



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL**

**ANTONIO SINVAL BEZERRA JÚNIOR**

**PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO: UMA ABORDAGEM  
GEOMÉTRICA E ANALÍTICA.**

**FORTALEZA  
2014**

ANTONIO SINVAL BEZERRA JÚNIOR

PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA  
E ANALÍTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA  
2014

ANTONIO SINVAL BEZERRA JUNIOR

PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA  
E ANALÍTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 12 / 04 / 2014.

BANCA EXAMINADORA



---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)

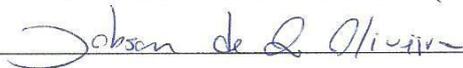
Universidade Federal do Ceará (UFC)



---

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo

Universidade Federal do Ceará (UFC)



---

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

B469p Bezerra Junior, Antonio SINVAL  
Pontos notáveis de um triângulo: uma abordagem geométrica e analítica / Antonio SINVAL Bezerra Junior. – 2014.  
30 f. : enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.  
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Geometria plana. 2. Baricentro. 3. Incentro. 4. Ortocentro I. Título.

---

CDD 516.22

Aos meus pais: Sinval e Aparecida  
Aos meus irmãos: Ednaldo, Valdiglê, Ediglê e Mônica  
A minha esposa: Ronniely Caldas  
A minha filha: Giovanna Caldas

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus por ter me dado forças, determinação, sabedoria e tudo aquilo que precisei nesta caminhada.

A todos os meus familiares e amigos que me incentivaram e sempre acreditaram em minha capacidade, em especial, a minha mãe Maria Aparecida de Oliveira Bezerra e minha esposa Ronniely Caldas de Souza Bezerra.

A todos os meus colegas do PROFMAT - 2012, em especial ao Prof. Ms. Tiago Gadelha de Sousa e a Profa. Ms. Natália Medeiros do Nascimento pelo companheirismo e apoio.

Ao Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, pela paciência e pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo e Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira pelo tempo e pelas valiosas sugestões.

Por fim, todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização e conclusão deste sonho o meu muito obrigado.

## RESUMO

Nesse trabalho, começaremos com um pouco da história dos centros notáveis do triângulo, com foco nos quatro pontos notáveis: Baricentro, Incentro, Ortocentro e circuncentro, além da Reta de Euler.

Em seguida abordaremos alguns resultados clássicos associados ao triângulo e as coordenadas de pontos no plano cartesiano que serão uteis para auxiliar nas demonstrações dos capítulos que seguem.

Nestes capítulos são apresentados os pontos notáveis do triângulo e algumas de suas características, bem como o Ponto de Speiker e a de Reta de Euler de dois aspectos: do ponto de vista da Geometria Euclidiana e do ponto de vista da Geometria Analítica.

**Palavras-chave:** Baricentro. Incentro. Ortocentro. Circuncentro. Speiker. Reta de Euler.

## ABSTRACT

In this work, we start with a little history of notable centers of the triangle, focusing on the four notable points: Centroid, Incentro, orthocenter and circumcenter, besides Straight Euler.

Then discuss some classical results associated with the triangle and the coordinates of points on the Cartesian plane that will be useful to assist in the statements of the chapters that follow.

These chapters are presented the outstanding points of the triangle and some of its characteristics as well as the Point Speiker and Reta Euler two aspects: the point of view of Euclidean geometry and the point of view of analytic geometry.

**Keywords:** Centroid. Incenter, orthocenter, circumcenter Spieker, Reta Euler.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS</b>	<b>10</b>
2.1	Paralelogramo	10
2.2	Base média do triângulo.	10
2.3	Ponto médio de um segmento no plano cartesiano	11
2.4	Lugares geométricos básicos	11
2.5	Teorema da bissetriz interna	12
<b>3</b>	<b>BARICENTRO OU CENTRÓIDE</b>	<b>13</b>
3.1	Do ponto de vista da geometria euclidiana	13
3.2	Do ponto de vista da geometria analítica	14
<b>4</b>	<b>INCENRO</b>	<b>15</b>
4.1	Do ponto de vista da geometria euclidiana	15
4.2	Do ponto de vista da geometria analítica	16
<b>5</b>	<b>ORTOCENTRO</b>	<b>17</b>
5.1	Do ponto de vista da geometria euclidiana	17
5.2	Do ponto de vista da geometria analítica	18
<b>6</b>	<b>CIRCUNCENTRO</b>	<b>21</b>
6.1	Do ponto de vista da geometria euclidiana	21
6.2	Do ponto de vista da geometria analítica	21
<b>7</b>	<b>O PONTO DE SPIEKER</b>	<b>22</b>
7.1	Do ponto de vista da geometria euclidiana	22
7.2	Do ponto de vista da geometria analítica	23
<b>8</b>	<b>A RETA DE EULER</b>	<b>24</b>
8.1	Do ponto de vista da geometria euclidiana	24
8.2	Do ponto de vista da geometria analítica.	24

<b>9 CONCLUSÃO .....</b>	<b>29</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>30</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em (Encyclopedia of Triangle Centers – ETC), o professor americano Clark Kimberling da universidade *Evansville* dos Estados Unidos reúne provavelmente a maior coleção de centros do triângulo, mais de cinco mil. Segundo ele, há muito tempo atrás, alguém desenhou um triângulo e três segmentos. Cada segmento ligando um vértice ao ponto médio do lado oposto. Os segmentos se encontraram em um ponto. A pessoa ficou impressionada e repetiu a experiência em uma forma diferente de triângulo. Novamente os segmentos se intersectaram em um ponto. Ele disse aos amigos. Para sua surpresa e alegria, a coincidência funcionou para eles também.

A notícia se espalhou, e a magia dos três segmentos foi considerada como obra de um poder superior. Séculos se passaram, e alguém mostrou que as três medianas de fato encontram-se em um único ponto, agora chamado de baricentro ou centroide.

Os antigos encontraram também outros pontos, agora chamados de incentro, circuncentro e ortocentro, estes quatro pontos são chamados de pontos notáveis do triângulo.

A geometria do triângulo é vastíssima. Leonhard Euler, séc. XVIII, foi um grande contribuidor desta geometria. Depois de se falar durante muito tempo nos quatro centros notáveis, este matemático descobriu que três deles são sempre colineares independentemente do triângulo escolhido. O seu nome foi dado à reta que os contém, Reta de Euler. Estes teoremas e leis que foram sendo provados ao longo dos séculos permitiram que se fosse desvendando muitos mistérios em volta de uma figura tão simples como é o triângulo.

Atualmente o site do Departamento de Matemática da Universidade Federal Fluminense – UFF traz uma lista de três mil e duzentos e quarenta e oito pontos notáveis. Na tabela abaixo estão listados os primeiros pontos catalogados no site da UFF que é baseado na ETC.

Nº	Ponto	Propriedade
X(1)	Incentro	Encontro das bissetrizes
X(2)	Baricentro	Encontro das medianas
X(3)	Circuncentro	Encontro das mediatrizes
X(4)	Ortocentro	Encontro das alturas
X(5)	Centro dos nove pontos	Centro do círculo dos nove pontos
X(6)	Ponto de Lemoine	Encontro das simedianas
X(7)	Ponto de Gergonne	Encontro das cevianas determinadas pelo ponto de tangência do círculo inscrito com os lados do triângulo
X(8)	Ponto de Nagel	Encontro das cevianas determinadas pelo ponto de tangência do círculo ex-inscrito com os lados do triângulo
X(9)	Mittelpunkt	Ponto de Lemoine do triângulo formado pelos centros dos três círculos ex-inscritos
X(10)	Centro de Spieker	Incentro do triângulo medial
X(11)	Ponto de Feuerbach	Ponto de tangência do círculo inscrito e do círculo dos nove pontos

Tabela: Alguns pontos notáveis listados no site da UFF baseado na ETC.

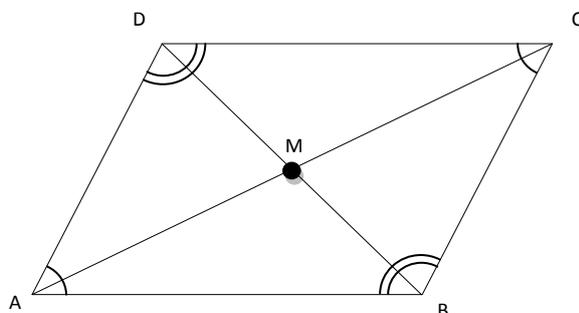
Esse trabalho tem como objetivo localizar e caracterizar os pontos notáveis: Baricentro ou Centroide (G), Incentro (I), Ortocentro (H) e Circuncentro (O), além do ponto de Spieker e da Equação da Reta de Euler, não só do ponto de vista da Geometria Euclidiana, mas também do ponto de vista da Geometria Analítica.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS

Nesse capítulo apresentarei alguns resultados já conhecidos da geometria euclidiana e da geometria analítica que servirão de pré-requisitos para as demonstrações que serão desenvolvidas nos capítulos seguintes.

### 2.1 Paralelogramo

**Definição:** É o quadrilátero convexo que possui os lados opostos paralelos. A figura mostra um paralelogramo ABCD.

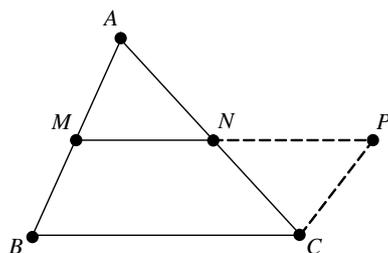


**Teorema:** Se ABCD é um paralelogramo, então:

- i) Os lados opostos são congruentes.
- ii) Os ângulos opostos são congruentes.
- iii) Dois ângulos consecutivos são suplementares.
- iv) As diagonais cortam-se ao meio.

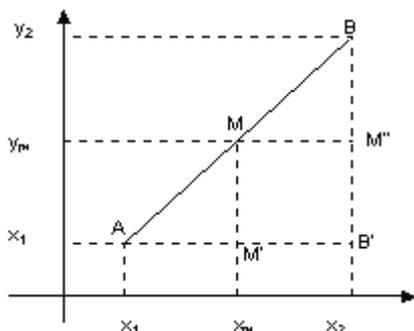
### 2.2 Base média do triângulo

Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele é paralelo e tem metade do comprimento do terceiro lado.



### 2.3 Ponto médio de um segmento no plano cartesiano

Dados os pontos A  $(x_1, y_1)$  e B  $(x_2, y_2)$ , o ponto médio é aquele que divide o segmento em dois segmentos cujas medidas são iguais á metade da medida do segmento AB. Na figura a seguir,  $M(x_m, y_m)$  é o ponto médio do segmento AB.



Por semelhança de triângulos, o ponto médio do segmento AB, com  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ , é  $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ .

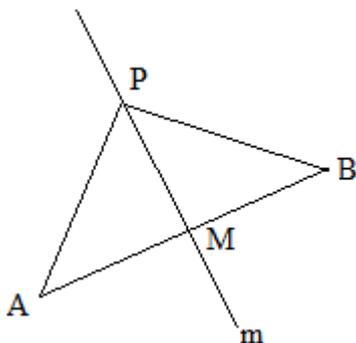
### 2.4 Lugares geométricos básicos

**Definição:** Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o Lugar Geométrico (LG) dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

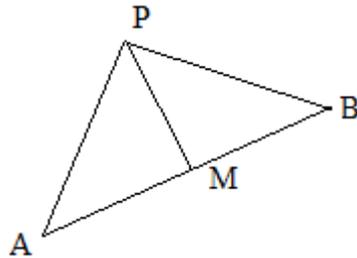
- Todo ponto de L possui a propriedade P.
- Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a L.

**Proposição 1:** Dados os pontos A e B no plano, a Mediatriz de AB é o LG dos pontos do plano que equidistam de A e de B.

**Demonstração:** Sejam M o ponto médio de m a mediatriz de AB. Se  $P \in m$ , então, no triângulo PAB, PM é mediana e altura e, daí, o triângulo PAB é isósceles de base AB. Logo,  $PA = PB$ .

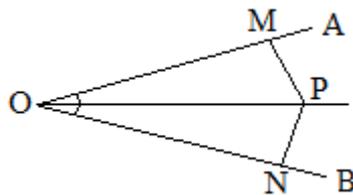


Reciprocamente, seja  $P$  um ponto no plano tal que  $PA = PB$ . Então, o triângulo  $PAB$  é isósceles de base  $AB$ , donde segue que a mediana e a altura relativas ao lado  $AB$  coincidem. Como a mediana de  $PAB$  relativa a  $AB$  é o segmento  $PM$  segue que  $PM \perp AB$ , o que é o mesmo que dizer que  $\overline{PM}$  é a mediatriz de  $AB$ .



**Proposição 2:** Seja  $\widehat{A\hat{O}B}$  um ângulo dado. Se  $P$  é um ponto do mesmo, então  $d(P, \overline{AO}) = d(P, \overline{BO}) \Leftrightarrow P \in (\text{bissetriz de } \widehat{A\hat{O}B})$ .

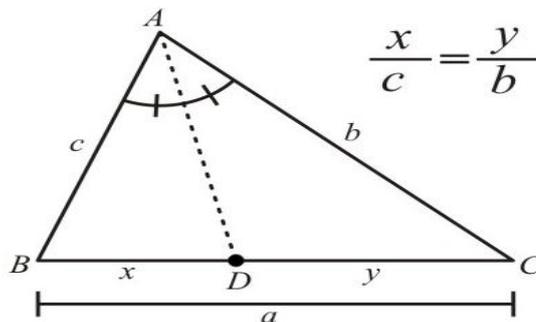
**Demonstração:** Suponha que  $P$  pertence a bissetriz de  $\widehat{A\hat{O}B}$  e sejam  $M$  e  $N$ , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de  $P$  às retas  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$ . Como  $\widehat{M\hat{O}P} = \widehat{N\hat{O}P}$ ,  $\widehat{M\hat{O}P} = \widehat{N\hat{O}P} = 90^\circ$  e  $OP$  é comum, segue que os triângulos  $OMP$  e  $ONP$  são congruentes por LAA<sub>o</sub>. Daí,  $PM = PN$ , ou seja,  $d(P, \overline{AO}) = d(P, \overline{BO})$ .



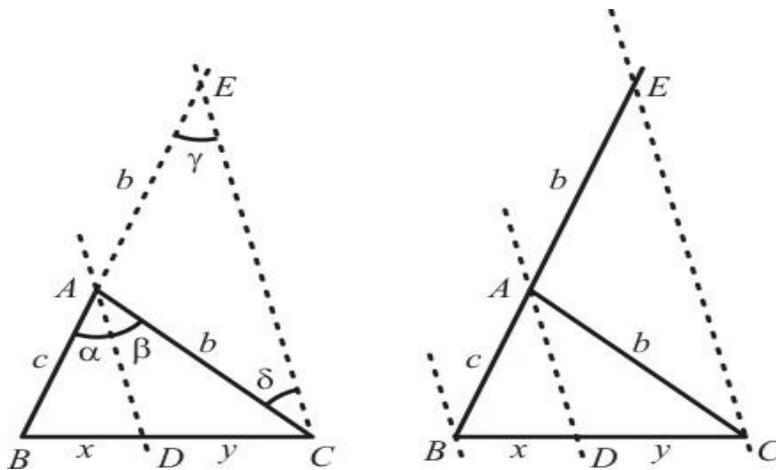
Reciprocamente, seja  $P$  um ponto interior do ângulo  $\widehat{A\hat{O}B}$ , tal que  $PM = PN$ , onde  $M$  e  $N$  são os pés das perpendiculares baixadas de  $P$  respectivamente às retas  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$ . Então, os triângulos  $MOP$  e  $NOP$  são novamente congruentes. Mas aí  $\widehat{M\hat{O}P} = \widehat{N\hat{O}P}$ , donde  $P$  está sobre a bissetriz de  $\widehat{A\hat{O}B}$ .

## 2.5 Teorema da bissetriz interna

Num triângulo  $ABC$  a bissetriz do ângulo  $A$  o corta do lado oposto em segmentos proporcionais aos outros lados.



**Demonstração:** Conduzindo por C um segmento paralelo à bissetriz, determinamos um ponto E na intersecção com o prolongamento do lado BA.



Como os segmentos CE e AD são paralelos, temos que os ângulos  $\alpha$  e  $\gamma$  são congruentes por serem correspondentes e os ângulos  $\beta$  e  $\delta$  são congruentes por serem alternos internos:  $\alpha \equiv \gamma$  e  $\beta \equiv \delta$ .

Desta forma, o triângulo ACE é isósceles cuja base é o segmento CE. Assim:  $AE \equiv AC = b$ .

Considerando as retas que passam por BC e BE como retas transversais de um feixe de retas paralelas, aplicamos o Teorema de Tales, obtendo:  $\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$ , ou seja,  $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$ .

### 3 Baricentro

Vamos apresentar nesse capítulo o baricentro ou centroide sob uma abordagem euclidiana e analítica.

#### 3.1 Do ponto de vista da geometria euclidiana

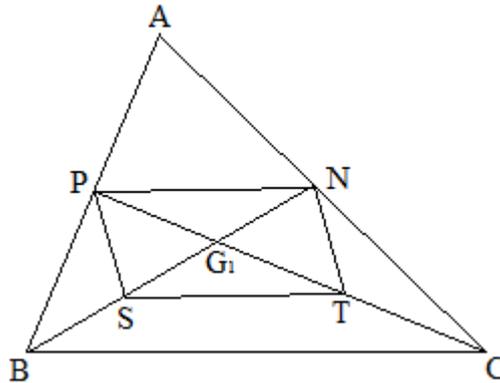
Já sabemos que mediana de um triângulo é um segmento de reta ligando o vértice ao ponto médio do lado oposto.

**Proposição 3:** Em todo triângulo, as três medianas passam por um único ponto, o baricentro ou centroide do triângulo. Ademais, o baricentro divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão 2 : 1.

**Demonstração:**

Sejam N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados AC e AB, e seja  $BN \cap CP = \{G_1\}$ . Sejam, ainda, S e T os pontos médios dos segmentos  $BG_1$  e  $CG_1$ , respectivamente. Pelo teorema da base média, tanto NP quanto ST são paralelos a BC e têm comprimento igual à metade de BC. Portanto,  $NP = ST$  e  $\overline{NP} \parallel \overline{ST}$ , de modo que NPST é um paralelogramo. Assim,  $PG_1 = G_1T$  e  $NG_1 = G_1S$ . Como  $BS = SG_1$  e

$CT = TG_1$ , segue que  $BS = SG_1 = G_1N$  e  $CT = TG_1 = G_1P$ , o que garante ser  $BG_1 = 2G_1N$  e  $CG_1 = 2G_1P$ .



Agora, se M for o ponto médio de BC e  $G_2$  for o ponto de interseção das medianas AM e BN, concluímos, analogamente, que  $G_2$  divide AM e BN na razão 2 : 1 a partir de cada vértice. Mas, daí, segue que os pontos  $G_1$  e  $G_2$  são tais que  $BG_1 = 2G_1N$  e  $BG_2 = 2G_2N$ . Isso implica em  $G_1 \equiv G_2$ . Chamando de G o ponto  $G_1 \equiv G_2$ , segue que AM, BN e CP concorrem em G e que G divide cada uma das medianas na razão 2:1 a partir do vértice.

### 3.2 Do ponto de vista da geometria analítica

**Proposição 4:** Adotado um sistema de coordenadas e dados os pontos não alinhados  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, y_3)$  é bastante conhecido que as coordenadas do baricentro ou centróide G do triângulo ABC pode ser determinado pela média aritmética das coordenadas dos vértices do triângulo.

Notação:

$$G(x, y) \text{ com } x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ e } y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

**Demonstração:**

Seja M o ponto médio do lado BC. Como G é o baricentro do triângulo ABC então

$$\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1} \Rightarrow AG = 2GM.$$

Introduzindo as abscissas:

$$x_G - x_A = 2(x_M - x_G) \text{ ou } x_G = \frac{x_A + 2x_M}{3} \quad (1),$$

Mas como M é ponto médio de BC, então  $x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$  e substituindo em (1), temos

que:

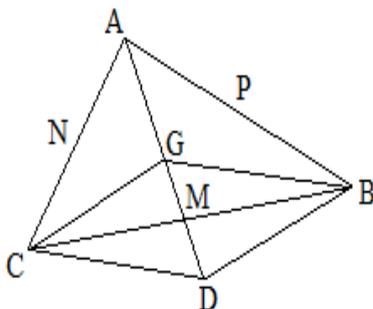
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}.$$

De modo análogo obtém para a ordenada do baricentro

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

**Proposição 5:** Se  $G$  é o baricentro do triângulo  $ABC$ , então  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

**Demonstração:** Sejam  $N$ ,  $P$  e  $M$ , respectivamente, os pontos médios de  $AC$ ,  $AB$  e  $BC$ . Como  $G$  é o baricentro do triângulo  $ABC$ , então  $G$  pertence às três medianas  $AM$ ,  $BN$  e  $CP$ .



Seja  $D$  o ponto, tal que  $GBDC$  é um paralelogramo. Dessa forma:

- I.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$
- II.  $BC$  e  $GD$ , as diagonais do paralelogramo  $GBDC$ , cortam-se ao meio no ponto  $M$  (Ponto médio do lado  $BC$ ).

Assim,

$$2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GD}, \quad \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \text{ e portanto } \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GD}.$$

Logo

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD} \Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}.$$

## 4 Incentro

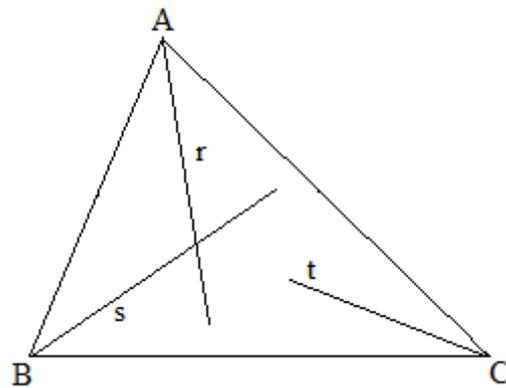
Vamos apresentar nesse capítulo o incentro sob uma abordagem euclidiana e analítica.

### 4.1 Do ponto de vista da Geometria Euclidiana

**Proposição 6:** As bissetrizes internas de todo triângulo concorrem em um único ponto, o incentro do triângulo.

**Demonstração:**

Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$ , respectivamente, as bissetrizes internas dos ângulos  $\hat{BAC}$ ,  $\hat{ABC}$  e  $\hat{ACB}$  do triângulo  $ABC$  e  $I$  o ponto de interseção das retas  $r$  e  $s$ . Como  $I \in r$ , segue da caracterização das bissetrizes como lugar geométrico (LG) que  $I$  equidista dos lados  $AB$ ,  $AC$  do triângulo  $ABC$ . Analogamente,  $I \in s$  garante que  $I$  equidista dos lados  $AB$  e  $BC$ . Portanto,  $I$  equidista de  $AC$  e  $BC$  e, usando novamente a referida caracterização das bissetrizes, concluímos que  $I$  pertence à bissetriz do ângulo  $\hat{ACB}$ , ou seja, à reta  $t$ . Assim,  $r$ ,  $s$  e  $t$  concorrem em  $I$ .



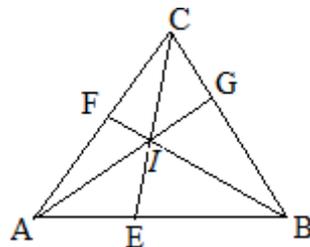
## 4.2 Do ponto de vista da Geometria Analítica

**Proposição 7:** As coordenadas do incentro do triângulo de vértices  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, y_3)$  e lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $c$  é dado pelo media ponderada dos vértices tendo como pesos os lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , isto é,  $I = \frac{a.A + b.B + c.C}{a + b + c}$  ou em termos de coordenadas sendo

$$I = (x, y), \text{ temos: } x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c} \text{ e } y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}.$$

### Demonstração:

No triângulo  $ABC$  representamos os pés das bissetrizes baixadas dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  por  $G$ ,  $F$  e  $E$  respectivamente.



Pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos  $\frac{AE}{EB} = \frac{b}{a}$ , logo  $E$  divide  $AB$  em segmentos proporcionais a  $a$  e  $b$ . Portanto o vetor  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB}$ , como  $\overrightarrow{EB} = \frac{a}{b} \overrightarrow{AE}$

então  $\overrightarrow{AE} + \frac{a}{b} \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$ . Ou em coordenadas, sendo  $E = (x, y)$ , temos:

$$(x - x_1, y - y_1) = \frac{b}{a+b} (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$(x, y) = \frac{b}{a+b} (x_2 - x_1, y_2 - y_1) + (x_1, y_1)$$

$$(x, y) = \left( \frac{ax_1 + bx_2}{a+b}, \frac{ay_1 + by_2}{a+b} \right)$$

Daí,  $E = \frac{aA+bB}{a+b}$  e de modo análogo,  $F = \frac{aA+cC}{a+c}$ .

Como o vetor  $\overrightarrow{CI}$  é um múltiplo de  $\overrightarrow{CE}$  e o vetor  $\overrightarrow{BI}$  é um múltiplo de  $\overrightarrow{BF}$ , temos:  $\overrightarrow{CI} = \lambda\overrightarrow{CE}$  e  $\overrightarrow{BI} = \mu\overrightarrow{BF}$ .

Como  $\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CB}$ , temos que  $\lambda\overrightarrow{CE} - \mu\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CB}$ , isto é,  $\lambda(E-C) - \mu(F-B) = (B-C)$ .

Vamos determinar o valor de  $\mu$ . Essas fórmulas acima valem qualquer que seja a origem do sistema. Vamos simplificar nossos cálculos adotando a origem do sistema como o vértice C, isto é,  $C = (x_3, y_3) = (0, 0)$ . Substituindo os valores encontrados para E e F obtemos:

$$\lambda\left(\frac{aA+bB}{a+b}\right) - \mu\left(\frac{aA}{a+c}\right) + \mu B = B$$

$$\left(\frac{\lambda a}{a+b} - \frac{\mu a}{a+c}\right)A - \left(\frac{\lambda b}{a+b} + \mu - 1\right)B = 0$$

Como  $A-C = A = \overrightarrow{CA}$  e  $B-C = B = \overrightarrow{CB}$  não são paralelos, devemos ter:

$$\left(\frac{\lambda a}{a+b} - \frac{\mu a}{a+c}\right) = 0 \quad (1) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\lambda b}{a+b} + \mu - 1\right) = 0 \quad (2)$$

De (1), temos  $\lambda = \frac{(a+b)\mu}{a+c}$  e substituindo em (2), obtemos  $\mu = \frac{a+c}{a+b+c}$ .

Como  $\overrightarrow{BI} = \mu\overrightarrow{BF}$ , então

$$I = B + \mu(F - B)$$

$$I = B + \frac{(a+c)}{a+b+c} \left( \frac{aA+cC}{a+c} - B \right)$$

$$I = B + \frac{aA+aC}{a+b+c} - \frac{(a+c)B}{a+b+c} = \frac{aA+bB+cC}{a+b+c}.$$

## 5 Ortocentro

Vamos apresentar nesse capítulo o ortocentro sob uma abordagem euclidiana e analítica.

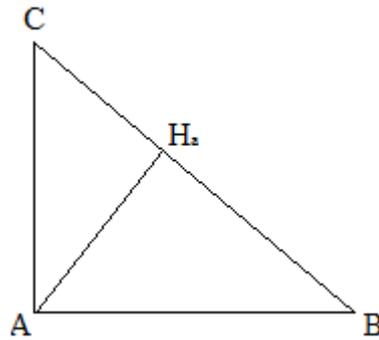
### 5.1 Do ponto de vista da Geometria Euclidiana

**Proposição 8:** Em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um só ponto, o ortocentro do triângulo.

#### Demonstração:

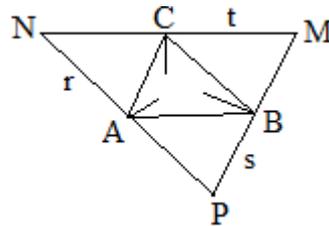
Seja ABC um triângulo qualquer. Há três casos a considerar:

(I) ABC é retângulo: Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $\hat{B}AC = 90^\circ$ . Então, A é o pé das alturas relativas aos lados AB e AC. Como a altura relativa ao lado BC passa (por definição) por A, segue que as alturas de ABC concorrem em A.



(II)  $ABC$  é acutângulo: trace por  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , respectivamente, retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  paralelas a  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , também respectivamente, e sejam  $r \cap s = \{P\}$ ,  $s \cap t = \{M\}$ ,  $t \cap r = \{N\}$ . Como os quadriláteros  $ABCN$  e  $ABMC$  são paralelogramos, segue que  $CN = AB = CM$  e, daí,  $C$  é o ponto médio de  $MN$ . Analogamente,  $B$  é o ponto médio de  $MP$  e  $A$  é o ponto médio de  $PN$ .

Por outro lado, a altura relativa a  $BC$  também é perpendicular a  $PN$ , já que  $BC$  e  $PN$  são paralelos. Do mesmo modo, as alturas relativas a  $AC$  e  $AB$  são perpendiculares respectivamente a  $MP$  e  $MN$ . Segue que as alturas do triângulo  $ABC$  são mediatrizes dos lados do triângulo  $MNP$ . Mas já provamos que as mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes, de modo que as alturas de  $ABC$  devem ser concorrentes.

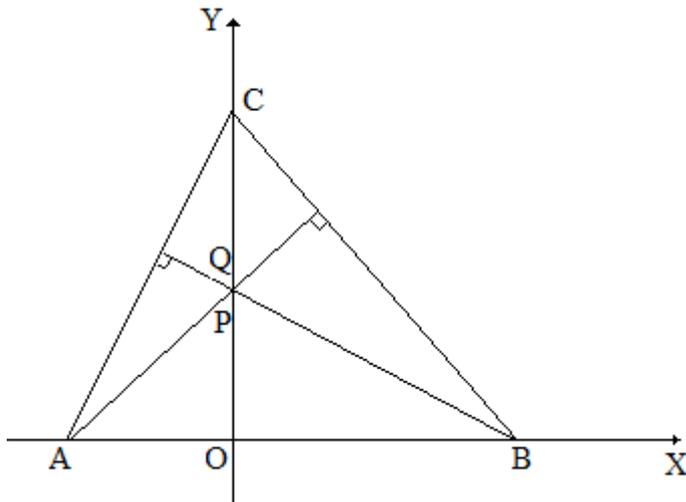


(III)  $ABC$  é obtusângulo a prova é totalmente análoga à do caso (II).

## 5.2 Do ponto de vista da geometria analítica

**Proposição 9:** Em um triângulo  $ABC$ , as três alturas se encontram em um mesmo ponto.

**Demonstração:** Tomamos no plano o sistema de coordenadas no qual o eixo  $OX$  contém o lado  $AB$  e o eixo  $OY$  contém a altura baixada do vértice  $C$  sobre esse lado. Nesse sistema, as coordenadas dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  são  $A(a, 0)$ ,  $B(b, 0)$  e  $C(0, c)$ , onde  $c \neq 0$ . A altura baixada do vértice  $B$  encontra a altura  $OC$  no ponto  $P(0, y)$ . Os segmentos  $BP$  e  $AC$  são perpendiculares. Utilizando-se da condição de perpendicularismo de dois segmentos obtemos  $(0 - b)(0 - a) + (y - 0)(c - 0) = 0$ , ou seja,  $ab + cy = 0$ . Por sua vez, a altura baixada do vértice  $A$  encontra a altura  $OC$  no ponto  $Q(0, z)$ . Novamente, os segmentos  $AQ$  e  $BC$  são perpendiculares e utilizando a mesma relação obtemos  $(0 - a)(0 - b) + (z - 0)(c - 0) = 0$ , ou seja,  $ab + cz = 0$ . Vemos então que  $z = y = -\frac{ab}{c}$ , portanto  $P = Q = \left(0, -\frac{ab}{c}\right)$  é o ponto de encontro das três alturas do triângulo  $ABC$ .



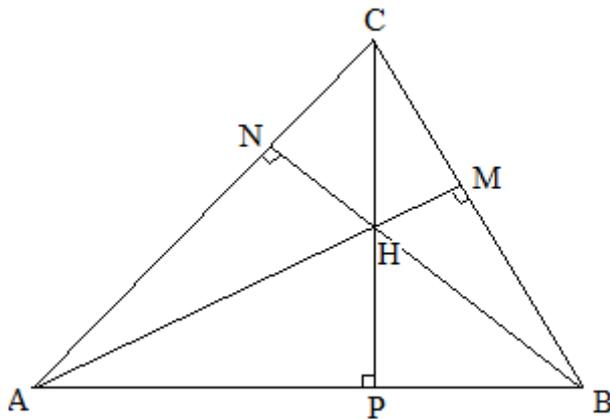
**Proposição 10:** As coordenadas do ortocentro do triângulo de vértices  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, y_3)$  e ângulos internos medindo, respectivamente,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , é dado pelo média ponderada dos vértices tendo como pesos as  $tg\alpha$ ,  $tg\beta$  e  $tg\gamma$ , isto é,

$$H = \frac{Atg\alpha + Btg\beta + Ctg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} \text{ ou em termos de coordenadas sendo } H = (x, y), \text{ temos:}$$

$$x = \frac{tg\alpha x_1 + tg\beta x_2 + tg\gamma x_3}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} \text{ e } y = \frac{tg\alpha y_1 + tg\beta y_2 + tg\gamma y_3}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}.$$

**Demonstração:** Vamos considerar um triângulo ABC não retângulo, pois caso contrário a altura se encontra no vértice de ângulo reto.

Sejam M, N e P os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C, respectivamente.



Como  $BN = ANtg\alpha = NCtg\gamma$ , temos  $\frac{AN}{NC} = \frac{tg\gamma}{tg\alpha}$ . Logo N divide o lado AC em segmentos proporcionais a  $tg\gamma$  e  $tg\alpha$ .

Portanto  $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}$ , como  $\overrightarrow{NC} = \frac{tg\alpha}{tg\gamma} \overrightarrow{AN}$ , temos:

$$\overrightarrow{AN} + \frac{tg\alpha}{tg\gamma} \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \left( \frac{tg\alpha + tg\gamma}{tg\gamma} \right) \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma} \overrightarrow{AC}$$

Ou, em coordenadas:

$$\text{Sendo } N = (x, y), \text{ então } (x - x_1, y - y_1) = \frac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma} (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

$$(x, y) = \frac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma} (x_3 - x_1, y_3 - y_1) + (x_1, y_1)$$

$$(x, y) = \left( \frac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma} x_3 + \frac{tg\alpha}{tg\alpha + tg\gamma} x_1, \frac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma} y_3 + \frac{tg\alpha}{tg\alpha + tg\gamma} y_1 \right)$$

$$\text{Daí, com a notação anterior } N = \frac{Atg\alpha + Ctg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma}. \text{ De modo análogo } P = \frac{Atg\alpha + Btg\beta}{tg\alpha + tg\beta}.$$

Como o vetor  $\overline{BH}$  é um múltiplo do vetor  $\overline{BN}$  e o vetor  $\overline{CH}$  é um múltiplo do vetor  $\overline{CP}$ , temos:  $\overline{BH} = \lambda \overline{BN}$  e  $\overline{CH} = \mu \overline{CP}$ .

Como  $\overline{CH} - \overline{BH} = \overline{CB}$ , temos  $\mu \overline{CP} - \lambda \overline{BN} = \overline{CB}$ , isto é  $\mu(P - C) - \lambda(N - B) = B - C$ .

Vamos determinar o valor de  $\lambda$ . Essas fórmulas acima valem qualquer que seja a origem do sistema, O, adotada. Podemos simplificar ao cálculos adotando o ponto de origem no ponto C, isto é,  $C = (x_3, y_3) = (0, 0)$ .

Substituindo os valores de N e P, obtemos:

$$\mu \frac{Atg\alpha + Btg\beta}{tg\alpha + tg\beta} - \lambda \frac{Atg\alpha}{tg\alpha + tg\beta} + \lambda B = B$$

Organizando a equação, temos:

$$\left( \frac{\mu tg\alpha}{tg\alpha + tg\beta} - \frac{\lambda tg\alpha}{tg\alpha + tg\gamma} \right) A + \left( \frac{\mu tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} + \gamma - 1 \right) B = 0$$

Como  $A - C = A = \overline{CA}$  e  $B - C = B = \overline{CB}$  não são paralelos, devemos ter

$$\left( \frac{\mu tg\alpha}{tg\alpha + tg\beta} - \frac{\lambda tg\alpha}{tg\alpha + tg\gamma} \right) = 0 \text{ e } \left( \frac{\mu tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} + \gamma - 1 \right) = 0$$

Daí,

$$\frac{\mu tg\alpha}{tg\alpha + tg\beta} = \frac{\lambda tg\alpha}{tg\alpha + tg\gamma} \Rightarrow \frac{\mu}{tg\alpha + tg\beta} = \frac{\lambda}{tg\alpha + tg\gamma} \Rightarrow \mu = \frac{\lambda(tg\alpha + tg\beta)}{tg\alpha + tg\gamma}$$

E substituindo o  $\mu$ , obtemos:

$$\frac{\lambda(tg\alpha + tg\beta)}{tg\alpha + tg\gamma} \cdot tg\beta \cdot \frac{1}{(tg\alpha + tg\beta)} + \lambda = 1 \Rightarrow \lambda(tg\alpha + tg\beta + tg\gamma) = tg\alpha + tg\gamma$$

$$\lambda = \frac{tg\alpha + tg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}.$$

Como  $\overline{BH} = \lambda \overline{BN}$ , temos que  $H = B + \lambda(N - B) = (1 - \lambda)B + \lambda N$ . Substituindo o valor de  $\lambda$  e de N, obtemos

$$H = \left( 1 - \frac{tg\alpha + tg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} \right) B + \left( \frac{tg\alpha + tg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} \right) \cdot \left( \frac{Atg\alpha + Ctg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma} \right)$$

$$H = \left( \frac{tg\beta}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} \right) B + \left( \frac{Atg\alpha + Ctg\lambda}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} \right)$$

$$H = \frac{Atg\alpha + Btg\beta + Ctg\lambda}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}.$$

## 6 Circuncentro

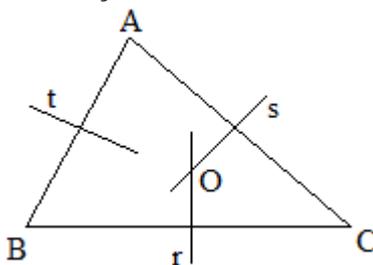
Vamos apresentar nesse capítulo o circuncentro sob uma abordagem euclidiana e analítica.

### 6.1 Do ponto de vista da Geometria Euclidiana

**Proposição 11:** Em todo triângulo as mediatrizes dos lados passam todas por um mesmo ponto, o circuncentro do mesmo.

**Demonstração.**

Sejam ABC um triângulo qualquer, r, s, e t, respectivamente, as mediatrizes dos lados BC, CA e AB, e O o ponto de interseção das retas r e s.



Pela caracterização de mediatriz de um segmento como lugar geométrico, temos  $OB = OC$  (pois  $O \in r$ ) e  $OC = AO$  (pois  $O \in s$ ). Portanto,  $OB = AO$  e segue novamente da caracterização da mediatriz como lugar geométrico que  $O \in t$ .

**Corolário:** O circuncentro de um triângulo é o ortocentro de seu triângulo medial.

**Demonstração:** Na demonstração da proposição 6 item (II), ABC é o triângulo medial do triângulo MNP e as mediatrizes dos lados de MNP são as alturas de ABC.

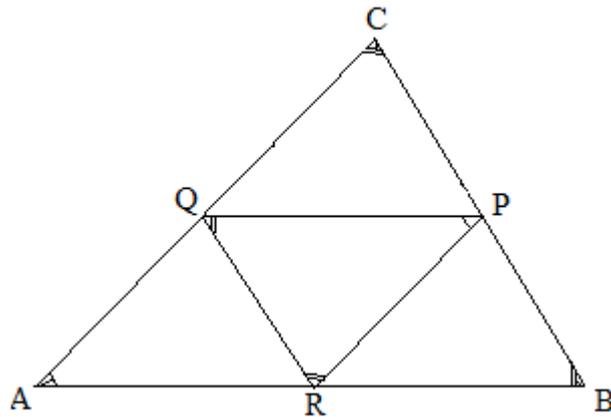
### 6.2 Do ponto de vista da Geometria Analítica

**Proposição 12:** As coordenadas do circuncentro (O) do triângulo de vértices A, B e C é dada pela diferença entre  $\frac{3}{2}$  do baricentro e  $\frac{1}{2}$  do ortocentro, isto é,  $O = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}H$ .

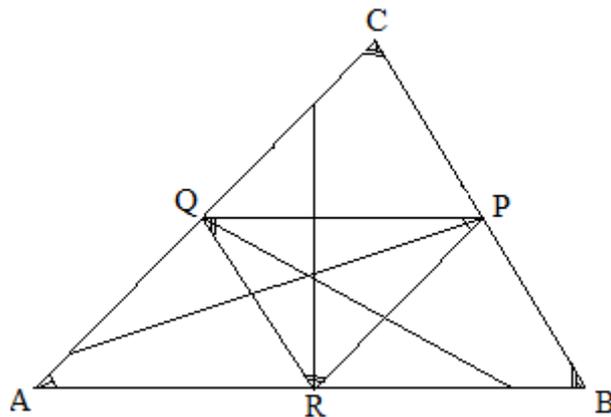
**Demonstração:** Considere um triângulo não retângulo ABC, se tomarmos os pontos médios M, N e P, respectivamente, dos lados BC, AC e AB, nota-se que

$$M = \frac{B+C}{2}, N = \frac{A+C}{2} \text{ e } P = \frac{A+B}{2}.$$

Os ângulos do triângulo MNP são iguais aos ângulos do triângulo ABC e também  $MP \parallel AC$ ,  $NP \parallel BC$  e  $QP \parallel AB$ .



Logo as mediatrizes dos lados do triângulo ABC contêm as alturas do triângulo MNP.



Portanto o circuncentro O do triângulo ABC é o ortocentro do triângulo MNP.

Logo,

$$O = \frac{Mtg\alpha + Ntg\beta + Ptg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} = \frac{\frac{B+C}{2}tg\alpha + \frac{A+C}{2}tg\beta + \frac{A+B}{2}tg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}$$

$$= \frac{(tg\beta + tg\gamma)A + (tg\alpha + tg\gamma)B + (tg\alpha + tg\beta)C}{2(tg\alpha + tg\beta + tg\gamma)} = \frac{A+B+C}{2} - \frac{Atg\alpha + Btg\beta + Ctg\gamma}{2(tg\alpha + tg\beta + tg\gamma)}$$

Ou seja,

$$O = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}H.$$

## 7 O ponto de Spieker

Vamos apresentar nesse capítulo o Ponto de Spieker sob uma abordagem euclidiana e analítica.

### 7.1 Do ponto de vista da Geometria Euclidiana

**Proposição 13:** O ponto de Spieker é o ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo medial ABC.

**Demonstração:** Na demonstração da proposição 6 item (II), ABC é o triângulo medial do triângulo MNP, pela proposição 4, esse ponto existe e é único.

## 7.2 Do ponto de vista da Geometria Analítica

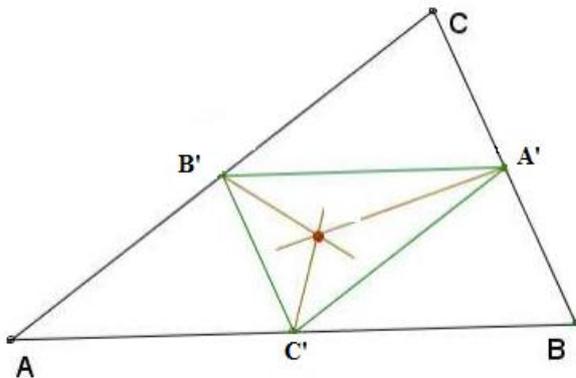
**Proposição 14:** As coordenadas do Ponto de Spieker ( $S_p$ ) é dado pela média ponderada dos vértices com pesos igual a média aritmética dos lados não opostos aos respectivos

vértices. Ou seja,  $S_p = \frac{\left(\frac{b+c}{2}\right).A + \left(\frac{a+c}{2}\right).B + \left(\frac{a+b}{2}\right).C}{a+b+c}$  ou em termos de

coordenadas sendo  $S_p = (x, y)$ , temos:  $x = \frac{\left(\frac{b+c}{2}\right).x_A + \left(\frac{a+c}{2}\right).x_B + \left(\frac{a+b}{2}\right).x_C}{a+b+c}$  e

$$y = \frac{\left(\frac{b+c}{2}\right).y_A + \left(\frac{a+c}{2}\right).y_B + \left(\frac{a+b}{2}\right).y_C}{a+b+c}.$$

**Demonstração:** Considere um triângulo ABC, com BC = a, AC = b e AB = c, se tomarmos os pontos médios A', B' e C', respectivamente, dos lados BC, AC e AB e B'C' = a', A'C' = b' e A'B' = c', nota-se que  $A' = \frac{B+C}{2}$ ,  $B' = \frac{A+C}{2}$  e  $C' = \frac{A+B}{2}$ .



Pela proposição 5,  $S_p = \frac{a'.A' + b'.B' + c'.C'}{a' + b' + c'}$  e como  $a' = \frac{a}{2}$ ,  $b' = \frac{b}{2}$  e  $c' = \frac{c}{2}$ , temos:

$$S_p = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{B+C}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{A+C}{2}\right) + \left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}} = \frac{a\left(\frac{B+C}{2}\right) + b\left(\frac{A+C}{2}\right) + c\left(\frac{A+B}{2}\right)}{a+b+c}$$

$$= \frac{\left(\frac{b+c}{2}\right)A + \left(\frac{a+c}{2}\right)B + \left(\frac{a+b}{2}\right)C}{\left(\frac{b+c}{2}\right) + \left(\frac{a+c}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

## 8 A Reta de Euler

Leonhard Euler demonstrou a seguinte proposição relativa ao ortocentro (H), baricentro (G) e circuncentro (O).

### 8.1 Do ponto de vista de Geometria Euclidiana

**Proposição 15:** Em qualquer triângulo, o ortocentro, o circuncentro, e o baricentro são sempre colineares, e a distância do ortocentro ao baricentro é sempre o dobro da distância do baricentro ao circuncentro. A reta que contém estes três pontos é chamada de reta de Euler.

**Demonstração:** No caso do triângulo equilátero a Reta de Euler não está definida, já que neste triângulo a mediatriz, a bissetriz e a altura coincidem e por sua vez os três pontos também coincidem.

Em triângulos isósceles, temos que a mediana, a mediatriz e a altura relativa à base são coincidentes, logo, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro pertencem a um mesmo segmento. Assim, a reta que contém esse segmento é a Reta de Euler do triângulo.

Vamos supor que todos os ângulos do triângulo ABC são agudos, para garantirmos que os três pontos são internos ao triângulo. Para um triângulo com um ângulo obtuso ou retângulo, a prova é análoga. Podemos supor que ABC não é isósceles.

Neste caso, a mediana é distinta da mediatriz, o que implica que o baricentro G e o circuncentro O são pontos distintos. Tome a reta r determinada por G e O.

Na semi-reta com origem em O e contendo G tome um ponto H tal que  $\overline{GH} = 2\overline{GO}$ . Seja P o ponto médio do lado  $\overline{BC}$ . Considere a mediana e a mediatriz relativas ao lado  $\overline{BC}$ . Os triângulos GHA e GOP são semelhantes pelo caso LAL de semelhança, pois,  $\overline{GH} = 2\overline{GO}$  (por construção) os ângulos  $\widehat{AGH} = \widehat{PGO}$  (opostos pelo vértice) e  $\overline{AG} = 2\overline{GP}$  (propriedade do baricentro). Logo, os ângulos  $\widehat{AHG} = \widehat{POG}$ . Portanto, as retas contendo  $\overline{AH}$  e  $\overline{OP}$  são paralelas pelo Teorema do Ângulo Interno Alternado. Mas como  $\overline{OP}$  é perpendicular a  $\overline{BC}$  e paralela a  $\overline{AH}$ , segue que H pertence à altura do triângulo ABC relativa ao lado  $\overline{BC}$ . Da mesma forma, mostramos que H pertence à altura do triângulo ABC relativa ao lado  $\overline{AC}$ . Como H é a interseção de duas alturas, então H é o ortocentro de ABC.

### 8.2 Do ponto de vista de Geometria Analítica

**Proposição 16:** Considere qualquer triângulo. Se o triângulo não é equilátero, o Baricentro (G), o Circuncentro (O) e o Ortocentro (H) são pontos distintos mas são colineares. Ademais as distâncias entre eles verificam:  $HG = 2GO$ .

Se o triângulo é equilátero, os três pontos coincidem num mesmo ponto. Essa reta que contém esse três pontos é a reta de Euler.

**Demonstração:** Escolhendo um sistema de coordenadas cartesiano adequado e sem perda de generalidade suponha que o triângulo tem vértices:

A(0, 0); B(1, 0); C(m, n) e  $n \neq 0$

Os lados do triângulo fazem parte de três retas, das quais obviamente a primeira é:

$$l_1 : y = 0.$$

A reta  $l_2$  é a que contém  $(0, 0)$  e  $(m, n)$ , cuja equação é

$$l_2 : y = \frac{n}{m} \cdot x \text{ se } m \neq 0$$

ou a reta vertical

$$l_2 : x = 0 \text{ se } m = 0.$$

E a terceira é a que contém  $(1, 0)$  e  $(m, n)$ , cuja equação é

$$l_3 : y = \frac{n}{m-1} x - \frac{n}{m-1} \text{ se } m \neq 1$$

ou a reta vertical

$$l_3 : x = 1 \text{ se } m = 1.$$

Os pontos médios de cada lado do triângulo são:  $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ;  $M\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n}{2}\right)$  e  $N\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$

Considero agora as três medianas:

A reta que liga  $A(0, 0)$  a  $M\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n}{2}\right)$  é:

$$m_1 : y = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{m+1}{2}} \cdot x = \frac{n}{m+1} \cdot x, \text{ se } m \neq -1.$$

Ou a reta vertical

$$m_1 : x = 0, \text{ se } m = -1.$$

A reta que liga  $(1, 0)$  a  $N\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$  é:

$$m_2 : y = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{m}{2}-1} \cdot x - \frac{n}{m-2}, \text{ se } m \neq 2.$$

Ou a reta vertical

$$m_2 : x = 1, \text{ se } m = 2.$$

A reta que liga  $(m, n)$  a  $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  é:

$$m_3 : y = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}-m} \cdot x - \frac{n}{2m-1}, \text{ se } m \neq \frac{1}{2}.$$

Ou a reta vertical

$$m_3 : x = \frac{1}{2}, \text{ se } m = \frac{1}{2}.$$

Supondo o caso geral em que  $m \neq -1$  e  $m \neq 2$ , a interseção  $m_1 \cap m_2$  se obtém resolvendo:

$$\frac{n}{m+1} \cdot x = \frac{n}{m-2} \cdot x - \frac{n}{m-2}, \text{ sendo } n \neq 0,$$

temos  $x = \frac{m+1}{3}$  e  $y = \frac{n}{3}$ , portanto  $G\left(\frac{m+1}{3}, \frac{n}{3}\right)$ .

No caso em que  $m = -1$ , então a interseção  $m_1 \cap m_2$  consiste de  $x = 0$  e  $y = -\frac{n}{3}x + \frac{n}{3}$ .

Ou seja, o ponto  $\left(0, \frac{n}{3}\right)$  que coincide com o G.

No caso em que  $m = 2$ , então  $m_1 \cap m_2$  é dada por  $y = \frac{n}{3}x$  intersectada com  $x = 1$ , que dar o ponto  $\left(1, \frac{n}{3}\right)$ , que também coincide com o G.

Se  $m \neq \frac{1}{2}$ , então  $\left(\frac{2n}{2m-1}\right)\left(\frac{m+1}{3}\right) - \frac{n}{2m-1} = \frac{n}{3}$ .

Logo  $G \in m_3$ .

Se  $m = \frac{1}{2}$ , então  $m_3$  é dada por  $x = \frac{1}{2}$ , que passa por  $G = \left(\frac{\frac{1}{2}+1}{3}, \frac{n}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{3}\right)$ . Esse

ponto G é, em todos os casos a interseção das medianas, logo o baricentro.

Considero agora as três mediatrizes: retas saindo de cada ponto médio em ângulo reto com o lado.

A mediatriz pelo ponto médio  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  é a reta:

$$md_1 : x = \frac{1}{2}.$$

O lado que contém o ponto médio  $\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$  está contido na reta  $l_2$ . Portanto a mediatriz

que passa por  $\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$  ou é horizontal

$$md_2 : y = \frac{n}{2}, \text{ se } m = 0,$$

ou a reta

$$md_2 : y = -\frac{m}{n}x + \left(\frac{n}{2} + \frac{m^2}{2n}\right), \text{ se } m \neq 0.$$

Então  $md_1 \cap md_2$  é o ponto:

$$O = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right), \text{ se } m = 0 \text{ ou } O = \left(\frac{1}{2}, \frac{m(m-1)}{2n} + \frac{n}{2}\right), \text{ se } m \neq 0$$

Afirmo que em qualquer caso:

$$O \in md_3$$

Onde  $md_3$  é a mediatriz do lado contendo o ponto médio  $\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ . De fato, o lado está contido em

$$l_3 : y = \frac{n}{m-1}x - \frac{n}{m-1}, \text{ se } m \neq 0.$$

Ou a reta vertical

$$l_3 : x = 1, \text{ se } m = 1.$$

Portanto ou  $md_3$  é  $y = \frac{n}{2}$  no caso  $m = 1$  e passa por  $O = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ ,

ou  $md_3 : y = -\frac{m-1}{n}x + \frac{n}{2} + \frac{m^2-1}{2n}$ , se  $m \neq 1$ ,

que passa também por  $O = \left(\frac{1}{2}, \frac{m(m-1)}{2n} + \frac{n}{2}\right)$ . Esse ponto é, portanto

$O = md_1 \cap md_2 \cap md_3$  chamado de Circuncentro.

Já podemos nos perguntar o que acontece se  $G = O$ . Isso ocorre quando:

$$\frac{m+1}{3} = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{n}{3} = \frac{m(m-1)}{2n} + \frac{n}{2}.$$

A primeira equação dá  $m = \frac{1}{2}$ , que substituindo na segunda dá:

$$n^2 = \frac{3}{4}, \text{ ou seja, } n = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } n = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esse triângulo com  $(m, n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  ou  $(m, n) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  e com os outros vértices

em  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  é equilátero.

Agora consideremos as três alturas.

A altura que sai de  $(m, n)$  e vai ortogonal até o lado  $l_1 : y = 0$  é portanto:  $h_1 : x = m$ .

A altura que sai de  $(0, 0)$  é:

$$h_3 : y = 0, \text{ se } m = 1, \text{ pois nesse caso } l_3 : x = 1.$$

Ou  $h_3 : y = -\frac{m-1}{n}x$ , se  $m \neq 1$ , pois no caso geral  $l_3 : y = \frac{n}{m-1}x - \frac{n}{m-1}$ .

A interseção  $h_1 \cap h_3$  é portanto:  $(1, 0)$ , se  $m = 1$ . Ou  $\left(m, -\frac{m(m-1)}{n}\right)$ , se  $m \neq 1$ .

Em qualquer caso,  $H = \left(m, -\frac{m(m-1)}{n}\right) = h_1 \cap h_3$ .

Afirmo que

$$H \in h_2$$

Onde  $h_2$  é a altura que sai de  $(1, 0)$  e chega ortogonal a  $l_2$ .

Se  $l_2 : x = 0$  (quando  $m = 0$ ) então

$$h_2 : y = 0$$

Obviamente passa por H. E se  $l_2 : y = \frac{m}{n}x$  (no caso  $m \neq 0$ ) então:

$$h_2 : y = -\frac{m}{n}x + \frac{m}{n}.$$

Nesse caso H também pertence a  $h_2$ . Esse ponto de encontro das três alturas é o ortocentro.

E no caso em que  $H = G$ , temos:

$$m = \frac{m+1}{3} \text{ e } \frac{n}{3} = -\frac{m(m-1)}{n}.$$

E portanto  $m = \frac{1}{2}$  e  $n^2 = \frac{3}{4}$ , o que diz que se trata de um triângulo equilátero, como já vimos.

Falta vermos quando o Ortocentro coincide com o circuncentro. Isso se dá quando

$m = \frac{1}{2}$  e  $-\frac{m(m-1)}{n} = \frac{m(m-1)}{2n} + \frac{n}{2}$ , que também dá  $m = \frac{1}{2}$  e  $n^2 = \frac{3}{4}$ , formando um triângulo equilátero.

Agora, supondo que nosso triângulo não é equilátero, só resta encontrar a equação da reta ligando G a O e conferir que ela passa pelo H.

A reta por G e O é ou a reta vertical

$$x = \frac{1}{2}, \text{ se } m = \frac{1}{2},$$

Quando o triângulo é isósceles, ou se  $m \neq \frac{1}{2}$ :

$$y = -\frac{n^2 + 3m^2 - 3m}{n(2m-1)}x + \frac{m(n^2 + m^2 - 1)}{n(2m-1)}.$$

Esta é a Reta de Euler!

Agora verificamos as distancias.

$$\overline{HG}^2 = \left(\frac{2}{3}m - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{m(m-1)}{n} + \frac{n}{3}\right)^2 = \frac{10m^2n^2 - 10mn^2 + n^2 + 9m^4 - 18m^3 + 9m^2 + n^4}{9n^2}$$

Enquanto que

$$\overline{GO}^2 = \left(\frac{m}{3} - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{m(m-1)}{2n} + \frac{n}{6}\right)^2 = \frac{10m^2n^2 - 10mn^2 + n^2 + 9m^4 - 18m^3 + 9m^2 + n^4}{36n^2}.$$

Ou seja

$$\overline{HG}^2 = 4\overline{GO}^2, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

## CONCLUSÃO

As demonstrações desenvolvidas nesse trabalho têm como intuito subsidiar e fomentar o ensino dos pontos notáveis no ensino médio não só do ponto de vista da geometria euclidiana plana, mas principalmente, do ponto de vista das coordenadas desses pontos.

Espero, com este trabalho, contribuir de alguma forma para no melhoramento ensino da Matemática, mais precisamente das Coordenadas dos Pontos Notáveis, visto que o ensino desse tema não é trabalhado no ensino médio.

## REFERÊNCIAS

- KIMBERLING, Clark. *Encyclopedia of Triangle Centers - ETC*. Disponível em: <<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>>. Acesso em: 17/02/2014.
- LIMA, E. L. *Geometria analítica e álgebra linear*. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.
- MORGADO, A.C. Coordenadas para os centros do triângulo. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, v.43, p. 26-30, 2000.
- MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana*. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v.2.
- UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE. *Site do Departamento de Matemática*. Disponível em: <<http://www.uff.br/trianglecenters/etcwc.html>>. Acesso em: 17/02/2014.