses e as hipérbolas podem ser definidas por meio de um ponto fixo e uma diretriz.

No último capítulo desenvolvemos um estudo dos números complexos aplicados às cônicas. Mostramos que sem um estudo avançado desses números é possível determinar todos os elementos das cônicas mesmo quando seus eixos não são paralelos aos eixos coordenados do plano, permitindo desta forma que qualquer aluno do 3º Ano do Ensino Médio possa determiná-los.

# Capítulo 1

## Um Breve Histórico dos Números Complexos

### 1.1 O surgimento dos números complexos

Muitas pessoas quando confrontadas com esta questão respondem que esses números surgiram pela necessidade de resolver equações do 2º grau. No entanto, isso é uma falácia clássica, além de que, historicamente está errada. Os números complexos surgiram pela necessidade de resolver os problemas das raízes de números negativos encontradas nas equações de terceiro grau, [6].

As equações quadráticas apareceram por volta de 1700 anos antes de cristo, nas tabuletas de argila da Suméria e, em alguns casos, levaram a raiz quadrada de números negativos. Até cerca de 1650 depois de cristo, em respeito à orientação geométrica grega, as únicas raízes consideradas como legítimas ou verdadeiras eram as que correspondiam às grandezas geométricas ou físicas: podiam ser interpretadas como comprimentos, áreas, volumes, massas, etc. Diríamos hoje que essas grandezas correspondem aos números reais positivos.

A abordagem aprofundada aos números complexos, apesar de ter sido feita a partir do século XVIII, foi mencionada levemente por outros matemáticos anteriores à data. No entanto, dada a incompreensão e o desconhecimento destes números, tais matemáticos abandonaram o seu estudo.

O primeiro matemático ao qual se tem conhecimento de ter se deparado com um problema que envolvia números complexos foi Heron de Alexandria (século I depois de Cristo) no livro *Stereometria*. Este pretendia resolver  $\sqrt{81 - 144} = \sqrt{-63}$  mas como não havia o domínio atual sobre estes números, abandonou o seu cálculo.

O matemático Diofanto de Alexandria (século III depois de Cristo) já observava os pares de números. Em seu livro *Arithmetica* há muitas proposições relativas à representação de números como soma de dois, três ou quatro quadrados, um campo de investigação que iria

ser completado mais tarde com Fermat, Euler e Lagrange. Tudo indica que Diofanto já sabia que o produto da soma de dois quadrados é também uma soma de dois quadrados, isto é:

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 \\ (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) &= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2\end{aligned}$$

Assim, se dois números  $x$  e  $y$  são resultantes da soma de dois quadrados, isto é,  $x = a^2 + b^2$  e  $y = c^2 + d^2$ , então o produto desses dois números, ou seja,  $x \cdot y$  é dado pela soma dos quadrados de  $ac - bd$  e  $bc + ad$ . Então vemos que a regra de Diofanto tem exatamente a mesma forma que a regra para a multiplicação de números complexos e isso não é apenas uma coincidência.

Por volta do ano 275 depois de Cristo, Diofanto ao resolver um problema, deparou-se com a equação  $24x^2 - 172x + 336 = 0$ , como concluiu que não tinha soluções reais, não viu a necessidade de dá sentido à raiz  $\sqrt{-167}$ . Os problemas algébricos indeterminados em que se devem achar apenas as soluções racionais tornaram-se conhecidos como *Problemas Diofantinos*.

A equação do 3º grau  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , com  $a \neq 0$  foi resolvida primeiramente pelo professor da universidade de Bolonha Scipione del Ferro (1465-1526), que não chegou a publicar a solução. Entretanto, um de seus discípulos, Antonio Maria Fiore, conhecia a resolução. Nesta época, era comum que os matemáticos propusessem a solução de problemas como desafios e, por conhecer a solução e desejoso de conseguir fama, Fiore desafiou Nicolò Fontana (1500-1557), o Tartaglia, para resolver a equação do 3º grau, ele aceitou o desafio e acabou vencendo.

Girolamo Cardano<sup>1</sup> (1501-1576) pediu a Tartaglia que revelasse a solução da equação do 3º grau para que ele publicasse no livro *Practica Arithieticae Generalis* que ele estava escrevendo. Após muito relutar, Tartaglia revelou a fórmula a Cardano, exigindo que ele a mantivesse em segredo, pois ele mesmo queria publicar a sua descoberta. Posteriormente, Cardano soube que Del Ferro havia sido o primeiro a resolver a equação do 3º grau e, além disso, o resultado foi publicado na *Ars Magna*, quebrando sua promessa a Tartaglia, que teve a seguinte ideia:

“Primeiramente, dividem-se todos os coeficientes por  $a$ . Então a equação fica

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Tomando  $\frac{b}{a} = B$ ,  $\frac{c}{a} = C$  e  $\frac{d}{a} = D$ , resulta  $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ . Fazendo a mudança de variáveis  $x = y - \frac{B}{3}$ , eliminá-se o termo em  $x^2$  resultando em

---

<sup>1</sup>Segundo [6], seu nome aparece em alguns textos como Hieronymus Cardanus, Geronimo Cardano e Jerome Cardan.

$$y^3 + (B^2 + C)y + \frac{2B^3}{27} - \frac{2B^2}{3} - \frac{CB}{3} + D = 0,$$

ou seja, a equação é da forma  $y^3 + My + N = 0$  em que  $M$  e  $N$  podem ser determinados em termos de  $B, C$  e  $D$ . Tartaglia, ao fazer a substituição  $y = p + q$  em  $y^3 + My + N = 0$  encontrou  $p^3q^3 = -\frac{M^3}{27}$  e  $p^3 + q^3 = -N$ . A partir daí, ele concluiu que  $p^3$  e  $q^3$  são soluções da equação do 2º grau  $x^2 + Nx - \frac{M^3}{27} = 0$ . Portanto, uma das raízes da equação do 3º grau é

$$x = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}}$$

Um fato intrigante é que a expressão  $\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}$  pode ser negativa. Nesse caso, a tendência seria dizermos que a equação do 3º grau possui uma raiz que não é um número real, pois  $\sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}} \notin \mathbb{R}$ . Cardano deu às soluções da equação do 3º grau tais que  $\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27} < 0$  o nome de *casus irreducibilis*, ele ficou por aqui e não deu significado a estas expressões, pondo de lado a "tortura mental" envolvida, porém teve o mérito de ter sido o primeiro a considera-las, até porque neste tempo os números negativos eram evitados".

Rafael Bombelli (1523-1573), autor do livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, foi o primeiro a tratar do *casus irreducibilis*. Bombelli considerou a equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$ . É fácil verificar, por substituição direta, que 4 é raiz desta equação. Contudo, a fórmula de Tartaglia mostra que  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  é solução de  $x^3 - 15x - 4 = 0$ .

O quociente da divisão do polinômio  $x^3 - 15x - 4$  por  $x - 4$  é o polinômio  $x^2 + 4x + 1$ , cujas raízes são  $-2 \pm \sqrt{3}$ . Se admitirmos que a equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$  tem, no máximo 3 raízes reais, concluiremos que  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  é um número real. A pergunta natural é: se  $\sqrt{-121} \notin \mathbb{R}$ , como é possível que  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \in \mathbb{R}$ ?

Rafael Bombelli introduziu a notação  $\sqrt{-1}$  que chamou de *piú de meno* e supôs que  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  pode ser escrito sob a forma  $a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b}$ . Após alguns cálculos ele concluiu que  $a = 2$  e  $b = 1$ , e fez o seguinte comentário: *inicialmente, isto me pareceu mais sofisma do que verdade, mas continuarei minhas pesquisas até encontrar a prova*. Foi assim que, de forma ainda não totalmente confortável, a partir de Bombelli, os matemáticos passaram a usar as raízes quadradas de números negativos.

René Descartes (1596-1650) foi filósofo cujo trabalho *La geometrie*, sobre aplicações da álgebra à geometria, deu origem à Geometria Analítica. Descartes usou construções geométricas para resolver equações do tipo  $x^2 - a^2x + b^2 = 0$  e escreveu a seguinte frase: "Para qualquer equação é possível obter tantas raízes quanto o grau permitir, mas, em muitos casos, não existe número de raízes que corresponda àquilo que imaginamos". Está é uma das razões pelas quais o número  $\sqrt{-1}$  é chamado Imaginário.



## 1.2 As primeiras interpretações geométricas

John Wallis (1616-1703), contemporâneo de Isaac Newton, foi o primeiro a tentar desvincular a noção de número de sua associação tradicional com quantidade. Embora os números complexos não façam muito sentido como quantidade, faltava descobrir um modelo que lhes emprestasse uma interpretação adequada. É de Wallis a primeira tentativa de representação geométrica dos números complexos. Sua obra *De álgebra tractatus: historicus & practicus*, escrita em 1673, é considerada a primeira tentativa séria de uma história da matemática na Inglaterra e lá se encontra o primeiro registro da tentativa de se dar uma interpretação gráfica às raízes complexas de uma equação quadrática real. Wallis interpretou números negativos como distâncias em sentido oposto ao positivo, à esquerda de um dado ponto.

A fórmula  $(\cos \theta + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1} \operatorname{sen} n\theta$ , atribuída ao francês Abraham de Moivre (1667-1754), era conhecida de Isaac Newton que aplicava ao cálculo das raízes cúbicas dos *casus irreducibilis* que apareciam na fórmula de Tartaglia.

Leonhard Euler (1707-1783), um dos mais prolíficos matemáticos de todos os tempos, introduziu a notação  $i = \sqrt{-1}$  e identificou as raízes da equação  $z^n = 1$  com os vértices de um polígono regular de  $n$  lados. Além de definir a função exponencial no conjunto dos números complexos, ele provou a famosa fórmula  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ , que inclusive leva seu nome. Euler seguia as ideias de Newton, ou seja, ele acreditava que a raiz quadrada de um número negativo era uma quantidade impossível, ao qual chamou de quantidades imaginárias, porém impossíveis.

Jean Robert Argand (1768-1822) era um contador francês que em 1806 escreveu um livreto intitulado *Ensaio sobre a interpretação geométrica das quantidades imaginárias*. Argand enviou seu trabalho ao célebre matemático francês Adrien-Marie Legendre. Em 1813, o trabalho de Argand foi publicado como artigo no periódico *Annales de Mathématiques*. Nele, Argand aponta que se multiplicarmos  $+1$  por  $i$  obtemos  $i$ , se multiplicarmos esse resultado por  $i$  obtemos  $-1$ . Ele pensa então em representar o produto por  $i$  como uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário, em torno da origem.

Mas foi Carl Friedrich Gauss (1777-1855) quem, de fato, tornou amplamente aceita a interpretação geométrica dos números complexos e foi quem introduziu a denominação Número Complexo. Em sua tese de doutoramento, Gauss provou um dos resultados mais celebrados da história da matemática, o *Teorema Fundamental da Álgebra*, cujo enunciado é “todo polinômio de grau maior ou igual a 1 e coeficientes complexos tem uma raiz complexa”. Deve-se também a Gauss a representação geométrica dos números complexos, associando sua parte real e imaginária, respectivamente, à abscissa e à ordenada de pontos do  $\mathbb{R}^2$ . Com essa representação geométrica os números complexos podem ser manejados segundo os métodos da geometria e por conseguinte perderam sua artificialidade temerosa.

# Capítulo 2

## Números Complexos

Neste capítulo apresentaremos o conjunto dos números complexos como estrutura algébrica e suas propriedades.

### 2.1 Corpo

**Definição 2.1.1** (Definição de Corpo). *É um conjunto  $K$  munido de duas operações chamadas de adição (+) e multiplicação ( $\cdot$ ) que satisfazem as seguintes propriedades:*

Para todos  $k_1, k_2$  e  $k_3 \in K$  tem-se:

A1) Associatividade :  $(k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)$ .

A2) Comutatividade:  $k_1 + k_2 = k_2 + k_1$ .

A3) Existência do elemento neutro: Existe  $0 \in K$  tal que  $k + 0 = k$ , para todo  $k \in K$ .

A4) Existência do simétrico: Para todo  $k \in K$ , existe  $-k \in K$  tal que  $k + (-k) = 0$ .

M1) Associatividade:  $(k_1 \cdot k_2) \cdot k_3 = k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3)$ .

M2) Comutatividade:  $k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1$ .

M3) Existência do elemento neutro: Existe  $1 \in K$  tal que  $k \cdot 1 = k$  para todo  $k \in K$ .

M4) Existência do inverso: Para todo  $k \neq 0 \in K$ , existe  $k^{-1} \in K$  tal que  $k \cdot k^{-1} = 1$ .

AM) Distributiva da multiplicação em relação a adição:  $k_1 \cdot (k_2 + k_3) = k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3$ .

### 2.2 O Corpo dos Números Complexos

Consideremos o conjunto  $\mathbb{C} = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  e nele definamos as seguintes operações de adição e multiplicação: seja  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ , então

$$\begin{aligned}
+ : z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cdot : z_1 \cdot z_2 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)
\end{aligned}$$

**Teorema 2.2.1.** *O conjunto dos números complexos  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  é um corpo.*

**Demonstração:** A demonstração completa deste teorema pode ser encontrada em [16].

## 2.3 A Forma Algébrica

### 2.3.1 Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$

Considere o subconjunto  $R' \subset \mathbb{C}$  formado pelos pares ordenados cujo segundo termo é zero, ou seja,

$$R' = \{(x, y) \in \mathbb{C} : y = 0\}.$$

Assim, por exemplo, pertencem a  $R'$  os pares  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(x + y, 0)$ ,  $(x \cdot y, 0)$ , entre outros.

Agora, considere a aplicação  $f$ , de  $\mathbb{R}$  em  $R'$ , que aplica cada  $x$  de  $\mathbb{R}$  ao par ordenado  $(x, 0)$  de  $R'$ .

Assim, tem-se que  $f$  é sobrejetiva, pois todo par  $(x, 0) \in R'$  é correspondente, segundo  $f$ , de  $x \in \mathbb{R}$ .

Dados  $x \in \mathbb{R}$  e  $x' \in \mathbb{R}$ , com  $x \neq x'$ , os seus correspondentes  $(x, 0) \in R'$  e  $(x', 0) \in R'$  são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados e, portanto,  $f$  é injetiva.

Além disso, note que  $f$  conserva as operações de adição e multiplicação, pois à soma  $x + y$  com  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$ , está associado o par ordenado  $(x + y, 0)$ , que é a soma dos pares ordenados  $(x, 0)$  e  $(y, 0)$ , correspondentes de  $x$  e  $y$ , respectivamente:

$$f(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = f(x) + f(y).$$

Ao produto  $x \cdot y$ , com  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$ , está associado o par ordenado  $(x \cdot y, 0)$ , que é o produto dos pares  $(x, 0)$  e  $(y, 0)$ , correspondentes de  $x$  e  $y$ , respectivamente:

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y, 0) = (xy - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot y) = (x, 0) \cdot (y, 0).$$

Devido ao fato de existir uma aplicação bijetiva  $f : \mathbb{R} \rightarrow R'$ , que conserva as operações de adição e multiplicação, diz-se que  $\mathbb{R}$  e  $R'$  são isomorfos. E, devido a esse isomorfismo, operar com  $(x, 0)$  leva a resultados análogos aos obtidos operando com  $x$ . Isto justifica a igualdade:

$$x = (x, 0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aceita a igualdade, tem-se os casos particulares já citados:  $0 = (0, 0)$ ,  $1 = (1, 0)$ . Assim, pode-se escrever  $\mathbb{R} = R'$  e, portanto, o corpo  $\mathbb{R}$  dos números reais passa a ser considerado um subconjunto do corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos.

### 2.3.2 A Unidade Imaginária

Chama-se de unidade imaginária e indica-se por  $i$  o número complexo  $(0, 1)$ .

Note ainda que:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1,$$

isto é, a propriedade básica da unidade imaginária é

$$i^2 = -1.$$

Dado um número complexo  $z = (x, y)$ , tem-se

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$$

e, portanto,

$$z = x + yi.$$

Assim, todo número complexo  $z = (x, y)$  pode ser escrito sob a forma  $z = x + yi$ , chamada de **forma algébrica**.

## 2.4 Os Números Complexos como Pontos do Plano

A representação geométrica dos números complexos é feita num referencial cartesiano em que se fixa o eixo das abscissas para o conjunto  $\mathbb{R} = \{x + yi \in \mathbb{C} : y = 0\}$  (conjunto dos números reais) e o eixo das ordenadas para o conjunto  $\mathbb{I} = \{x + yi \in \mathbb{C} : x = 0\}$  (conjunto dos números imaginários puros). Denota-se o eixo real como  $(Re)$  e o eixo imaginário puro como  $(Im)$ . As componentes  $x$  e  $y$ , do complexo  $z = x + yi$ , são chamadas de parte

real e parte imaginária, respectivamente. A parte real é denotada por  $Re(z) = x$  e a parte imaginária é denotada por  $Im(z) = y$ .

A existência da bijeção entre o conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$  e o plano  $\mathbb{R}^2$  permite chamar o sistema de coordenadas abaixo de **Plano Complexo**<sup>1</sup>.

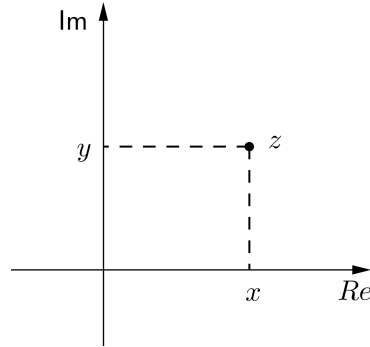


Figura 2.1: O número complexo  $z = x + yi$  como ponto no Plano Complexo.

**Definição 2.4.1.** *Seja  $z = x + yi$ , o **conjugado** de  $z$  é o número complexo  $\bar{z} = x - yi$ .*

**Observação 2.4.1.** *Geometricamente,  $\bar{z}$  representa a reflexão do complexo  $z$  em relação ao eixo real.*

Dados  $z, z_1$  e  $z_2 \in \mathbb{C}$ , são válidas as seguintes propriedades:

P.1:  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$

P.2:  $\overline{z_1 + (-z_2)} = \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.$

P.3:  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$

P.4: Se  $z_2 \neq 0$  e  $z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2}$ , então  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$

P.5:  $z + \bar{z} = 2Re(z).$

P.6:  $z - \bar{z} = 2Im(z).$

P.7: Se  $z$  é real, então  $z = \bar{z}.$

P.8:  $z = \overline{\bar{z}}.$

P.9: Se  $n$  é natural, então  $\bar{z}^n = \overline{(z^n)}.$

Para ver a demonstração destas propriedades consultar [16].

<sup>1</sup>Também chamado de Plano de Argand - Gauss ou Diagrama de Argand.

## 2.5 Os Números Complexos como Vetores do Plano

O tratamento dado aos números complexos através de pares ordenados permite associar tais números a vetores no plano complexo. Um número complexo  $z = x + yi$  pode ser representado pelo vetor  $\vec{OZ}$ . Desta forma, todo número complexo, não nulo,  $z = x + yi$  pode ser representado na forma polar por  $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , onde  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta$  é o ângulo entre o semieixo real positivo e o vetor  $\vec{OZ}$ . O número real  $|z|$  é chamado de módulo do vetor  $\vec{OZ}$  que representa o número complexo  $z$ , isto é,  $|z|$  é a distância do número complexo  $z$  a origem  $O$  do plano complexo.

O ângulo  $\theta$  é chamado de um argumento do número complexo  $z$  e será denotado por  $\operatorname{Arg}(z)$ . É importante ressaltar que qualquer ângulo  $\varphi$  da forma  $\theta + 2k\pi$ , com  $k$  inteiro, também satisfaz a forma polar, isto é, um complexo não nulo  $z$  tem infinitos argumentos que diferem entre si por um múltiplo de  $2\pi$ . Além disso, se  $\varphi$  satisfaz a forma polar, então  $\cos \varphi = \cos \theta$  e  $\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \theta$  que implica  $\theta + 2k\pi$  para algum  $k$  inteiro. Portanto, o conjunto de todos os argumentos de  $z$  é dado por  $\operatorname{arg}(z) = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ . Assim estamos considerando  $\operatorname{Arg}(z)$  como sendo aquele único argumento de  $z$  pertencente ao intervalo  $(-\pi, \pi]$ . A figura a seguir ilustra a representação geométrica do número complexo  $z = x + yi$  na forma polar.

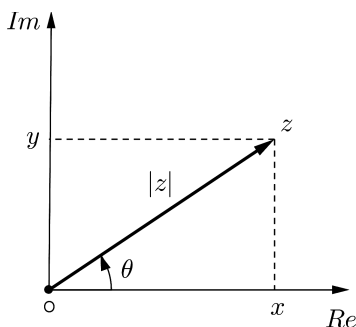


Figura 2.2: Representação geométrica no número complexo  $z = x + yi$  na forma polar.

Dado o número complexo  $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , seu conjugado é definido por  $\bar{z} = |z|(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) = |z|(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta))$ .

As definições de módulo e argumento de um número complexo citadas anteriormente, permitem listar outras propriedades importantes sobre esses números e que serão úteis para próximas interpretações geométricas.

P.10:  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

P.11:  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

P.12: Se  $z_2 \neq 0$ , então  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

P.13:  $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$

$$P.14: \quad \text{Arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$$

Para uma demonstração destas propriedades consulte [16].

Dado um complexo  $z$ , não nulo, pode-se obter a representação polar para  $\frac{1}{z} = z^{-1}$  utilizando a propriedade P.10, isto é,

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = |z|^{-1} (\cos \theta - i \sin \theta).$$

De P.13, sabe-se que o produto de dois números complexos  $z_1 = |z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  e  $z_2 = |z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  é dado por

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \quad (2.1)$$

A proposição a seguir mostra que a fórmula (2.1) pode ser estendida para  $n$  números complexos.

**Proposição 2.5.1.** *Sejam  $z_1 = |z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ,  $z_2 = |z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ , ...,  $z_n = |z_n| \cdot (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$ . Então*

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)) \quad (2.2)$$

**Demonstração:** Provaremos tal afirmação por indução sobre  $n$ .

Para  $n = 2$ , o resultado segue direto de (2.1).

Suponha que (2.2) seja válida para  $n \geq 3$  e provaremos sua validade para  $n + 1$ .

Seja  $z_1 \cdot z_2 \cdots z_n \cdot z_{n+1} = (z_1 \cdot z_2 \cdots z_n) \cdot z_{n+1}$ . Pela hipótese de indução tem-se

$$(z_1 \cdot z_2 \cdots z_n) \cdot z_{n+1} = [|z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n))] \cdot z_{n+1}.$$

Fazendo  $z_{n+1} = |z_{n+1}| \cdot (\cos \theta_{n+1} + i \sin \theta_{n+1})$ , obtém-se

$$(z_1 \cdot z_2 \cdots z_n) \cdot z_{n+1} =$$

$$[|z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n))] \cdot |z_{n+1}| \cdot (\cos \theta_{n+1} + i \sin \theta_{n+1}).$$

Novamente por (2.1) obtém-se

$$(z_1 \cdot z_2 \cdots z_n) \cdot z_{n+1} =$$

$$|z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n| \cdot |z_{n+1}| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1}) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1})).$$
 E,

portanto,

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n \cdot z_{n+1} =$$

$$|z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n| \cdot |z_{n+1}| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1}) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1})).$$

■

O resultado a seguir mostra como calcular potências de números complexos.

**Proposição 2.5.2. (Fórmula de Moivre)** Se  $n$  é inteiro e  $z = |z|(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$ , então  $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta))$ .

**Demonstração:** Para  $n = 0$  ou  $n = 1$  o resultado é trivial.

Para  $n$  inteiro maior que 1, basta fazer na equação (2.2)  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$  e o resultado segue.

Para  $n$  inteiro negativo, fazemos  $n = -k$ , com  $k$  inteiro positivo. Assim, tem-se

$$z^n = [|z| \cdot (\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))]^n = [|z| \cdot (\cos\theta + i\text{sen}\theta)]^{-k} = \frac{1}{[|z| \cdot (\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))]^k} \Rightarrow.$$

$$z^n = \frac{1}{|z|^k \cdot (\cos(k\theta) + i\text{sen}(k\theta))} = \frac{\cos 0 + i\text{sen} 0}{|z|^k \cdot (\cos(k\theta) + i\text{sen}(k\theta))} =$$

$$|z|^{-k} \cdot (\cos(-k\theta) + i\text{sen}(-k\theta)).$$

Substituindo  $-k$  por  $n$  o resultado segue. ■

**Definição 2.5.1.** Seja  $x \in \mathbb{R}$ , definimos

$$e^{xi} := \cos(x) + i\text{sen}(x).$$

Como consequência dessa definição temos que a forma polar de um complexo  $z$  é dada por

$$z = |z| \cdot e^{i\theta}, \text{ onde } \theta \text{ é o argumento de } z.$$

Temos as seguintes propriedades:

- i)  $e^0 = 1$
- ii)  $e^{xi}e^{yi} = e^{(x+y)i}$
- iii)  $e^{-xi} = (e^{xi})^{-1}$ .
- IV)  $(e^{xi})^n = e^{nxi}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$

A vantagem de se escrever um número complexo não nulo na forma exponencial é a simplicidade obtida nas operações algébricas realizadas. O produto e o quociente de números complexos, por exemplo, se reduzem a  $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\theta+\alpha)}$  e  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\theta-\alpha)}$ .

As próximas seções são dedicadas às interpretações geométricas para as operações básicas envolvendo números complexos. Para isso, usaremos  $z$  para representar o vetor com origem em  $O$  (origem do plano complexo) e extremidade em  $Z$  (número complexo qualquer) e, caso a origem do vetor seja diferente da origem do plano, usaremos números complexos para representar a origem e a extremidade desse vetor.



## 2.5.1 Interpretação Geométrica para a Soma e a Subtração de dois Números Complexos

Na representação vetorial, somar dois números complexos significa somar as componentes dos vetores que os representam. Esse mesmo fato vale para a diferença de dois números complexos, ou seja, obtém-se a diferença entre dois complexos subtraindo as componentes dos vetores que os representam.

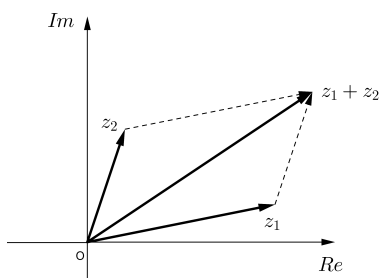


Figura 2.3: Soma de dois complexos.

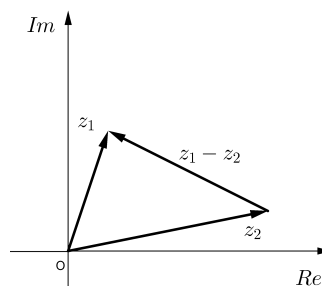


Figura 2.4: Subtração de dois complexos.

**Proposição 2.5.3.** *Para quaisquer dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  vale a desigualdade*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

**Demonstração:**

De fato, pela propriedade P.10 sabe-se que

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} + \overline{z_1} \cdot z_2 + \overline{z_2} \cdot z_1 + z_2 \cdot \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para provar a outra desigualdade tome  $z_1 = (z_1 + z_2) + (-z_2)$  que implica  $|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)|$ , por (2.3) tem-se,  $|(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |(z_1 + z_2)| + |-z_2| = |(z_1 + z_2)| + |z_2|$ , assim  $|z_1| \leq |(z_1 + z_2)| + |z_2|$  que implica  $|z_1| - |z_2| \leq |(z_1 + z_2)|$ . Fazendo  $z_2 = (z_1 + z_2) + (-z_1)$

e aplicando o mesmo procedimento anterior, obtém-se  $|z_2| - |z_1| \leq |(z_2 + z_1)|$  e, portanto,  $||z_1| - |z_2|| \leq |(z_1 + z_2)|$ , que completa a demonstração. ■

Se  $z_1$  e  $z_2$  são números complexos, a distância  $d(z_1, z_2)$  entre eles é igual ao módulo de sua diferença.

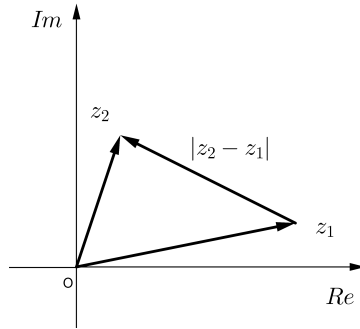


Figura 2.5:  $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$ .

Pensando ainda na soma de números complexos como vetores do plano, a expressão  $z \rightarrow z + z_1$ , representa o deslocamento paralelo do vetor representante de  $z_1$  na direção do vetor representante de  $z$  e de mesmo módulo que  $z_1$ , em outras palavras, está operação “leva” a origem  $O$  no número complexo  $z$  e o complexo  $z_1$  no complexo  $w = z + z_1$ , conforme a figura abaixo.

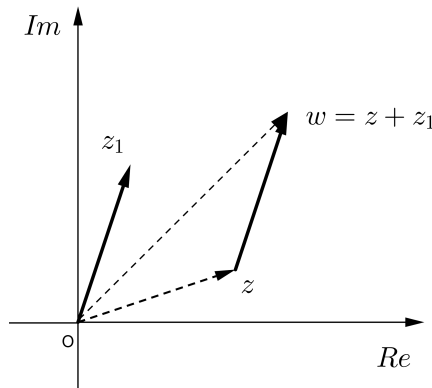


Figura 2.6:  $z \rightarrow z + z_1$ .

## 2.5.2 Ângulo entre dois Números Complexos

**Definição 2.5.2.** *Sejam  $z_1$  e  $z_2$  complexos não nulos. O ângulo entre eles é o número real*

$$\theta(z_1, z_2) = \text{Arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right).$$

Como consequência da definição, se  $z_1 = |z_1| e^{\beta i}$  e  $z_2 = |z_2| e^{\alpha i}$ , então

$$\theta(z_1, z_2) = \text{Arg} \left( \frac{|z_1| e^{\beta i}}{|z_2| e^{\alpha i}} \right) = \text{Arg} \left( \frac{e^{\beta i}}{e^{\alpha i}} \right) = \text{Arg} (e^{(\beta-\alpha)i}).$$

Observe que  $\theta(z_1, z_2) = -\theta(z_2, z_1)$  é um ângulo orientado. Temos também como consequência que  $\theta(iz_1, z_1) = \text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$  e  $\theta(z_1, iz_1) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ .

Se tomarmos  $z_1 = \alpha \cdot z_2 i$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , então  $\theta(z_1, z_2) = \theta(\alpha z_2 i, z_2) = -\theta(z_2, \alpha z_2 i) = \frac{\pi}{2}$ , ou seja, a condição para que dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  sejam perpendiculares é  $z_1 = \alpha \cdot z_2 i$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

### 2.5.3 Interpretação Geométrica para a Multiplicação e a Divisão de dois Números Complexos

Fixemos um número complexo  $z$  tal que  $z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$ . Ao multiplicarmos  $z$  por  $z_1 = |z_1| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$  a equação (2.1) garante que se  $|z_1| = 1$  e  $\alpha > 0$ , então o produto  $z \cdot z_1$  representa a rotação no sentido anti-horário de um ângulo  $\alpha$  do vetor  $z$  em torno da origem do plano complexo. Caso  $|z_1| \neq 1$  a rotação é a mesma do caso anterior, porém, o comprimento de  $z \cdot z_1$  será dado por  $|z| \cdot |z_1|$ .

O produto  $z \cdot z_1$  acima representa uma rotação de um ângulo  $\alpha$  em torno da origem, seguida de uma homotetia <sup>2</sup> com centro na origem O e coeficiente de semelhança igual a  $|z_1|$ .

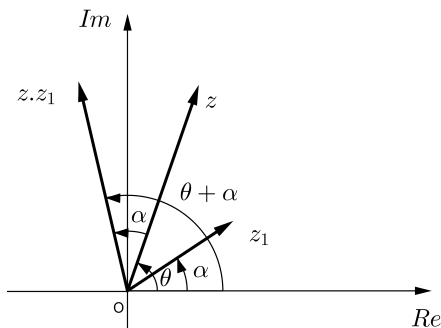


Figura 2.7: Representação para  $z \cdot z_1$  com  $|z_1| = 1$

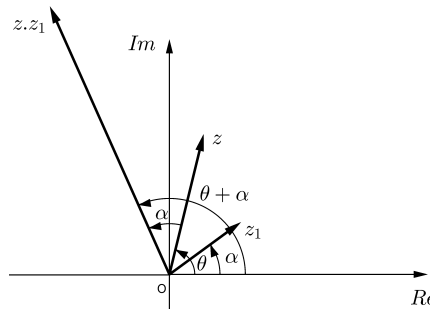


Figura 2.8: Representação para  $z \cdot z_1$  com  $|z_1| > 1$

<sup>2</sup>É a ampliação ou a redução de distâncias ou áreas a partir de um ponto fixo.

Sejam os números complexos  $z = |z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  e  $z_1 = |z_1| \cdot (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$  com  $\alpha > 0$ . Pela propriedade P.14 sabe-se que o quociente  $\frac{z}{z_1}$  representa a rotação de um ângulo  $\alpha$  no sentido horário (negativo) do vetor  $z$  em torno na origem, seguida de uma homotetia com centro na origem no plano complexo.

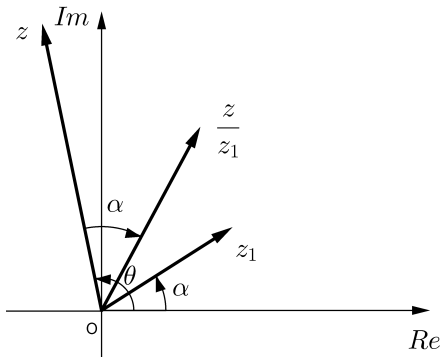


Figura 2.9: Representação para  $\frac{z}{z_1}$  com  $|z_1| > 1$ .

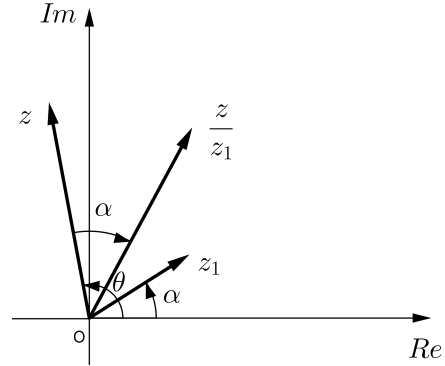


Figura 2.10: Representação para  $\frac{z}{z_1}$  com  $|z_1| = 1$ .

### 2.5.4 Interpretação Geométrica para $\bar{z}$ , $-z$ e $z \cdot i$

Se  $z = x + yi$ , então  $-z = -x - yi$  e  $\bar{z} = x - yi$  representam respectivamente uma simetria de  $z$  em relação à origem e ao eixo real. O produto  $z \cdot i = i \cdot (x + yi) = -y + xi$  representa a rotação do vetor  $z$  de um ângulo de  $90^\circ$  no sentido anti-horário em torno da origem.

É importante observar que o produto de um número complexo  $z = x + yi$  por  $(-i)$  representa a rotação do vetor representante de  $z$  de um ângulo de  $90^\circ$  no sentido horário em torno da origem.

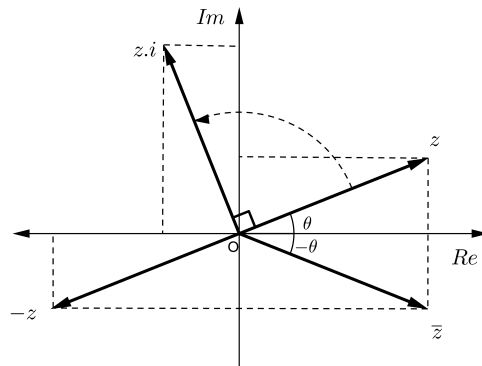


Figura 2.11: Interpretação geométrica para  $\bar{z}$ ,  $-z$  e  $z \cdot i$ .

## 2.5.5 Interpretação Geométrica para outras operações envolvendo números complexos

### Rotação de um ponto em torno de um ponto arbitrário

É possível realizar rotações em torno de um ponto  $z_1$  arbitrário. Seja  $z'$  o resultado da rotação de um ângulo  $\theta$  de um ponto  $z$  em torno de  $z_1$ , então  $\overrightarrow{z_1 z'}$  pode ser obtido pela rotação de um ângulo  $\theta$  do vetor  $\overrightarrow{z_1 z}$  em torno de  $z_1$ , ou seja,  $\overrightarrow{z_1 z'} = \overrightarrow{z_1 z} e^{i\theta}$  que implica  $z' = (z - z_1) e^{i\theta} + z_1$ .

Em particular para  $\theta = \pi$  tem-se  $e^{i\pi} = -1$  e, portanto,  $z' = 2z_1 - z$  representa a simetria central em torno do ponto  $z_1$ .

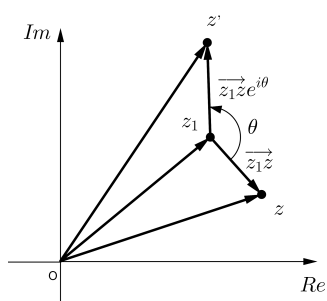


Figura 2.12: Rotação de  $z$  em torno do ponto arbitrário  $z_1$ .

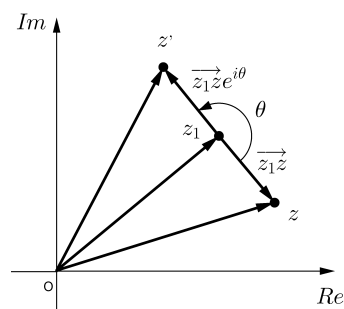


Figura 2.13: Simetria central em torno de  $z_1$ .

### Reflexão de um ponto em torno de uma reta arbitrária

Qualquer reta no plano complexo pode ser representada pela imagem da função  $f(t) = z_1 t + z_0$ , onde  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  com  $|z_1| = 1$ , onde  $z_1$  indica a direção da reta  $f(t)$ , conforme a figura abaixo.

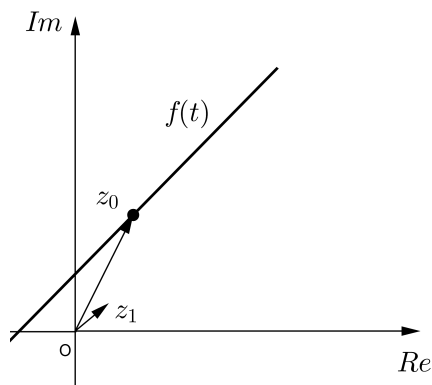


Figura 2.14: Definição geométrica de uma reta no plano complexo.

Seja  $\theta$  o ângulo que o vetor representante do complexo  $z_1$  forma com o eixo real. Como  $|z_1| = 1$  e a reta  $f(t)$  tem a mesma direção do vetor representante de  $z_1$ , para obtermos um ponto  $z'$  simétrico de  $z$  em relação a esta reta, tomamos o vetor  $\overrightarrow{z_0 z} = z - z_0$  determinado pelos pontos  $z_0$  e  $z$ . Agora rotacionamos  $\overrightarrow{z_0 z}$  de um ângulo  $\theta$  no sentido horário, esta rotação é obtida através da operação  $\overrightarrow{z_0 z}.e^{i(-\theta)}$ , em seguida conjuga-se o resultado anterior obtendo assim  $\overline{\overrightarrow{z_0 z}.e^{i(-\theta)}}$  e finalmente rotacionamos  $\overline{\overrightarrow{z_0 z}.e^{i(-\theta)}}$  de um ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário, obtendo  $w = \overline{\overrightarrow{z_0 z}.e^{i(-\theta)}}.e^{i(\theta)} = (\bar{z} - \bar{z}_0).e^{i\theta}$ , como  $e^{i\theta} = z_1$  temos  $w = (\bar{z} - \bar{z}_0).z_1^2$  e como  $z' = w + z_0$  que implica  $z' = (\bar{z} - \bar{z}_0).z_1^2 + z_0$ .

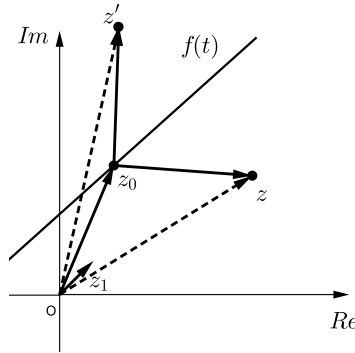


Figura 2.15: Reflexão de  $z$  em torno de uma reta arbitrária  $f(t)$ .

## 2.5.6 Uma Fórmula para o Cálculo da Raiz Quadrada de um Número Complexo

Nesta seção, apresentamos um método para calcular a raiz quadrada de um número complexo muito prático e rápido, tendo em vista que no último capítulo sempre precisaremos calcular a raiz quadrada desses números.

Considere um complexo  $z = a + bi$  não nulo. Então

$\sqrt{a + bi} = u + vi \iff (\sqrt{a + bi})^2 = (u + vi)^2 \iff a + bi = u^2 - v^2 + 2uvi$ . Pela igualdade entre dois números complexos tem-se:

$$a = u^2 - v^2 \tag{2.4}$$

$$b = 2uv \tag{2.5}$$

Isolando  $u$  na equação (2.5) e substituindo na equação (2.4) obtém-se  $a = \left(\frac{b}{2v}\right)^2 - v^2 \iff a = \frac{b^2}{4v^2} - v^2 \iff a = \frac{b^2 - 4v^4}{4v^2} \iff 4av^2 = b^2 - 4v^4 \iff 4v^4 + 4av^2 - b^2 = 0$ . Portanto, temos uma equação biquadrada; fazendo  $v^2 = x$ , temos  $4x^2 + 4ax - b^2 = 0$ , assim

$\Delta = 16a^2 - 4.4(-b^2) = 16a^2 + 16b^2 = 16(a^2 + b^2)$ . Portanto,  $x = \frac{-4a \pm \sqrt{16(a^2 + b^2)}}{8} \iff x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \iff x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$  ou  $x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ . Como  $\sqrt{a^2 + b^2} > a$ , tem-se  $x_2 < 0$ , logo  $v^2 = x_1 \iff v^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ . Substituindo  $v^2$  na equação (2.4) temos  $u^2 = a + \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \iff u = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$ . Observe na equação (2.5) que se  $u > 0$ , então  $v$  tem o mesmo sinal que  $b$  e, se  $u < 0$ , então  $v$  tem sinal oposto de  $b$ . Se tomarmos  $u = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$ , então uma das raízes de  $a + bi$  pode ser calculada pela fórmula:

$$\sqrt{a + bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \text{sig}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} i.$$

Em particular, se  $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$ , então a fórmula se reduz a

$$\sqrt{a + bi} = \sqrt{\frac{1 + a}{2}} + \text{sig}(b) \sqrt{\frac{1 - a}{2}} i.$$

Note que  $\sqrt{z} = z_0 \iff z = z_0^2 = (-z_0)^2$ , isso mostra que se  $z_0$  é raiz de  $z$ , então a outra raiz é  $-z_0$ . Assim por exemplo uma das raízes de  $z = 2 - i$  é

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2^2 + (-1)^2} + 2}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2^2 + (-1)^2} - 2}{2}} i = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}} i \text{ e a outra é } -\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}} i$$

## 2.6 Isometrias no Plano Complexo

Nesta seção faremos um breve estudo sobre os movimentos rígidos no plano complexo  $\mathbb{C}$ , ou seja, movimentos que preservam a forma e a medida dos objetos de  $\mathbb{C}$ . Tais transformações ou movimentos são chamados de **isometrias** (do grego, mesma medida).

Primeiro observe que se tomarmos dois pontos  $z$  e  $w$  de  $\mathbb{C}$ , então a distância entre eles é dada por  $|z - w|$ .

**Definição 2.6.1.** *Uma isometria no plano complexo é uma aplicação  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que, quaisquer que sejam os complexos  $z$  e  $w$  de  $\mathbb{C}$ , tem-se*

$$|T(z) - T(w)| = |z - w|.$$

**Definição 2.6.2.** *Chama-se translação determinada pelo complexo  $z$  à transformação  $T_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que leva cada complexo  $w$  de  $\mathbb{C}$  no complexo  $T_z(w) = w + z$*

**Proposição 2.6.1.** *(Translação) Toda translação é uma isometria..*

**Demonstração:**

Sejam os complexos  $z_1$  e  $z_2$  de  $\mathbb{C}$ , então  $T_z(z_1) = z_1 + z$  e  $T_z(z_2) = z_2 + z$ , assim  $|T_z(z_1) - T_z(z_2)| = |z_1 + z - (z_2 + z)| = |z_1 + z - z_2 - z| = |z_1 - z_2|$ .

■

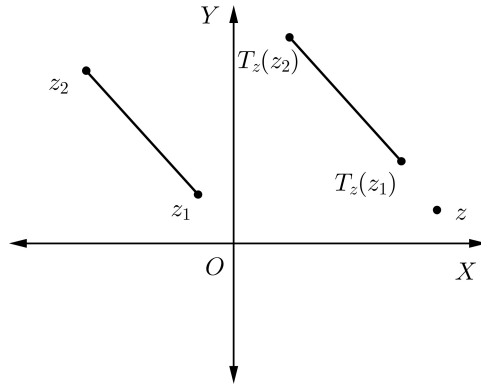


Figura 2.16: Translação de  $z_1$  e  $z_2$  por  $T_z$ .

**Definição 2.6.3.** *Sejam o complexo  $z \in \mathbb{C}$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$  um ângulo. Chama-se rotação determinada pelo ângulo  $\theta$  à transformação  $R_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que leva cada complexo  $z$  de  $\mathbb{C}$  no complexo  $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ .*

**Proposição 2.6.2.** *(Rotação) Toda rotação é uma isometria.*

**Demonstração:**

Sejam os complexos  $z_1$  e  $z_2$  de  $\mathbb{C}$ , então  $R_\theta(z_1) = e^{i\theta}z_1$  e  $R_\theta(z_2) = e^{i\theta}z_2$ , assim  $|R_\theta(z_1) - R_\theta(z_2)| = |e^{i\theta}z_1 - e^{i\theta}z_2| = |e^{i\theta}(z_1 - z_2)| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_1 |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$ .

■

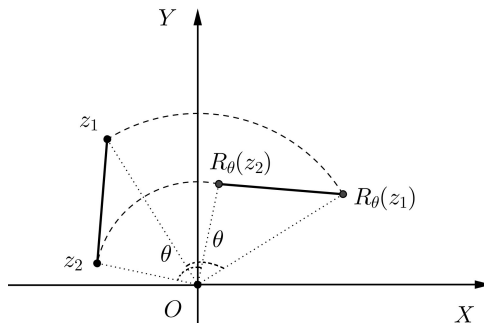


Figura 2.17: Rotação de  $z_1$  e  $z_2$  por  $R_\theta$ .



Vimos que se  $z_1 = |z_1| e^{\theta i}$  e  $z_2 = |z_2| e^{\alpha i}$ , então  $\theta(z_1, z_2) = \text{Arg}(e^{(\theta-\alpha)i})$ .

Agora note que as rotações preservam a orientação do ângulo, ou seja, podemos tomar

$$\theta(R_\beta(z_1), R_\beta(z_2)) = \text{Arg}\left(\frac{\frac{R_\beta(z_1)}{|R_\beta(z_1)|}}{\frac{R_\beta(z_2)}{|R_\beta(z_2)|}}\right) = \text{Arg}\left(\frac{\frac{|z_1| e^{(\beta+\theta)i}}{|z_1|}}{\frac{|z_2| e^{(\beta+\alpha)i}}{|z_2|}}}\right) = \text{Arg}\left(\frac{e^{(\beta+\theta)i}}{e^{(\beta+\alpha)i}}\right) = \text{Arg}(e^{(\theta-\alpha)i}) = \theta(z_1, z_2).$$

As transformações que preservam o módulo e a orientação do ângulo são chamadas de **transformações conformes**.

**Proposição 2.6.3.** (Composição) *A composição de uma translação com uma rotação é uma isometria.*

**Demonstração:**

Sejam os complexos  $z_1$  e  $z_2$  de  $\mathbb{C}$ , então

$$\begin{aligned} (T_z \circ R_\theta)(z_1) &= T_z(R_\theta(z_1)) = e^{i\theta} z_1 + z \text{ e } (T_z \circ R_\theta)(z_2) = T_z(R_\theta(z_2)) = e^{i\theta} z_2 + z, \text{ assim} \\ |(T_z \circ R_\theta)(z_1) - (T_z \circ R_\theta)(z_2)| &= |T_z(R_\theta(z_1)) - T_z(R_\theta(z_2))| = |e^{i\theta} z_1 + z - (e^{i\theta} z_2 + z)| = \\ |e^{i\theta} z_1 + z - e^{i\theta} z_2 - z| &= |e^{i\theta}(z_1 - z_2)| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_1 |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

■

**Proposição 2.6.4.** (Composição) *A composição de uma rotação com uma translação é uma isometria.*

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \text{Analogamente, se } z_1 \text{ e } z_2 \text{ são complexos, então } (R_\theta \circ T_z)(z_1) &= R_\theta(T_z(z_1)) = e^{i\theta}(z_1 + z) \\ \text{e } (R_\theta \circ T_z)(z_2) &= R_\theta(T_z(z_2)) = e^{i\theta}(z_2 + z), \text{ assim } |(R_\theta \circ T_z)(z_1) - (R_\theta \circ T_z)(z_2)| = \\ |R_\theta(T_z(z_1)) - R_\theta(T_z(z_2))| &= |e^{i\theta}(z_1 + z) - e^{i\theta}(z_2 + z)| = |e^{i\theta} z_1 + e^{i\theta} z - e^{i\theta} z_2 - e^{i\theta} z| = \\ |e^{i\theta}(z_1 - z_2)| &= \underbrace{|e^{i\theta}|}_1 |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

■

# Capítulo 3

## Lugares Geométricos e as Cônicas

Neste capítulo começaremos exibindo as cônicas na forma tradicional, que pode ser encontrada em qualquer livro didático do 3<sup>a</sup> Ano do Ensino Médio. Entretanto, não apresentaremos as demonstrações para os resultados referente a esta forma. O leitor poderá encontrar tais demonstrações detalhadas em [15].

Em seguida, apresentaremos as cônicas como um conjunto de pontos do plano que satisfazem uma determinada propriedade em relação a um ponto fixo e uma reta dada.

### 3.1 Elipse

**Definição 3.1.1.** *Uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto dos pontos  $P$  do plano cuja soma das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante  $2a > 0$ , maior do que a distância entre os focos  $2c \geq 0$ . Sendo  $0 \leq c < a$  e  $d(F_1, F_2) = 2c$ ,*

$$\text{elipse} = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

Na figura a seguir temos representação da definição geométrica de elipse.

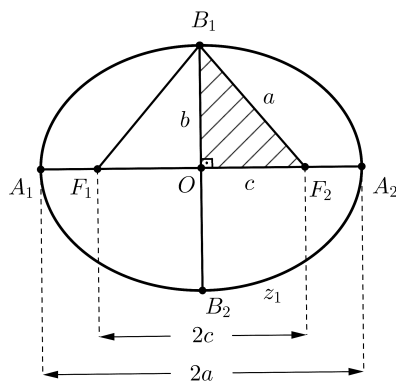


Figura 3.1: Definição geométrica de uma elipse.

Os principais elementos são:

- $F_1$  e  $F_2$  são os focos
- A reta que contém os focos  $F_1$  e  $F_2$  é chamada de reta focal
- $O$  é a origem
- $A_1A_2$  é o eixo maior
- $B_1B_2$  é o eixo menor
- $2c$  é a distância focal
- $2a$  é a medida do eixo maior
- $2b$  é a medida do eixo menor
- $\frac{c}{a} = \varepsilon$  é a excentricidade. Note que  $0 \leq \varepsilon < 1$ , tendo em vista que  $0 \leq c < a$ .

Do triângulo retângulo destacado na figura temos a relação notável

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

A partir da definição geométrica de elipse e adotando um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  de tal forma que  $A_1A_2 \subset OX$  e  $B_1B_2 \subset OY$ , obtemos a forma canônica da elipse de centro na origem do sistema  $OXY$  e reta focal coincidente com o eixo  $OX$ , dada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

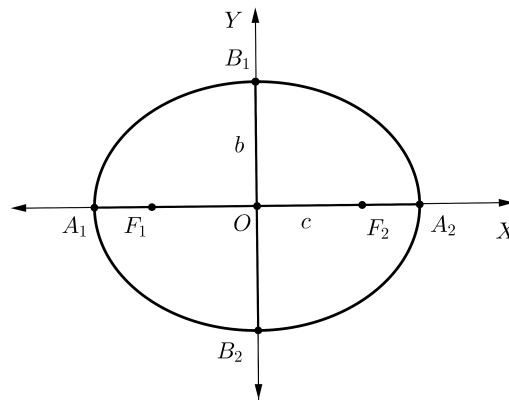


Figura 3.2: Elipse de centro na origem de  $OXY$

Analogamente ao que vimos anteriormente, se no sistema ortogonal  $OXY$  consideramos que  $A_1A_2 \subset OY$  e  $B_1B_2 \subset OX$ , obtemos a forma canônica da elipse de centro na origem do sistema  $OXY$  e reta focal coincidente com o eixo  $OY$ , dada pela equação

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

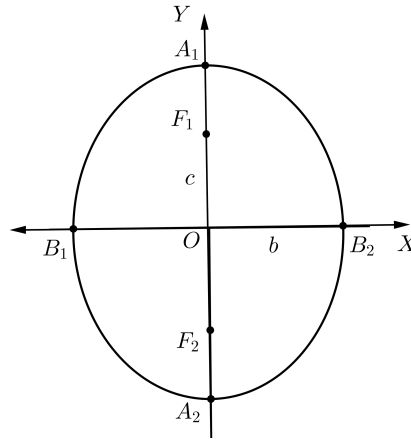


Figura 3.3: Elipse de centro na origem de  $OXY$

Considerando as duas formas canônicas acima e supondo que o centro  $C(x_0, y_0)$  da elipse não coincida com a origem do sistema ortogonal  $OXY$ , teremos as duas equações

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1,$$

onde a primeira é a forma canônica da elipse de centro  $C(x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$  e a segunda é a forma canônica da elipse de centro  $C(x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OY$ .

Abaixo temos a representação geométrica para essas elipses.

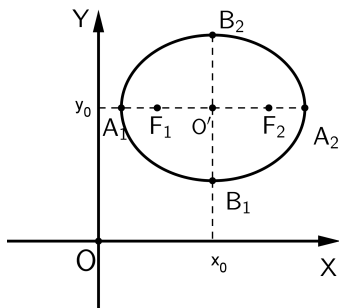


Figura 3.4: Elipse de centro em  $O' \neq O$  com reta focal paralela a  $OX$ .

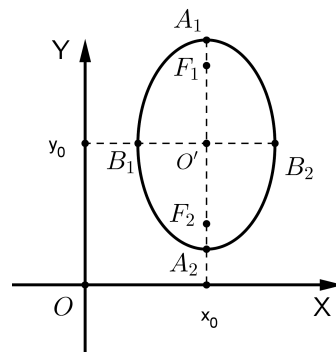


Figura 3.5: Elipse de centro em  $O' \neq O$  com reta focal paralela a  $OY$ .

Retomando a equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  e considerando que  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$  e  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

multiplicando por  $(a^2b^2)$  obtemos  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ . Substituindo o valor de  $b^2$  na equação temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

dividindo ambos os lados da equação acima por  $a^2$  teremos

$$\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + \frac{a^2}{a^2}y^2 = a^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)$$

Após simplificarmos os termos e substituir o valor  $\frac{c^2}{a^2} = \varepsilon^2$  obtemos a equação

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - \varepsilon^2). \quad (3.1)$$

A equação acima é chamada de **equação característica da elipse de centro na origem do sistema ortogonal  $OXY$** . Observe que ela depende apenas dos valores de  $a$  e  $\varepsilon$ .

**Proposição 3.1.1.** *A elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a razão entre a distância de quaisquer dos seus pontos a um ponto fixo (foco) e uma reta fixa (diretriz) é uma constante  $0 < \varepsilon < 1$ .*

### **Demonstração:**

Antes de demonstrarmos a proposição acima vamos tomar, sem perda de generalidade, um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  e considerar uma elipse de centro na origem de  $OXY$  e reta focal coincidindo com o eixo  $OX$ .

Nestas condições temos:

- $r$  é a reta diretriz da elipse dada pela equação  $x + \gamma = 0$
- Os focos da elipse são  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ .
- O eixo  $OX$  coincide com a reta focal

- Os vértices da elipse são  $A_1(-a, 0)$  e  $A_2(a, 0)$ .

Na figura abaixo temos uma ilustração destas condições.

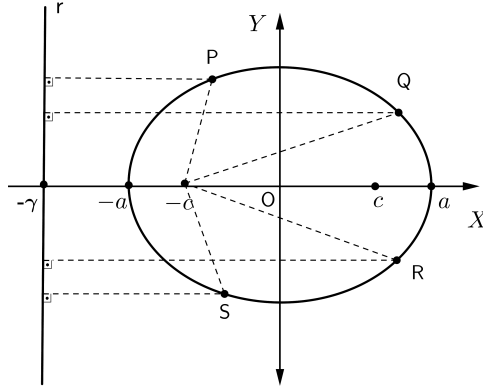


Figura 3.6: Definição geométrica de uma elipse.

Para determinarmos o valor de  $\gamma$ , ou seja, a localização da reta  $r$  no eixo  $OX$ , basta tomarmos o ponto  $A_1(-a, 0)$  da elipse e usarmos a condição

$$d(A_1, F_1) = \varepsilon d(A_1, r)$$

portanto,

$$a - c = \varepsilon(\gamma - a) \implies a - c = \varepsilon\gamma - \varepsilon a$$

como  $c = \varepsilon a$ , substituindo na equação acima temos

$$a - \varepsilon a = \varepsilon(\gamma - a) \rightarrow a - c = \varepsilon\gamma - \varepsilon a$$

logo

$$\gamma = \frac{a}{\varepsilon}.$$

A demonstração da proposição acima é composta de duas partes.

Antes da demonstração desta proposição, note que no plano cartesiano, a distância de um ponto  $P(x_0, y_0)$  arbitrário a uma reta  $r$  de equação  $ax + by + c = 0$  é dada por

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Na primeira parte vamos mostrar que se tomarmos um ponto  $P(x, y)$  arbitrário na elipse, a razão entre as distâncias desse ponto ao foco e à reta  $r$  é constante e igual a  $\varepsilon$ .

De fato, se  $P(x, y)$  pertence a elipse, então

$$\frac{(d(P, F_1))^2}{(d(P, r))^2} = \frac{(x+c)^2 + y^2}{(x+\gamma)^2} = \frac{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}{(x+\gamma)^2}.$$

Isolando  $y^2$  na equação (3.1) e sabendo que  $\gamma = \frac{a}{\varepsilon}$  e  $c = \varepsilon a$ . Podemos substituir na equação acima e obter

$$\begin{aligned} \frac{(d(P, F_1))^2}{(d(P, r))^2} &= \frac{x^2 + 2x\varepsilon a + (\varepsilon a)^2 + a^2(1 - \varepsilon^2) - (1 - \varepsilon^2)x^2}{\left(x + \frac{a}{\varepsilon}\right)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x\varepsilon a + \varepsilon^2 a^2 + a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + \varepsilon^2 x^2}{\left(x + \frac{a}{\varepsilon}\right)^2} \\ &= \frac{\varepsilon^2 x^2 + 2x\varepsilon a + a^2}{\frac{(\varepsilon x + a)^2}{\varepsilon^2}} \\ &= \frac{(\varepsilon x + a)^2}{(\varepsilon x + a)^2} \varepsilon^2 \\ &= \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Como  $\frac{d(P, F_1)}{d(P, r)}$  e  $\varepsilon$  são ambos positivos, extraindo as raízes quadradas de ambos os lados da igualdade  $\frac{(d(P, F_1))^2}{(d(P, r))^2} = \varepsilon^2$ , obtemos  $\frac{d(P, F_1)}{d(P, r)} = \varepsilon$  o que mostra que a razão é constante.

A segunda parte consiste em mostrar que se a razão entre as distâncias de um ponto  $P(x, y)$  arbitrário a um ponto fixo  $F$  e à reta fixa  $r$  é constante e igual a  $\varepsilon$ , então esse ponto pertence a elipse de foco  $F$  e diretriz  $r$ .

Podemos, sem perda de generalidade, considerar que a diretriz  $r$  é dada por  $x + \frac{a}{\varepsilon} = 0$  e que  $F(-c, 0)$ . Logo por hipótese temos

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, r)} = \varepsilon \Leftrightarrow d(P, F_1) = \varepsilon d(P, r).$$

Quadrando ambos os lados da última igualdade temos

$$\begin{aligned} (d(P, F_1))^2 &= \varepsilon^2 (d(P, r))^2 \\ (x+c)^2 + y^2 &= \varepsilon^2 \left(x + \frac{a}{\varepsilon}\right)^2 \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= \varepsilon^2 \frac{(\varepsilon x + a)^2}{\varepsilon^2} \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= (\varepsilon x + a)^2. \end{aligned}$$

Substituindo o valor  $c = \varepsilon a$  no primeiro membro da última igualdade e desenvolvendo o segundo membro temos

$$x^2 + 2x\varepsilon a + \varepsilon^2 a^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon x a + a^2$$

$$x^2 + \varepsilon^2 a^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 + a^2$$

$$x^2 - \varepsilon^2 x^2 + y^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2$$

$$(1 - \varepsilon^2) x^2 + y^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2)$$

que é a equação característica de uma elipse conforme provado anteriormente. ■

## 3.2 Hipérbole

**Definição 3.2.1.** *Uma hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto dos pontos  $P$  do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante  $2a > 0$ , menor do que a distância entre os focos  $2c > 0$ . Sendo  $0 < a < c$  e  $d(F_1, F_2) = 2c$ ,*

$$\text{hipérbole} = \{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

Na figura a seguir temos representação geométrica de hipérbole.

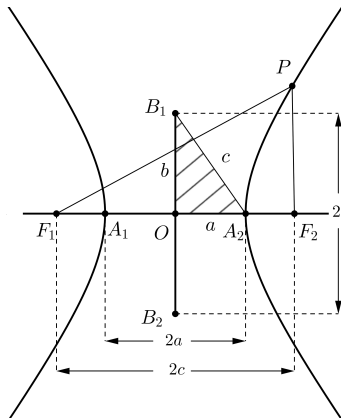


Figura 3.7: Definição geométrica de uma elipse.

Os principais elementos são:

- $F_1$  e  $F_2$  são os focos
- A reta que contém os focos  $F_1$  e  $F_2$  é chamada de reta focal



- $O$  é a origem
- $A_1A_2$  é o eixo real ou transverso
- $B_1B_2$  é o eixo imaginário
- $2c$  é a distância focal
- $2a$  é a medida do eixo real
- $2b$  é a medida do eixo imaginário
- $\frac{c}{a} = \varepsilon$  é a excentricidade. Note que  $\varepsilon > 1$ , tendo em vista que  $0 < a < c$ .

Do triângulo retângulo destacado na figura temos a relação notável

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

A partir da definição geométrica de hipérbole e adotando um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  de tal forma que  $A_1A_2 \subset OX$  e  $B_1B_2 \subset OY$ , obtemos a forma canônica da hipérbole de centro na origem do sistema  $OXY$  e reta focal coincidente com o eixo  $OX$ , dada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

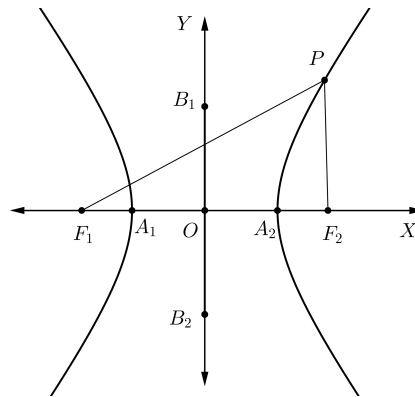


Figura 3.8: Hipérbole de centro na origem de  $OXY$

Analogamente ao que vimos anteriormente, se no sistema ortogonal  $OXY$  consideramos que  $A_1A_2 \subset OY$  e  $B_1B_2 \subset OX$ , obtemos a forma canônica da hipérbole de centro na origem do sistema  $OXY$  e reta focal coincidente com o eixo  $OY$ , dada pela equação

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

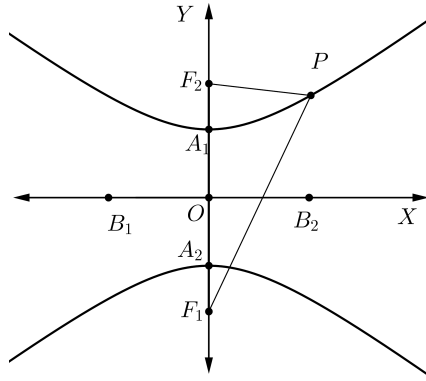


Figura 3.9: Definição geométrica de uma elipse.

Considerando as duas formas canônicas acima e supondo que o centro  $C(x_0, y_0)$  da elipse não coincida com a origem do sistema ortogonal  $OXY$ , teremos as duas equações

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1,$$

onde a primeira é a forma canônica da hipérbole de centro  $C(x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$  e a segunda é a forma canônica da hipérbole de centro  $C(x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OY$ .

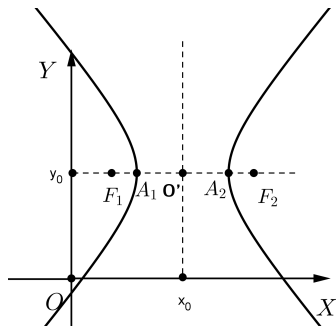


Figura 3.10: Hipérbole de reta focal paralela a  $OX$

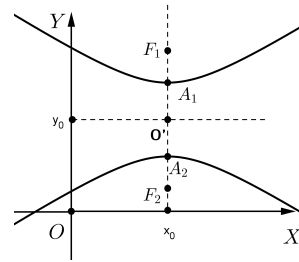


Figura 3.11: Hipérbole de reta focal paralela a  $OY$

Retomando a equação  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  e considerando que  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$  e  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{multiplicando por } (a^2b^2)$$

obtemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

substituindo o valor de  $b^2$  na equação acima, temos

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

dividindo ambos os lados da equação acima por  $a^2$  teremos

$$\left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{a^2}{a^2}\right)x^2 - \frac{a^2}{a^2}y^2 = a^2\left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{a^2}{a^2}\right)$$

Após simplificarmos os termos e substituir o valor  $\frac{c^2}{a^2} = \varepsilon^2$  obtemos a equação

$$(\varepsilon^2 - 1)x^2 - y^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1). \quad (3.2)$$

A equação acima é chamada de **equação característica da hipérbole de centro na origem do sistema ortogonal  $OXY$** . Observe que ela depende apenas dos valores de  $a$  e  $\varepsilon$ .

**Proposição 3.2.1.** *A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a razão entre a distância de quaisquer dos seus pontos a um ponto fixo (foco) e uma reta fixa (diretriz) é uma constante  $\varepsilon > 1$ .*

### Demonstração:

Antes de demonstrarmos a proposição acima vamos tomar, sem perda de generalidade, um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  e considerar uma hipérbole de centro na origem de  $OXY$  e eixo focal coincidindo com o eixo  $OX$ .

Nestas condições temos:

- $r$  é a reta diretriz da hipérbole dada pela equação  $x - \alpha = 0$
- Os focos da hipérbole são  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ .
- O eixo  $OX$  coincide com a reta focal
- Os vértices da hipérbole são  $A_1(-a, 0)$  e  $A_2(a, 0)$ .

Na figura abaixo temos uma ilustração das condições acima.

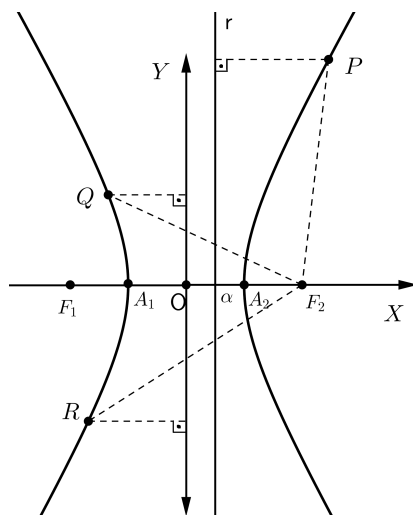


Figura 3.12: Definição geométrica de uma hipérbole.

Para determinarmos o valor de  $\alpha$ , ou seja, a localização da reta  $r$  no eixo  $OX$ , basta tomarmos o ponto  $A_2(a, 0)$  da hipérbole e usarmos a condição

$$d(A_2, F_2) = \varepsilon d(A_2, r)$$

portanto,

$$c - a = \varepsilon (a - \alpha) \implies c - a = \varepsilon a - \varepsilon \alpha$$

como  $c = \varepsilon a$ , substituindo na equação acima temos

$$\varepsilon a - a = \varepsilon (a - \alpha) \implies c - a = \varepsilon a - \varepsilon \alpha$$

logo

$$\alpha = \frac{a}{\varepsilon}.$$

A demonstração da proposição acima é composta de duas partes.

Na primeira parte vamos mostrar que se tomarmos um ponto  $P(x, y)$  arbitrário na hipérbole, a razão entre as distâncias desse ponto ao foco e à reta  $r$  é constante e igual a  $\varepsilon$ .

De fato, se  $P(x, y)$  pertence a hipérbole, então

$$\frac{(d(P, F_2))^2}{(d(P, r))^2} = \frac{(x - c)^2 + y^2}{(x - \alpha)^2} = \frac{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}{(x - \alpha)^2}.$$

Isolando  $y^2$  na equação (3.2) e sabendo que  $\alpha = \frac{a}{\varepsilon}$  e  $c = \varepsilon a$ . Podemos substituir na equação acima e obter

$$\begin{aligned}
\frac{(d(P, F_2))^2}{(d(P, r))^2} &= \frac{x^2 - 2x\varepsilon a + (\varepsilon a)^2 + (\varepsilon^2 - 1)x^2 - a^2(\varepsilon^2 - 1)}{\left(x - \frac{a}{\varepsilon}\right)^2} \\
&= \frac{x^2 - 2x\varepsilon a + \varepsilon^2 a^2 + \varepsilon^2 x^2 - x^2 - a^2 \varepsilon^2 + a^2}{\left(x - \frac{a}{\varepsilon}\right)^2} \\
&= \frac{\varepsilon^2 x^2 - 2x\varepsilon a + a^2}{\frac{(\varepsilon x - a)^2}{\varepsilon^2}} \\
&= \frac{(\varepsilon x - a)^2}{(\varepsilon x - a)^2} \varepsilon^2 \\
&= \varepsilon^2
\end{aligned}$$

Como  $\frac{d(P, F_2)}{d(P, r)}$  e  $\varepsilon$  são ambos positivos, extraindo as raízes quadradas de ambos os lados da igualdade  $\frac{(d(P, F_2))^2}{(d(P, r))^2} = \varepsilon^2$ , obtemos  $\frac{d(P, F_2)}{d(P, r)} = \varepsilon$  o que mostra que a razão é constante.

A segunda parte consiste em mostrar que se a razão entre as distâncias de um ponto  $P(x, y)$  arbitrário a um ponto fixo  $F$  e à reta fixa  $r$  é constante e igual a  $\varepsilon$ , então esse ponto pertence a elipse de foco  $F$  e diretriz  $r$ .

Podemos, sem perda de generalidade, considerar que a diretriz  $r$  é dada por  $x - \frac{a}{\varepsilon} = 0$  e que  $F(c, 0)$ . Logo por hipótese temos

$$\frac{d(P, F_2)}{d(P, r)} = \varepsilon \Leftrightarrow d(P, F_2) = \varepsilon d(P, r).$$

Quadrando ambos os lados da última igualdade temos

$$\begin{aligned}
(d(P, F_2))^2 &= \varepsilon^2 (d(P, r))^2 \\
(x - c)^2 + y^2 &= \varepsilon^2 \left(x - \frac{a}{\varepsilon}\right)^2 \\
x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= \varepsilon^2 \frac{(\varepsilon x - a)^2}{\varepsilon^2} \\
x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= (\varepsilon x - a)^2.
\end{aligned}$$

Substituindo o valor  $c = \varepsilon a$  no primeiro membro da última igualdade e desenvolvendo o segundo membro temos

$$x^2 - 2x\epsilon a + \epsilon^2 a^2 + y^2 = \epsilon^2 x^2 - 2\epsilon xa + a^2$$

$$x^2 + \epsilon^2 a^2 + y^2 = \epsilon^2 x^2 + a^2$$

$$\epsilon^2 x^2 - x^2 - y^2 = \epsilon^2 a^2 - a^2$$

$$(\epsilon^2 - 1)x^2 - y^2 = a^2(\epsilon^2 - 1).$$

que é a equação característica de uma hipérbole conforme provado anteriormente. ■

### 3.3 Parábola

**Definição 3.3.1.** *Sejam  $r$  uma reta e  $F$  um ponto do plano não pertencente a  $r$ . Uma parábola de foco  $F$  e diretriz  $r$  é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a  $F$  é igual a sua distância a  $r$ .*

$$\text{parábola} = \{P \mid d(P, F) = d(P, r)\}$$

Na figura a seguir temos a representação geométrica da parábola.

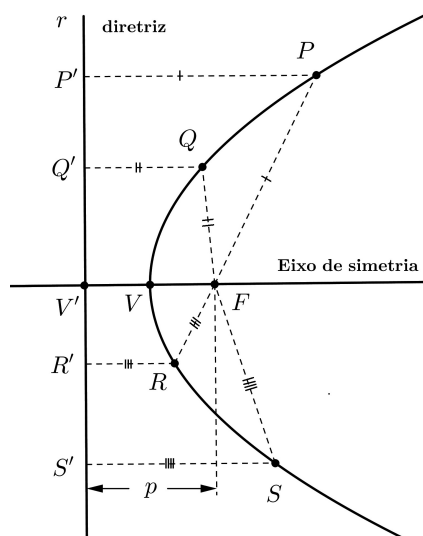


Figura 3.13: Definição geométrica de uma parábola.

Os principais elementos são:

- $F$  é o foco.
- $r$  é a diretriz.

- $p$  é o parâmetro.
- $V$  é o vértice.
- A reta  $VF$  é o eixo de simetria.
- Notação:  $d(V, F) = \frac{p}{2}$ .

Se tomarmos um sistema ortogonal com origem no vértice da parábola e o eixo  $OX$  passando pelo foco, então o foco é  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  e a diretriz  $r$  tem equação  $x = -\frac{p}{2}$ .

Nestas condições, chama-se equação reduzida da parábola a equação que  $P(x, y)$ , ponto genérico da curva, verifica. A equação é dada por

$$y^2 = 2px \quad (3.3)$$

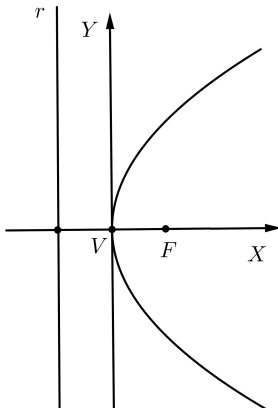


Figura 3.14:  $y^2 = 2px$ , se  $F$  está à direita de  $V$ .

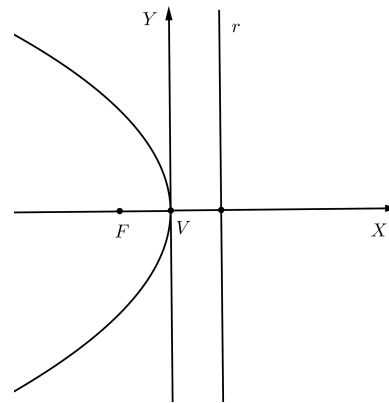


Figura 3.15:  $y^2 = -2px$ , se  $F$  está à esquerda de  $V$ .

Se tomarmos um sistema ortogonal com origem no vértice da parábola e o eixo  $OY$  passando pelo foco, então o foco é  $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$  e a diretriz  $r$  tem equação  $y = -\frac{p}{2}$ .

Nestas condições a equação reduzida da parábola é dada por

$$x^2 = 2py \quad (3.4)$$

Se a parábola tem vértice no ponto  $V(x_0, y_0)$  e  $VF$  paralelo ao eixo  $OX$  a equação da parábola fica

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \quad (3.5)$$

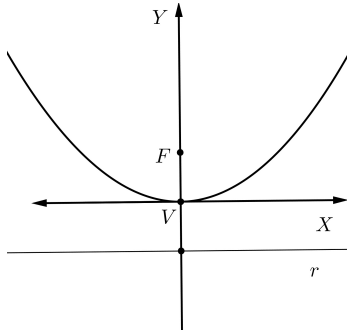


Figura 3.16:  $x^2 = 2py$ , se F está acima de V.

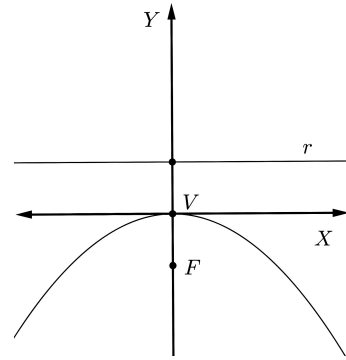


Figura 3.17:  $x^2 = -2py$ , se F está abaixo de V.

Se a parábola tem vértice no ponto  $V(x_0, y_0)$  e  $VF$  paralelo ao eixo  $OY$  a equação da parábola é

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \quad (3.6)$$

**Proposição 3.3.1.** *A parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a razão entre a distância de quaisquer dos seus pontos a um ponto fixo (foco) e uma reta fixa (diretriz) é uma constante  $\varepsilon = 1$ .*

Observe que esta definição é a mesma tratada nos livros didáticos.

A figura abaixo mostra que variando o valor  $\varepsilon$  de 0 a  $+\infty$ , a equação  $\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = \varepsilon$  representa uma família de cônicas.

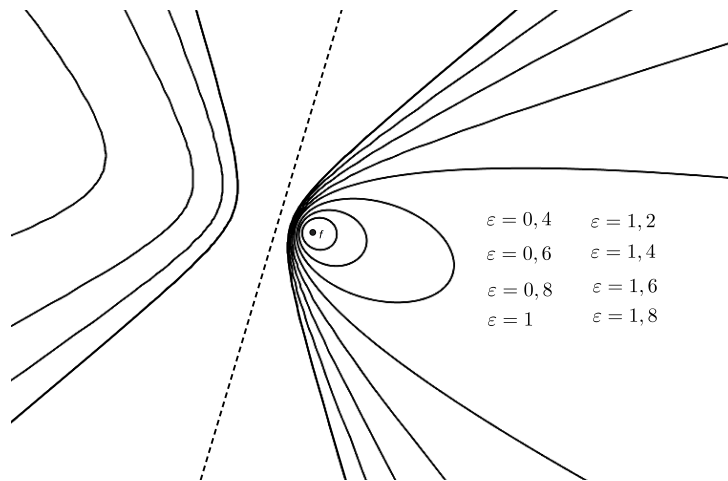


Figura 3.18: Família de cônicas.



# Capítulo 4

## Números Complexos e Cônicas

No Ensino Médio, os alunos têm o primeiro contato com o estudo das cônicas. Todavia, tal estudo se resume em analisar esses lugares geométricos apenas quando seus eixos são paralelos aos eixos coordenados. A justificativa para tal estudo reside no fato de que quando os eixos da cônica não são paralelos aos eixos coordenados, a determinação dos seus elementos se torna demasiadamente complicada, exigindo conhecimentos a nível de graduação.

O objetivo deste capítulo é propor ao Ensino Médio um método para determinar todos os elementos da cônica, mesmo quando seus eixos não são paralelos aos eixos coordenados.

### 4.1 Considerações Iniciais

No capítulo 2 vimos que a distância entre dois números complexos  $z$  e  $w$  no plano é dada por  $|z - w|$ . O próximo resultado mostra como calcular, no plano complexo, a distância de uma reta a um ponto fora dela.

**Proposição 4.1.1.** *Seja  $r$  uma reta em  $\mathbb{C}$  definida por  $z(t) = z_0 + tv$  com  $|v| = 1$  e  $t \in \mathbb{R}$ . A distância mínima  $\lambda$  de um ponto arbitrário  $f$  à reta  $r$  é dada pela equação*

$$\lambda = |\operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v})|. \quad (4.1)$$

#### Demonstração:

Seja  $h(t)$  o quadrado da distância de  $f$  a um ponto de  $r$ , assim

$$\begin{aligned} h(t) &= |f - z_0 - tv|^2 = ((f - z_0) - tv) \cdot ((\bar{f} - \bar{z}_0) - t\bar{v}) \\ &= (f - z_0) \cdot (\bar{f} - \bar{z}_0) - t(f - z_0)\bar{v} - t(\bar{f} - \bar{z}_0)v + t^2v\bar{v} \\ &= |f - z_0|^2 - 2t\operatorname{Re}((f - z_0)\bar{v}) + t^2|v|^2, \text{ como } |v| = 1 \\ &= |f - z_0|^2 - 2\operatorname{Re}((f - z_0)\bar{v})t + t^2 \end{aligned}$$

Observe que  $h(t)$  é uma função quadrática em  $t$  e, portanto, o mínimo é obtido quando  $t = \operatorname{Re}((f - z_0)\bar{v})$ . Assim, substituindo  $t$  em  $h(t)$ , segue que o quadrado da menor distância é dado por

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= |f - z_0 - \operatorname{Re}((f - z_0)\bar{v})v|^2 \\
&= \left| \frac{(f - z_0)\bar{v} - \operatorname{Re}((f - z_0)\bar{v})v\bar{v}}{\bar{v}} \right|^2 \\
&= \left| \frac{2(f - z_0)\bar{v} - (f - z_0)\bar{v} - (\bar{f} - \bar{z}_0)v}{2\bar{v}} \right|^2 \\
&= \left| \frac{(f - z_0)\bar{v} - (\bar{f} - \bar{z}_0)v}{2\bar{v}} \right|^2 \\
&= \left| \frac{(f - z_0)\bar{v} - \overline{(f - z_0)v}}{2\bar{v}} \right|^2 \\
&= \left| \frac{1}{\bar{v}} \operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v}) \right|^2 \\
&= \left| \frac{1}{\bar{v}} \right|^2 |\operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v})|^2 \\
&= |\operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v})|^2.
\end{aligned}$$

Como  $\lambda$  e  $|\operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v})|$  são números reais não negativos, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade  $\lambda^2 = |\operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v})|^2$ , obtemos  $\lambda = |\operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v})|$ . ■

Sejam  $r$  uma reta (**diretriz**) em  $\mathbb{C}$  definida por  $f(t) = z_0 + tv$ , com  $|v| = 1$  e  $f$  um ponto (**foco**) fora desta reta. Tomando agora o número real positivo  $\varepsilon$ , vamos considerar o lugar geométrico dos pontos do plano para os quais a distância ao foco  $f$  é uma constante positiva múltipla  $\varepsilon$  da distância à diretriz  $r$ , ou seja,

$$|z - f| = \varepsilon |\operatorname{Im}((z - z_0)\bar{v})|.$$

Podemos elevar ambos os lados da equação acima e obter,

$$|z - f|^2 = \varepsilon^2 |\operatorname{Im}((z - z_0)\bar{v})|^2.$$

Agora vamos desenvolver ambos os lados da última igualdade, desta forma temos

$$\begin{aligned}
(z - f)(\bar{z} - \bar{f}) &= \varepsilon^2 \left| \frac{(z - z_0)\bar{v} - (\bar{z} - \bar{z}_0)v}{2i} \right|^2 \\
(z\bar{z} - z\bar{f} - f\bar{z} + f\bar{f}) &= \varepsilon^2 \left( \frac{(z - z_0)\bar{v} - (\bar{z} - \bar{z}_0)v}{2i} \right)^2 \\
(z\bar{z} - z\bar{f} - f\bar{z} + f\bar{f}) &= \frac{\varepsilon^2}{-4} ((z - z_0)\bar{v} - (\bar{z} - \bar{z}_0)v)^2 \\
(z\bar{z} - z\bar{f} - f\bar{z} + f\bar{f}) \frac{-4}{\varepsilon^2} &= ((z - z_0)\bar{v} - (\bar{z} - \bar{z}_0)v)^2 \\
(z\bar{z} - z\bar{f} - f\bar{z} + f\bar{f}) \frac{-4}{\varepsilon^2} &= (z\bar{v} - z_0\bar{v} - \bar{z}v + \bar{z}_0v)^2 \\
-z\bar{z}\frac{4}{\varepsilon^2} + z\bar{f}\frac{4}{\varepsilon^2} + f\bar{z}\frac{4}{\varepsilon^2} - f\bar{f}\frac{4}{\varepsilon^2} &= z^2\bar{v}^2 + z_0^2\bar{v}^2 + \bar{z}^2v^2 + \bar{z}_0^2v^2 - 2z z_0\bar{v}^2 - 2z\bar{z}v\bar{v} + \\
2z\bar{z}_0v\bar{v} + 2\bar{z}z_0v\bar{v} - 2z_0\bar{z}_0v\bar{v} - 2\bar{z}\bar{z}_0v^2 &
\end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes da última igualdade acima teremos a seguinte equação

$$\begin{aligned}
\bar{v}^2 z^2 + v^2 \bar{z}^2 + \left( \frac{4}{\varepsilon^2} - 2 \right) z\bar{z} + \left( 2\bar{z}_0 - 2z_0\bar{v}^2 - \frac{4}{\varepsilon^2}\bar{f} \right) z + \left( 2z_0 - 2\bar{z}_0v^2 - \frac{4}{\varepsilon^2}f \right) \bar{z} + \\
\left( \frac{4}{\varepsilon^2}f\bar{f} + z_0^2\bar{v}^2 + \bar{z}_0^2v^2 - 2z_0\bar{z}_0 \right) = 0
\end{aligned}$$

Tomando

$$A = v^2, \quad B = \frac{4}{\varepsilon^2} - 2, \quad C = 2\bar{z}_0 - 2z_0\bar{v}^2 - \frac{4}{\varepsilon^2}\bar{f} \text{ e } D = \frac{4}{\varepsilon^2}f\bar{f} + z_0^2\bar{v}^2 + \bar{z}_0^2v^2 - 2z_0\bar{z}_0$$

na equação acima, obtemos a seguinte equação

$$\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0 \quad (4.2)$$

que chamaremos de **forma padrão**.

**Observação 4.1.1.** Note que  $|A| = |v^2| = |v|^2 = 1^2 = 1$  e  $v = \pm\sqrt{A}$ , porém  $+\sqrt{A}$  e  $-\sqrt{A}$  têm a mesma direção e como a direção da diretriz é dada por  $v$  tanto faz usarmos  $v = \sqrt{A}$  ou  $v = -\sqrt{A}$ , portanto, vamos considerar sem perda de generalidade  $v = \sqrt{A}$ . Além disso como  $\varepsilon > 0$  implica  $\frac{4}{\varepsilon^2} > 0$  daí  $\frac{4}{\varepsilon^2} - 2 > -2$ , portanto,  $B > -2$ .

Suponha que a equação  $\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$ , com  $|A| = 1$  e  $B > -2$  represente uma cônica. Então, se  $B = 2$  a cônica é uma parábola, se  $-2 < B < 2$  a cônica é uma hipérbole e para  $B > 2$  a cônica é uma elipse.

**Observação 4.1.2.** Consideremos a equação  $\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$  com  $A \neq 0$ . Podemos supor  $|A| = 1$  e  $B > -2$ . Caso  $|A| \neq 1$  dividimos a equação por  $|A|$

e caso  $B < -2$  multiplicamos a equação por  $-1$  pois se  $B < -2$ , então  $-B > 2 > -2$ , dessa forma teremos uma equação na **forma padrão**.

Se na equação (4.2) consideramos  $A = 0$  temos a equação  $Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$  daí temos duas situações a considerar:

1. Se  $B = 0$ , a equação se reduz a  $Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$  que é a equação de uma reta.
2. Se  $B \neq 0$  podemos reorganizar a equação e obter

$$\begin{aligned}
 Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D &= 0 \\
 z\bar{z} + \frac{Cz}{B} + \frac{\bar{C}\bar{z}}{B} + \frac{D}{B} &= 0 \\
 z\bar{z} + \frac{Cz}{B} + \frac{\bar{C}\bar{z}}{B} &= -\frac{D}{B} \\
 z\bar{z} + \frac{Cz}{B} + \frac{\bar{C}\bar{z}}{B} + \frac{|C|^2}{B^2} &= \frac{|C|^2}{B^2} - \frac{D}{B} \\
 z\bar{z} + \frac{Cz}{B} + \frac{\bar{B}\bar{z}}{B} + \frac{C\bar{C}}{B\bar{B}} &= \frac{|C|^2 - BD}{B^2} \\
 \left(z + \frac{\bar{C}}{B}\right) \left(\bar{z} + \frac{C}{\bar{B}}\right) &= \frac{|C|^2 - BD}{B^2} \\
 \left|z + \frac{\bar{C}}{B}\right|^2 &= \frac{|C|^2 - BD}{B^2} \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Assim o conjunto solução representa um conjunto vazio sempre que  $\frac{|C|^2 - BD}{B^2} < 0$ , um ponto caso  $\frac{|C|^2 - BD}{B^2} = 0$  e uma circunferência para  $\frac{|C|^2 - BD}{B^2} > 0$ .

**Observação 4.1.3.** *A circunferência não tem diretriz e por isso não é considerada uma cônica.*

## 4.2 A equação $\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$ com B e D Reais, em Coordenadas Cartesianas

Suponha que a equação  $\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$  represente uma cônica e observe que

$$\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 = 2\operatorname{Re}(\bar{A}z^2) \text{ e } Cz + \bar{C}\bar{z} = 2\operatorname{Re}(Cz).$$

Substituindo esses valores na equação temos

$$2\operatorname{Re}(\overline{A}z^2) + Bz\overline{z} + 2\operatorname{Re}(Cz) + D = 0 \quad (4.4)$$

Fazendo  $z = x + yi$ ,  $A = a_1 + a_2i$  e  $C = c_1 + c_2i$  tem-se que

$$2\operatorname{Re}(\overline{A}z^2) = 2a_1x^2 - 2a_1y^2 + 4xya_2 \text{ e } 2\operatorname{Re}(Cz) = 2c_1x - 2c_2y.$$

Substituindo estes valores na equação (4.4) e agrupando os termos semelhantes obtém-se a equação

$$(B + 2a_1)x^2 + 4a_2xy + (B - 2a_1)y^2 + 2c_1x - 2c_2y + D = 0.$$

Tomando na equação acima

$$a = B + 2a_1; b = 4a_2; c = B - 2a_1; d = 2c_1; e = -2c_2 \text{ e } \mathbf{f} = D$$

teremos a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + \mathbf{f} = 0 \quad (4.5)$$

### 4.3 Análise da equação $\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$ com B e D Reais.

Vamos agora analisar a equação abaixo

$$\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0 \text{ com } |A| = 1 \text{ e } B > -2$$

para saber em que condições ela representa uma cônica.

Fazendo a mudança de variável  $z = \sqrt{A}w \Rightarrow z^2 = Aw^2$  e observando  $\overline{z}^2 = \overline{Aw^2}$  e  $\overline{z} = \overline{\sqrt{A}w} = \sqrt{\overline{A}\overline{w}}$ , dessa forma temos

$$\begin{aligned} \overline{A}Aw^2 + A\overline{A}\overline{w}^2 + B\sqrt{A}w\sqrt{\overline{A}\overline{w}} + C\sqrt{A}w + \overline{C}\sqrt{\overline{A}\overline{w}} + D &= 0 \\ w^2 + \overline{w}^2 + \sqrt{A}\sqrt{\overline{A}}Bw\overline{w} + C\sqrt{A}w + \overline{C}\sqrt{\overline{A}\overline{w}} + D &= 0 \end{aligned}$$

Note que  $\sqrt{A}\sqrt{\overline{A}} = \sqrt{A\overline{A}} = \sqrt{|A|^2} = |A| = 1$ . Assim, tomando  $C' = C\sqrt{A}$  temos a equação

$$w^2 + \bar{w}^2 + Bw\bar{w} + C'w + \overline{C'}\bar{w} + D = 0 \quad (4.6)$$

que chamaremos de **forma canônica**.

Observe que ela pode ser reescrita da forma abaixo

$$2\operatorname{Re}(w^2) + B|w|^2 + 2\operatorname{Re}(C'w) + D = 0.$$

Fazendo  $w = x_1 + y_1i$  e  $C' = c'_1 + c'_2i$  obtemos

$$\begin{aligned} 2(x_1^2 - y_1^2) + B(x_1^2 + y_1^2) + 2(c'_1x_1 - c'_2y_1) + D &= 0 \\ (B+2)x_1^2 + (B-2)y_1^2 + 2c'_1x_1 - 2c'_2y_1 + D &= 0, \end{aligned}$$

tomando  $\lambda_1 = B+2 > 0$  e  $\lambda_2 = B-2 > -4$  a equação fica

$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2y_1^2 + 2c'_1x_1 - 2c'_2y_1 + D = 0 \quad (4.7)$$

Vamos analisar a equação(4.7) quando  $B > 2$  ( $\lambda_2 > 0$ ) dessa forma temos

$$\begin{aligned} \lambda_1x_1^2 + \lambda_2y_1^2 + 2c'_1x_1 - 2c'_2y_1 + D &= 0 \\ \lambda_1\left(x_1^2 + \frac{2c'_1}{\lambda_1}x_1\right) + \lambda_2\left(y_1^2 - \frac{2c'_2}{\lambda_2}y_1\right) + D &= 0 \\ \lambda_1\left(x_1^2 + 2\frac{c'_1}{\lambda_1}x_1 + \frac{c_1'^2}{\lambda_1^2}\right) + \lambda_2\left(y_1^2 - 2\frac{c'_2}{\lambda_2}y_1 + \frac{c_2'^2}{\lambda_2^2}\right) + \left(D - \frac{c_1'^2}{\lambda_1} - \frac{c_2'^2}{\lambda_2}\right) &= 0 \\ \lambda_1\left(x_1 + \frac{c'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 - \frac{c'_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(D - \frac{c_1'^2}{\lambda_1} - \frac{c_2'^2}{\lambda_2}\right) &= 0 \\ \lambda_1\left(x_1 + \frac{c'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 - \frac{c'_2}{\lambda_2}\right)^2 &= \frac{c_1'^2}{\lambda_1} + \frac{c_2'^2}{\lambda_2} - D \end{aligned}$$

Agora vamos tomar a translação  $u = w + \left(\frac{c'_1}{\lambda_1} - \frac{c'_2}{\lambda_2}i\right) = x_1 + y_1i + \left(\frac{c'_1}{\lambda_1} - \frac{c'_2}{\lambda_2}i\right) = \left(x_1 + \frac{c'_1}{\lambda_1}\right) + \left(y_1 - \frac{c'_2}{\lambda_2}\right)i = x_2 + y_2i$ . Além disso faremos  $\frac{c_1'^2}{\lambda_1} + \frac{c_2'^2}{\lambda_2} - D = D'$   
Após as substituições teremos

$$\lambda_1x_2^2 + \lambda_2y_2^2 = D' \quad (4.8)$$

Então se:

- $D' = 0$  a equação possui uma única solução  $x_2 = y_2 = 0$ .
- $D' < 0$  a equação (4.8) não tem solução e, portanto, não representa uma cônica.
- $D' > 0$ , então podemos dividir toda equação por  $D'$  como segue

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1 x_2^2}{D'} + \frac{\lambda_2 y_2^2}{D'} &= 1 \\ \frac{x_2^2}{\frac{D'}{\lambda_1}} + \frac{y_2^2}{\frac{D'}{\lambda_2}} &= 1 \\ \frac{x_2^2}{\left(\sqrt{\frac{D'}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{\frac{D'}{\lambda_2}}\right)^2} &= 1,\end{aligned}$$

e podemos determinar todos os elementos da elipse.

Se  $-2 < B < 2$  ( $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ ), então equação (4.8) fica:

$$\lambda_1 x_2^2 - |\lambda_2| y_2^2 = D'$$

Assim, se:

- $D' = 0$ , então  $y_2 = \pm \sqrt{\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}} x$ , ou seja, a equação representa um par de retas.
- $D' \neq 0$ , então podemos dividir toda equação por  $D'$  como segue

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1 x_2^2}{D'} - \frac{|\lambda_2| y_2^2}{D'} &= 1 \\ \frac{x_2^2}{\frac{D'}{\lambda_1}} - \frac{y_2^2}{\frac{D'}{|\lambda_2|}} &= 1 \\ \frac{x_2^2}{\left(\sqrt{\frac{D'}{\lambda_1}}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{\frac{D'}{|\lambda_2|}}\right)^2} &= 1,\end{aligned}$$

e podemos determinar todos os elementos da hipérbole.

Se  $B = 2$  ( $\lambda_2 = 0$ ) a equação (4.7) fica:

$$\lambda_1 x_1^2 + 2c'_1 x_1 - 2c'_2 y_1 + D = 0$$

Completando o quadrado obtém-se

$$\lambda_1 \left( x_1 + \frac{c'_1}{\lambda_1} \right)^2 - 2c'_2 y_1 + D - \frac{c'^2_1}{\lambda_1} = 0$$

Assim,

- Se  $c'_2 = 0$  não teremos uma cônica.
- Se  $c'_2 \neq 0$  podemos dividir toda equação por  $2c'_2$  como segue

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left( x_1 + \frac{c'_1}{\lambda_1} \right)^2 &= 2c'_2 y_1 - D + \frac{c'^2_1}{\lambda_1} \\ \frac{\lambda_1}{2c'_2} \left( x_1 + \frac{c'_1}{\lambda_1} \right)^2 &= y_1 - \left( \frac{D - \frac{c'^2_1}{\lambda_1}}{2c'_2} \right) \\ \frac{\lambda_1}{2c'_2} \left( x_1 + \frac{c'_1}{\lambda_1} \right)^2 &= y_1 - \left( \frac{\lambda_1 D - c'^2_1}{2\lambda_1 c'_2} \right). \end{aligned}$$

Tomando

$$u = w + \left( \frac{c'_1}{\lambda_1} - \left( \frac{\lambda_1 D - c'^2_1}{2\lambda_1 c'_2} \right) i \right) = \left( x_1 + \frac{c'_1}{\lambda_1} \right) + \left( y_1 - \frac{\lambda_1 D - c'^2_1}{2\lambda_1 c'_2} \right) i = x_2 + y_2 i,$$

a equação acima fica

$$\frac{\lambda_1}{2c'_2} x_2^2 = y_2 \Rightarrow x_2^2 = \frac{2c'_2}{\lambda_1} y_2.$$

Fazendo  $\frac{2c'_2}{\lambda_1} = 2p$  temos

$$x_2^2 = 2p y_2, \text{ que é a equação de uma parábola.}$$

## 4.4 Resumo da Equação na Forma Canônica

Considere a equação

$$w^2 + \bar{w}^2 + Bw\bar{w} + C'w + \bar{C}'\bar{w} + D = 0, \text{ onde } B > -2 \text{ e } C' = c'_1 + c'_2 i.$$



Pelos resultados obtidos na seção anterior, podemos resumir as conclusões no seguinte quadro:

$-2 < B < 2$	A equação representa uma cônica se e somente se, $\frac{c_1'^2}{B+2} + \frac{c_2'^2}{B-2} - D \neq 0$ e neste caso a cônica é uma hipérbole.
$B = 2$	A equação representa uma cônica se e somente se, $c_2 = \text{Im}(C') \neq 0$ e neste caso a cônica é uma parábola.
$2 < B$	A equação representa uma cônica se e somente se, $\frac{c_1'^2}{B+2} + \frac{c_2'^2}{B-2} - D > 0$ e neste caso a cônica é uma elipse.

## 4.5 Cônicas em Coordenadas Cartesianas

Vimos na seção 4.2 que se tivermos uma cônica a sua equação em coordenadas cartesianas será dada pela equação (4.5).

Agora queremos determinar em que condições a equação  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + \mathbf{f} = 0$  representa uma cônica e sua classificação.

Tomemos  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$  e façamos a substituição na equação acima, dessa forma teremos:

$$a \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + b \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right) \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + c \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 + d \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right) + e \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + \mathbf{f} = 0,$$

após reagruparmos os termos semelhante obtemos

$$\left( \frac{a - c - bi}{4} \right) z^2 + \left( \frac{a - c + bi}{4} \right) \bar{z}^2 + \left( \frac{2a + 2c}{4} \right) z\bar{z} + \left( \frac{d - ei}{2} \right) z + \left( \frac{d + ei}{2} \right) \bar{z} + \mathbf{f} = 0.$$

Observemos que se  $a = c$  e  $b = 0$  de acordo com as observações da seção 4.1 a equação não representa uma cônica. Então, devemos tomar  $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$ .

Multiplicando a igualdade acima por 4 e dividindo por  $\sqrt{(a - c)^2 + b^2}$  obtém-se

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a - c - bi}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \right) z^2 + \left( \frac{a - c + bi}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \right) \bar{z}^2 + \left( \frac{2a + 2c}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \right) z\bar{z} + \\ & 2 \left( \frac{d - ei}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \right) z + 2 \left( \frac{d + ei}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \right) \bar{z} + 4\mathbf{f} = 0 \end{aligned}$$

Comparando com a forma padrão temos que:

$$\text{Se } |B| = \left| \frac{2a + 2c}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \right| = 2 \Rightarrow |a + c| = \sqrt{(a - c)^2 + b^2}$$

Elevando a última igualdade ao quadrado obtemos

$$\begin{aligned}
 |a + c|^2 &= \left( \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \right)^2 \\
 (a + c)^2 &= \left( \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \right)^2 \\
 a^2 + 2ac + c^2 &= a^2 - 2ac + c^2 + b^2 \\
 4ac - b^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

De forma análoga mostra-se que se  $|B| < 2$  tem-se que  $4ac - b^2 < 0$ , se  $|B| > 2$  tem-se  $4ac - b^2 > 0$ . Portanto, se:

$$\begin{cases}
 |B| > 2 \Rightarrow 4ac - b^2 > 0, & \text{a equação pode representar uma elipse.} \\
 |B| = 2 \Rightarrow 4ac - b^2 = 0, & \text{a equação pode representar uma parábola.} \\
 |B| < 2 \Rightarrow 4ac - b^2 < 0, & \text{a equação pode representar uma hipérbole.}
 \end{cases}$$

## 4.6 Algoritmo

Nesta seção apresentaremos um algoritmo quando a equação 4.5 representa uma cônica, sua classificação e como obter seus elementos.

Algoritmo:

- Passo 01: verificar se  $(a - c)^2 - b^2$  é diferente de zero.
- Passo 02: Complexificar a equação tomando  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .
- Passo 03: Colocar a equação na forma padrão (Dividindo a equação pelo módulo de  $A$  e multiplicando por  $-1$  se  $B \leq -2$  )
- Passo 04: Aplicar a rotação  $z = \sqrt{A}w$  para obter a forma canônica.
- Passo 05: Verificar na tabela se a equação na forma canônica representa uma cônica.
- Passo 06: Transformar a equação canônica em coordenadas cartesianas nesse novo sistema de coordenadas.
- Passo 07: Completar o quadrado.
- Passo 08: Aplicar a translação para colocar a equação na forma canônica desse novo sistema de coordenadas.

- Passo 09: Determinar todos os elementos na cônica nesse último sistema de coordenadas.
- Passo 10: Aplicar a isometria inversa para obter os elementos no sistema de coordenadas original.

## 4.7 Aplicações

### Exemplo 1

Vamos determinar os elementos da cônica  $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$ .

**Passo 01:** Verificar se  $(a - c)^2 - b^2$  é diferente de zero;

Como  $a = 9$ ,  $b = -4$  e  $c = 6$  temos  $(9 - 6)^2 - (-4)^2 = 9 - 16 = -7 \neq 0$ , logo a equação  $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$ , **pode** representar uma cônica.

**Passo 02:** Complexificar a equação tomando  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ;

$$\begin{aligned}
 9 \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 - 4 \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right) \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + 6 \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 &= 30 \\
 9 \left( \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} \right) - 4 \left( \frac{z^2 - \bar{z}^2}{4i} \right) + 6 \left( \frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4} \right) &= 30, \frac{1}{i} = -i \\
 9 \left( \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} \right) + 4i \left( \frac{z^2 - \bar{z}^2}{4} \right) + 6 \left( \frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4} \right) &= 30, (\times 4) \\
 9(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) + 4i(z^2 - \bar{z}^2) - 6(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) &= 120 \\
 9z^2 + 18z\bar{z} + 9\bar{z}^2 + 4iz^2 - 4i\bar{z}^2 - 6z^2 + 12z\bar{z} - 6\bar{z}^2 &= 120 \\
 (3 + 4i)z^2 + (3 - 4i)\bar{z}^2 + 30z\bar{z} &= 120
 \end{aligned}$$

**Passo 03:** Colocar a equação na forma padrão (Dividindo a equação pelo módulo de  $A$  e multiplicando por  $-1$ , se  $B \leq -2$ );

Observe na última equação que  $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 1$ , portanto a equação **não** está na **forma padrão**, para colocá-la nesta forma, vamos dividi-la por  $|3 - 4i| = 5$ . Assim obtemos

$$\left( \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) z^2 + \left( \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \bar{z}^2 + 6z\bar{z} = 24.$$

Observe que  $|A| = \left| \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right| = 1$  e  $B = 6 > -2$  e, portanto a equação está na **forma padrão**.

A **direção da diretriz** é dada por

$$v = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} - \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}i = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i$$

**Passo 04:** Aplicar a rotação  $z = \sqrt{A}w$  para obter a forma canônica;

Agora vamos fazer a mudança de variável  $z = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i\right)w$ , dessa forma obtendo a forma canônica

$$w^2 + \bar{w}^2 + 6w\bar{w} = 24 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(w^2) + 6|w|^2 = 24$$

**Passo 05:** Verificar na tabela se a forma canônica representa uma cônica;

Como  $B = 6 > 2$ , temos que analisar o caso da elipse:

$$\frac{c_1'^2}{B+2} + \frac{c_2'^2}{B-2} - D = \frac{0^2}{8} + \frac{0^2}{4} - (-24) = 24 > 0,$$

portanto, a equação  $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$  representa uma elipse.

**Passo 06:** Transformar a forma canônica em coordenadas cartesianas nesse novo sistema de coordenadas;

Assumindo agora que  $w = x' + y'i$  temos

$$\begin{aligned} 2(x'^2 - y'^2) + 6(x'^2 + y'^2) &= 24 \\ 8x'^2 + 4y'^2 &= 24 \\ \frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{6} &= 1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Observe que a equação (4.10) está na forma canônica em relação ao plano  $w$ , ou seja, os eixos da cônica são paralelos aos eixos coordenados do plano  $w$ .

**Passo 09:** Determinar todos os elementos da cônica nesse último sistema de coordenadas;

✓  $a = \sqrt{6}$ ,  $b = \sqrt{3}$  e pela equação  $a^2 = b^2 + c^2$ , tem-se que  $c = \sqrt{3}$ .

✓ a medida do eixo maior é  $2\sqrt{6}$  e medida do eixo menor é  $2\sqrt{3}$

✓ os vértices são:  $a'_1 = \sqrt{6}i$ ,  $a'_2 = -\sqrt{6}i$ ,  $b'_1 = \sqrt{3}$  e  $b'_2 = -\sqrt{3}$

✓ os focos são:  $c'_1 = \sqrt{3}i$  e  $c'_2 = -\sqrt{3}i$

✓ a excentricidade é  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

✓ a localização da diretriz é  $\gamma = \pm \frac{a}{\varepsilon}i = \pm 2\sqrt{3}i$

Na figura ao lado temos a representação geométrica para a equação (4.10) no plano  $W$ .

Note que a **diretriz é sempre paralela** ao eixo **não focal** da cônica e sua localização foi tomada em relação ao foco  $-\sqrt{3}i$  por isso  $\gamma = -2\sqrt{3}$ .

Se tivéssemos tomado como referência o foco  $\sqrt{3}i$  a localização da diretriz no eixo  $O'Y'$  seria dada por  $\gamma = 2\sqrt{3}$  e, portanto, a diretriz estaria na parte positiva de  $O'Y'$ .

Conclui-se que a cônica (exceto a parábola) terá sempre duas diretrizes, dependendo apenas do foco que é tomado como referência. No entanto, observe que para gerar uma cônica é suficiente termos apenas um foco e uma diretriz.

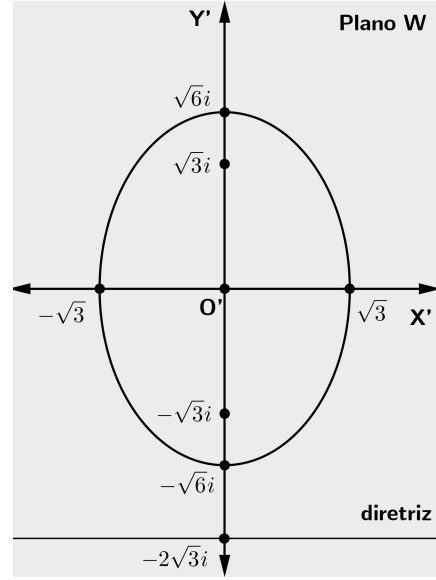


Figura 4.1: Elipse no Plano  $W$ .

**Passo 10:** Aplicar a isometria inversa para obter os elementos no sistema de coordenadas original.

Já sabemos que a direção da diretriz no plano complexo é dada por  $v = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i$ . Sabemos ainda que se  $\theta$  é o ângulo que  $v$  forma com o eixo  $OX$  do plano complexo, então  $\theta$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$\theta = \arctan \left( \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \right) = \arctan \left( -\frac{1}{2} \right) = -\underbrace{\arctan \left( \frac{1}{2} \right)}_{\alpha} = -\alpha.$$

Como  $\theta$  é negativo, a equação  $z = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) w$  traduz que cada ponto  $z$  do plano complexo é obtido pela rotação de cada ponto  $w$  do plano  $W$  de um ângulo  $\theta$  no sentido horário.

Dessa forma:

- Os focos  $c'_1 = \sqrt{3}i$  e  $c'_2 = -\sqrt{3}i$  são levados em  $c_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$  e  $c_2 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$ , respectivamente.
- Os vértices  $a'_1 = \sqrt{6}i$  e  $a'_2 = -\sqrt{6}i$  são levados em  $a_1 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}i$  e  $a_2 = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}i$ , respectivamente.
- Os vértices  $b'_1 = \sqrt{3}$  e  $b'_2 = -\sqrt{3}$  são levados em  $b_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$  e  $b_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$ , respectivamente.
- A localização da diretriz  $\gamma' = -2\sqrt{3}$  é levada em  $\gamma = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$ .

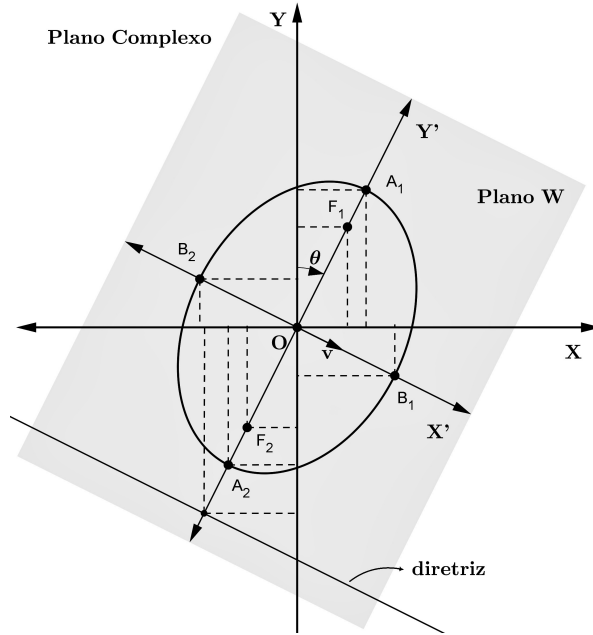


Figura 4.2: Elipse de equação  $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$ .

Note que  $O' = 0 + 0i$  é levada pela equação em  $O = 0 + 0i$  e a diretriz é dada por  $f(t) = \left( -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i \right) + t \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right)$ .

### Exemplo 2

Determine os elementos da cônica  $2x^2 - 4xy - y^2 = -24$

**Passo 01:** Verificar se  $(a - c)^2 - b^2$  é diferente de zero;

Como  $a = 2$ ,  $b = -4$  e  $c = -1$  temos  $(2 - (-1))^2 - (-4)^2 = 9 - 16 = -7 \neq 0$ , logo a equação  $2x^2 - 4xy - y^2 = -24$ , **pode** representar uma cônica.

**Passo 02:** Complexificar a equação tomando  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ;

Após simplificarmos e agruparmos os termos semelhantes teremos a equação

$$(3 + 4i)z^2 + (3 - 4i)\bar{z}^2 + 2z\bar{z} = -96.$$

**Passo 03:** Colocar a equação na forma padrão (Dividindo a equação pelo módulo de  $A$  e multiplicando por  $-1$ , se  $B \leq -2$ );

Como  $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 1$ , vamos dividir a equação por  $|3 - 4i| = 5$  obtendo assim a **forma padrão**

$$\left( \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) z^2 + \left( \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \bar{z}^2 + \frac{2}{5}z\bar{z} = -\frac{96}{5}.$$

A direção da diretriz é dada por

$$v = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} - \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}i = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i$$

**Passo 04:** Aplicar a rotação  $z = \sqrt{A}w$  para obter a forma canônica;

Agora vamos fazer a mudança de variável  $z = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i\right)w$ , dessa forma obtendo a **forma canônica**

$$w^2 + \bar{w}^2 + \frac{2}{5}w\bar{w} = -\frac{96}{5} \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(w^2) + \frac{2}{5}|w|^2 = -\frac{96}{5}$$

**Passo 05:** Verificar na tabela se a forma canônica representa uma cônica;

Como  $B = \frac{2}{5}$ , temos que analisar o caso da hipérbole:

$$\frac{c_1^2}{B+2} + \frac{c_2^2}{B-2} - D = \frac{0^2}{\frac{5}{2}} + \frac{0^2}{-\frac{5}{2}} - \left(-\frac{96}{5}\right) = \frac{96}{5} \neq 0,$$

portanto, a equação representa uma hipérbole.

**Passo 06:** Transformar a forma canônica em coordenadas cartesianas nesse novo sistema de coordenadas;

Assumindo agora que  $w = x' + y'i$  temos

$$\begin{aligned} 2(x'^2 - y'^2) + \frac{2}{5}(x'^2 + y'^2) &= -\frac{96}{5}, (\times 5) \\ 10(x'^2 - y'^2) + 2(x'^2 + y'^2) &= -96 \\ 12x'^2 - 8y'^2 &= -96 \\ 8y'^2 - 12x'^2 &= 96 \\ \frac{y'^2}{12} - \frac{x'^2}{8} &= 1 \end{aligned} \tag{4.11}$$

**Passo 09:** Determinar todos os elementos da cônica nesse último sistema de coordenadas;

Assim temos  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $b = 2\sqrt{2}$  e pela relação fundamental  $c^2 = a^2 + b^2$ , tem-se que  $c = 2\sqrt{5}$ . A excentricidade é  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ . Se considerarmos o foco  $c = 2\sqrt{5}i$  como parâmetro, a localização da diretriz no eixo  $O'Y'$  do plano  $W$  será dada por  $\gamma' = \frac{6}{\sqrt{5}}$  conforme a figura abaixo.

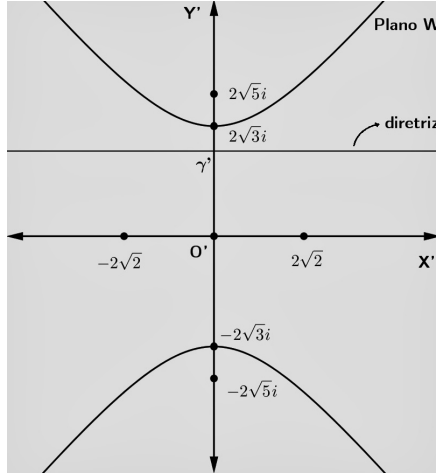


Figura 4.3: Hipérbole de equação  $\frac{y'^2}{12} - \frac{x'^2}{8} = 1$ .

**Passo 10:** Aplicar a isometria inversa para obter os elementos no sistema de coordenadas original.

A direção da diretriz no plano complexo é dada por  $v = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i$ .  
O ângulo que  $v$  forma com o eixo  $OX$  é dado por

$$\theta = \arctan \left( \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \right) = \arctan \left( -\frac{1}{2} \right) = -\underbrace{\arctan \left( \frac{1}{2} \right)}_{\alpha} = -\alpha.$$

Como  $\theta$  é negativo, a equação  $z = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) w$  transforma cada ponto  $w$  do plano  $W$  em um ponto  $z$  do plano complexo através de uma rotação de um ângulo  $\theta$  no sentido horário.

Assim os pontos da hipérbole no plano complexo são:

- $a_1 = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) a'_1 = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) 2\sqrt{3}i = \frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{4\sqrt{3}}{5}i$
- $a_2 = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) a'_2 = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) (-2\sqrt{3}i) = -\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{4\sqrt{3}}{5}i$
- $b_1 = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) b'_1 = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{5}i$
- $b_2 = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) b'_2 = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) (-2\sqrt{2}) = -\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{5}i$
- $c_1 = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) c'_1 = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) 2\sqrt{5}i = 2 + 4i$



- $c_2 = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) c'_2 = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) (-2\sqrt{5}i) = -2 - 4i$
- $\gamma = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) \gamma' = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) \frac{6}{\sqrt{5}}i = \frac{6}{5} + \frac{12}{5}i$

Na figura abaixo temos a representação da hipérbole.

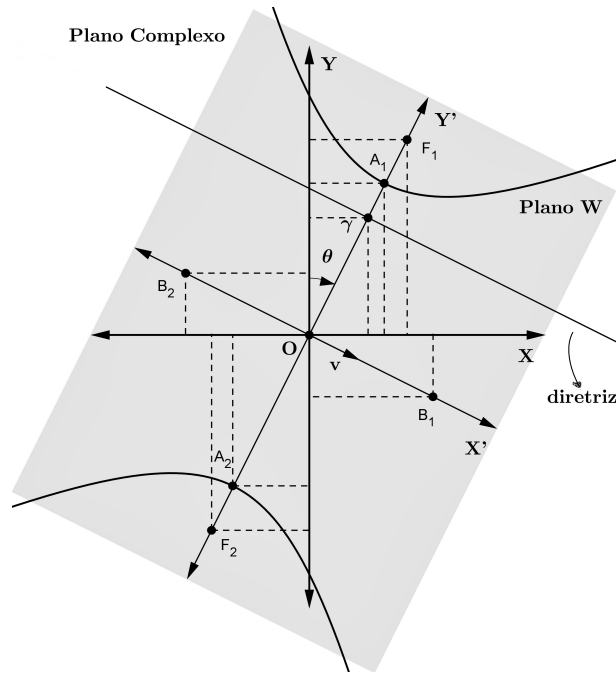


Figura 4.4: Hipérbole de equação  $2x^2 - 4xy - y^2 = -24$ .

### Exemplo 3

Determine os elementos da cônica  $2x^2 + 2y^2 - 4xy + 8y = 0$

**Passo 01:** Verificar se  $(a - c)^2 - b^2$  é diferente de zero;

Como  $a = 2$ ,  $b = -4$  e  $c = 2$  temos  $(2 - 2)^2 - (-4)^2 = -8 \neq 0$ , logo a equação  $2x^2 + 2y^2 - 4xy + 8y = 0$ , **pode** representar uma cônica.

**Passo 02:** Complexificar a equação tomando  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ;

Após simplificarmos e agruparmos os termos semelhantes teremos a equação

$$4iz^2 + (-4i)\bar{z}^2 + 8z\bar{z} + (-16i)z + (16i)\bar{z} = 0$$

**Passo 03:** Colocar a equação na forma padrão (Dividindo a equação pelo módulo de  $A$  e multiplicando por  $-1$ , se  $B \leq -2$ );

Como  $|-4i| = 4 \neq 1$ , vamos dividir a equação por  $|-4i| = 4$  obtendo assim a **forma padrão**

$$iz^2 + (-i)\bar{z}^2 + 2z\bar{z} + (-4i)z + (4i)\bar{z} = 0$$

A direção da diretriz é dada por

$$v = \sqrt{A} = \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1+0}{2}} - \sqrt{\frac{1+0}{2}}i = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

**Passo 04:** Aplicar a rotação  $z = \sqrt{A}w$  para obter a forma canônica;

Agora vamos fazer a mudança de variável  $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)w$ , dessa forma obtendo a forma canônica

$$w^2 + \bar{w}^2 + 2w\bar{w} + \left(-\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}}i\right)w + \left(-\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}i\right)\bar{w} = 0$$

**Passo 05:** Verificar na tabela se a forma canônica representa uma cônica;

Como  $B = 2$ , basta verificar que  $c'_2 = -\frac{4}{\sqrt{2}} \neq 0$  e portanto, a forma canônica representa uma parábola.

**Passo 06:** Transformar a forma canônica em coordenadas cartesianas nesse novo sistema de coordenadas;

Assumindo agora que  $w = x' + y'i$  temos

$$\begin{aligned} 2(x'^2 - y'^2) + 2(x'^2 + y'^2) + 2\left(-\frac{4}{\sqrt{2}}x' + \frac{4}{\sqrt{2}}y'\right) &= 0 \\ 4x'^2 - 4\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y' &= 0 \\ x'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' &= 0 \end{aligned}$$

**Passo 07:** Completar o quadrado.

$$\begin{aligned} x'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' &= 0 \\ x'^2 - \sqrt{2}x' &= -\sqrt{2}y' \\ \left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= -\sqrt{2}y' + \frac{2}{4} \\ \left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= -\sqrt{2}\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

**Passo 07:** Aplicar a translação para colocar a equação na forma canônica desse novo sistema de coordenadas.

Tomando a mudança de variável

$$u = w + \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \left( x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left( y' - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) i = x'' + y'' i, \quad (4.13)$$

a equação (4.12) toma a forma canônica no plano  $U$ , dada por

$$x''^2 = -\sqrt{2}y''.$$

**Passo 09:** Determinar todos os elementos da cônica nesse último sistema de coordenadas;

Assim  $2p = \sqrt{2}$  e, portanto,  $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Assim a parábola tem vértice em  $O''$ , o foco é dado pelo complexo  $c'' = -\frac{\sqrt{2}}{4}i$  e a localização da diretriz no eixo  $O''Y''$  é dada pelo complexo  $\gamma'' = \frac{\sqrt{2}}{4}i$  como mostra a figura.

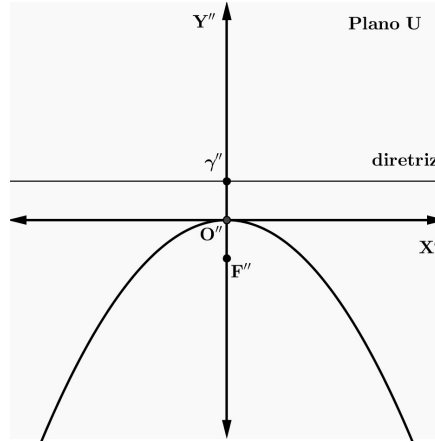


Figura 4.5: Parábola de equação  $x''^2 = -\sqrt{2}y''$ .

**Passo 10:** Aplicar a isometria inversa para obter os elementos no sistema de coordenadas original.

Para se obter os elementos da parábola no plano  $W$  basta utilizar a equação (4.13) da mudança de variável. Lembrando é claro, que não há necessidade de utilizá-la, tendo em vista que por meio da equação (4.12) é possível obter todos esses elementos no próprio plano  $W$ . Nossa intenção nesse exemplo é apenas mostrar que nesse caso podemos considerar três planos para ilustrar o problema.

No plano  $W$ , o vértice  $V'$  da parábola é dado pelo complexo  $v' = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$ , o foco  $F'$  é dado por  $c' = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e a localização da diretriz é  $\gamma' = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  como mostra a figura.

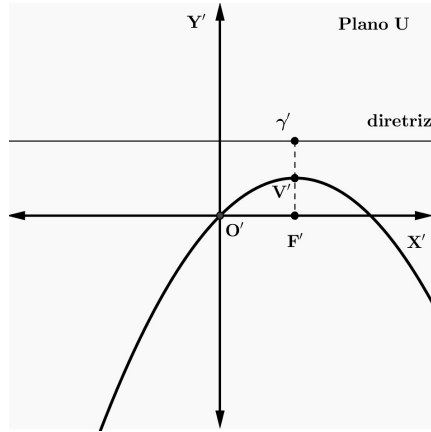


Figura 4.6: Parábola de equação  $\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\sqrt{2}\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ .

Antes de localizar os elementos da cônica no plano complexo, observe que o ângulo que  $v$  forma com o eixo  $OX$  desse plano é dado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \arctan(-1) = -45^\circ.$$

Portanto, como  $\theta$  é negativo, a equação  $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)w$  rotaciona cada elemento do plano  $W$  de um ângulo de  $45^\circ$  no sentido horário. Além disso, pode-se obter os elementos da cônica nesse plano a partir dos elementos no plano  $U$ , para isto, basta observar que  $w = u + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$  e, portanto  $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(u + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)$ .

No plano complexo, os elementos da parábola são:

- O vértice  $V$  é dado por  $\mathbf{v} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$
- O foco  $F$  é dado por  $c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- A localização da diretriz é dada por  $\gamma = 1$

Na figura abaixo temos a representação para a parábola.

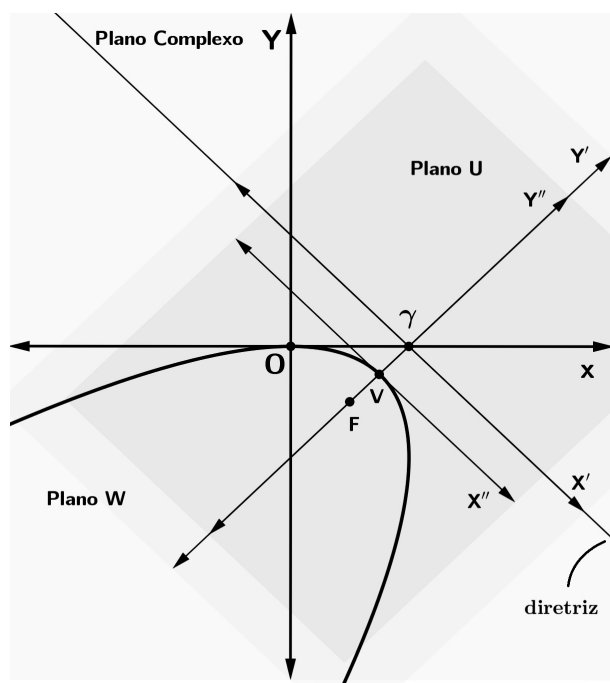


Figura 4.7: Hipérbole de equação  $2x^2 - 4xy - y^2 = -24$ .

# Considerações Finais

Este trabalho foi elaborado para servir de apoio a professores e alunos do Ensino Médio. Procuramos abordar os temas em linguagem simples e acessível, valorizando os aspectos geométricos das operações e propriedades envolvendo os números complexos.

Começamos exibindo o contexto histórico afim de esclarecer algumas confusões a respeito do surgimento dos números complexos.

No capítulo 2, apresentamos os números complexos como estrutura algébrica e exibimos, sem perder o foco, as representações geométricas para algumas de suas operações.

No capítulo 3, divagamos um pouco e mostramos que as elipses e hipérbolas podem ser caracterizadas a partir da definição de parábola.

Finalmente, no último capítulo ressaltamos o grande potencial dos números complexos para representação e movimentação dos objetos do plano. Neste capítulo empregamos um pouco de teoria e mostramos que é possível determinar, através de uma equação com termos quadráticos e lineares na variável  $z$ , os elementos das cônicas mesmo quando seus eixos não são paralelos aos eixos coordenados do plano, sem precisar recorrer aos recursos de álgebra linear.

# Apêndice A

## Outra Demonstração para Elipses e Hipérboles

**Teorema A.0.1.** *Sejam  $r$  uma reta,  $\mathbf{F}$  um ponto fora dela e  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < \varepsilon \neq 1$ . O lugar geométrico dos pontos  $\mathbf{P}$  do plano tais que*

$$\frac{|\mathbf{P} - \mathbf{F}|}{d(\mathbf{P}, r)} = \varepsilon \quad (\text{A.1})$$

é:

- i) Uma elipse de excentricidade  $\varepsilon$  se  $0 < \varepsilon < 1$ .*
- ii) Uma hipérbole de excentricidade  $\varepsilon$  se  $1 < \varepsilon$ .*

### Demonstração:

Provaremos inicialmente o caso *i*):

Consideremos a reta  $r'$  perpendicular a reta  $r$  passando pelo ponto  $\mathbf{F}$ . Vamos orientá-la no sentido positivo de  $\mathbf{O}$  para  $\mathbf{F}$ , com  $\{\mathbf{O}\} = r \cap r'$ , como mostra a figura abaixo.

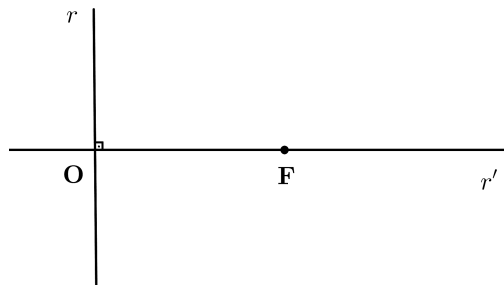


Figura A.1

Sejam  $|\mathbf{F} - \mathbf{O}| = F$  e  $|\mathbf{P} - \mathbf{O}| = P$  as distâncias do ponto  $\mathbf{F}$  ao ponto  $\mathbf{O}$  e do ponto arbitrário  $\mathbf{P}$  ao ponto  $\mathbf{O}$ , respectivamente.

Vamos agora procurar, sobre a reta  $r'$ , soluções para a equação (A.1). Para isto, tomemos sobre a reta  $r'$ , o ponto  $\mathbf{P} = t\mathbf{F}$ , onde  $t \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ . Assim, pela equação (A.1) temos:

$$\frac{|\mathbf{P} - \mathbf{F}|}{d(\mathbf{P}, r)} = \frac{|t\mathbf{F} - \mathbf{F}|}{|t\mathbf{F} - \mathbf{O}|} = \frac{|t-1|F}{|t|F} = \frac{|t-1|}{|t|} > 0.$$

Podemos fazer

$$\frac{|t-1|}{|t|} = \varepsilon,$$

assim, elevando ao quadrado essa última igualdade obtemos

$$\frac{|t-1|^2}{|t|^2} = \varepsilon^2 \iff \frac{(t-1)^2}{t^2} = \varepsilon^2 \iff (t-1)^2 = t^2\varepsilon^2 \iff (1-\varepsilon^2)t^2 - 2t + 1 = 0.$$

Logo,

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 - \varepsilon^2)}}{2(1 - \varepsilon^2)} = \frac{2 \pm 2\sqrt{\varepsilon^2}}{2(1 - \varepsilon^2)} = \frac{1 \pm \varepsilon}{1 - \varepsilon^2}.$$

Portanto, as raízes da equação são:

$$t_1 = \frac{1}{1 + \varepsilon} \text{ ou } t_2 = \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

Note que  $t_1 > 0$  e  $t_2 > 0$ , pois estamos considerando neste caso que  $0 < \varepsilon < 1$ .

Vamos tomar, sobre a reta  $r'$ , os pontos  $\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{F}}{1 + \varepsilon}$ ,  $\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{F}}{1 - \varepsilon}$ ,  $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2}{2} = \frac{\mathbf{F}}{2(1 + \varepsilon)} + \frac{\mathbf{F}}{2(1 - \varepsilon)} = \frac{\mathbf{F}}{1 - \varepsilon^2}$  e  $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{C} + (\mathbf{C} - \mathbf{F}) = 2\mathbf{C} - \mathbf{F} = \frac{2\mathbf{F}}{1 - \varepsilon^2} - \mathbf{F} = \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\right)\mathbf{F}$ . Observe ainda que  $0 < t_1 < 1 < t_2$  e  $0 < V_1 < F < V_2$ . Na figura abaixo temos a ilustração para essas condições.

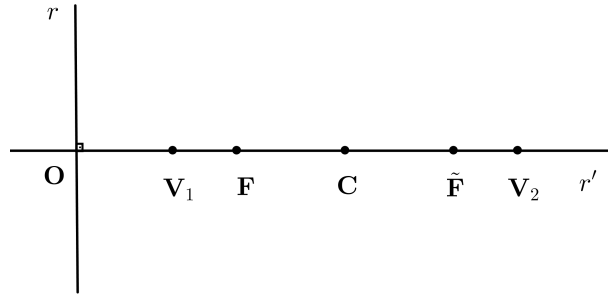


Figura A.2

Agora vamos mostrar que todos os pontos do lugar geométrico que satisfazem a equação (A.1) são obtidos quando tomamos um ponto  $\mathbf{D}$  arbitrário na reta  $r'$  tal que  $V_1 \leq D \leq V_2$ . Para fazer essa análise, iremos dividi-la em casos, como segue:

**Caso 1:** Se  $\mathbf{D} \in r'$  tal que  $V_1 \leq D \leq F$  (ver figura acima).

Por  $\mathbf{D}$  tracemos uma reta  $r_D$  paralela a reta  $r$ , assim temos



$$\frac{F}{1+\varepsilon} \leq D \Rightarrow F \leq D + \varepsilon D \Rightarrow F - D \leq \varepsilon D$$

Como  $F \geq D$ , tem-se que  $F - D = |F - D| \leq \varepsilon D$  (ver figura A.3). Esta última desigualdade significa que a circunferência de centro em  $\mathbf{F}$  com raio de comprimento  $\varepsilon D$  intercepta a reta  $r_D$  em um (quando  $\mathbf{D} = \mathbf{V}_1$ ) ou dois pontos e, portanto, vale a equação

$$\frac{|\mathbf{P} - \mathbf{F}|}{d(\mathbf{P}, r)} = \frac{\varepsilon D}{D} = \varepsilon.$$

**Caso 2:** Se  $\mathbf{D} \in r'$  tal que  $0 < F < D \leq V_2$ .

Neste caso  $D \leq \frac{F}{1-\varepsilon} \Rightarrow D - \varepsilon D \leq F \Rightarrow D - F \leq \varepsilon D$ . Como  $D > F$ , temos  $D - F = |D - F| \leq \varepsilon D$ , portanto, a desigualdade significa que a circunferência de centro em  $\mathbf{F}$  com raio de comprimento  $\varepsilon D$  intercepta a reta  $r_D$  em um (quando  $\mathbf{D} = \mathbf{V}_2$ ) ou dois pontos (ver figura A.4).

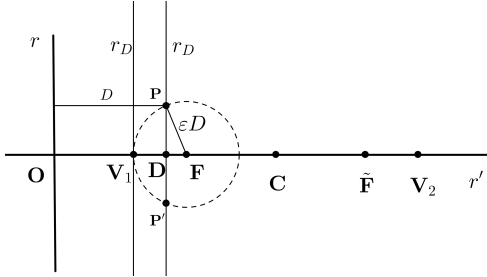


Figura A.3

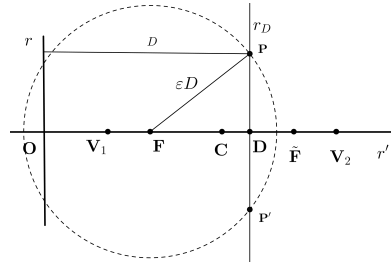


Figura A.4

**Caso 3:** Se  $\mathbf{D} \in r'$  tal que  $D < V_1$ .

Neste caso,  $D < \frac{F}{1+\varepsilon} \Rightarrow D + \varepsilon D < F \Rightarrow F - D > \varepsilon D$ , como  $F > D$ , temos  $|F - D| = F - D > \varepsilon D$ . Isso significa que a circunferência de centro em  $\mathbf{F}$  e raio de comprimento  $\varepsilon D$  não intercepta a reta  $r_D$  (veja a figura A.5).

**Caso 4:** E, finalmente, se  $\mathbf{D} \in r'$  tal que  $D > V_2$ , então  $D > \frac{F}{1-\varepsilon} \Rightarrow D - \varepsilon D > F \Rightarrow D - F > \varepsilon D$ , como  $D > F$  temos  $|D - F| = D - F > \varepsilon D$ . Portanto, a conclusão é a mesma do caso anterior, isto é, a circunferência de centro em  $\mathbf{F}$  e raio de comprimento  $\varepsilon D$  não intercepta a reta  $r_D$  (veja a figura A.6).

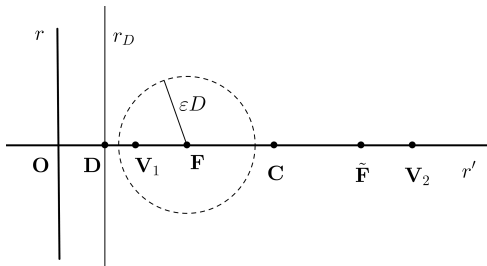


Figura A.5

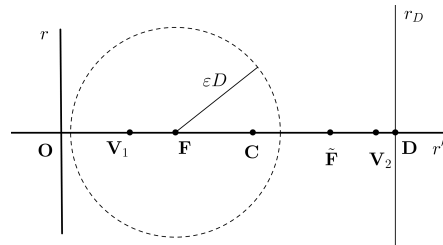


Figura A.6

Essa análise permite concluir que todos os pontos do lugar geométrico são obtidos como acima, quando  $\mathbf{D}$  é tomado tal que  $V_1 \leq D \leq V_2$ .

Vamos determinar o lugar geométrico dos pontos  $\mathbf{P}$  do plano, nas condições acima. Para isto considere a figura abaixo:

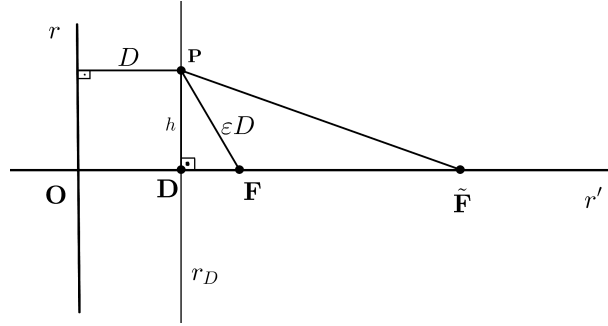


Figura A.7

Note pela equação (A.1) que  $|\mathbf{P} - \mathbf{F}| = \varepsilon D$ , como na figura acima. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $\mathbf{PD}\tilde{\mathbf{F}}$ , temos

$$|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{F}}|^2 = h^2 + |\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{D}|^2. \quad (\text{A.2})$$

Mas do triângulo  $\mathbf{PDF}$ , temos  $|\mathbf{P} - \mathbf{F}|^2 = h^2 + |\mathbf{F} - \mathbf{D}|^2$ , como  $|\mathbf{P} - \mathbf{F}| = \varepsilon D$ , tem-se

$$h^2 = \varepsilon^2 D^2 - |\mathbf{F} - \mathbf{D}|^2 \quad (\text{A.3})$$

Substituindo (A.3) em (A.2) temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{F}}|^2 &= \varepsilon^2 D^2 - |\mathbf{F} - \mathbf{D}|^2 + |\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{D}|^2 \\ &= \varepsilon^2 D^2 - |F - D|^2 + |\tilde{F} - D|^2 \\ &= \varepsilon^2 D^2 - (F - D)^2 + (\tilde{F} - D)^2 \\ &= \varepsilon^2 D^2 - F^2 + 2FD - D^2 + \tilde{F}^2 - 2\tilde{F}D + D^2 \\ &= \varepsilon^2 D^2 - 2D(\tilde{F} - F) + (\tilde{F}^2 - F^2) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Como  $\tilde{\mathbf{F}} = \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\right) \mathbf{F}$ , temos  $\tilde{\mathbf{F}}^2 = \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\right)^2 \mathbf{F}^2$ , assim

$$\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F} = \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\right) \mathbf{F} - \mathbf{F} = \left(\frac{1 + \varepsilon^2 - 1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\right) \mathbf{F} = \frac{2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \mathbf{F} \Rightarrow \tilde{F} - F = \frac{2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} F$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}^2 - \mathbf{F}^2 &= \left( \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 \mathbf{F}^2 - \mathbf{F}^2 \\
&= \left( \frac{(1 + \varepsilon^2)^2 - (1 - \varepsilon^2)^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right) \mathbf{F}^2 \\
&= \left( \frac{1 + 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4 - 1 + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^4}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right) \mathbf{F}^2 \\
&= \frac{4\varepsilon^4}{(1 - \varepsilon^2)^2} \mathbf{F}^2 \Rightarrow \\
\tilde{F}^2 - F^2 &= \frac{4\varepsilon^4}{(1 - \varepsilon^2)^2} F^2
\end{aligned}$$

Substituindo estas últimas igualdades em (A.4) temos

$$\left| \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{F}} \right|^2 = \varepsilon^2 D^2 - 2D \frac{2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} F + \frac{4\varepsilon^4}{(1 - \varepsilon^2)^2} F^2 = \left( \varepsilon D - \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} F \right)^2$$

Como  $0 < \frac{F}{1 + \varepsilon}$  e  $D < \frac{F}{1 - \varepsilon}$ , somando ordenadamente essas desigualdades teremos  $0 + D < \frac{F}{1 + \varepsilon} + \frac{F}{1 - \varepsilon} = \frac{2F}{1 - \varepsilon^2}$  e, portanto,  $\varepsilon D < \frac{2\varepsilon F}{1 - \varepsilon^2} \Rightarrow \varepsilon D - \frac{2\varepsilon F}{1 - \varepsilon^2} < 0$ . Portanto,

$$\left| \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{F}} \right| = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} F - \varepsilon D$$

Somando  $\varepsilon D = |\mathbf{P} - \mathbf{F}|$  a ambos os lados da equação acima teremos

$$\left| \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{F}} \right| + |\mathbf{P} - \mathbf{F}| = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} F \tag{A.5}$$

Portanto  $\mathbf{P}$  pertence a elipse de focos  $\mathbf{F}$  e  $\tilde{\mathbf{F}}$  e eixo maior igual a  $\frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} F$ . Além disso,  $\left| \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F} \right| = \frac{2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} F$ , portanto, a excentricidade da elipse é

$$\frac{\frac{2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} F}{\frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} F} = \varepsilon$$

A demonstração para o caso (ii) é análoga a do caso (i), no entanto, como  $\varepsilon > 1$  temos  $t_2 < 0 < t_1 < 1$  e conseqüentemente  $F > V_1 > 0$ , veja a figura abaixo.

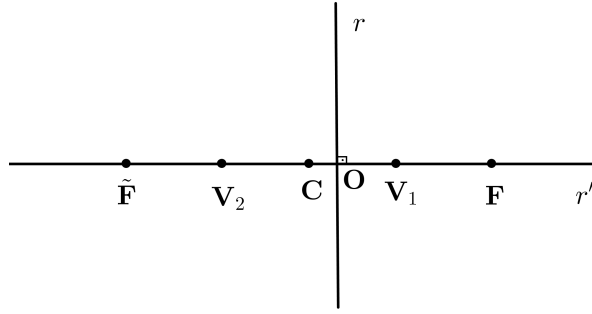


Figura A.8

**Caso 1:** Se  $\mathbf{D} \in r'$  tal que  $0 < V_1 \leq D \leq F$ .

Por  $\mathbf{D}$  tracemos uma reta  $r_D$  paralela a reta  $r$ , assim temos

$$\frac{F}{1+\varepsilon} \leq D \Rightarrow F \leq D + \varepsilon D \Rightarrow F - D \leq \varepsilon D$$

Como  $F \geq D$ , tem-se que  $F - D = |F - D| \leq \varepsilon D$ . Esta última desigualdade significa que a circunferência de centro em  $\mathbf{F}$  com raio de comprimento  $\varepsilon D$  intercepta a reta  $r_D$  em um ou dois pontos e, portanto, vale a equação

$$\frac{|\mathbf{P} - \mathbf{F}|}{d(\mathbf{P}, r)} = \frac{\varepsilon D}{D} = \varepsilon$$

**Caso 2:** Se tomarmos o ponto  $\mathbf{D}$  em  $r'$  tal que  $F < D$ .

Neste caso  $\frac{F}{1+\varepsilon} < D \Rightarrow F < D + \varepsilon D \Rightarrow F - D < \varepsilon D$ . Como  $0 < F < D < \varepsilon D$ , pois  $\varepsilon D$ , daí  $|F - D| = D - F < \varepsilon D$  e, portanto a conclusão é a mesma do caso anterior.

**Caso 3:** Se tomarmos o ponto  $\mathbf{D}$  em  $r'$  tal que  $-D \leq V_2 < 0$ , então  $-D < \frac{F}{1-\varepsilon} \Rightarrow (-D) + \varepsilon D > F \Rightarrow F - (-D) < \varepsilon D$  que implica  $|F - (-D)| < \varepsilon D$ . Isso significa que a circunferência de centro em  $\mathbf{F}$  e raio de comprimento  $\varepsilon D$  intercepta a reta  $r_D$  em um ou dois pontos .

**Caso 4:** E, finalmente, se  $0 \leq D < V_1 < F$  em  $r'$ , então  $D < \frac{F}{1+\varepsilon} \Rightarrow D + \varepsilon D < F \Rightarrow F - D > \varepsilon D$ , como  $F > D$  temos  $|F - D| = F - D > \varepsilon D$ . Portanto, a circunferência de centro em  $\mathbf{F}$  e raio de comprimento  $\varepsilon D$  não intercepta a reta  $r_D$ . O mesmo caso ocorre quando tomamos o ponto  $\mathbf{D}$  tal que  $V_1 < -D < 0 < F$ , ou seja,  $\frac{F}{1-\varepsilon} < -D \Rightarrow F > (-D)(1-\varepsilon) \Rightarrow F > (-D) + \varepsilon D \Rightarrow F - (-D) > \varepsilon D$ , logo  $|F - (-D)| > \varepsilon D$  e, portanto, a conclusão é a mesma.

Agora considere a figura abaixo:

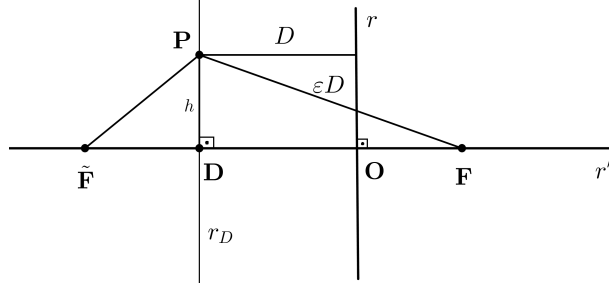


Figura A.9

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $\mathbf{PD}\tilde{\mathbf{F}}$ , temos

$$|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{F}}|^2 = h^2 + |\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{D}|^2. \quad (\text{A.6})$$

Mas do triângulo  $\mathbf{PDF}$ , temos  $|\mathbf{P} - \mathbf{F}|^2 = h^2 + |\mathbf{F} - \mathbf{D}|^2$  como  $|\mathbf{P} - \mathbf{F}| = \varepsilon D$ , tem-se

$$h^2 = \varepsilon^2 D^2 - |\mathbf{F} - \mathbf{D}|^2 \quad (\text{A.7})$$

Substituindo (A.7) em (A.6) temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{F}}|^2 &= \varepsilon^2 D^2 - |\mathbf{F} - \mathbf{D}|^2 + |\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{D}|^2 \\ &= \varepsilon^2 D^2 - |F + D|^2 + |\tilde{F} + D|^2 \\ &= \varepsilon^2 D^2 - (F + D)^2 + (\tilde{F} + D)^2 \\ &= \varepsilon^2 D^2 - F^2 - 2FD - D^2 + \tilde{F}^2 + 2\tilde{F}D + D^2 \\ &= \varepsilon^2 D^2 + 2D(\tilde{F} - F) + (\tilde{F}^2 - F^2) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo os valores de  $\tilde{F} - F$  e  $\tilde{F}^2 - F^2$  na equação acima, obtemos

$$|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{F}}|^2 = \varepsilon^2 D^2 + 2D \frac{2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} F + \frac{4\varepsilon^4}{(1 - \varepsilon^2)^2} F^2 = \left( \varepsilon D + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} F \right)^2$$

Como  $-D < \frac{F}{1 - \varepsilon}$  e  $0 < \frac{F}{1 + \varepsilon}$ , somando ordenadamente essas desigualdades teremos  $0 - D < \frac{F}{1 + \varepsilon} + \frac{F}{1 - \varepsilon} = \frac{2F}{1 - \varepsilon^2}$  e, portanto,  $-\varepsilon D < \frac{2\varepsilon F}{1 - \varepsilon^2} \Rightarrow \varepsilon D > \frac{2\varepsilon F}{\varepsilon^2 - 1}$ . Portanto,

$$|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{F}}| = \varepsilon D + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} F$$

Subtraindo  $\varepsilon D = |\mathbf{P} - \mathbf{F}|$  a ambos os lados da equação acima teremos

$$|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{F}}| - |\mathbf{P} - \mathbf{F}| = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} F \quad (\text{A.9})$$

Note que para essa demonstração consideramos que o ponto  $\mathbf{P}$  pertence ao ramo da hipérbole cujo foco é  $\tilde{\mathbf{F}}$ . Se tivéssemos considerado o ramo cujo foco é  $\mathbf{F}$  teríamos, procedendo de maneira análoga, o seguinte

$$|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{F}}| - |\mathbf{P} - \mathbf{F}| = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} F \quad (\text{A.10})$$

Das equações (A.9) e (A.10) obtemos

$$\left| |\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{F}}| - |\mathbf{P} - \mathbf{F}| \right| = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} F \quad (\text{A.11})$$

Portanto  $\mathbf{P}$  pertence a hipérbole de focos  $\mathbf{F}$  e  $\tilde{\mathbf{F}}$ . Além disso,  $|\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}| = \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} F$ , portanto, a excentricidade da hipérbole é

$$\frac{\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} F}{\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} F} = \varepsilon.$$

■

# Referências Bibliográficas

- [1] LIMA, ELON LAGES. *A matemática do ensino médio - volume 3 - Coleção do Professor de Matemática / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado*. 6. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [2] LIMA, ELON LAGES. *Coordenadas no plano - Coleção do Professor de Matemática / Elon Lages Lima e Paulo Cezar Pinto Carvalho*. 5. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [3] CARMO, MANFREDO PERDIGÃO DO. *Trigonometria / Números complexos - Coleção do Professor de Matemática / Manfredo Perdigão do Carmo, Augusto César Morgado, Eduardo Wagner*. -3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [4] MUNIZ NETO, ANTÔNIO CAMINHA. *Tópicos de Matemática Elementar - Polinômios - Volume 6 - Coleção do Professor de Matemática / Antônio Caminha Muniz Neto*. -1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [5] ANDREESCU, TITU; ANDRICA, DORIN. *Complex Number from A to... Z / Titu Andreescu, Dorin Andrica*. Boston: Birkhäuser, 2004.
- [6] EVES, HOWARD. *Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- [7] B. BOYER, CARL. *História da matemática / Carl B. Boyer, Uta. C. Merzbach; tradução: Helena Castro*. São Paulo, SP: Blucher, 2012.
- [8] HAHN, LIANG-SHIN . *Complex Number and Geometry / Liang-Shin Hahn* . USA: The Mathematical Association of American, 1994.
- [9] YAGLOM, I. M. *Complex Number in Geometry*. New York: ACADEMIC PRESS INC., 1968.
- [10] AGARWAL, RAVI P.; PERERA, KANISHKA; PINELAS, SANDRA. *An Introduction to Complex Analysis*. New York: Springer, 2010.

- [11] HEFEZ, ABRAMO. *Curso de álgebra, volume 1 - Coleção Matemática Universitária/ Abramo Hefez*. -4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. North-Holland, 1992.
- [12] D'ANGELO, JOHN P. *An Introduction to Complex Analysis in Geometry*. Illinois: University of Illinois Urbana - Champaign, 2009.
- [13] JÚNIOR, ULÍCIO PINTO. *A História dos Números Complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática)*. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2009.
- [14] OLIVEIRA, CARLOS NELLY CLEMENTINO DE. *Números Complexos: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática)*. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2010.
- [15] IEZZI, GELSON. *Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica / Gelson Iezzi*. -7. ed. - São Paulo: Atual, 2005.
- [16] IEZZI, GELSON. *Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios e equações / Gelson Iezzi*. -7. ed. - São Paulo: Atual, 2005.
- [17] CARNEIRO, J. P. *A geometria e o ensino dos números complexos*. Revista do Professor de Matemática - RPM nº 55. São Paulo: SBM, 2001.